CHAPITRE II.

Notations. Propriétés relatives aux quatre règles, aux puissances, aux diviseurs et aux multiples des nombres; nombres premiers; plus grand commun diviseur; propriétés des facteurs et des diviseurs premiers.

§ Ier. *Notations et propriétés relatives aux quatre règles.*

33. Nous ferons souvent usage des *signes*

$+$	$-$	$\times$	$=$

qui signifient respectivement

plus	*moins*	*multiplié par*	*égale.*

Ainsi, l'expression $8-3+4\times6=29$,

est une *égalité* qui indique que

8 *moins* 3, *plus* 4 *multiplié par* 6, *égale* 29.

Pour effectuer le produit des facteurs 2, 3, 4, dans l'ordre indiqué par $2\times3\times4$, on multiplie d'abord 2 par 3, ce qui donne 6; et on multiplie ensuite 6 par 4; le résultat 24 est le produit demandé.

Lorsque nous voudrons indiquer que l'on regarde le produit de plusieurs facteurs comme effectué, de manière à mettre ces facteurs en évidence, nous placerons un point entre deux facteurs consécutifs quelconques.

Ainsi, $3.4.5$ indique le produit 60 des facteurs 3, 4, 5; et $2\times3.4.5$ exprime qu'on doit multiplier 2 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5. On indique aussi quelquefois le produit de 2 par $3.4.5$, de cette manière $2\times(3\times4\times5)$.

Nous représenterons quelquefois des nombres par des lettres, A, B, C, a, b, c, *etc.* Pour indiquer le produit de facteurs représentés par des lettres, nous écrirons ces facteurs à la suite les uns des autres; ainsi, ABC indiquera le produit des nombres A, B, C; et $7A$ désignera le produit de A par 7 ou 7 fois A. Pour désigner le produit d'une somme $A+B$, par C ou par $C+D$, on écrit $(A+B)C$ ou $(A+B)(C+D)$.

34. 1°. *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier toutes les parties de cette somme par ce nombre.*

Par exemple, la somme des nombres 2, 4, 8, étant 14, si l'on veut obtenir le produit de cette somme par 3, il suffira d'écrire 3 fois la somme $2+4+8$, et de faire l'addition; chacune des parties 2, 4, 8, sera donc répétée 3 fois; le produit de la somme 14 par 3, sera donc égal à la somme des produits des nombres 2, 4, 8, par 3.

Ainsi, $(2+4+8)3=2\times3+4\times3+8\times3$.

2°. *Pour former le produit de la somme de plusieurs nombres par la somme de plusieurs autres nombres (sans calculer ces sommes), il suffit de multiplier successivement chaque partie du multiplicande par chaque partie du multiplicateur; la somme des produits partiels forme le produit demandé.* Cela se déduit de (1°).

Par exemple, pour former le produit de $3+4$ par $5+7$, indiqué par $(3+4)(5+7)$, il faut prendre le multiplicande $3+4$, 5 fois plus 7 fois; or d'après (1°), le produit de $3+4$ par 5 est $3\times5+4\times5$, et le produit de $3+4$ par 7 est $3\times7+4\times7$. Le produit de $3+4$ par $5+7$, est donc $3\times5+4\times5+3\times7+4\times7$.

3°. On déduit de (2°) que *pour diviser une somme par un nombre, il suffit de diviser toutes les parties de cette somme par ce nombre.*

35. *Quand le nombre dont on veut soustraire un autre augmente ou diminue d'une certaine quantité, le reste éprouve la même augmentation ou la même diminution; mais au contraire quand le nombre à soustraire augmente ou diminue*

d'une certaine quantité, le reste diminue ou augmente de cette même quantité. Cela est évident.

Ainsi, la différence entre 7 et 4 étant 3, celle qui existe entre $7+5$ et 4 est $3+5$ ou 8.

On en déduit que *la différence entre deux nombres ne change pas, quand ils augmentent ou quand ils diminuent à la fois d'une même quantité.*

36. *Le produit de plusieurs nombres conserve la même valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

1°. Pour démontrer que *cette propriété convient à deux facteurs,* aux facteurs 4, 3, par exemple, nous observerons qu'on obtiendra toutes les unités qui composent le *produit de* 4 *par* 3, en écrivant 3 lignes horizontales de 4 unités chacune, comme il suit :

1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1.

Mais en comptant les unités de ce *tableau* par lignes verticales, il est formé de 4 lignes verticales de 3 unités chacune, c'est-à-dire de 4 fois 3 unités, ou du *produit de* 3 *par* 4. Les produits 4×3, 3×4, sont donc égaux. Ce qui démontre le principe énoncé (1°).

2°. Pour démontrer que *la propriété énoncée convient à trois facteurs,* aux facteurs 4, 3, 2, par exemple, il suffit de prouver qu'on ne change pas le produit en transposant les deux premiers facteurs 4, 3, ou les deux derniers facteurs 3, 2.

Or d'après (1°), les produits 4×3, 3×4, étant égaux, si on les multiplie par 2, les résultats $4\times3\times2$, $3\times4\times2$, seront nécessairement égaux. On peut donc changer l'ordre des deux premiers facteurs.

Pour démontrer qu'on peut changer l'ordre des deux derniers facteurs, nous écrirons deux lignes horizontales, composées chacune de 3 nombres égaux à 4, comme on le voit ici :

4, 4, 4,
4, 4, 4.

Dans ce *tableau,* chaque ligne horizontale contenant 3 fois 4 unités, ou 4×3 unités, les deux lignes horizontales qui le composent contiennent 2 fois 4×3 unités, ou $4\times3\times2$ unités.

Or, le même *tableau* peut être considéré comme formé de 3 lignes verticales, contenant chacune 2 fois 4 unités; c'est-à-dire qu'il est aussi composé de 4×2 unités répétées 3 fois, ou de $4\times2\times3$ unités.

Les produits $4\times3\times2$, $4\times2\times3$, sont donc égaux. On peut donc changer l'ordre des deux derniers facteurs.

3°. Enfin, pour faire voir que *le principe énoncé convient à un nombre quelconque de facteurs,* il suffit de prouver qu'on ne change pas la valeur du produit en transposant deux facteurs consécutifs quelconques.

Soit le produit $2\times6\times4\times3\times5\times8\times9\times7$.

Pour démontrer qu'il ne change pas de valeur quand on transpose les facteurs 3 et 5, on observe que le produit $2\times6\times4\times3\times5$ devant être effectué avant qu'on le multiplie par les facteurs 8, 9, 7, il suffit de prouver que

$$2\times6\times4\times3\times5=2\times6\times4\times5\times3;$$

Le produit 48 des facteurs 2, 6, 4, devant être formé avant qu'on le multiplie par les facteurs 3 et 5, la question se réduit à démontrer que $48\times3\times5=48\times5\times3$; et cette dernière égalité a nécessairement lieu, car nous venons de prouver (2°) que, dans le cas de trois facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

Il résulte de ce qui précède que, sans changer la valeur d'un produit, on peut faire occuper à chaque facteur toutes les places, en avançant successivement ce facteur d'un rang vers la droite ou vers la gauche; ce qui démontre le principe énoncé.

37. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier successivement par ces facteurs.* C'est-à-dire que la multiplication d'un nombre par le produit de plusieurs facteurs, se réduit à multiplier ce nombre par le 1er facteur; puis le résultat par le 2me facteur; et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs soient épuisés.

Je dis, par exemple, que pour multiplier 2 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5, il suffit de multiplier d'abord 2 par 3 ce qui donne 6 ; puis de multiplier 6 par 4, ce qui donne 24 ; et enfin de multiplier 24 par 5, ce qui donne 120 ; le résultat 120 exprime le produit de 2 par 60. En effet, il suit du principe du n° 36 (1°) que le produit de 2 par 60 est égal au produit de 60 par 2, ou à $3.4.5 \times 2$, ou à $3 \times 4 \times 5 \times 2$; et comme d'après le principe général du n° 36, le produit $3 \times 4 \times 5 \times 2$ est égal à $2 \times 3 \times 4 \times 5$, on en déduit que $2 \times 3.4.5$ est égal à $2 \times 3 \times 4 \times 5$; ce qui démontre la propriété énoncée.

Cette démonstration peut être indiquée de la manière suivante :

$2 \times 3.4.5 = 3.4.5 \times 2$ (n° 36, 1°) $= 3 \times 4 \times 5 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$ (n° 36).

Remarque. On en déduit que *le produit de plusieurs nombres contient tous les facteurs de ces nombres.*

Par exemple, le produit 210 de 6 par 35, contient les facteurs 2, 3 de 6, et les facteurs 5, 7, de 35 ; car

$$210 = 6 \times 35 = 2.3 \times 5.7 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

38. *Pour diviser un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de diviser successivement par ces facteurs.*

Cette propriété est une conséquence du principe du n° 37. Ainsi, pour diviser 120 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5, on peut d'abord diviser 120 par 3, ce qui donne 40 ; ensuite on divise 40 par 4, ce qui donne 10 ; enfin on divise 10 par 5, ce qui donne 2 ; ce dernier nombre exprime le quotient de 120 par 60.

39. *Lorsqu'un des facteurs d'un produit augmente ou diminue, le produit augmente ou diminue en même temps ;* et *lorsque le produit de deux facteurs augmente ou diminue, si l'un des facteurs ne change pas, il faut que l'autre facteur augmente ou diminue en même temps.* Cela est évident.

Par conséquent, lorsque le produit de deux facteurs ne changeant pas, l'un des facteurs augmente ou diminue, il faut que l'autre facteur diminue ou augmente.

* 40. *Lorsqu'on multiplie plusieurs facteurs d'un produit*

par des nombres, le produit des nouveaux facteurs qui en résultent est égal au résultat de la multiplication du produit des facteurs primitifs par le produit des nombres qui ont servi à multiplier les facteurs primitifs.

Par exemple, le produit des facteurs 2, 3, 5, étant 30, je dis que si l'on multiplie les facteurs 2, 5, respectivement par 7 et par 4, le produit des nouveaux facteurs $2.7, 3, 5.4$, sera égal à 30×7.4 ; car, les propriétés des n^{os} 36 et 37 donnent

$$2.7 \times 3 \times 5.4 = 2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 4 = 2.3.5 \times 7.4 = 30 \times 7.4.$$

Réciproquement, *lorsqu'on divise des facteurs d'un produit par des nombres, le produit des nouveaux facteurs qui en résultent est égal au quotient de la division du produit primitif par le produit des nombres qui ont servi à diviser les facteurs primitifs.* Cette propriété se déduit de la précédente.

* 41. Lorsque l'un des deux facteurs d'un produit devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, le produit devient le même nombre de fois plus grand ou plus petit (n° 40). Par conséquent, lorsque le produit de deux facteurs devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, si l'un des facteurs ne change pas, il faut que l'autre facteur devienne le même nombre de fois plus grand ou plus petit ; et lorsque le produit ne changeant pas, un des deux facteurs devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, il faut par compensation que l'autre facteur devienne au contraire le même nombre de fois plus petit ou plus grand.

42. 1°. *Dans toute division, le quotient est d'autant plus grand que le dividende est plus grand et que le diviseur est plus petit ; le quotient est d'autant plus petit que le dividende est plus petit et que le diviseur est plus grand.*

2°. *Quand le dividende devient un certain nombre de fois plus grand, si le diviseur ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus grand ; et quand le diviseur devient un certain nombre de fois plus grand, si le dividende ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus petit. Quand le dividende devient un certain nombre de fois plus petit, si le diviseur ne change pas, le quotient de-*

vient le même nombre de fois plus petit; et quand le diviseur devient un certain nombre de fois plus petit, si le dividende ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus grand.

3°. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas.* Cela résulte de (2°).

Ces propriétés sont évidentes. On peut d'ailleurs les déduire des principes des nos **39** et **41**, en observant que le diviseur multiplié par le quotient doit être égal au dividende.

43. *Lorsque le dividende augmente ou diminue d'un certain nombre de fois le diviseur, la partie entière du quotient augmente ou diminue du même nombre de fois l'unité, mais le reste de la division ne change pas;* car la partie entière du quotient indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Remarque. Lorsque le dividende augmente ou diminue d'un multiple du diviseur, le reste de la division ne change pas.

44. *Lorsqu'après avoir multiplié le dividende et le diviseur par un nombre entier* N, *on divise les produits l'un par l'autre, la partie entière du quotient ne change pas, mais le reste de cette nouvelle division est égal au reste de la division précédente multiplié par* N. C'est-à-dire, que si la division de A par B a donné le quotient entier Q et le reste R, la division de AN par BN fournirait le même quotient entier Q et le reste RN.

En effet; le principe du n° **27**, donne $A = BQ + R$.

Si l'on multiplie la somme A, et ses deux parties BQ, R, par N, les propriétés des nos **34** (1°), **36** et **37** donneront

$$AN = BQN + RN = BNQ + RN = BN \times Q + RN.$$

Or, dans la 1re division le reste R est moindre que le diviseur B; RN est donc moindre que BN; la division de AN par BN, ou de $BN \times Q + RN$ par BN, donnera donc le quotient entier Q et le reste RN moindre que le diviseur BN. Ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, la division de 68 par 9 donnant le quotient entier 7 et le reste 5, la division de 68×3 par 9×3 donnera le même quotient entier 7 et le reste 5×3.

45. *Quand les facteurs d'un produit sont terminés par des zéro, on peut abréger l'opération en effectuant la multiplication sans avoir égard à ces zéro, que l'on place ensuite à la droite du résultat.*

Cette propriété se déduit de la règle générale du n° **20**.

Par exemple, pour trouver le produit de 54000 par 3200, il suffit de multiplier 54 par 32, ce qui donne 1728; et de mettre sur la droite de 1728 tous les zéro qui terminent les facteurs donnés; le résultat 172800000 est le produit demandé.

46. *Lorsqu'un nombre est terminé par des zéro, pour le diviser par* 10, *ou par* 100, *etc., il suffit de supprimer sur sa droite, un zéro, ou deux zéro, etc.*

Par exemple, pour diviser 4800000 par 100, il suffit de supprimer deux zéro sur la droite de 4800000; car 4800000 étant le produit de 48000 par 100 (n° **19**, 2°), le quotient de 4800000 par 100 est 48000.

47. Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéro, on peut simplifier la division en supprimant d'abord un même nombre de zéro sur la droite du dividende et du diviseur; car cette suppression revient à diviser le dividende et le diviseur par un même nombre (n° **46**), ce qui ne change pas le quotient (n° **42**, 3°).

***48.** *Le produit de plusieurs nombres contient autant de chiffres au plus qu'il y en a dans tous les facteurs; le nombre des chiffres du produit n'est jamais moindre que le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs et augmenté d'une unité.* En effet :

1°. Chaque facteur étant moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans ce facteur, le produit est moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans tous les facteurs (n° **45**); ce produit ne peut donc pas renfermer plus de chiffres qu'il n'y en a dans tous les facteurs.

2°. Chaque facteur ne saurait être moindre que l'unité suivie d'autant de zéro moins un, qu'il y a de chiffres dans ce facteur ; le produit ne peut donc pas être moindre que l'unité suivie d'un nombre de zéro marqué par le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs.

* **49.** Il est facile de *déterminer le nombre des chiffres de la partie entière du quotient, sans effectuer la division.* En effet; d'après la règle du n° 28, le 1er dividende partiel fournit le 1er chiffre à gauche du quotient, et en abaissant successivement chacun des autres chiffres du dividende sur la droite de chaque reste, on forme les dividendes partiels qui fournissent les autres chiffres du quotient; de sorte que chacun des chiffres du dividende qui suivent le 1er dividende partiel, détermine un chiffre du quotient ; d'ailleurs le 1er dividende partiel contient nécessairement autant de chiffres que le diviseur, ou un chiffre de plus. Par conséquent, *lorsque le 1er dividende partiel contient un chiffre de plus que le diviseur, le nombre des chiffres de la partie entière du quotient est égal à la différence entre le nombre des chiffres du dividende et le nombre des chiffres du diviseur ; quand le 1er dividende partiel contient autant de chiffres que le diviseur, le nombre des chiffres de la partie entière du quotient est égal à la même différence augmentée d'un.*

§ II. *Des puissances.*

50. *Lorsque tous les facteurs d'un produit sont égaux à un nombre donné, le produit est ce qu'on nomme une* PUISSANCE *de ce nombre donné ;* et afin de distinguer les diverses puissances d'un même nombre, on dit *deuxième puissance, troisième puissance, quatrième puissance, etc.,* suivant que le nombre des facteurs égaux, est égal à 2, ou à 3, ou à 4, etc. Ainsi, la troisième puissance de 2 est le produit 8 de 3 facteurs égaux à 2.

Pour indiquer une puissance d'un nombre donné, on place à la droite de ce nombre et un peu au-dessus, le nombre qui marque combien de fois le nombre donné doit être pris comme facteur. Ainsi, 2^3 désigne la troisième puissance de 2 ; le nom-

bre 3 se nomme *l'exposant* de 2 ; et on dit que 3 est *l'exposant de la puissance.*

REMARQUE. *Tout nombre qui n'a pas d'exposant est censé affecté d'un exposant égal à l'unité.* Ainsi, 2^1 est égal à 2, et on dit que la *première puissance* de 2 est 2. En général, *la première puissance d'un nombre est égale à ce nombre.*

Le produit d'un nombre donné par lui-même, ou la *deuxième puissance* de ce nombre donné, se nomme aussi le *carré* du nombre donné ; et le nombre qui multiplié par lui-même donne un certain produit se nomme la *racine deuxième,* ou la *racine carrée* de ce produit. Ainsi, le produit 9 de 3 par 3 est la deuxième puissance ou le carré de 3 ; et 3 est la racine deuxième ou la racine carrée de 9.

Pour indiquer la racine carrée d'un nombre, on place ce nombre sous le signe $\sqrt{}$ nommé *radical.* Ainsi, $\sqrt{9}$ désigne la racine carrée de 9.

51. *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre donné est égal à ce nombre donné affecté d'un exposant égal à la somme des exposans du nombre donné dans les différens facteurs.* Cette propriété résulte de la remarque du n° 37.

Par exemple, le produit de 2^3 par 2^4 est 2^7 ; car

$$2^3 \times 2^4 = 2.2.2 \times 2.2.2.2 = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7.$$

1re REMARQUE. Pour élever à une puissance un nombre affecté d'un exposant, il suffit de multiplier l'exposant de ce nombre par l'exposant de la puissance.

Par exemple, la troisième puissance de 2^4, indiquée par $(2^4)^3$, est $2^{4\times 3}$ ou 2^{12} ; car

$$(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{4\times 3} = 2^{12}.$$

2e REMARQUE. *Quand des facteurs d'un produit renferment plusieurs puissances d'un même nombre, il suffit d'écrire une seule fois ce nombre, dans le produit, et de lui donner pour exposant la somme des exposans dont ce nombre est affecté dans les facteurs.*

Ainsi, le produit de $2^3 \times 5^2$ par $2^8 \times 5^6$ est $2^{11} \times 5^8$; car il résulte des principes précédens, que ce produit est égal à