2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.

Mais, les caractères relatifs à la divisibilité des nombres (nos 54, 56, 58, 59), fournissent le moyen d'éviter beaucoup d'essais inutiles. En effet :

Un nombre n'admettant aucun diviseur plus grand que sa moitié (n° 54, 9°), les nombres 2, 3, ne sauraient admettre un diviseur plus grand que l'unité ; ils sont donc premiers.

Les nombres pairs étant divisibles par 2 (n° 56, 1°), on ne doit chercher les nombres premiers plus grands que 3 que parmi les *nombres impairs* 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, etc. ; et on est certain qu'aucun de ces derniers nombres n'est divisible par 2; il suffira donc d'essayer des diviseurs plus grands que 2.

Le nombre 5 est premier ; car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 2 (n° 54, 9°), et 2 ne pas divise 5.

Le nombre 7 est premier, car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 3 (n° 54, 9°), et 3 ne divise pas 7 (n° 58).

Le nombre 9 n'est pas premier, car il est divisible par 3.

Les nombres premiers moindres que 10, sont donc 2, 3, 5, 7.

Le nombre 11 est premier, car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 5 (n° 54, 9°) ; aucun des nombres 2, 3, 5, ne divise 11 (nos 56 et 58) ; et 2 ne divisant pas 11, le multiple 4 de 2 ne saurait diviser 11 (n° 54, 6°).

Les nombres premiers plus grands que 11, ne peuvent donc se trouver que parmi les nombres impairs

13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, etc.

Si l'on supprime parmi ces nombres impairs tous ceux qui admettent un des diviseurs premiers 3, 5, 11 (nos 56, 58, 59), on verra que les nombres premiers plus grands que 11, ne peuvent se trouver que parmi les nombres impairs

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.,

et aucun de ces nombres ne sera divisible par un des nombres premiers 2, 3, 5, 11 ; ni à plus forte raison par aucun des multiples 4, 6, 10, 22, etc., de ces nombres premiers (n° 54, 6°).

Le nombre 13 est premier. Car, il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 6 (n° 54, 9°) ; et on sait d'avance qu'il n'admet aucun des diviseurs 2, 3, 4, 5, 6.

Le nombre 17 est premier. Car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 8 ; on sait d'avance qu'il n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 8 ; et on reconnaît, à l'aide de la division, que 7 ne divise pas 17.

On verra d'une manière semblable, en essayant seulement la division par 7, que 19 et 23 sont des nombres premiers.

On reconnaîtra de même, en essayant la division par 7 et par 13, que les nombres 29, 31 sont premiers. Et ainsi de suite.

* 80. *Un nombre* N *est premier, lorsqu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers qui n'excèdent pas sa racine carrée.*

Pour démontrer ce principe, nous observerons d'abord que le nombre donné N ne saurait admettre un diviseur qui ne surpasserait pas la racine carrée de N, indiquée par $\sqrt{N}$; car si cela pouvait avoir lieu, les premiers facteurs de ce diviseur ne surpasseraient pas $\sqrt{N}$, et diviseraient N (n° 54, 5°) ; N admettrait donc des diviseurs premiers qui n'excéderaient pas sa racine carrée ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent, si le nombre N n'était pas premier, il admettrait nécessairement un diviseur plus grand que $\sqrt{N}$; le quotient de N par ce diviseur serait évidemment un nombre entier moindre que $\sqrt{N}$ (*) qui diviserait N ; N admettrait donc un diviseur moindre que $\sqrt{N}$; et on vient de prouver que cela ne saurait avoir lieu. Le nombre N est donc premier.

Les caractères relatifs à la divisibilité par les nombres premiers 2, 3, 5, 11, fournissent le moyen d'éviter l'essai de la division de N par ces nombres premiers.

(*) Le dividende N pouvant être considéré comme le produit de $\sqrt{N}$ par $\sqrt{N}$, le quotient de N par un nombre plus grand que $\sqrt{N}$, est nécessairement moindre que $\sqrt{N}$; car il suit des propriétés du n° 42 (1°), que si le dividende ne changeant pas, le diviseur augmente, le quotient doit diminuer.

Par exemple, soit le nombre 31; ce nombre étant moindre que le carré 36 de 6, la racine carrée de 31 est moindre que 6; les seuls nombres premiers qui n'excèdent pas $\sqrt{36}$ sont donc 2, 3, 5; et comme il suit des propriétés des nos 56 et 58, qu'aucun de ces nombres premiers ne divise 31, on peut conclure immédiatement du principe qui vient d'être démontré, que 31 est un nombre premier.

REMARQUE. La division fournit le moyen de *reconnaître si le diviseur est plus petit ou plus grand que la racine carrée du dividende N, sans qu'il soit nécessaire de déterminer la racine carrée de N.* Car, lorsque le quotient est égal au diviseur, ce diviseur étant égal à $\sqrt{N}$, il suit du principe du no 42 (1°), que selon que le quotient est plus petit ou plus grand que le diviseur, ce diviseur est au contraire plus grand ou plus petit que $\sqrt{N}$.

D'après cette remarque, *pour découvrir si un nombre N est premier, il suffit de le diviser successivement par les nombres premiers* 2, 3, 5, 7,..., *jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact, ou à un quotient moindre que le diviseur; dans le* 1er *cas, le nombre N n'est pas premier, dans le* 2e *cas*, le diviseur étant plus grand que $\sqrt{N}$, *on est certain que N n'est divisible par aucun des nombres premiers qui n'excèdent pas* $\sqrt{N}$; *de sorte que N est un nombre premier.*

Par exemple, pour découvrir si 353 est un nombre premier, on observe d'abord que 353 ne saurait admettre aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, 11 (nos 56, 58, 59); il suffit donc d'essayer la division de 353 par les nombres premiers 7, 13, 17, 19, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact, ou à un quotient moindre que le diviseur; en effectuant ces divisions, on obtient les quotiens entiers 50, 27, 20, 18, etc., et les restes 3, 2, 13, 11, etc. Le quotient de 353 par 19 étant moindre que le diviseur, on est certain que 19 surpasse $\sqrt{353}$, et que 353 n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, qui n'excèdent pas $\sqrt{353}$; 353 est donc un nombre premier.

* 81. Les propriétés du no 80 donnent le moyen de *simplifier les calculs relatifs à la recherche des nombres premiers.*

Nous observerons d'abord qu'il résulte du principe du no 80, que *lorsqu'on connaît tous les nombres premiers moindres qu'un nombre N, on peut en déduire tous les nombres premiers compris entre N et* N^2; car la racine carrée de chacun des nombres compris entre N et N^2 étant moindre que N, il suffira d'essayer la division de ces nombres par les diviseurs premiers moindres que N; tous ceux des nombres compris entre N et N^2, qui n'admettront aucun des diviseurs premiers moindres que N, seront des nombres premiers (no 80). On profitera d'ailleurs des simplifications indiquées (no 80).

Cela posé: pour *calculer une table des nombres premiers*, on détermine d'abord, par la méthode du no 79, tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, moindres que 10.

Pour en déduire tous les *nombres premiers compris entre* 10 et 10^2 *ou* 100, on supprime dans la suite des nombres 11, 12, 13,..., 98, 99, tous ceux qui admettent un des diviseurs 2, 3, 5 (nos 56 et 58); les nombres premiers demandés ne peuvent se trouver que parmi les nombres restans,

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97;

et ceux de ces nombres qui ne seront pas divisibles par 7, seront premiers. On trouve de cette manière que les nombres premiers compris entre 10 et 100 sont 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

1re REMARQUE. Il est inutile d'essayer la division des nombres 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, par 7. Car le carré de 7 étant 49, la racine carrée de l'un quelconque de ces nombres est moindre que 7; et comme on sait d'avance qu'ils n'admettent aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, on est certain que tous ces nombres sont premiers.

2e REMARQUE. Pour trouver dans la suite des nombres 1, 2, 3,..., 99, tous les multiples des diviseurs premiers

2, 3, 5, 7, il suffit de prendre successivement dans cette suite, tous les nombres de 2 en 2 à partir de 2, tous les nombres de 3 en 3 à partir de 3, tous les nombres de 5 en 5 à partir de 5, et tous les nombres de 7 en 7 à partir de 7; en supprimant ces multiples, les nombres 11, 13, 17,...,89,97, qui resteront ne pouvant admettre aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, 7, seront les nombres premiers compris entre 10 et 100. Cette dernière manière de déterminer les nombres premiers est connue sous le nom de *Crible d'Ératostène*.

Connaissant tous les nombres premiers compris entre 1 et 100, on en déduirait tous les nombres premiers compris entre 100 et 100^2 ou 10000. Et ainsi de suite.

82. Pour *décomposer un nombre* A *en facteurs premiers*, on le divise successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., et on continue ces essais jusqu'à ce qu'on trouve un quotient entier moindre que le diviseur avec un reste qui ne soit pas nul, ou un quotient exact B. Dans le 1^er^ cas, A est un nombre *premier* (n° 80, *remarque*). Dans le 2^e^ cas, A est le produit du dernier nombre premier qui a servi de diviseur, par le nombre entier B que l'on a obtenu pour quotient; et la question est ainsi réduite à décomposer B en facteurs premiers. On opère sur B comme on a opéré sur A, en observant que d'après le principe du n° 54 (5°), le quotient B ne saurait être divisible par des nombres premiers moindres que le diviseur premier qui a donné ce quotient exact. On divise donc B par le nombre premier qui a servi de diviseur; si le nouveau quotient est exact, on le divise par le même nombre premier; et on continue ces divisions jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient C qui ne soit plus divisible par le nombre premier qui a servi de diviseur. On opère ensuite sur C, comme sur B, en observant que C ne peut être divisible que par des nombres premiers plus grands que celui qui a servi de diviseur. On continue ces calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient qui soit un nombre premier. Le nombre donné A est égal au produit du dernier quotient obtenu par tous les nombres qui ont servi de diviseurs. On peut souvent éviter des divisions

inutiles à l'aide des caractères relatifs à la divisibilité par les nombres premiers 2, 3, 5, 11 (n^os^ 56, 58 et 59).

1^er^ Exemple. *Décomposer* 1155 *en ses facteurs premiers.*

Ce nombre n'est pas divisible par 2 (n° 56, 1°); il est divisible par 3 (n° 58) et donne le quotient 385; de sorte que

$$1155 = 3 \times 385.$$

La question se réduit à déterminer les facteurs premiers de 385; ce nombre n'est pas divisible par 3 (n° 58); mais il l'est par 5 (n° 56, 2°) et fournit le quotient 77; donc

$$385 = 5 \times 77 \quad \text{et} \quad 1155 = 3 \times 5 \times 77.$$

Il ne s'agit plus que de décomposer 77 en facteurs premiers; or 77 n'est pas divisible par 5 (n° 56, 2°); mais 7 divise 77 et donne pour quotient le nombre premier 11; 1155 est donc le produit des facteurs premiers 3, 5, 7, 11.

On dispose ordinairement le calcul de la manière suivante:

$$\begin{array}{r|l} 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \end{array}$$

2^e^ Exemple. *Décomposer* 55286 *en facteurs premiers.*

On divise 55286 par 2, ce qui fournit le quotient exact 27643; on a donc $55286 = 2 \times 27643$.

Il ne reste plus qu'à décomposer 27643 en facteurs premiers. Ce nombre ne pouvant admettre aucun des diviseurs 2, 3, 5 (n^os^ 56 et 58), on le divise par 7, ce qui donne le quotient exact 3949. On a donc

$$27643 = 7 \times 3949, \quad \text{et} \quad 55286 = 2 \times 7 \times 3949 \text{ (n° 57)}.$$

Il ne s'agit plus que de décomposer 3949 en facteurs premiers. Or, on a vu que 27643, n'admet aucun des facteurs premiers 2, 3, 5; le produit 7×3949 ne saurait donc admettre aucun de ces facteurs; 3949 ne peut donc être divisible par aucun nombre moindre que 7 (n° 54, 5°). On essaie la division de 3949 par 7 ; ce qui donne le quotient entier 564 et le reste 1. Le nombre 3949 n'étant pas divisible par 7, on le divise par 11, ce qui fournit le quotient exact 359. On a donc $3949=11\times359$, et $55286=2\times7\times11\times359$ (nº **57**).

La question se réduit donc à décomposer 359 en facteurs premiers. Or, on a vu que 3949 n'admet aucun des facteurs premiers 2, 3, 5, 7; le produit 11×359 ne saurait donc admettre aucun de ces facteurs; 359 ne peut donc être divisible que par les nombres premiers 11, 13, 17, 19, 23,... plus grands que 7. Ainsi, on divise successivement 359 par

chacun des nombres	11,	13,	17,	19,...
ce qui fournit les quotiens entiers	32,	27,	21,	18,...
et les restes	7,	8,	2,	17...

Le nombre 359 n'étant divisible par aucun des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, et le quotient de 359 par 19 étant moindre que le diviseur 19, on est certain que 359 est un nombre premier (nº **80**). De sorte que 55286 est le produit des facteurs premiers 2, 7, 11, 359.

83. Pour *trouver tous les diviseurs d'un nombre*, on le décompose en facteurs premiers (nº **82**) ; ces facteurs et leurs produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., sont les diviseurs demandés (nº **74**).

1er Exemple. *Trouver tous les diviseurs de* 1155.

On décompose d'abord ce nombre en facteurs premiers; ce qui donne, $1155=3\times5\times7\times11$.

Les nombres 3, 5, 7, 11, ainsi que leurs produits deux à deux et trois à trois, seront les diviseurs demandés. On trouve ainsi que les diviseurs de 1155, sont

3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385.

On peut former ces diviseurs de la manière suivante :

3,
5, 15,
7, 21, 35, 105,
11, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155.

Après avoir placé les diviseurs premiers 3, 5, 7, 11, dans une colonne verticale, on multiplie le 2e diviseur 5 par le 1er diviseur 3, et on pose le produit 15 à côté de 5; on effectue la multiplication du 3e diviseur 7 par chacun des diviseurs précédens, 3, 5, 15, et on écrit les produits 21, 35, 105, à la droite de 7. Enfin, la multiplication du dernier diviseur 11 par chacun des diviseurs précédens 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, donne les autres diviseurs 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155, de 1155.

On devra faire usage de ce procédé, quand le nombre donné ne contiendra que des facteurs inégaux. Lorsque le nombre proposé renfermera des facteurs égaux, on aura recours à la méthode que nous allons indiquer.

2e Exemple. *Déterminer tous les diviseurs de* 200.

La décomposition de 200 en facteurs premiers donne

$$200=2^3\times5^2.$$

Le nombre 200 admettant les facteurs 2^3, 5^2, est divisible par chacun des nombres, $1, 2, 2^2, 2^3$, $1, 5, 5^2$, (nº **54**, 5º).

Les diviseurs $1, 2, 2^2, 2^3$, étant premiers avec chacun des diviseurs $1, 5, 5^2$, (nº **75**), il résulte du principe du nº **73** que 200 est divisible par tous les produits

$1, 2, 2^2, 2^3, 5, 2.5, 2^2.5, 2^3.5, 5^2, 2.5^2, 2^2.5^2, 2^3.5^2$.

Si l'on effectue ces produits, on trouvera les diviseurs

1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200.

Le nombre 200 *n'admet que ces douze diviseurs*. En effet; il résulte du principe du nº **78** que, de quelque manière qu'on décompose 200 en facteurs premiers, on retrouvera toujours que $200=2^3\times5^2$; d'où il suit qu'aucun diviseur de 200 ne peut contenir d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Il faudrait donc, pour que 200 admît un diviseur autre que ceux que nous venons de former, que ce diviseur contînt un des facteurs 2, 5, avec un exposant plus grand que celui dont il est affecté dans $2^3\times5^2$.

Mais, un nombre tel que $2^4\times5$ ne peut diviser $2^3\times5^2$; car si cette division pouvait réussir, 2^4 diviserait $2^3\times5^2$, (nº **54**, 5º) ; or, 2^4 est premier avec 5^2 (nº **75**) ; 2^4 diviserait donc 2^3; ce qui est impossible. Le nombre 200 n'admet donc que les douze diviseurs indiqués ci-dessus.

Remarque. Les exposans des facteurs premiers de 200 étant 3, 2, il est facile de voir que le nombre des diviseurs de 200 est égal au produit 12 des nombres 4, 3, qu'on obtient en augmentant chaque exposant d'une unité. En effet; pour former tous les diviseurs de $2^3 \times 5^2$, on a multiplié chacun des 4 nombres $1, 2, 2^2, 2^3$, par chacun des 3 nombres $1, 5, 5^2$, ce qui a donné 4×3 ou 12 produits. Il suffit donc de prouver que les 12 produits ainsi obtenus sont différens; et cela est évident, car si deux de ces produits étaient égaux, ils contiendraient les mêmes facteurs premiers affectés des mêmes exposans (nº 78), ce qui ne peut avoir lieu, d'après la manière dont on a formé ces produits.

84. Les exemples du nº 83 conduisent à cette règle générale : *Pour former tous les diviseurs d'un nombre, décomposez-le en facteurs premiers* (nº 82) *; placez dans une première ligne, l'unité et les puissances successives de l'un quelconque de ces facteurs premiers, depuis la première puissance jusqu'à la plus élevée, de manière que le dernier nombre de cette ligne soit le nombre premier que l'on considère, affecté de son plus fort exposant dans le nombre donné. Mettez de même, dans une 2e ligne, l'unité et les puissances successives d'un autre facteur premier du nombre donné, depuis la première jusqu'à la plus élevée ; et ainsi de suite pour chacun des facteurs premiers du nombre donné. Ce tableau étant formé : multipliez successivement tous les nombres de la 1re ligne par ceux de la 2e ; multipliez ensuite chacun de ces produits par chacun des nombres de la 3e ligne ; et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne du tableau ; les derniers produits obtenus seront tous les diviseurs du nombre donné (en comprenant l'unité et le nombre donné parmi ces diviseurs). Pour trouver le nombre de ces diviseurs, ajoutez une unité au plus fort exposant de chacun des facteurs premiers du nombre donné ; le produit de ces exposans ainsi augmentés d'une unité, exprimera le nombre des diviseurs du nombre donné.*

Exemple. *Soit proposé de déterminer tous les diviseurs de 360, et de trouver le nombre de ces diviseurs.*

La décomposition de 360 en facteurs premiers donnant $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ (page 73), on forme le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \\ 1,\ 3,\ 3^2, \\ 1,\ 5, \end{array}$$

On multiplie chacun des nombres de la 1re ligne, par chacun des nombres de la 2e ligne, ce qui fournit les produits,

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

On multiplie ensuite chacun de ces produits, par chacun des nombres 1, 5, de la 3e et dernière ligne ; les produits

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360,

sont tous les diviseurs de 360. Le nombre de ces diviseurs est le produit $4 \times 3 \times 2$ ou 24, des exposans 3, 2, 1, augmentés d'une unité.

Remarque. Lorsque tous les facteurs premiers du nombre proposé sont inégaux, on doit préférer la méthode indiquée (page 80).

***85.** *Lorsque des nombres sont décomposés en facteurs premiers, on obtient directement leur plus grand commun diviseur en formant le produit de tous les facteurs premiers qui leur sont communs ; chacun de ces facteurs communs étant affecté du plus petit de ses exposans dans les nombres donnés.*

Par exemple, soient les deux nombres

$$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11, \quad 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

Je dis que leur plus grand commun diviseur est $2^2 \times 3$. En effet; les nombres donnés étant respectivement égaux à $2^2 \times 3 \times 7 \times 11$, $2^2 \times 3 \times (2^2 \times 3 \times 5)$, si on les divise par le produit $2^2 \times 3$ de tous leurs facteurs communs, les quotiens 7×11, $2^2 \times 3 \times 5$, seront nécessairement premiers entre eux ; le diviseur $2^2 \times 3$ ou 12 sera donc effectivement le plus grand commun diviseur des deux nombres donnés (n° 70). La règle du n° 65 conduirait au même résultat.

86. *Pour former tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, il suffit de prendre tous les diviseurs du plus grand commun diviseur de ces nombres ;* car d'après la remarque du n° 68, tout diviseur commun à plusieurs nombres divise aussi leur plus grand commun diviseur, et tout diviseur du plus grand commun diviseur de différens nombres, est un diviseur commun de ces nombres.

Exemple. *Soit proposé de trouver tous les diviseurs communs à* 924 *et* 720. Leur plus grand commun diviseur étant 12, tous les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12, de 12, sont les diviseurs communs aux nombres donnés.

87. *Pour trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, il suffit de décomposer les nombres donnés en facteurs premiers ; et de former ensuite le produit de tous les facteurs premiers contenus dans les nombres donnés, chacun de ces facteurs premiers étant affecté du plus grand de ses exposans dans les nombres donnés.*

Exemple. *Trouver le plus petit nombre x* (*) *divisible par chacun des nombres* 200, 500, 147. On décompose ces nombres en facteurs premiers, et on trouve que,

$$200 = 2^3 \times 5^2, \quad 500 = 2^2 \times 5^3, \quad 147 = 3 \times 7^2.$$

Le nombre x demandé est $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2$ ou 147 000.

En effet; il résulte du principe du n° 52 que x est divisible par chacun des nombres donnés. D'ailleurs, x devant être divisible par 200, par 500 et par 147, on déduit du principe du n° 54 (5°) que x sera nécessairement divisible par le facteur 2^3 de 200, par le facteur 5^3 de 500, et par les facteurs 3, 7^2, de 147 ; et comme les diviseurs 2^3, 5^3, 3, 7^2, sont premiers entre eux deux à deux (n° 75), x sera nécessairement divisible par $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2$ (n° 73) ; le nombre x demandé ne saurait donc être moindre que ce produit; ce qui démontre la propriété énoncée.

(*) Nous désignerons souvent par x le nombre inconnu, qu'il s'agit de calculer.

On trouvera d'une manière semblable que le plus petit nombre divisible par 60, 72 et 175 est 12600; et que le plus petit nombre divisible par 90, 126 et 275 est 34650.

* 88. Le procédé du plus grand commun diviseur fournit le moyen de *trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, sans qu'il soit nécessaire de décomposer ces nombres en facteurs premiers.*

Nous chercherons d'abord à déterminer quel est le plus petit nombre N par lequel il faut multiplier un nombre donné A pour que le produit AN soit divisible par un nombre donné B. Nous en déduirons le moyen de calculer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés.

1°. Pour que AN soit divisible par B, il faut et il suffit que AN contienne tous les facteurs de B (n° 52). Or, on obtiendra le produit de tous les facteurs de B qui entrent dans A en cherchant le plus grand commun diviseur D de A et B ; et en divisant B par D, le quotient B' sera le produit de tous les facteurs de B qui n'entrent pas dans A. Le produit AB' sera donc le plus petit nombre qui renferme tous les facteurs de B ; ce produit sera donc le plus petit nombre divisible par B. La valeur cherchée du multiplicateur N est donc B'.

Pour mettre cette propriété en évidence, on désignera par A' le quotient qui résulterait de la division de A par D ; on aura, $A = DA'$, $B = DB'$, $AN = DA'N$.

Les quotients A', B', de A et B par D, seront premiers entre eux (n° 70). Mais AN doit être divisible par B ; $DA'N$ doit donc être divisible par DB'.

D'ailleurs, le quotient de $DA'N$ par DB' est le même que celui de $A'N$ par B' (n° 42, 3°) ; il faut donc que B' divise $A'N$; et comme B' est premier avec A', il suit du principe du n° 71 que B' doit diviser N ; la plus petite valeur du multiplicateur N demandé est donc le quotient B' de la division de B par le plus grand commun diviseur D de A et B.

On en déduit cette règle générale : *Pour déterminer quel est le plus petit nombre x par lequel il faut multiplier un nombre donné A pour que le produit Ax soit divisible par un* *nombre donné B : calculez le plus grand commun diviseur de A et B* (*n°* **65**); *le quotient B′ de B par ce commun diviseur, sera le multiplicateur demandé ; de sorte que AB′ sera le plus petit nombre divisible par B.*

2°. La règle précédente fournit le moyen de *trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés A, B, C,* etc.

En effet, le plus petit nombre divisible par A étant A, on obtiendra le plus petit nombre divisible par A et par B en déterminant le plus petit nombre par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit divisible par B ; on vient de démontrer (1°) que ce plus petit nombre est le quotient B' de B par le plus grand commun diviseur de A et B. De sorte que AB' est le plus petit nombre divisible par A et B. Pour en déduire le plus petit nombre divisible par A, par B et par C, il suffit de chercher le plus petit nombre par lequel on doit multiplier AB' pour que le produit soit divisible par C ; on vient de voir (1°) que ce plus petit nombre est le quotient C' de C par le plus grand commun diviseur de AB' et C ; de sorte que $AB'C'$ sera le plus petit nombre divisible par A, par B et par C. Et ainsi de suite.

On en déduit cette règle générale : *Pour calculer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés A, B, C,* etc., *cherchez le plus grand commun diviseur de A et B ; divisez B par ce commun diviseur : et multipliez A par le quotient B′ de cette division ; le produit AB′ sera le plus petit nombre divisible par A et B. Cherchez le plus grand commun diviseur entre AB′ et C ; divisez C par ce commun diviseur, et multipliez AB′ par le quotient C′ de cette division ; le produit AB′C′ sera le plus petit nombre divisible par chacun des nombres A, B, C. Et ainsi de suite.*

Par exemple, pour trouver le plus petit nombre divisible par chacun des nombres 90, 126, 275, on cherche le plus grand commun diviseur de 90 et 126 qui est 18 ; on divise 126 par 18, ce qui fournit le quotient 7 ; le produit 630, de 90 par 7, est le plus petit nombre divisible par 90 et par 126. On cherche le plus grand commun diviseur entre 630 et 275 qui

est 5 ; on divise 275 par 5, ce qui donne le quotient 55 ; on multiplie 630 par 55, le produit 34 650 est le plus petit nombre divisible par chacun des nombres donnés 90, 126, 275. La règle du n° **87** a conduit au même résultat.

89. *Lorsque des nombres sont premiers entre eux deux à deux, le plus petit nombre divisible par chacun de ces nombres, est leur produit.* Car d'après le principe du n° **73**, tout nombre divisible par les nombres donnés étant divisible par leur produit, ne saurait être moindre que ce produit. Chacune des règles des n°s **87**, **88**, conduirait à la même propriété.

Remarque. Des nombres premiers étant toujours premiers entre eux, deux à deux, il suit du principe précédent que, *le plus petit nombre divisible par des nombres premiers est égal à leur produit.*

Nous terminerons ce 2e chapitre par la TABLE DES NOMBRES PREMIERS, depuis 1 jusqu'à 1009.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 997, 983, 991, 997, 1009.