$2^3 \times 5^2 \times 2^8 \times 5^6$ (n° **37**), ou à $2^3 \times 2^8 \times 5^2 \times 5^6$ (n° **36**), ou au produit de $2^3 \times 2^8$ par $5^2 \times 5^6$ (n° **37**), ou enfin au produit de 2^{11} par 5^8 (n° **51**).

Cette démonstration peut être indiquée de la manière suivante :

$$2^3 . 5^2 \times 2^8 . 5^6 = 2^3 \times 5^2 \times 2^8 \times 5^6 \text{ (n° 37)} = 2^3 \times 2^8 \times 5^2 \times 5^6 \text{ (n° 36)}$$
$$= 2^3 . 2^8 \times 5^2 . 5^6 \text{ (n° 37)} = 2^{11} \times 5^8 \text{ (n° 51)}.$$

3ᵉ REMARQUE. *Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.*

Par exemple, la troisième puissance de 2×5, indiquée par $(2 \times 5)^3$, devant se composer de trois facteurs égaux à 2×5, il suit des principes des nᵒˢ **36** et **37** que l'on a

$$(2.5)^3 = 2.5 \times 2.5 \times 2.5 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^3.$$

D'après ce principe, la troisième puissance de $2^4 \times 5^2$, indiquée par $(2^4 \times 5^2)^3$, est $(2^4)^3 \times (5^2)^3$ ou $2^{12} \times 5^6$ (1ʳᵉ *remarque*).

52 *Dans la division de deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre, le quotient est égal à ce nombre affecté d'un exposant égal à l'exposant du dividende diminué de l'exposant du diviseur;* car le dividende pouvant être considéré comme le produit du diviseur par le quotient, il résulte du principe du n° **51**, que l'exposant du nombre donné dans le dividende, est égal à l'exposant du diviseur augmenté de l'exposant du quotient.

Ainsi, le quotient de 2^7 par 2^3 est 2^4; et en effet, le produit du diviseur 2^3 par le quotient 2^4 est égal au dividende 2^7.

1ʳᵉ REMARQUE. *Quand le dividende et le diviseur renferment des puissances d'un même nombre, l'exposant de ce nombre dans le quotient s'obtient en retranchant l'exposant du diviseur de celui du dividende.*

Ainsi, le quotient de $2^{11} \times 5^8$ par $2^3 \times 5^2$ est $2^8 \times 5^6$; car d'après la 2ᵉ remarque du n° **51**, le diviseur $2^3 \times 5^2$ multiplié par le quotient $2^8 \times 5^6$, reproduit le dividende $2^{11} \times 5^8$.

En général : *Lorsque le dividende et le diviseur sont décomposés en facteurs, on obtient le quotient en supprimant dans le dividende tous les facteurs du diviseur.*

Ainsi, le quotient de

$$2^5 \times 3^7 \times 5^8 \times 7^{10} \times 13 \text{ par } 2 \times 3^7 \times 5^2 \times 7 \text{ est } 2^4 \times 5^6 \times 7^9 \times 13.$$

2ᵉ REMARQUE. Les diverses propriétés du n° **52**, supposent que les exposans des puissances d'un même nombre sont plus grands dans le dividende que dans le diviseur. Nous verrons dans le n° **98**, comment on opère lorsque cette condition n'est pas remplie.

53. Les puissances successives de la *base* 10, indiquées par 10, 10^2, 10^3, etc., ayant pour valeurs 10, 100, 1000, etc., on voit que *toute puissance de* 10 *est égale à l'unité suivie d'un nombre de zéro marqué par l'exposant de* 10 *dans cette puissance.* Ainsi, 10^m est égal à l'unité suivie de *m* zéro.

REMARQUE. Dans notre système de numération, les valeurs 10, 100, 1000, etc., des unités des différens ordres, sont les puissances successives 10^1, 10^2, 10^3, etc., de la *base* 10.

§ III. *Propriétés des diviseurs et des multiples d'un nombre. Déterminer le reste de la division d'un nombre par un des diviseurs* 10, 100, 1000,...., 2, 5, 2^2, 5^2, 2^3, 5^3,..., 9, 3, 11. *Reconnaître si un nombre admet un de ces diviseurs. Preuves par* 9 *et par* 11.

54. Les diviseurs et les multiples d'un nombre jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Quand plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme admet le même diviseur.*

En effet, chacun des nombres donnés étant égal au diviseur commun répété un *nombre entier de fois* (c'est-à-dire 2 fois ou 3 fois, ou etc.), leur *somme* sera égale au diviseur commun pris autant de fois qu'il se trouve dans tous les nombres donnés; cette somme sera donc égale au diviseur commun pris un nombre entier de fois; elle sera donc divisible par le diviseur commun aux nombres donnés.

Par exemple, les nombres 12, 15, 21, étant divisibles par 3 leur somme 48 est nécessairement divisible par 3; car il résulte des égalités $12 = 4$ *fois* 3, $15 = 5$ *fois* 3, $21 = 7$ *fois* 3, que la somme des nombres 12, 15, 21, est formée de 3 répété 4 fois + 5 fois + 7 fois, c'est-à-dire de 3 répété 16 fois.

2°. *Lorsque deux nombres ont un diviseur commun, leur différence admet le même diviseur;* car chacun des deux nombres donnés étant égal au diviseur commun répété un nombre entier de fois, leur différence sera égale au diviseur commun pris autant de fois qu'il se trouve dans le plus grand des deux nombres donnés, moins le nombre de fois qu'il est contenu dans le plus petit de ces deux nombres donnés; cette différence sera donc égale au diviseur commun pris un nombre entier de fois; elle sera donc divisible par le diviseur commun aux deux nombres donnés.

Ainsi, les nombres 27, 15, étant divisibles par 3, leur différence 12 doit être divisible par 3; car il résulte des égalités,

$$27 = 9 \textit{ fois } 3, \quad 15 = 5 \textit{ fois } 3,$$

que $27 - 15$ ou 12 se compose du diviseur commun 3, répété 9 fois moins 5 fois, c'est-à-dire de 3 répété 4 fois.

3°. *La somme de plusieurs multiples d'un nombre donné est un multiple de ce nombre donné, et la différence de deux multiples d'un nombre donné est aussi un multiple de ce nombre donné;* cela se déduit de (1°) et (2°) en observant que tout multiple d'un nombre est divisible par ce nombre.

4°. *Lorsque l'on combine plusieurs multiples d'un nombre par voie d'addition et de soustraction, le résultat est un multiple du même nombre.* Cela résulte de (3°).

5°. *Tout multiple d'un nombre admet les diviseurs de ce nombre*, ou en d'autres termes, *tout nombre divisible par un autre, est aussi divisible par chacun des facteurs de ce dernier nombre.* Cela résulte de (1°), en observant que tout multiple d'un nombre donné exprime la somme de plusieurs nombres égaux à ce nombre donné.

Par exemple, 30 étant divisible par 6, les facteurs 2, 3, de 6, doivent aussi diviser 30; car on a,

$$30 = 6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6,$$

et d'après (1°), chacun des diviseurs 2, 3, de 6, doit diviser la somme 30 des nombres 6, 6, 6, 6, 6.

6°. *Lorsqu'un nombre ne divise pas un autre nombre, aucun multiple du premier nombre ne saurait diviser le deuxième nombre.* Cette propriété se déduit de (5°).

Ainsi, 6 ne divisant pas 70, le multiple 30 de 6, ne saurait diviser 70; car d'après (5°), si 30 divisait 70, le facteur 6 de 30 diviserait 70, ce qui est contre l'hypothèse.

7°. *Quand une somme, composée de deux parties, et l'une de ces parties, ont un diviseur commun, l'autre partie admet nécessairement le même diviseur.* En effet; puisque la *somme* et la 1re partie ont un diviseur commun, il résulte de (2°) que la *différence* entre la somme et la 1re partie, admet le même diviseur; et comme cette *différence* exprime la 2e partie de la somme, le principe est démontré.

Par exemple, la somme 35 des nombres 20 et 15, étant divisible par 5, et la 1re partie 20 étant aussi divisible par 5, la 2e partie 15, qui exprime la différence entre 35 et 20, sera nécessairement divisible par 5.

8°. *Quand une somme est composée de deux parties dont l'une est divisible par un nombre et dont l'autre n'admet pas ce diviseur, la somme proposée n'est pas divisible par ce diviseur;* car si elle l'était, comme la 1re partie admet ce diviseur, la 2e partie serait divisible par ce diviseur (7°); ce qui est contre l'hypothèse.

Par exemple, 6 divisant 24 et ne divisant pas 7, la somme 31 des nombres 24 et 7, ne saurait être divisible par 6.

9°. *Un nombre n'admet jamais un diviseur plus grand que sa moitié.* En effet, puisqu'en divisant un nombre par sa moitié le quotient est 2, si l'on divise un nombre par un autre plus grand que sa moitié, le quotient sera moindre que 2 (n° 42, 1°); ce quotient ne sera donc pas un nombre entier.

55. Nous allons *déterminer le reste de la division d'un nombre par une puissance de* 10, *sans effectuer la division.*

1°. *Le reste de la division d'un nombre par* 10 *est exprimé par le premier chiffre à droite de ce nombre;* car tout nombre plus grand que 10 est décomposable en deux parties dont l'une (terminée par un zéro) est divisible par 10 (n° **46**), et dont l'autre (toujours moindre que 10) est le premier chiffre à droite du nombre donné.

Par conséquent : *Pour qu'un nombre soit divisible par* 10, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit un zéro.*

2°. *Le reste de la division d'un nombre par* 100 *ou par* 10^2 *est égal au nombre formé par les deux premiers chiffres à droite du dividende.* Car tout nombre plus grand que 100 est décomposable en deux parties, dont l'une (terminée par deux zéro) est divisible par 100 (n° **46**), et dont l'autre (formée par les deux premiers chiffres à droite du nombre donné) est moindre que le diviseur 100.

Ainsi, le reste de la division de 34 768 par 100 est 68; car

$$34\,768 = 34\,700 + 68 = 347 \times 100 + 68.$$

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 100 *ou par* 10^2, *il faut et il suffit que ses deux premiers chiffres à droite soient des zéro.*

Et ainsi de suite, pour les autres puissances de 10.

56. Nous allons donner le moyen de *déterminer le reste de la division d'un nombre par une puissance quelconque de l'un des facteurs* 2, 5, *de* 10, *sans effectuer la division.*

1°. *Le reste de la division d'un nombre par* 2 *est le même que celui de la division de son premier chiffre à droite par* 2. Car, tout nombre est décomposable en deux parties, dont l'une (terminée par un zéro) étant divisible par 10, admet nécessairement le diviseur 2 de 10 (n° **54**, 5°), et dont l'autre est le chiffre des unités.

Par exemple, 587 est un multiple de 2 augmenté de 7, car

$$587 = 580 + 7 = 58 \times 10 + 7 = 58 \times 5 \times 2 + 7.$$

Le reste de la division de 587 par 2 est donc le même que celui de 7 par 2; ce reste est 1.

Par conséquent : *Pour qu'un nombre soit divisible par* 2, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit divisible par* 2, *ou soit un zéro; ce qui exige que le chiffre des unités soit* 0, *ou* 2, *ou* 4, *ou* 6, *ou* 8.

Remarque. Les nombres divisibles par 2 s'appellent *nombres pairs*, et les nombres qui ne sont pas divisibles par 2 sont dits *impairs.* De sorte que la suite des *nombres naturels*,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.,

est composée des *nombres pairs*, 2, 4, 6, 8, 10, 12, etc., et des *nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc.

2°. *Le reste de la division d'un nombre par* 5 *est le même que celui de la division de son premier chiffre à droite par* 5.

Cette propriété se démontre comme la précédente.

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 5, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit divisible par* 5, *ou soit un zéro; ce qui exige que le chiffre des unités soit un* 5 *ou un zéro.* Les seuls nombres divisibles par 5, sont donc, 10, 15, 20, 25, 30, etc.

3°. On prouvera d'une manière semblable que *le reste de la division d'un nombre par* 2^2 *ou par* 5^2 *est le même que le reste de la division par* 2^2 *ou par* 5^2, *du nombre formé par les deux premiers chiffres à droite du dividende;* que *le reste de la division d'un nombre par* 2^3 *ou par* 5^3 *est le même que le reste de la division par ce diviseur du nombre exprimé par les trois premiers chiffres à droite du dividende;* et *ainsi de suite pour les autres puissances des facteurs* 2, 5, *de* 10.

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 2^2 *ou par* 5^2, *c'est-à-dire par* 4 *ou par* 25, *il faut et il suffit que le nombre formé par les deux premiers chiffres à droite soit divisible par* 4 *ou par* 25; *pour qu'un nombre soit divisible par* 2^3 *ou par* 5^3, *c'est-à-dire par* 8 *ou par* 125, *il faut et il suffit que le nombre formé par les trois premiers chiffres à droite soit divisible par* 8 *ou par* 125; *et ainsi de suite.*

57. *Pour trouver le reste que donnerait la division d'un nombre* N *par* 9, *sans effectuer cette division, on fait la somme des chiffres du nombre* N. *Quand cette somme est moindre que*

9, *elle exprime le reste cherché ; lorsqu'elle est égale à* 9, *le reste est zéro ; quand cette somme surpasse* 9, *on opère sur elle comme sur le nombre donné* N, *en additionnant les chiffres de la somme ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une somme qui n'excède pas* 9 ; *lorsque cette dernière somme est moindre que* 9, *elle exprime le reste cherché ; quand elle est égale à* 9, *le reste est zéro, de sorte que le nombre donné est exactement divisible par* 9.

Pour démontrer ces propriétés, nous observerons d'abord que l'unité suivie de plusieurs zéro, est un multiple de 9 augmenté de 1 ; car, d'après notre système de numération, on a

$10=9+1,\ 100=99+1=11\times9+1,\ 1000=999+1=111\times9+1$; etc.

On en déduit que *tout chiffre significatif suivi de plusieurs zéro, exprime un multiple de* 9 *augmenté de ce chiffre.*

Par exemple, 1000 étant un multiple de 9 augmenté de 1, le produit 7000 de 1000 par 7, sera composé de 7 fois ce multiple de 9 augmenté de 7 fois 1, c'est-à-dire d'un multiple de 9 augmenté de 7.

Un nombre quelconque étant égal à la somme des nombres exprimés par ses différens chiffres, et chaque chiffre significatif exprimant, par sa position, un multiple de 9 augmenté de ce chiffre, il en résulte que tout nombre est égal à la somme de plusieurs multiples de 9 augmentée de la somme des chiffres significatifs de ce nombre ; et comme la somme de plusieurs multiples de 9 est aussi un multiple de 9 (34, 3°), on voit qu'*un nombre quelconque est un multiple de* 9 *augmenté de la somme de ses chiffres significatifs.*

Par exemple, le nombre $357 = 300 + 50 + 7$.

Or, d'après ce qui vient d'être démontré, 300 est un multiple de 9 augmenté de 3, et 50 est un multiple de 9 augmenté de 5. Le nombre 357 est donc composé de deux multiples de 9 augmentés de $3 + 5 + 7$; c'est-à-dire que 357 est un multiple de 9 augmenté de la somme 15 des chiffres 3, 5 et 7.

Tout nombre N étant un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs, le reste de la division de N par 9 est le même que celui de la somme des chiffres significatifs de N par 9 (n° 43).

Par conséquent : si cette somme est moindre que 9, elle exprime le reste de la division de N par 9 ; si elle est égale à 9, le nombre N est un multiple de 9, de sorte que le reste de la division de N par 9 est zéro ; et enfin, si elle surpasse 9, il suffit, pour trouver le reste cherché, d'opérer sur cette somme, comme on a opéré sur N.

La propriété énoncée se trouve ainsi démontrée.

Par exemple, 35 070 étant un multiple de 9 augmenté de la somme 15 des chiffres 3, 5, 7, le reste de la division de 35 070 par 9 est le même que celui de la division de 15 par 9 (n° 43). Mais, 15 est un multiple de 9 augmenté de la somme 6 des chiffres 1 et 5 ; 30 570 est donc un multiple de 9 augmenté de 6 ; le reste de la division de 35 070 par 9 est donc 6.

1re Remarque. Dans la recherche du reste de la division d'un nombre N, par 9, on peut omettre tous les chiffres 9 qui se trouvent dans N ; car ces chiffres expriment des multiples de 9.

D'après ce qui précède : *Pour qu'un nombre soit divisible par* 9, *il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de* 9.

58 *Pour obtenir le reste* R *que donnerait la division d'un nombre* N *par* 3, *sans effectuer la division, on forme la somme* S *des chiffres de* N ; *quand cette somme est moindre que* 3, *elle exprime* R ; *quand* S *est un des multiples* 3, 6, 9, *de* 3, *le reste* R *est nul ; quand la somme* S *est un des nombres* 4, 5, 7, 8, *on la diminue du plus grand multiple de* 3 *qui peut y être contenu ; le résultat de la soustraction exprime* R. *Enfin, lorsque* S *surpasse* 9, *on ramène ce cas à l'un des précédens en ajoutant les chiffres de* S ; *si la nouvelle somme surpasse* 9, *on additionne ses chiffres ; et on continue à ajouter les chiffres de chaque somme ainsi obtenue jusqu'à ce qu'on parvienne à une dernière somme qui n'excède pas* 9 ; *cette dernière somme diminuée du plus grand multiple de* 3 *qui peut y être contenu, exprime* R. *Dans l'addition des chiffres significatifs, on peut omettre les multiples* 3, 6, 9, *du diviseur* 3.

En effet, on a démontré (n° 57), que tout nombre est un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs; d'ailleurs, 3 divisant 9, tout multiple de 9 est un multiple de 3; un nombre quelconque est donc un multiple de 3 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs; et par conséquent, le reste de la division d'un nombre par 3 est le même que celui de la somme de ses chiffres significatifs par 3 (n° 45). On en déduit la règle énoncée.

Ainsi, pour obtenir le reste de la division de 536 902 607 par 3, on forme la somme 14 des chiffres 5, 2, 7; la somme 5, des chiffres 1, 4, diminuée de 3, donne le reste 2 de la division de 536 902 607 par 3.

REMARQUE. *Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.*

59. *Pour obtenir le reste R de la division d'un nombre N par 11, sans effectuer la division, on calcule deux sommes : l'une des chiffres de rang impair à partir de la droite, l'autre des chiffres de rang pair. De la première somme, augmentée s'il est nécessaire d'un multiple de 11, on retranche la seconde somme. Quand le reste de cette soustraction est moindre que 11, il exprime R. Quand le reste de la soustraction n'est pas moindre que 11, on opère sur ce reste de la même manière qu'on l'avait fait sur N; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste moindre que 11; ce dernier reste exprime R. Quand le dernier reste est zéro, le nombre proposé est divisible par 11.* En effet,

1°. Les unités de rang impair, à partir du troisième ordre, ont pour valeurs, 100, 10000, 1000 000, etc., et on a

$100=99+1$, $10\,000=9999+1$, $1\,000\,000=999\,999+1$, etc.

Or, 99 étant divisible par 11, les nombres 9 999, 999 999, etc., composés d'un nombre pair de 9, sont nécessairement divisibles par 11; et comme, d'après la relation $1=0\times 11+1$, chaque unité du premier ordre peut être considérée comme un multiple de 11 augmenté de 1, on voit que *toutes les unités de rang impair expriment des multiples de 11 augmentés de 1.*

2°. Les unités de rang pair, à partir du 4ᵉ ordre, ont pour valeurs respectives 1000, 100 000, etc.; c'est-à-dire 100×10, $10\,000\times 10$, etc.; on trouvera donc leurs valeurs sous une forme analogue à celle qui a été obtenue (1°) pour les unités de rang impair, en multipliant par 10 les égalités

$100=99+1$, $10\,000=9999+1$, etc.; ce qui donne

$1000=990+10$, $100\,000=99990+10$, etc., (n° 34, 1°).

Or, $10=11-1$. On a donc

$10=11-1$, $1\,000=990+11-1$, $100\,000=99990+11-1$, etc;

et comme, d'après ce qu'on a vu (1°), les nombres 990, 99990, etc., sont divisibles par 11, *toutes les unités de rang pair expriment des multiples de 11 diminués de 1.*

Cela posé : chacune des unités d'un chiffre de rang impair ayant pour valeur un multiple de 11 augmenté de 1, il en résulte que tout chiffre significatif de rang impair exprime, par sa position, un multiple de 11 augmenté de ce chiffre.

De même, chacune des unités d'un chiffre de rang pair ayant pour valeur un multiple de 11 diminué de 1, il en résulte que tout chiffre significatif de rang pair exprime, par sa position, un multiple de 11 diminué de ce chiffre.

On déduit de ces deux dernières propriétés, que tout nombre N est un multiple de 11 augmenté de la somme A des chiffres de rang impair, et diminué de la somme B des chiffres de rang pair. Car les nombres exprimés par les chiffres de rang impair étant des multiples de 11 augmentés respectivement de ces chiffres, le nombre exprimé par l'ensemble des chiffres de rang impair est composé de la somme de ces multiples de 11 augmentée de A; ce qui revient à un multiple de 11, augmenté de A. Par une raison semblable, le nombre exprimé par la totalité des chiffres de rang pair est un multiple de 11 diminué de la somme B de ces chiffres. Ajoutant ces deux parties du nombre N, on voit que la réunion des chiffres de rang impair et de rang pair de N compose un multiple de 11 augmenté de A et diminué de B.

Quand la somme A des chiffres de rang impair n'est pas moindre que la somme B des chiffres de rang pair, on peut retrancher la seconde somme de la première, et le nombre N est un multiple de 11 augmenté de la différence A—B entre ces deux sommes ; le reste de la division de cette différence par 11, est donc le même que celui de la division de N par 11, (nº 43).

Lorsque A est moindre que B, on ramène ce cas au précédent en augmentant A d'un multiple convenable de 11 ; car cela revient à ajouter ce multiple de 11 à N, ce qui ne change pas le reste de la division par 11 (nº 43).

La règle énoncée se déduit de ce qui précède.

D'après cette règle, le reste de la division de 62 410 par 11, est 0+4+6 diminué de 1+2, ou 7 ; celui de la division de 6241 par 11 est 1 + 2 + 11 diminué de 4 + 6, ou 4 ; le reste de la division de 827 081 920 par 11 est 9 + 8 + 7 + 8 diminué de 2 + 1 + 2, ou 32 — 5, ou 27, ou 7 — 2, ou 5.

Pour qu'un nombre soit divisible par 11, il faut et il suffit que la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair soit un multiple de 11, ou soit zéro ; car il suit de la règle précédente, que le reste de la division de ce nombre par 11 est zéro.

* **60.** *Lorsqu'on divise deux nombres et leur produit par un même nombre, on obtient trois restes ; le produit des deux premiers restes, s'il est moindre que le diviseur, est égal au troisième reste ; et s'il n'est pas moindre que le diviseur, en le diminuant du plus grand multiple du diviseur qui y est contenu, le résultat est égal au troisième reste.*

Pour fixer les idées, considérons les nombres 31, 65, et le diviseur 9 ; les restes des divisions des nombres 31, 65, par 9, étant 4 et 2 (nº 57),

31 est un multiple de 9 augmenté de 4,
et 65 est un multiple de 9 augmenté de 2.

Or, d'après le principe du nº 54 (2º), le produit de 31 par 65 est composé des quatre produits partiels de chacune des deux parties du multiplicande par chacune des deux parties du multiplicateur ; c'est-à-dire du produit de deux multiples de 9, de deux fois un multiple de 9, de quatre fois un multiple de 9

et de 2 fois 4 ; la somme de ces quatre produits, qui exprime le produit de 31 par 65, est donc un multiple de 9 augmenté de 2 fois 4 (nº 54,3º) ; et en effet, le produit de 31 par 65 est 2015, et le reste de la division de 2015 par 9 est 2 + 1 + 5, ou 8, ou 4 × 2.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à des nombres quelconques, le principe énoncé est démontré.

* **61.** Les propriétés des nºs 57, 59 et 60, conduisent à une méthode fort simple pour faire la *preuve de la multiplication et de la division par 9 et par 11.*

Dans la *preuve de la multiplication par 9*, on cherche les restes des divisions du multiplicande, du multiplicateur et du produit par 9 ; le produit des deux premiers restes, diminué du plus grand multiple du diviseur qui peut y être contenu, doit être égal au troisième reste. Quand cette condition n'est pas remplie, on a commis des fautes de calcul.

La *preuve de la multiplication par 11*, s'exécute d'une manière semblable.

Exemple. *On propose de vérifier si 472878 est le produit de 567 par 834.*

Pour faire la *preuve par 9*, on cherche les restes des divisions par 9 des nombres 567, 834, 472 878 ; ces restes sont 0, 6 et 0 ; le produit 0 des deux premiers restes étant égal au troisième, la preuve n'indique aucune faute de calcul.

Pour faire la *preuve par 11*, on cherche les restes 6, 9, 10, des divisions par 11 des nombres 567, 834, 472 878 ; le produit 54 des deux premiers restes diminué de 11 × 4, étant égal au troisième reste 10, la preuve par 11 n'indique aucune faute de calcul.

Remarque. Le reste de la division d'un nombre par 9 ne changeant pas quand ce nombre augmente ou diminue d'un multiple de 9 (nº 43), il en résulte que lorsque des fautes de calcul sont telles que l'erreur totale commise dans le résultat d'une multiplication est un multiple de 9, la preuve par 9 n'indique pas cette erreur.

Par exemple, si, en multipliant 47 par 12, on trouvait