Par exemple, la règle indiquée donne

$$3,47\,568\,568 \text{ etc.} = \frac{347568 - 347}{99900} = \frac{347\,221}{99900}.$$

* **144.** Nous allons faire voir qu'*il est toujours possible de reconnaître d'avance si la division du numérateur d'une fraction* $\frac{A}{B}$ *par son dénominateur, conduira à un quotient décimal exact, ou à un quotient décimal périodique simple, ou à un quotient décimal périodique mixte ; et de déterminer dans ce dernier cas, le nombre des chiffres de la partie décimale non périodique du quotient.*

1°. *Lorsque le dénominateur* B *ne contient que les facteurs premiers* 2, 5 *de* 10, *la division du numérateur par le dénominateur fournit toujours un quotient décimal exact.*

En effet, soit la fraction $\frac{A}{2^{m+n} \times 5^m}$. Pour la transformer en une fraction équivalente dont le dénominateur soit une puissance de 10, il suffit de multiplier ses deux termes par 5^n; car les principes des nᵒˢ **96**, **51**, donnent

$$\frac{A}{2^{m+n}\times 5^m} = \frac{A\times 5^n}{2^{m+n}\times 5^m\times 5^n} = \frac{A\times 5^n}{2^{m+n}\times 5^{m+n}} = \frac{A\times 5^n}{(2\times 5)^{m+n}} = \frac{A\times 5^n}{10^{m+n}}$$

et il suit de la règle du n° **125** que la dernière fraction est équivalente à un nombre décimal composé d'un nombre limité de chiffres. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Lorsque la fraction donnée* $\frac{A}{B}$ *étant irréductible, le dénominateur* B *est de la forme* $2^{m+n}\times 5^m$, *le quotient de* A *par* B *contient* $m+n$ *décimales.* En effet, dans ce cas, A ne contient pas le facteur 2 ; $A\times 5^n$ ne peut donc pas renfermer le facteur 10 ; le nouveau numérateur $A\times 5^n$ n'est donc pas divisible par 10 ; on ne peut donc pas transformer la fraction donnée en une fraction décimale équivalente dont le dénominateur soit moindre que 10^{m+n} ; le nombre décimal équivalent à la fraction donnée contiendra donc $m+n$ décimales (n° **125**).

On raisonnerait d'une manière semblable si dans le dénominateur de la fraction donnée le facteur affecté du plus fort exposant était 5.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{9}{5000}$, dont le dénominateur $5\,000 = 2^3\times 5^4$. La division de 9 par 5 000 fournira un quotient décimal exact qui contiendra 4 chiffres décimaux. Et en effet, si l'on effectue cette division, on obtiendra le quotient 0,0018.

On pouvait prévoir ce résultat, car

$$\frac{9}{2^3\times 5^4} = \frac{9\times 2}{2^4\times 5^4} = \frac{18}{10^4} = \frac{18}{10000} = 0{,}0018 \text{ (n° 125)}.$$

2°. *Lorsque le dénominateur* B *de la fraction* $\frac{A}{B}$ *contient un facteur premier* P, *autre que* 2 *et* 5, *qui ne divise pas le numérateur* A, *la division de* A *par* B *donne un quotient qui se prolonge indéfiniment ; et ce quotient est périodique.*

En effet ; si la division de A par B donnait un quotient décimal exact, ce quotient serait égal à une fraction ordinaire de la forme $\frac{N}{10^m}$ (n° **126**) ; on aurait

$$\frac{A}{B} = \frac{N}{10^m}; \quad \text{d'où} \quad A\times 10^m = N\times B \text{ (n° 110)}.$$

Or, P divise B; P divise donc $N\times B$ (n° **54**, 5°); P diviserait donc $A\times 10^m$. Or, P ne divise pas A; P diviserait donc 10^m (n° **72**); P diviserait donc 10 (n° **72**); ce qui est impossible puisque P n'est égal à aucun des facteurs premiers 2,5, de 10. Le quotient de A par B ne peut donc pas se terminer ; ce quotient sera donc périodique (n° **137**).

3°. *Lorsque le dénominateur* B *de la fraction* $\frac{A}{B}$ *ne contient aucun des facteurs* 2, 5, *la division de* A *par* B *fournit toujours un quotient décimal périodique simple.*

En effet ; B ne contenant aucun des facteurs 2,5, si l'on réduit $\frac{A}{B}$ à sa plus simple expression $\frac{a}{b}$, b ne contiendra aucun des facteurs 2,5; b admettra donc un facteur premier autre que 2 et 5, qui ne divisera pas a; le quotient de a par b, qui est le même que celui de A par B, sera donc périodique (2°). Cela posé: si ce quotient était périodique mixte, il serait équivalent à une fraction ordinaire $\frac{A'}{B'}$ dont le dénominateur B' serait divisible par 10, et dont le numérateur A' n'admettrait pas ce diviseur (n° **145**). On aurait,

$$\frac{a}{b}=\frac{A'}{B'};\quad \text{d'où}\quad aB'=bA',\ (\text{n° } \mathbf{110}).$$

Or, 10 divise B'; 10 diviserait donc aB' (n° **54**, 5°); 10 diviserait donc bA'. D'ailleurs, b ne contenant aucun des facteurs premiers 2,5, de 10, on est certain que 10 est premier avec b (n° **76**); 10 diviserait donc A' (n° **71**); ce qui est impossible. Le quotient périodique résultant de la division de a par b, ne peut donc être périodique mixte; il est donc périodique simple. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Lorsque la fraction* $\frac{A}{B}$ *est irréductible, si le numérateur A n'est pas terminé par un zéro, le premier chiffre à droite de la partie entière du quotient périodique simple Q, résultant de la division de A par B, ne sera jamais le même que le premier chiffre à droite de la période.* Car si ces deux chiffres étaient les mêmes, il résulte de la règle du n° **139** (2°) que le numérateur de la fraction $\frac{A'}{B'}$ équivalente à Q serait terminé par un zéro, et que tous les chiffres du dénominateur B' seraient des 9; ainsi, A' admettrait les facteurs 2,5 de 10 (n° **55**, 1°), tandis que B' ne contiendrait aucun de ces facteurs. Par conséquent, en réduisant la fraction $\frac{A'}{B'}$ à sa plus simple expression, la fraction irréductible résultante, qui serait nécessairement $\frac{A}{B}$ (n° **104**), serait telle que le numérateur A contiendrait encore les facteurs 2,5, qui entraient dans A'; A contiendrait donc le facteur 10; le 1er chiffre à droite de A serait donc un zéro; ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré.

Par exemple, si l'on pouvait avoir $\frac{A}{B}=23{,}543\,543$ etc., la règle du n° **139** (2°) donnerait

$$23{,}543\,543 \text{ etc.} = \frac{23543-23}{999}=\frac{23520}{999}.$$

En réduisant cette dernière fraction à sa plus simple expression, le résultat $\frac{7840}{333}$ devrait être $\frac{A}{B}$; on aurait A=7840. Le 1er chiffre à droite de A serait donc un zéro; ce qui est contre l'hypothèse.

4°. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{A}{B}$ *contient des facteurs 2,5, combinés avec d'autres facteurs premiers, la division de* A *par* B *conduit toujours à un quotient décimal périodique mixte.*

En effet; la fraction donnée étant irréductible, les facteurs premiers, autres que 2 et 5, contenus dans B ne sauraient diviser A; la division de A par B fournira donc un quotient décimal indéfini qui sera nécessairement périodique (2°). Ce quotient sera donc périodique simple ou périodique mixte.

Si le quotient de A par B était périodique simple, il serait équivalent à une fraction ordinaire $\frac{A'}{B'}$ dont le dénominateur B' ne serait composé que de chiffres égaux à 9 (n° **139**, 2°); B' n'admettrait donc aucun des facteurs 2,5 (n° **56**, 1° et 2°). On aurait $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$; d'où $AB'=A'B$ (n° **110**).

Or, on suppose que B contient au moins un des facteurs 2,5; le facteur 2, par exemple; 2 diviserait donc $A'B$

(nº 54, 5º); 2 diviserait donc AB'. Mais, 2 ne divise pas B'; 2 diviserait donc A (nº 72); d'ailleurs, 2 divise B; 2 diviserait donc A et B; la fraction donnée $\frac{A}{B}$ ne serait donc pas irréductible; ce qui est contre l'hypothèse. La division de A par B conduira donc toujours à un quotient décimal périodique mixte.

1re Remarque. *Lorsque les exposans des facteurs* 2, 5, *dans le dénominateur* B *de la fraction irréductible* $\frac{A}{B}$ *sont inégaux, le nombre des chiffres de la partie décimale non périodique est égal au plus grand de ces exposans.*

En effet, supposons que l'exposant du facteur 2 dans B soit plus grand que celui du facteur 5; le dénominateur B sera de la forme $2^{m+n} \times 5^m \times N$; N ne contiendra aucun des facteurs 2, 5; N sera premier avec A et avec 5; il s'agit de faire voir que le quotient périodique mixte, qui résultera de la division de A par B, contiendra $m+n$ chiffres décimaux entre la virgule et la première période.

Pour déduire cette propriété de (3º), on fait d'abord disparaître tous les facteurs 2, 5, contenus dans le dénominateur de la fraction donnée $\frac{A}{2^{m+n} \times 5^m \times N}$; à cet effet, on multiplie le numérateur A par 10^{m+n} ou par $2^{m+n} \times 5^{m+n}$; ce qui donne

$$\frac{A \times 2^{m+n} \times 5^{m+n}}{2^{m+n} \times 5^m \times N} = \frac{A \times 5^n}{N}, \text{ (nº 93).}$$

Or, en multipliant le numérateur A par 10^{m+n}, on a multiplié la fraction $\frac{A}{B}$ par 10^{m+n} (nº 97). On obtiendra donc la valeur de $\frac{A}{B}$ en divisant $\frac{A \times 5^n}{N}$ par 10^{m+n}. Mais, la fraction $\frac{A \times 5^n}{N}$ est irréductible; car le dénominateur N étant premier avec A et avec 5, est aussi premier avec le numérateur $A \times 5^n$ (nos 77 et 76); de plus, A ne contenant pas le facteur 2, le

numérateur $A \times 5^n$ ne contient pas le facteur 10; le 1er chiffre à droite de $A \times 5^n$ n'est donc pas un zéro; d'ailleurs le dénominateur N ne renferme aucun des facteurs 2, 5. Par conséquent, d'après (3º), la division de $A \times 5^n$ par N donnera un quotient décimal Q qui sera périodique simple, et le 1er chiffre à droite de la partie entière ne sera pas le même que le 1er chiffre à droite de la période. D'ailleurs, pour obtenir la valeur en décimales de $\frac{A}{B}$, il suffit de diviser Q par 10^{m+n}, ce qui revient à avancer la virgule de $m+n$ rangs à gauche dans le quotient périodique simple Q. Il suit de là, que la valeur décimale de $\frac{A}{B}$, contiendra $m+n$ chiffres entre la virgule et la première période (*), ce qui démontre le principe énoncé.

On prouverait de la même manière, que si le plus fort exposant m du facteur 5 dans B était plus grand que celui du facteur 2, la division de A par B donnerait un quotient décimal périodique mixte dont la partie décimale non périodique contiendrait m décimales.

Le principe énoncé dans la 1re remarque est donc démontré.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{7}{2750}$ dont le dénominateur $2750 = 2 \times 5^3 \times 11$. Le plus fort exposant des facteurs 2, 5, dans le dénominateur étant 3, la division de 7 par 2750 donnera un quotient périodique mixte dont la partie décimale non périodique contiendra nécessairement trois chiffres. Et en effet, si l'on effectue cette division, on trouvera le quotient 0,002 54 54 54 etc., dont la partie décimale non périodique contient les trois chiffres 0, 0, 2.

(*) Par exemple, si Q = 4125,67 67 etc., en avançant la virgule de *trois* rangs à gauche, le résultat 4,125 67 67 etc., contiendra nécessairement *trois* chiffres entre la virgule et la première période. Mais cela n'aurait plus lieu, si le chiffre des unités de Q était le même que le dernier chiffre de la période; car si l'on avait Q = 4127,67 67 etc., en avançant la virgule de *trois* rangs à gauche, le résultat 4,12 76 76 etc., ne renfermerait plus que *deux* chiffres entre la virgule et la première période 76.

2ᵉ REMARQUE. *Lorsque les facteurs* 2, 5, *sont affectés d'un même exposant m dans B, la partie décimale nonpériodique du quotient contient m chiffres.* En effet, dans ce cas, la fraction donnée est de la forme $\frac{A}{10^m \times N}$; on prouvera, comme dans la 1ʳᵉ *remarque*, que la fraction $\frac{A}{N}$ est irréductible; d'ailleurs le 1ᵉʳ chiffre à droite de *A* n'est pas zéro, puisque A ne contient aucun des facteurs 2, 5; la fraction $\frac{A}{N}$ sera donc exprimée par un quotient décimal périodique simple *Q* dans lequel le dernier chiffre de la partie entière ne sera jamais le même que le dernier chiffre de la période (3°); et par conséquent, lorsque pour obtenir la valeur décimale de $\frac{A}{10^m \times N}$, on avancera la virgule de *m* rangs vers la gauche dans la valeur *Q* de $\frac{A}{N}$, le nombre décimal périodique mixte que l'on obtiendra renfermera *m* décimales entre la virgule et la 1ʳᵉ période. Ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{21}{11000}$; on a

$$\frac{21}{11000} = \frac{21}{11 \times 10^3}, \quad \frac{21}{11} = 1{,}90\,90 \text{ etc.},$$

$$\frac{21}{11 \times 10^3} = 0{,}001\,90\,90 \text{ etc.}$$

Les exposans des facteurs 2, 5, de 10, dans le dénominateur 11000, sont égaux à 3, et on voit que la partie décimale non périodique contient *trois* chiffres.

5°. *La division du numérateur d'une fraction par son dénominateur ne peut jamais donner un quotient décimal périodique indéfini Q dont la période soit égale à* 9. En effet, si la période était 9, le quotient *Q* serait égal à une fraction de la forme $\frac{a}{10^n}$ (page 121); la division de *a* par 10^n devrait reproduire le quotient indéfini *Q*, ce qui n'est pas possible (nº 125).

CHAPITRE IV.

Des carrés et de la racine carrée; des cubes et de la racine cubique; des puissances et des racines.

§ Iᵉʳ. *Des carrés et de la racine carrée.*

145. *Le produit d'un nombre par lui-même est la deuxième puissance ou le* CARRÉ *de ce nombre; et le nombre qui multiplié par lui-même, fournit un nombre donné est la* RACINE DEUXIÈME, *ou la* RACINE CARRÉE *du nombre donné* (nº 50). Ainsi, le *carré* de 7, représenté par 7^2, est le produit 49 de 7 par 7; et la *racine carrée* de 49, indiquée par $\sqrt{49}$, est égale à 7, car $7 \times 7 = 49$.

En général, pour qu'un nombre α soit la racine carrée d'un nombre *A*, il faut et il suffit que le carré α^2 de α soit égal à *A*. Le carré de $\sqrt{A}$ est donc *A*, quel que soit *A*.

Lorsqu'on veut indiquer le carré d'une quantité, on met cette quantité entre parenthèses, et on place le chiffre 2 à droite de la parenthèse et un peu au-dessus.

Ainsi, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ représente le carré de $\frac{4}{5}$; chacune des expressions $\left(3\frac{5}{7}\right)^2$, $\left(3+\frac{5}{7}\right)^2$, indique le carré de la somme $\frac{26}{7}$ des nombres 3, $\frac{5}{7}$.

Le signe $\sqrt{}$ a reçu le nom de *radical*; on dit que $\sqrt{7}$ est une *expression radicale*, ou un *radical carré*.

146. *Lorsque la racine carrée d'un nombre entier α tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine existe nécessairement; mais elle ne saurait être exprimée exacte-*