CHAPITRE III.

Des fractions ordinaires et des fractions décimales.

§ Ier. *Des fractions ordinaires.*

90. D'après ce qu'on a vu (nos 25 et 28), lorsque après avoir épuisé tous les chiffres du dividende, on a trouvé la *partie entière* du quotient, le *dernier reste* est moindre que le diviseur; le *quotient total*, qui est compris entre sa *partie entière* et cette partie entière augmentée d'une unité, se compose du nombre entier obtenu au quotient, plus d'une quantité moindre que l'unité égale au quotient du dernier reste par le diviseur. Cette quantité, moindre que l'unité, est ce qu'on nomme une *fraction*. Pour indiquer le quotient du dernier reste par le diviseur, on écrit le diviseur sous le reste et on place une *barre* entre ces deux nombres.

Par exemple, 25 étant compris entre 3 fois 7 et 4 fois 7, le quotient de 25 par 7 est composé d'une *partie entière* 3, plus d'une *fraction* $\frac{4}{7}$ (*moindre que l'unité*) qui exprime le quotient de 4 par 7; le quotient total de 25 par 7, composé de $3+\frac{4}{7}$, s'écrit ordinairement de cette manière abrégée $3\frac{4}{7}$.

Pour *évaluer* $\frac{4}{7}$ *en parties de l'unité*, on observe, que d'après le principe du n° **34** (3°), diviser 4 par 7, revient à prendre la septième partie de chacune des unités de 4; le septième de 4 est donc égal au septième de 1 répété 4 fois, ou à 4 fois un septième; le septième de 4 unités est donc équivalent à 4 fois le septième d'une unité.

En général : *Pour évaluer une fraction, on conçoit l'unité divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, et on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le dividende.*

On déduit de ce qui précède et des conventions établies (page 29), que suivant que le diviseur est 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc., ces parties égales de l'unité doivent se nommer des *demi*, ou des *tiers*, ou des *quarts*, ou des *cinquièmes*, etc.

Ainsi, $\frac{3}{4}$ s'énonce *trois quarts*, et $\frac{3}{5}$ s'énonce *trois cinquièmes*.

Comme dans une fraction, le nombre inférieur sert à *dénommer* l'espèce des parties d'unité qui entrent dans la fraction, et comme le nombre supérieur désigne le *nombre* de ces parties, le premier s'appelle *dénominateur*, et l'autre *numérateur*; le numérateur et le dénominateur sont les *deux termes* de la fraction. Ainsi, dans la fraction $\frac{3}{5}$, le *numérateur* est 3, le *dénominateur* est 5, les *deux termes* sont 3 et 5.

91. Pour *énoncer une fraction écrite*, on distingue deux cas : 1°. Si le dénominateur est moindre que 5, on fait suivre l'énoncé du numérateur, du mot *demi*, ou *tiers*, ou *quart*, selon que le dénominateur est 2, ou 3, ou 4; 2°. Si le dénominateur est plus grand que 4, on énonce successivement le numérateur et le dénominateur, en ayant soin de faire suivre le nom du dénominateur de la terminaison *ième*.

Réciproquement, pour *écrire une fraction énoncée*, on distingue deux cas; 1°. Si la fraction exprime des *demi* ou des *tiers* ou des *quarts*, on écrit au numérateur le nombre des parties égales indiqué dans l'énoncé donné; et on prend pour dénominateur 2, ou 3, ou 4, suivant qu'il s'agit de demi, ou de tiers ou de quarts; 2°. Si l'énoncé de la fraction finit par la terminaison *ième*, on écrit successivement au numérateur et au dénominateur les deux nombres indiqués dans l'énoncé de la fraction.

REMARQUE. Pour prévenir toute erreur, *il faut séparer avec soin l'énoncé du numérateur de celui du dénominateur;* car autrement, un même énoncé paraîtrait convenir à des fractions différentes.

Par exemple, l'énoncé *trois-cent dix-septièmes*, paraît convenir également aux fractions $\frac{3}{117}$, $\frac{300}{17}$, $\frac{310}{7}$.

Pour éviter cet inconvénient, on peut mettre une virgule entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur; et lorsqu'on dicte une fraction, on fait une pause entre l'énoncé du numérateur et l'énoncé du dénominateur.

92. Les *fractions*, d'après leur origine, sont moindres que l'unité (n° 90); mais leur calcul conduit quelquefois à des expressions de même forme, plus grandes que l'unité; ces dernières sont des *nombres fractionnaires*, ou des *expressions fractionnaires*. Cependant nous comprendrons souvent ces deux classes de quantités sous le nom générique de *fractions;* mais lorsque nous parlerons d'un *nombre fractionnaire*, il s'agira toujours d'une fraction plus grande que l'unité.

93. Il résulte de ce qui précède qu'*une fraction peut être considérée, ou comme indiquant le quotient de la division du numérateur par le dénominateur; ou comme exprimant que l'unité a été divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, et qu'on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur.*

Nous considérerons ordinairement les fractions sous ce dernier point de vue, parce qu'il fait dépendre leur valeur des subdivisions de la même unité, et qu'il conduit plus facilement aux règles qui servent à les calculer.

94. *Une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand et que son dénominateur est plus petit; une fraction est d'autant plus petite que son numérateur est plus petit et que son dénominateur est plus grand.* Cela résulte de la définition même des fractions; et cela n'est d'ailleurs qu'une conséquence des propriétés du n° 42 (1°).

***95.** *Lorsque deux fractions sont égales, celle qui a le*

plus grand numérateur a nécessairement le plus grand dénominateur.

Par exemple, les fractions $\frac{13}{17}$, $\frac{11}{40}$, ne sauraient avoir la même valeur; car d'après le principe du n° 94, $\frac{13}{17}$ est plus grand que $\frac{11}{17}$, et $\frac{11}{17}$ est plus grand que $\frac{11}{40}$; la fraction $\frac{13}{17}$ est donc à plus forte raison plus grande que $\frac{11}{40}$.

96. *Une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

En effet, soit la fraction $\frac{3}{7}$; si le dénominateur restant le même, on multiplie le numérateur par 5, elle deviendra $\frac{15}{7}$, et sera rendue 5 fois plus grande; car la 2ᵉ fraction contient 5 fois plus de parties que la 1ʳᵉ, et ces parties sont de même grandeur dans les deux fractions. Si le numérateur 3 ne changeant pas, on multiplie le dénominateur par 5, la fraction $\frac{3}{7}$ deviendra $\frac{3}{35}$ et sera rendue 5 fois plus petite; car elle renfermera autant de parties que la fraction $\frac{3}{7}$; et chaque partie sera 5 fois plus petite, puisque l'unité sera divisée en 5 fois plus de parties égales.

Cela posé: puisqu'en multipliant le numérateur d'une fraction par 5, on la rend 5 fois plus grande, tandis qu'on la rend 5 fois plus petite en multipliant son dénominateur par 5, il en résulte qu'elle ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par 5.

On prouverait de même, qu'en divisant le numérateur d'une fraction par 5, on la rend 5 fois plus petite, et qu'en divisant le dénominateur par 5, on la rend 5 fois plus grande.

Une fraction ne change donc pas de valeur quand on divise ses deux termes par 5.

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à tout autre nombre que 5, le principe est démontré.

97. Les raisonnemens du n° 96 démontrent que *pour* MULTIPLIER *une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur par ce nombre entier, ou de diviser le dénominateur par ce nombre entier; et que pour* DIVISER *une fraction par un nombre entier, il suffit de diviser le numérateur par ce nombre entier, ou de multiplier le dénominateur par ce nombre entier.*

Par exemple, pour multiplier la fraction $\frac{5}{12}$ par 4, il suffit de la rendre 4 fois plus grande; ce qui revient à multiplier son numérateur par 4, ou à diviser son dénominateur par 4; de sorte que le produit demandé est $\frac{20}{12}$ ou $\frac{5}{3}$.

Les propriétés précédentes pourraient aussi se déduire de celles du n° 42 (2°), en observant qu'une fraction est égale au quotient du numérateur par le dénominateur (n° 93).

98. *Lorsqu'on aperçoit un facteur commun aux deux termes d'une fraction, on peut la simplifier, sans changer sa valeur, en divisant ses deux termes par ce facteur commun* (n° 96).

Par exemple, la division des deux termes de la fraction $\frac{30}{42}$ par 2, fournit la fraction équivalente $\frac{15}{21}$; divisant 15 et 21 par 3, on obtient la fraction $\frac{5}{7}$ égale à $\frac{30}{42}$. La division des deux termes 30, 42, par leur plus grand commun diviseur 6, conduit plus directement au même résultat.

On verra de même que

$$\frac{7\times 3}{4\times 7}=\frac{3}{4},\quad \frac{2^5}{2^8}=\frac{1\times 2^5}{2^3\times 2^5}=\frac{1}{2^3},\quad \frac{2^5\times 7^8}{2^9\times 7^3}=\frac{7^5}{2^4}.$$

99. On dit qu'une fraction est *irréductible,* lorsqu'elle ne peut se réduire à une forme *plus simple;* c'est-à-dire quand

elle ne saurait être exprimée exactement par aucune fraction équivalente ayant des termes respectivement moindres.

* REMARQUE. Pour qu'une fraction soit irréductible il suffit qu'elle ne puisse être exprimée exactement par aucune fraction dont le numérateur serait moindre que le sien; car il suit du principe du n° 95, que cette fraction ne saurait être égale à une fraction dont le dénominateur serait moindre que le sien.

100. *Les deux termes d'une fraction irréductible sont nécessairement premiers entre eux;* car s'ils avaient un facteur commun, en divisant le numérateur et le dénominateur par ce facteur commun, les quotiens seraient les deux termes d'une fraction équivalente à la fraction irréductible donnée, et dont les termes seraient respectivement moindres; cette fraction donnée serait donc réductible à une forme plus simple; ce qui est contre l'hypothèse.

101. *Lorsque les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est nécessairement irréductible.*

En effet; si une fraction $\frac{12}{35}$, dont *les termes sont premiers entre eux*, pouvait être égale à une fraction $\frac{8}{20}$, ayant des termes respectivement moindres, en multipliant ces deux fractions par 35×20, les résultats $\frac{12\times(35\times 20)}{35}$, $\frac{8\times(35\times 20)}{20}$ (n° 97) seraient égaux. Or, d'après les propriétés des n^{os} 37 et 36, on a

$$12\times(35\times 20)=12\times 35\times 20=12\times 20\times 35,$$
$$\text{et}\quad 8\times(35\times 20)=\ 8\times 35\times 20.$$

On aurait donc, $\frac{12\times 20\times 35}{35}=\frac{8\times 35\times 20}{20}$.

En effectuant les divisions indiquées, les quotiens 12×20, 8×35, seraient égaux. Mais, 12×20 est divisible par 12; 8×35 serait donc aussi divisible par 12. Or, on suppose que 12 est premier avec 35; 12 devrait donc diviser 8 (n° 71), ce qui est impossible, puisque le numérateur 12 est supposé plus grand que le numérateur 8; la fraction $\frac{12}{35}$ ne peut donc pas se réduire à une forme plus simple; elle est donc irréductible.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à toutes les fractions dont les deux termes sont premiers entre eux, le principe énoncé est démontré.

* En général : Si une fraction $\frac{A}{B}$ dont les deux termes sont supposés premiers entre eux, pouvait être égale à une fraction $\frac{a}{b}$ ayant des termes a, b, respectivement moindres que A et B, en multipliant ces fractions par le produit Bb des dénominateurs, les résultats $\frac{A\times Bb}{B}$, $\frac{a\times Bb}{b}$ (n° 97), seraient égaux. Or, d'après les propriétés des n^{os} **37** et **36**,

$$A\times Bb = A\times B\times b = A\times b\times B,\quad a\times Bb = a\times B\times b;$$

donc
$$\frac{A\times b\times B}{B} = \frac{a\times B\times b}{b}.$$

En effectuant les divisions indiquées, de $A\times b\times B$ par B, et de $a\times B\times b$ par b, les quotiens $A\times b$, $a\times B$, seraient égaux; mais A divise exactement $A\times b$; A diviserait donc $a\times B$. Or, A est supposé premier avec B; A diviserait donc a (n° **71**); ce qui ne saurait être, puisque a est supposé moindre que A. La fraction $\frac{A}{B}$ ne saurait donc être exprimée exactement par une fraction dont les termes seraient moindres que A et B; elle est donc irréductible. Ce qui démontre le principe énoncé.

Ce principe conduit aux propriétés suivantes :

1°. Pour qu'une fraction soit réductible à une forme plus simple, il faut et il suffit que ses deux termes admettent un facteur commun.

* 2°. Les deux termes de toute fraction équivalente à une fraction irréductible sont les produits des deux termes de cette fraction irréductible par un même nombre.

En effet; si la fraction $\frac{A}{B}$ n'est pas irréductible, il existera nécessairement un facteur commun entre ses deux termes (1°); soit d le plus grand diviseur commun à A et B, on aura

$$A = ad,\quad B = bd,\quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b},$$

et $\frac{a}{b}$ sera irréductible, puisque a et b, sont premiers entre eux (n° **70**). Ce qui démontre la propriété énoncée.

* 3°. Les seules transformations qui ne changent pas la valeur d'une fraction, sont celles qui reviennent à multiplier ou à diviser ses deux termes par un même nombre.

102. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.* Cela résulte du principe du n° 101.

Par exemple, s'il s'agit de la fraction $\frac{330}{462}$, on cherche le plus grand commun diviseur entre 330 et 462, qui est 66 (n° **65**); et on divise les deux termes 330, 462, par 66; ce qui fournit la fraction irréductible équivalente $\frac{5}{7}$.

* **103.** *Deux fractions irréductibles dont les termes sont différens, ne sauraient jamais avoir la même valeur.* Car si elles avaient la même valeur, celle qui aurait le plus grand numérateur, aurait aussi le plus grand dénominateur (n° **95**); une fraction irréductible serait donc égale à une fraction dont les termes seraient respectivement moindres; ce qui est absurde (n° **99**). Le principe est donc démontré.

* **104.** *Lorsque des fractions sont équivalentes, si on les réduit à leur plus simple expression, on devra parvenir à la même fraction irréductible;* car autrement, des fractions irréductibles dont les termes seraient différens, seraient égales entre elles, ce qui est impossible (n° **103**).

105. Une fraction ne changeant pas de valeur, lorsqu'on multiplie ses deux termes par un même nombre, on en déduit que *pour réduire plusieurs fractions au même dénomi-*

nateur, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres, les fractions qui en résultent sont égales aux proposées (*n°* 96); *et on déduit des principes des n*ᵒˢ 36 *et* 37, *que ces nouvelles fractions ont le même dénominateur.*

Exemple. *Soient les fractions*, $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$.

On multiplie les deux termes de la 1ʳᵉ par 5×7, ceux de la 2ᵉ par 3×7, et ceux de la 3ᵉ par 3×5; ce qui fournit les fractions équivalentes,

$$\frac{2\times5.7}{3\times5.7}, \quad \frac{4\times3.7}{5\times3.7}, \quad \frac{6\times3.5}{7\times3.5}.$$

Ces nouvelles fractions ont nécessairement le même dénominateur; car d'après le principe du n° 37, on a $3\times5.7=3\times5\times7$, $5\times3.7=5\times3\times7$, $7\times3.5=7\times3\times5$, et il suit du principe du n° 36 que les produits $3\times5\times7$, $5\times3\times7$, $7\times3\times5$, sont égaux.

En effectuant les multiplications indiquées dans les numérateurs, et en observant que chaque dénominateur est égal au produit 105 des dénominateurs 3, 5, 7, on obtiendra les fractions demandées $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{90}{105}$, qui sont équivalentes aux fractions données.

1ʳᵉ Remarque. On simplifie le calcul en observant que puisque les fractions cherchées auront pour dénominateur commun le produit 105 des dénominateurs 3, 5, 7, il suffit de calculer les numérateurs de ces nouvelles fractions; ce qui revient à multiplier le numérateur de chaque fraction donnée par le produit des dénominateurs des autres fractions données. Ainsi, on multiplie successivement 2 par 5×7, 4 par 3×7 et 6 par 3×5, les produits 70, 84, 90, sont les numérateurs demandés.

2ᵉ Remarque. Le dénominateur commun 105 étant divisible par chacun des dénominateurs 3, 5, 7, des fractions qu'il s'agit de réduire à ce dénominateur commun, on peut employer

une autre méthode pour calculer les nouveaux numérateurs 70, 84, 90; car il suffit de diviser successivement 105 par les dénominateurs 3, 5, 7, et de multiplier les quotiens 35, 21, 15, par les numérateurs 2, 4, 6; les produits 70, 84, 90, sont les numérateurs demandés. Cela est évident.

En général, pour transformer une fraction $\frac{A}{B}$, en une fraction équivalente dont le dénominateur soit un nombre donné D divisible par B, il suffit de multiplier A par le quotient de la division de D par B; le produit exprime le numérateur de la fraction cherchée.

106. Nous allons faire voir qu'*on peut souvent réduire des fractions à un dénominateur commun moindre que le produit des dénominateurs des fractions données.*

Nous observerons d'abord que *pour qu'un nombre* D *puisse servir de dénominateur commun à plusieurs fractions, il suffit que* D *soit divisible par tous leurs dénominateurs*; car en divisant successivement D par les dénominateurs des fractions données, et en multipliant les deux termes de chaque fraction par le quotient correspondant, on obtiendra des fractions équivalentes aux proposées, qui auront toutes le dénominateur commun D.

Pour former les numérateurs de fractions équivalentes à des fractions données, dont le dénominateur commun soit un nombre D *divisible par tous les dénominateurs des fractions données, il suffit de multiplier les numérateurs de ces dernières par les quotiens que l'on trouve en divisant successivement le dénominateur commun* D *par les dénominateurs des fractions données* (n° 105, 2ᵉ *Remarque*).

1ᵉʳ Exemple. *Soient les fractions*,

$$\frac{9}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{6}, \frac{7}{12}.$$

Si on les réduisait au même dénominateur par la méthode générale du n° 105, on obtiendrait des fractions équivalentes, dont le dénominateur commun serait 13824. Mais, 24 étant divisible par chacun des dénominateurs 2, 3, 4, 8, 6, 12, il est plus simple de réduire les fractions données au dénominateur commun 24. Pour obtenir les numérateurs des nouvelles fractions, on divise successivement 24 par les dénominateurs,

2, 3, 4, 8, 6, 12,

les quotiens, 12, 8, 6, 3, 4, 2,

multipliés par les numérateurs correspondans,

9, 2, 5, 11, 13, 7,

donnent des produits, 108, 16, 30, 33, 52, 14,

qui sont les numérateurs demandés.

2ᵉ Exemple. *Soient les fractions* $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{10}{24}$.

Le dénominateur 24 étant divisible par tous les autres, on peut le prendre pour dénominateur commun. Les fractions données, réduites à ce dénominateur commun, sont

$$\frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{20}{24}, \frac{14}{24}, \frac{10}{24}.$$

107. Nous allons donner le moyen de *réduire des fractions à leur* PLUS PETIT DÉNOMINATEUR COMMUN, c'est-à-dire de les transformer en des fractions équivalentes dont le dénominateur commun soit le plus petit possible.

1°. *Lorsque les fractions données sont irréductibles, pour les transformer en des fractions équivalentes dont le dénominateur commun soit le plus petit possible,* on cherche le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs des fractions données, ce nombre est le *plus petit dénominateur commun demandé;* c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre plus petit qui puisse servir de dénominateur commun à des fractions équivalentes aux fractions données.

En effet, il suit du principe du n° **102** (2°) que lorsque les fractions données seront réduites à un dénominateur commun, D, ce dénominateur commun sera nécessairement divisible par chacun des dénominateurs des fractions irréductibles proposées ; D ne saurait donc être moindre que le plus petit nombre divisible par les dénominateurs des fractions données.

Exemple. *Soient les fractions irréductibles* $\frac{7}{60}, \frac{11}{72}, \frac{3}{175}$.

Pour les réduire à leur plus petit dénominateur commun, on cherche le plus petit nombre divisible par chacun des dénominateurs 60, 72, 175; on trouve, par l'une quelconque des méthodes des nᵒˢ **87** et **88**, que ce nombre est 12600 ; il exprime le dénominateur commun demandé. Pour former les numérateurs des fractions équivalentes aux proposées, qui auront le dénominateur commun 12600, on divise 12600, par chacun des dénominateurs 60, 72, 175, ce qui donne les quotiens 210, 175, 72; on multiplie les numérateurs 11, 7, 3, par les quotiens 210, 175, 72; les produits 1470, 1925, 216, sont les numérateurs demandés.

Remarque. Quand les dénominateurs des fractions irréductibles proposées sont premiers entre eux deux à deux, ou sont des nombres premiers, on ne peut pas réduire ces fractions à un dénominateur commun moindre que le produit de tous leurs dénominateurs; car d'après le principe du n° **89**, le plus petit nombre divisible par ces dénominateurs est leur produit.

2°. *Quand les fractions données ne sont pas irréductibles, on ramène ce cas au précédent* en les réduisant d'abord à leur plus simple expression (n° **102**).

108. *Pour comparer entre elles les grandeurs de plusieurs fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur;* car de deux fractions de même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur (n° **94**).

* **109.** *Une fraction* $\frac{a}{b}$ *moindre que l'unité, augmente lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes.*

Il s'agit de faire voir que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}\ (*), \text{ ou que } \frac{a(b+c)}{b(b+c)} < \frac{(a+c)b}{(b+c)b},$$

ou que $a(b+c) < (a+c)b$ (n° **108**).

(*) Le signe $<$ signifie *plus petit que;* et par suite, le signe $>$ signifie *plus grand que.* Ainsi, on a $5 < 7$ et $7 > 5$.