

Or, d'après ce qui a été démontré (n° 54, 1°),

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+c)b = ab+cb.$$

Tout se réduit donc à prouver que l'on a

$$ac < cb, \quad \text{ou} \quad ac < bc; \quad \text{ou} \quad a < b;$$

et cette dernière condition résulte de ce que la fraction donnée $\frac{a}{b}$ est supposée moindre que l'unité.

On démontrerait d'une manière semblable, qu'une fraction plus grande que l'unité diminue lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes.

110. Lorsque deux fractions sont égales, le produit du numérateur de la 1^{re} par le dénominateur de la 2^e, est égal au produit du numérateur de la 2^e par le dénominateur de la 1^{re}; et le quotient du numérateur de la 1^{re} par celui de la 2^e est égal au quotient du dénominateur de la 1^{re} par celui de la 2^e.

Par exemple, les fractions $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$, étant égales, si on les réduit au dénominateur commun 12×9 , les nouveaux numérateurs 8×9 , 6×12 , seront nécessairement égaux. Les fractions $\frac{8 \times 9}{6 \times 9}$, $\frac{6 \times 12}{6 \times 9}$, seront donc égales; supprimant le facteur 9 commun aux deux termes de la 1^{re} fraction, et le facteur 6 commun aux deux termes de la 2^e, les fractions résultantes $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{9}$, seront égales entre elles. La relation,

$$\frac{8}{12} = \frac{6}{9} \text{ donne donc } 8 \times 9 = 6 \times 12 \text{ et } \frac{8}{6} = \frac{12}{9}.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

111. Pour effectuer l'ADDITION de plusieurs fractions de même dénominateur, on forme la somme de leurs numérateurs, et on écrit sous cette somme le dénominateur commun. Si les fractions ont des dénominateurs différens, on ramène ce cas au précédent en les réduisant d'abord au même dénominateur.

Par exemple, la somme des fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, est $\frac{2+3}{7}$ ou $\frac{5}{7}$; car 2 fois $\frac{1}{7}$ plus 3 fois $\frac{1}{7}$ valent 5 fois $\frac{1}{7}$, ou $\frac{5}{7}$.

Pour ajouter les fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, on les réduit d'abord au même dénominateur, ce qui donne les fractions équivalentes $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{15}$, dont la somme est $\frac{12+10}{15}$ ou $\frac{22}{15}$.

112. Pour SOUSTRAIRE l'une de l'autre deux fractions de même dénominateur, on retranche le numérateur de la première de celui de la seconde, et sous la différence obtenue on écrit le dénominateur commun. Lorsque les fractions ont des dénominateurs différens, on ramène ce cas au précédent en les réduisant d'abord au même dénominateur.

$$\text{Ainsi, } \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}, \quad \frac{22}{15} - \frac{4}{5} = \frac{22}{15} - \frac{12}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

113. Nous avons vu (n° 97) comment on effectue la multiplication d'une fraction par un nombre entier.

Lorsque le multiplicateur est une fraction, on ne peut plus considérer la MULTIPLICATION comme une addition abrégée (n° 18); il faut généraliser le sens attaché au mot MULTIPLIER; et on regarde la multiplication comme ayant pour but de calculer un nombre nommé PRODUIT, qui soit composé avec un autre nombre nommé MULTIPLICANDE, de la même manière qu'un troisième nombre nommé MULTIPLICATEUR, est composé avec l'unité.

On déduit de cette définition que pour faire la MULTIPLICATION de plusieurs fractions, il suffit de former successivement le produit des numérateurs et celui des dénominateurs; ces produits sont le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime le produit des fractions proposées.

En effet, soit à multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$. Il s'agit de former un nombre, nommé produit, qui soit composé avec $\frac{2}{3}$, de la même

manière que $\frac{4}{5}$ est composé avec l'unité. Mais, $\frac{4}{5}$ est composé de 4 fois la cinquième partie de l'unité; on obtiendra donc le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ en prenant 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$.

Or, d'après ce qu'on a vu (n° 97), la cinquième partie de $\frac{2}{3}$ est

$\frac{2}{3 \times 5}$; 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$ est donc égale à 4 fois

$\frac{2}{3 \times 5}$, ou à $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ (n° 97). Le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est

donc $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ou $\frac{8}{15}$. Le principe est donc démontré pour deux fractions.

Pour former le produit des trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, on

observe que le produit des deux premières étant $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$, il

suffit de multiplier cette dernière fraction par $\frac{7}{11}$; ce qui donne

$$\frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 5 \times 11}, \text{ ou } \frac{56}{165}.$$

Le principe est donc démontré pour trois fractions. On verra de même qu'il convient à quatre fractions; et ainsi de suite.

1^{re} REMARQUE. *Le produit de plusieurs fractions conserve sa valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications; car le produit des numérateurs reste le même, ainsi que celui des dénominateurs (n° 36), et ces produits sont les deux termes de la fraction qui exprime le produit des fractions proposées.*

Il est facile d'en déduire que les principes des n°s 37 et 38 conviennent à des fractions quelconques.

* 2^e REMARQUE. *Selon que le multiplicateur est plus grand ou est plus petit que l'unité, le produit est plus grand ou est plus petit que le multiplicande. Car lorsque le multiplicateur est égal à l'unité, le produit est égal au multiplicande; et le pro-*

duit est composé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est composé avec l'unité.

* Par conséquent, *les puissances d'une fraction plus grande que l'unité ont des valeurs d'autant plus grandes que les exposans de ces puissances sont plus grands; et les puissances d'une fraction moindre que l'unité ont des valeurs d'autant plus petites que les exposans de ces puissances sont plus grands.*

114. Multiplier plusieurs fractions entre elles, c'est ce qu'on nomme prendre des fractions de fractions.

Par exemple, pour former le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$,

il faut d'abord multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; c'est-à-dire prendre les $\frac{4}{5}$

de $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{8}{15}$; on doit ensuite multiplier ce dernier

produit par $\frac{7}{11}$, c'est-à-dire en prendre les $\frac{7}{11}$, ce qui donne

$\frac{56}{165}$; on a donc pris effectivement les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$.

* 115. *Toutes les puissances d'une fraction irréductible sont des fractions irréductibles.*

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{6}{7}$; je dis que sa troisième puissance est une fraction irréductible. En effet, la troisième puissance de $\frac{6}{7}$ est $\frac{6}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{6}{7}$, ou $\frac{6 \times 6 \times 6}{7 \times 7 \times 7}$ ou $\frac{6^3}{7^3}$.

Si cette dernière fraction n'était pas irréductible, ses deux termes 6^3 , 7^3 , seraient divisibles par un même nombre premier (n° 101, 1^o); ce nombre premier diviserait donc 6 et 7 (n° 72, 1^{re} remarque); la fraction $\frac{6}{7}$ ne serait donc pas irréductible; ce qui est contre l'hypothèse.

Des raisonnemens analogues pouvant s'appliquer à toutes les puissances d'une fraction irréductible quelconque, le principe est démontré.

116. Pour effectuer la division d'une fraction par une frac-

tion, il suffit de multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur RENVERSÉE (*).

Par exemple, soit à diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$. Le quotient cherché doit être tel que multiplié par $\frac{4}{5}$, il reproduise $\frac{2}{3}$. Or, multiplier le quotient par $\frac{4}{5}$, c'est en prendre les $\frac{4}{5}$; donc :

les $\frac{4}{5}$ du quotient, ou 4 fois $\frac{1}{5}$ du quotient, valent $\frac{2}{3}$;

$\frac{1}{5}$ du quotient vaut donc le quart de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3 \times 4}$;

le quotient vaut donc 5 fois $\frac{2}{3 \times 4}$, ou $\frac{2 \times 5}{3 \times 4}$, ou $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$.

Le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est donc $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$; ce qui démontre le principe énoncé.

* 1^{re} REMARQUE. Lorsqu'on divise deux fractions l'une par l'autre, si les dénominateurs sont égaux, le quotient sera égal à une fraction dont le numérateur sera celui de la fraction dividende et dont le dénominateur sera le numérateur de la fraction diviseur; si les numérateurs sont égaux, la fraction qui exprime le quotient aura pour numérateur, le dénominateur de la fraction diviseur, et pour dénominateur, celui de la fraction dividende.

Car le quotient de $\frac{3}{7}$ par $\frac{5}{7}$ est $\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}$ ou $\frac{3 \times 7}{5 \times 7}$ ou $\frac{3}{5}$,

et celui de $\frac{7}{3}$ par $\frac{7}{5}$ est $\frac{7}{3} \times \frac{5}{7}$ ou $\frac{5 \times 7}{3 \times 7}$ ou $\frac{5}{3}$.

* 2^e REMARQUE. Lorsqu'on divise l'unité par une fraction, le quotient est égal à cette fraction RENVERSÉE, car le quotient de 1 par $\frac{5}{7}$ est $1 \times \frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5}$.

(*) On dit qu'une fraction est renversée, lorsqu'on écrit le numérateur à la place du dénominateur, et le dénominateur à la place du numérateur.

Ainsi, la fraction $\frac{4}{5}$ étant renversée devient $\frac{5}{4}$.

* 3^e REMARQUE. Selon que le diviseur est plus grand ou plus petit que l'unité, le quotient est plus petit ou plus grand que le dividende. Car lorsque le diviseur est égal à l'unité, le quotient est égal au dividende; et d'après les propriétés du n^o 42, suivant que le diviseur augmente ou diminue, le quotient diminue ou augmente.

117. Pour convertir un nombre entier en une expression fractionnaire équivalente qui ait un dénominateur donné, on multiplie le nombre entier par le dénominateur donné; le produit exprime le numérateur de l'expression fractionnaire demandée.

Par exemple, pour convertir 5 en septièmes, on observe que l'unité vaut 7 septièmes, le nombre 5 vaut 5 fois 7 septièmes, ou 5×7 septièmes, ou $\frac{5 \times 7}{7}$, ou $\frac{35}{7}$.

* 118. Pour convertir une fraction $\frac{A}{B}$ en une fraction équivalente dont le dénominateur soit un nombre donné N , on réduit d'abord $\frac{A}{B}$ à sa plus simple expression $\frac{a}{b}$ (n^o 102). Il ne s'agit

plus que de transformer $\frac{a}{b}$ en une fraction équivalente dont le dénominateur soit N ; pour que cette transformation soit possible, il faut et il suffit que N soit un multiple de b (n^o 101, 3^o). Lorsque cela a lieu, on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$ par le quotient q de la division de N par

b ; ce qui fournit la fraction demandée $\frac{a \times q}{b \times q}$ ou $\frac{aq}{N}$, car...

$b \times q = N$.

Ainsi, pour qu'une fraction soit convertible en une fraction équivalente dont le dénominateur soit un nombre donné N , il faut et il suffit que N soit divisible par le dénominateur de la fraction irréductible que l'on obtient en réduisant la fraction donnée à sa plus simple expression.

119. Pour trouver le nombre entier contenu dans un nombre

fractionnaire, on prend la partie entière du quotient du numérateur par le dénominateur.

Ainsi, la division de 13 par 5 donnant le quotient entier 2 et le reste 3, on voit que $\frac{13}{5}$ est composé de l'entier 2, plus de $\frac{3}{5}$.

120. Pour convertir en une seule expression fractionnaire un nombre entier joint à une fraction, on multiplie l'entier par le dénominateur de la fraction, on ajoute au produit le numérateur de cette fraction, et on donne à la somme le dénominateur de la fraction.

Par exemple, $2\frac{3}{5}$ ou $2 + \frac{3}{5}$ vaut $\frac{2 \times 5 + 3}{5}$ ou $\frac{13}{5}$; car l'entier 2 valant $\frac{10}{5}$, le nombre $2 + \frac{3}{5}$ vaut $\frac{10}{5} + \frac{3}{5}$ ou $\frac{13}{5}$.

121. Le calcul des fractions ne pouvant plus offrir aucune difficulté, nous allons voir comment on doit opérer sur les nombres composés d'entiers et de fractions.

1°. Dans l'addition, on cherche d'abord la somme des fractions; on en extrait l'entier qu'elle peut contenir, et on ajoute cet entier aux entiers qui accompagnent les fractions.

EXEMPLE. Soit proposé d'ajouter $7\frac{15}{9}$ à $3\frac{8}{9}$.

On dispose le calcul de la manière suivante, et on dit :

$3\frac{8}{9}$	8	plus $\frac{15}{9}$ valent $\frac{23}{9}$, ou $2\frac{5}{9}$; j'écris $\frac{5}{9}$ et je retiens 2;
$7\frac{15}{9}$	9	2 de retenue et 7 font 9 et 3 font 12, que je pose; ce
$12\frac{5}{9}$	5	qui donne $12\frac{5}{9}$ pour la somme cherchée.

2°. Dans la soustraction, on retranche directement la fraction de la fraction et le nombre entier du nombre entier.

Quand la fraction à soustraire est plus grande, on emprunte sur la partie entière du nombre dont on doit soustraire.

En voici des exemples :

de $8\frac{5}{7}$	de $6\frac{2}{7}$
ôtez $2\frac{3}{7}$	ôtez $3\frac{4}{7}$
reste $6\frac{2}{7}$	reste $2\frac{5}{7}$

Pour ôter $2\frac{3}{7}$ de $8\frac{5}{7}$, on retranche $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ et 2 de 8; la réunion des restes partiels $\frac{2}{7}$ et 6, compose le reste total $6\frac{2}{7}$.

Pour soustraire $3\frac{4}{7}$ de $6\frac{2}{7}$, on emprunte une des 6 unités du plus grand nombre; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$ jointe aux $\frac{2}{7}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{9}{7}$, desquels ôtant $\frac{4}{7}$, il reste $\frac{5}{7}$; et comme on a emprunté 1 sur le 6, on ôte 3 de 5, ou ce qui revient au même, on ôte 3 + 1 de 6 (3^e Remarque du n° 16); cela fournit le reste 2; la réunion des restes partiels détermine le reste total $2\frac{5}{7}$.

3°. Dans la multiplication et dans la division, on transforme d'abord chaque nombre donné en une seule expression fractionnaire (n° 120); et on applique ensuite à ces expressions fractionnaires, les principes des nos 115 et 116.

S'il s'agit des nombres $2\frac{3}{5}$, $4\frac{2}{7}$, on opérera sur les fractions équivalentes $\frac{13}{5}$, $\frac{30}{7}$; leur produit sera $\frac{13 \times 30}{5 \times 7}$ ou $\frac{390}{35}$, et leur quotient sera $\frac{13}{5} \times \frac{7}{30}$ ou $\frac{91}{150}$.

REMARQUE. Pour multiplier ou pour diviser un nombre entier par une fraction, on le met d'abord sous une forme fractionnaire, en lui donnant l'unité pour dénominateur; et la question se trouve ainsi réduite à multiplier ou à diviser deux fractions l'une par l'autre; ce qui s'exécute d'après les règles des nos 115 et 116.

122. Les preuves des quatre règles sur les fractions s'exécutent par les méthodes indiquées pour les nombres entiers.

§ II. Des fractions décimales, et des nombres décimaux.

123. Nous allons exposer maintenant les simplifications dont le calcul des fractions est susceptible, quand on suppose que l'unité n'admet que des subdivisions de dix en dix fois plus petites; c'est-à-dire quand le dénominateur est constamment l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéro. Les fractions de cette espèce prennent le nom de fractions décimales.

L'unité suivie de plusieurs zéro étant une puissance de 10, marquée par le nombre de ces zéro (n° 55), on voit que le dénominateur d'une fraction décimale exprime toujours une puissance de 10 marquée par le nombre des zéro contenus dans le dénominateur.

Ainsi, $\frac{23547}{1000}$ est une fraction décimale; le dénominateur, qui contient trois zéro, exprime la troisième puissance de 10.

124. Le système de numération adopté (n° 5) pour écrire les nombres entiers fournit le moyen de mettre les fractions décimales sous une forme ENTIERE, c'est-à-dire sous la forme de nombres entiers; car, d'après ce système, les chiffres d'un nombre exprimant des unités de dix en dix fois plus petites à mesure qu'on avance d'un rang vers la droite (n° 8), il en résulte que si l'on place des chiffres à la droite du chiffre des unités, le 1^{er} de ces chiffres représentera des dixièmes d'unité ou des dixièmes, le 2^e des dixièmes de dixième ou des centièmes, le 3^e des dixièmes de centième ou des millièmes; et ainsi de suite.

Pour distinguer le chiffre des unités, nous placerons à sa droite une virgule décimale de cette forme particulière ,.

Cela posé: pour mettre la fraction décimale $\frac{23547}{1000}$ sous une forme ENTIERE, on observe qu'elle se décompose en $\frac{23000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000}$, ou en 23 unités + $\frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$, ou en 23 unités + 5 dixièmes + 4 centièmes + 7 millièmes.

On peut donc l'écrire de cette manière 23,547.

Le nombre 23,547 est ce qu'on nomme un nombre décimal; les chiffres 2, 3, placés à gauche de la virgule, forment sa partie entière 23; les chiffres 5, 4, 7, placés à droite de la virgule sont ses chiffres décimaux ou ses décimales; ils composent la partie décimale 0,547 du nombre donné.

On verra d'une manière semblable que les fractions décimales

$$\frac{403}{100}, \quad \frac{23456}{1000}, \quad \frac{720003}{10000},$$

sont exprimées par les nombres décimaux

$$4,03, \quad 23,456, \quad 72,0003.$$

125. En général, pour convertir une fraction décimale en nombre décimal, on écrit le numérateur, et on sépare, à l'aide de la virgule, autant de décimales sur la droite de ce numérateur qu'il y a de zéro dans le dénominateur; c'est-à-dire qu'on place la virgule, dans le numérateur, de manière que le nombre décimal qui en résulte contienne autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéro dans le dénominateur de la fraction donnée.

REMARQUE. Quand le numérateur ne contient pas le nombre de chiffres nécessaires au placement de la virgule, on y supplée en mettant des zéro sur la gauche de ce numérateur.

Ainsi, pour convertir $\frac{207}{10000}$ en nombre décimal, on observe que la règle prescrivant de séparer cinq décimales à droite du numérateur 207, il est nécessaire de placer d'abord trois zéro sur la gauche de 207, ce qui donne 000207; on sépare alors cinq décimales dans 000207, ce qui fournit le nombre 0,00207 équivalent à la fraction donnée.

Désormais, lorsqu'on dira qu'on sépare des décimales sur la droite d'un nombre, il faudra entendre qu'on place la virgule décimale, dans le nombre donné, de manière que le résultat contienne le nombre de chiffres décimaux demandé.

126. Pour convertir un nombre décimal en fraction ordi-

naire, on prend une fraction dont le numérateur est le nombre entier résultant de la suppression de la virgule dans le nombre décimal donné, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la virgule. Cette règle n'est qu'une conséquence de celle du n° 125.

Par exemple, le nombre 23,547 est égal à $\frac{23547}{1000}$, car
 $23,547 = 23 \text{ unités} + 5 \text{ dixièmes} + 4 \text{ centièmes} + 7 \text{ millièmes}$

$$= 23 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$$

$$= \frac{23000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{23547}{1000}$$

127. Un nombre décimal peut s'énoncer de deux manières.

Par exemple, soit le nombre 34,509.

1°. Si l'on veut énoncer séparément la partie entière 34 et la partie décimale 0,509, on observera que la partie décimale valant $\frac{5}{10} + \frac{9}{1000}$, ou $\frac{500}{1000} + \frac{9}{1000}$, ou $\frac{509}{1000}$,

le nombre 34,509, dont le premier chiffre à droite exprime des millièmes, peut s'énoncer

Trente-quatre unités, cinq cent neuf millièmes.

2°. Le nombre 34,509 étant égal à la fraction décimale $\frac{34509}{1000}$ (n° 126) peut s'énoncer

Trente-quatre mille cinq cent neuf millièmes (n° 91).

128. En général : Un nombre décimal peut s'énoncer de deux manières : 1°. On énonce d'abord la partie entière comme si elle était seule; puis on énonce la partie décimale comme s'il s'agissait d'un nombre entier, et on termine ce dernier énoncé par le nom des unités du dernier chiffre à droite; 2°. On énonce le nombre proposé en faisant abstraction de la virgule, et on termine cet énoncé par le nom des unités décimales représentées par le dernier chiffre décimal du nombre proposé.

Ainsi, le nombre 207,039 peut s'énoncer

Deux cent sept unités, trente-neuf millièmes, ou

Deux cent sept mille trente-neuf millièmes.

129. Pour écrire un nombre décimal énoncé, on pose successivement, à partir de la gauche, le nombre d'unités de chaque espèce indiqué dans l'énoncé du nombre proposé, et on a soin de mettre des zéro à la place des unités intermédiaires qui peuvent manquer; on pose ensuite la virgule à la droite du chiffre des unités simples, de manière que chaque chiffre occupe le rang qui convient à l'espèce de ses unités. Cette règle se déduit de la précédente.

Ainsi, chacun des nombres,

Deux cent sept unités trente-neuf millièmes,

Deux cent sept mille trente-neuf millièmes,

s'écrit de cette manière, 207,039.

150. L'espèce des unités représentées par chaque chiffre d'un nombre décimal, ne dépendant que de la position de ce chiffre relativement à la virgule, on en déduit les propriétés suivantes :

1°. Un nombre décimal ne change pas de valeur lorsqu'on ajoute ou qu'on supprime des zéro sur sa droite.

Par exemple, $2,3 = 2,300$, car $\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}$.

2°. Suivant qu'on avance la virgule d'un rang, ou de deux rangs, ou de trois rangs, etc., vers la droite d'un nombre décimal, on rend ce nombre 10 fois plus grand, ou 100 fois plus grand, ou 1000 fois plus grand, etc.; de sorte qu'on le multiplie par 10, ou par 100, ou par 1000, etc.

Par exemple, soit le nombre 3,456; lorsqu'on avance la virgule de deux rangs vers la droite, on rend ce nombre 100 fois plus grand; car chacun des chiffres du résultat 345,6 exprime des unités 100 fois plus grandes qu'auparavant.

Cela est d'ailleurs évident, car les principes des n°s 126, 125, 97, donnent