CHAPITRE V.

Rapports, Proportions, Progressions et Logarithmes.

§ Ier. *Des rapports arithmétiques et géométriques.*

197. La différence entre deux quantités est leur *rapport arithmétique* ou par *différence;* le quotient de la division de deux quantités l'une par l'autre, est leur *rapport géométrique* ou par *quotient.*

Ainsi, le rapport arithmétique de 18 à 6 est 12, et le rapport géométrique de 18 à 6 est 3.

Les deux nombres 18, 6, dont on prend le rapport, se nomment les *termes* du rapport; le 1er terme 18 est l'*antécédent* du rapport, et le 2e terme 6 est le *conséquent.*

Pour indiquer le rapport géométrique de deux quantités, on écrit ces quantités l'une à côté de l'autre, en les séparant par deux points. Ainsi, l'expression $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$, indique le rapport géométrique de $\frac{2}{3}$ à $\frac{4}{5}$, ou le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

198. *Un rapport arithmétique ne change pas, quand on augmente ou quand on diminue ses deux termes d'un même nombre;* car lorsque deux nombres augmentent ou diminuent d'une même quantité, leur différence reste la même.

199. *Un rapport géométrique ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par une même quantité.* Car le rapport géométrique de deux quantités est égal au quotient de la 1re quantité par la 2e (no **197**); et on a démontré (no **42**, 3o) que le quotient ne change pas, lorsqu'on

multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre.

*Remarque. Cette démonstration suppose que les termes du rapport sont des nombres entiers. La même propriété subsiste, quels que soient les termes d'un rapport.

En effet, si q désigne le rapport géométrique de a à b, c'est-à-dire le quotient de a par b (no **197**), on aura

$$a = bq \text{ (n° 23)}; \quad \text{d'où} \quad a \times n = bq \times n.$$

Or, $bq\times n = b\times q\times n = b\times n\times q$ (no **147**, 1o et 2o) $= bn\times q$.

Donc $an = bn\times q$. Puisque le produit de bn par q est an, le quotient de an par bn sera égal à q (no **23**); mais, le quotient de a par b est aussi égal à q; ces deux quotiens sont donc égaux. Ce qui démontre le principe énoncé.

§ II. *Des proportions arithmétiques et géométriques.*

200. *La réunion de deux rapports égaux forme ce qu'on nomme une* PROPORTION.

Par exemple, le rapport arithmétique de 7 à 5 étant égal à celui de 11 à 9, les nombres 7, 5, 11, 9, forment une *proportion arithmétique ou par différence* que l'on écrit de cette manière,

$$7 . 5 : 11 . 9,$$

et que l'on énonce, 7 *est à* 5 *comme* 11 *est à* 9.

Le rapport géométrique de 7 à 3 étant égal à celui de 28 à 12, les nombres 7, 3, 28, 12, forment une *proportion géométrique ou par quotient* que l'on écrit de cette manière,

$$7 : 3 :: 28 : 12,$$

et que l'on énonce, 7 *est à* 3 *comme* 28 *est à* 12.

On appelle 1er antécédent et 1er conséquent, les deux termes du 1er rapport; et 2e antécédent, 2e conséquent, ceux du 2e rapport. Le 1er terme et le 4e sont les *extrêmes,* le 2e terme et le 3e sont les *moyens.*

Ainsi, dans la proportion géométrique $7 : 3 :: 28 : 12$, les deux termes 7, 3, du 1^er^ rapport sont le 1^er^ antécédent et le 1^er^ conséquent de la proportion; les deux termes 28, 12, du 2^e^ rapport sont le 2^e^ antécédent et le 2^e^ conséquent de la proportion; 7 et 12 sont les *extrêmes*, 3 et 28 sont les *moyens*.

Le quatrième terme d'une proportion est ce qu'on nomme une *quatrième proportionnelle* aux trois autres termes. Quand les *moyens* sont égaux, la proportion est dite *continue*.

Dans la *proportion continue* $5.7:7.9$, le terme *moyen* 7 est une *moyenne arithmétique* entre 5 et 9; cette proportion s'écrit ordinairement de cette autre manière, $\div 5.7.9$, et 9 est une *troisième proportionnelle arithmétique* à 5 et 7.

De même, $4:12::12:36$ est une proportion géométrique continue qu'on écrit de cette manière $∺ 4:12:36$; et 12 est une *moyenne géométrique* entre 4 et 36; 36 est une *troisième proportionnelle géométrique* à 4 et 12.

Des proportions arithmétiques.

201. Nous allons faire connaître les principales propriétés des proportions arithmétiques.

1°. *Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

En effet; soit la proportion arithmétique $7.5:11.9$; elle exprime que les rapports $7-5$, $11-9$, sont égaux. Par conséquent, si l'on augmente ces rapports de la somme $5+9$ des conséquens, les résultats $7-5+5+9$, $11-9+5+9$, seront égaux. Or, il est bien évident que $7-5+5+9$ se réduit à $7+9$, et que $11-9+5+9$ se réduit à $11+5$; la proportion

$$7.5:11.9 \text{ donne donc, } 7+9=11+5.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

2°. *Quand la somme de deux nombres est égale à la somme de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion arithmétique, dans laquelle les deux nombres qui composent une des sommes sont les extrêmes, et les deux autres nombres sont les moyens.*

En effet, soit l'égalité $7+9=11+5$.

Si des deux quantités égales $7+9$, $11+5$, on retranche le même nombre $5+9$, les restes seront nécessairement égaux. Or, pour ôter $5+9$ de $7+9$, il suffit de diminuer d'abord $7+9$ de 9, ce qui donne 7, et d'ôter ensuite 5 de 7, ce qui s'indique en écrivant, $7-5$. De même, ôter $5+9$ de $11+5$, revient à diminuer d'abord $11+5$ de 5, ce qui donne 11, et à ôter ensuite 9 de 11, ce qu'on indique en écrivant $11-9$.

L'égalité $7+9=11+5$, donne donc $7-5=11-9$; les rapports arithmétiques $7-5$, $11-9$, sont donc égaux; on a donc la proportion arithmétique, $7.5:11.9$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

On déduit de (1°) et (2°) que : 3° *si quatre nombres ne sont pas en proportion arithmétique, la somme des extrêmes n'est pas égale à la somme des moyens;* et que : 4° *si la somme des extrêmes n'est pas égale à celle des moyens, les quatre nombres donnés ne forment pas une proportion arithmétique.*

5°. *Le quatrième terme d'une proportion arithmétique est égal à la somme des moyens diminuée du premier terme*, car la proportion $7.5:11.9$, donnant $7+9=5+11$, si des deux quantités égales $7+9$, $5+11$, on ôte 7, les restes 9 et $5+11-7$, seront égaux.

6°. *La moyenne arithmétique entre deux nombres est égale à la moitié de leur somme;* car d'après (1°), la somme des deux nombres est égale au double de la moyenne arithmétique demandée.

Ainsi, la *moyenne arithmétique* entre 5 et 9 est la moitié de $5+9$, ou 7; et en effet, $5.7:7.9$.

Des proportions géométriques.

202. Les *proportions géométriques* ont reçu ce nom parce qu'elles sont d'un grand usage dans la Géométrie. Désormais, lorsque nous parlerons d'un *rapport* ou d'une *proportion*, sans en désigner l'espèce, on devra entendre qu'il s'agit d'un *rapport géométrique* ou d'une *proportion géométrique*.

Quand nous dirons qu'une proportion est *exacte*, nous entendrons que le rapport des deux premiers termes est égal au rapport des deux autres termes; c'est-à-dire que le quotient du 1er terme par le 2e est égal au quotient du 3e terme par le 4e; et quand nous dirons qu'une proportion n'est pas *exacte*, nous entendrons que ces quotiens sont inégaux.

Lorsque tous les termes d'une proportion sont des nombres entiers, chaque rapport est équivalent à une fraction qui a pour numérateur l'antécédent du rapport, et pour dénominateur le conséquent du même rapport; car une fraction exprime le quotient du numérateur par le dénominateur (n° 93). Mais, une proportion pouvant contenir des termes fractionnaires et des termes incommensurables, *on ne saurait établir rigoureusement la théorie des proportions qu'en considérant chaque rapport comme exprimant le quotient de l'antécédent par le conséquent*. Nous considérerons toujours les rapports sous ce point de vue général. Nous prendrons souvent des proportions dont les termes seront des nombres entiers ; mais comme nous supposerons dans tous les raisonnemens que chaque rapport exprime le quotient de l'antécédent par le conséquent, nos démonstrations conviendront à des quantités quelconques.

203. Pour *démontrer généralement les propriétés fondamentales des proportions*, nous considérerons deux rapports quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dont les termes a, b, c, d, soient commensurables ou incommensurables; il suit de la définition d'une proportion (n° **200**), que suivant que ces rapports seront égaux ou inégaux, la proportion $a : b :: c : d$, sera exacte ou ne sera pas exacte. Cela posé :

1°. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* En effet; si l'on a $a : b :: c : d$, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, seront égaux. Multipliant les deux termes

a, b, du 1er rapport par d, et ceux du second par b, ce qui ne change pas ces rapports (n° **199**), on aura

$\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db}$. Or, $bd = db$ (n° **147**, 1° et 2°); donc $ad = cb$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Remarque. On voit que l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donne $a \times d = b \times c$.

2°. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion est exacte.* C'est-à-dire que si le produit ad de deux quantités est égal au produit bc de deux autres quantités, ces quatre quantités formeront une proportion $a : b :: c : d$, dans laquelle, les deux facteurs a, d, du 1er produit seront les extrêmes, et les deux facteurs b, c, du 2e produit seront les moyens. En effet, les produits ad, bc, étant supposés égaux, si on les divise par bd, les quotiens $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, seront nécessairement égaux. Or, d'après le principe du n° **199**, on ne change pas les rapports $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, en divisant les deux termes ad, bd, du 1er rapport par d, et les deux termes bc, bd, du 2e rapport par b ; les résultats $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, seront donc égaux. On aura donc, $a : b :: c : d$.

Remarque. On voit que l'égalité $ad = bc$ donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3°. *Lorsqu'une proportion n'est pas exacte, le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens;* car, il résulte de (2°) que si ces deux produits étaient égaux, la proportion serait exacte, ce qui est contre l'hypothèse.

4°. *Lorsque le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens, la proportion n'est pas exacte;* car il résulte de (1°) que si la proportion était exacte, le produit des extrêmes serait égal à celui des moyens; ce qui est contre l'hypothèse.

* **204.** Les propriétés du n° **203**, servant de base à la théorie

des proportions, nous allons en donner une seconde démonstration. Considérons une proportion quelconque,

1er *antécédent* : 1er *conséquent* :: 2e *antécédent* : 2e *conséquent*.

Un rapport exprimant toujours le quotient de la division de l'antécédent par son conséquent (nº **197**), l'antécédent est égal au produit du conséquent par le rapport. On a donc,

1er *antécédent* = 1er *conséquent* × 1er *rapport*,
2e *antécédent* = 2e *conséquent* × 2e *rapport*.

Si l'on substitue ces expressions des antécédens, la proportion ci-dessus deviendra

1er *conséq.* × 1er *rapport* : 1er *conséq.* :: 2e *conséq.* × 2e *rapp.* : 2e *conséq.*

On voit dans cette dernière proportion, que les trois facteurs qui entrent dans le produit des extrêmes sont les deux conséquens et le 1er rapport, tandis que les trois facteurs qui entrent dans le produit des moyens sont les deux mêmes conséquens et le 2e rapport; et comme le produit de trois facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (nº **147**; 1º et 2º), il suit de là que

(1)... *le produit des extrêmes* = *le produit des conséquens* × 1er *rapport*,
(2)... *le produit des moyens* = *le produit des conséquens* × 2e *rapport*.

Ces deux égalités conduisent aux propriétés suivantes :

1º. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

En effet, puisqu'il y a proportion, le 1er rapport est égal au 2e (nº **200**); les trois facteurs qui entrent dans l'expression (1) du produit des extrêmes sont donc respectivement égaux aux trois facteurs qui entrent dans l'expression (2) du produit des moyens; ces deux produits sont donc égaux (nº **147**, 1º et 2º).

2º. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion est exacte;* car, dans ce cas, l'expression (1) du produit des extrêmes devant être égale à l'expression (2) du produit des moyens, le produit des deux conséquens multiplié par le 1er rapport doit être égal au produit des

deux mêmes conséquens multiplié par le 2e rapport; le 1er rapport est donc nécessairement égal au 2e; ces deux rapports forment donc une proportion (nº **200**).

3º. *Lorsqu'une proportion n'est pas exacte, le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens;* car, dans ce cas, le 1er rapport n'étant pas égal au 2e, le produit des deux conséquens multiplié par le 1er rapport, n'est pas égal au produit des deux mêmes conséquens multiplié par le 2e rapport; l'expression (1) du produit des extrêmes n'est donc pas égale à l'expression (2) du produit des moyens; ces produits ne sont donc pas égaux.

4º. *Quand le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens, la proportion n'est pas exacte;* car, dans ce cas, l'expression (1) du produit des extrêmes ne devant pas être égale à l'expression (2) du produit des moyens, le produit des deux conséquens multiplié par le 1er rapport, n'est pas égal au produit des mêmes conséquens multiplié par le 2e rapport; le 1er rapport n'est donc pas égal au 2e; ces rapports ne forment donc pas une proportion.

205. Nous allons faire voir que toutes les autres propriétés des proportions peuvent se déduire des quatre principes fondamentaux que nous venons de démontrer (nos **203** et **204**).

1º. *Le quatrième terme d'une proportion est égal au produit des moyens divisé par le premier terme.* Car la proportion $a : b :: c : d$ donnant $ad = bc$ (nº **203**, 1º), si l'on divise les deux produits égaux ad, bc, par a, les quotiens d, $\frac{b \times c}{a}$, seront nécessairement égaux.

On prouverait de même que *le 1er terme est égal au produit des moyens divisé par le 4e terme, et que chaque moyen est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.*

Par conséquent, *lorsqu'on connaît trois termes d'une proportion, on peut toujours en déduire le quatrième terme.*

Exemple. *Calculer le quatrième terme x de la proportion dont les trois premiers termes sont* 6, 2 *et* 24.

On a $6:2::24:x$; d'où $x=\frac{2\times24}{6}=8$.

2°. *La moyenne géométrique entre deux nombres est égale à la racine carrée du produit de ces deux nombres.* Car la moyenne géométrique x entre a et b est déterminée par la proportion $a:x::x:b$, qui donne $x^2=ab$; d'où $x=\sqrt{ab}$.

Par exemple, pour trouver une moyenne géométrique x, entre 4 et 36, on pose la proportion $4:x::x:36$; d'où

$$x^2=36\times4,\quad x=\sqrt{36\times4}=\sqrt{144}=12.$$

3°. *Si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on transposera les moyens ou les extrêmes;* car le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens (nº **203**, 1°), les quatre nombres seront encore en proportion (nº **203**, 2°).

Par exemple, la proportion $7:3::28:12$, étant exacte, chacune des proportions

$$7:28::3:12,\quad 12:3::28:7,\quad 12:28::3:7,$$

est nécessairement exacte; car la 1re donne $7\times12=3\times28$; et il résulte de cette égalité que dans chacune des trois autres proportions, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, de sorte que ces proportions sont exactes (nº **203**, 2°).

4°. *Si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on mettra les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens;* car le produit des extrêmes restera égal à celui des moyens.

Par exemple, la proportion $7:3::28:12$, fournit les quatre autres proportions,

$$3:7::12:28,\quad 3:12::7:28,\quad 28:7::12:3,\quad 28:12::7:3.$$

Remarque. La proportion $7:3::28:12$ donnant $3:7::12:28$, on voit qu'*une proportion ne cesse pas d'être exacte, lorsqu'on transpose les deux termes de chaque rapport.*

5°. *Dans toute proportion, le rapport des conséquens est égal au rapport des antécédens;* car on vient de voir (4°) que la proportion $7:3::28:12$ donne $3:12::7:28$.

206. *On peut multiplier ou diviser un extrême et un moyen par un même nombre, sans que la proportion cesse d'être exacte.* En effet :

1°. Quand les deux termes qu'on multiplie ou qu'on divise appartiennent à un même rapport, ce rapport ne change pas (nº **199**); la proportion ne cesse donc pas d'être exacte.

2°. Lorsque les deux termes que l'on veut multiplier ou diviser par un même nombre n'appartiennent pas à un même rapport, on transpose d'abord les moyens (nº **203**, 3°); on applique ensuite à la nouvelle proportion le principe démontré (1°); et en transposant les moyens dans la dernière proportion, on obtient la proportion demandée.

Par exemple, pour démontrer que la proportion

$$7:3::28:12 \text{ donne } 7\times5:3::28\times5:12,$$

on effectue successivement les transformations qui viennent d'être indiquées, ce qui donne

$7:28::3:12$ (nº 205, 3°), $7\times5:28\times5::3:12$ (1°), $7\times5:3::28\times5:12$ (nº 205, 3°).

207. Le principe du nº **206** fournit le moyen de *faire disparaître les termes fractionnaires qui peuvent entrer dans une proportion,* et de *simplifier les termes d'une proportion lorsqu'on aperçoit un facteur commun entre un extrême et un moyen.*

Exemple. *Soit la proportion* $\frac{70}{6}:\frac{5}{4}::\frac{30}{8}:\frac{45}{112}$.

On réduit les deux premières fractions à leur plus petit dénominateur commun 12, et les deux autres à leur plus petit dénominateur commun 112; la proportion devient

$$\frac{140}{12}:\frac{15}{12}::\frac{420}{112}:\frac{45}{112}.$$

On multiplie les deux termes du 1er rapport par 12, et ceux du 2e rapport par 112, ce qui revient à supprimer les dénominateurs 12, 144; on obtient de cette manière la proportion, $140:15::420:45$, qui se réduit à $14:15::42:45$, en divisant les antécédens par leur facteur commun 10.

208. *Quand deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment une proportion;* car ces deux autres rapports étant égaux au rapport commun, sont égaux entre eux.

Ainsi, les proportions $5:7::15:21$, $5:7::10:14$, donnent $15:21::10:14$.

Remarque. Pour indiquer que les trois rapports $5:7$, $15:21$, $10:14$, sont égaux, on écrit souvent

$5:7::15:21::10:14$, ce qui signifie que

5 *est à* 7 *comme* 15 *est à* 21, *comme* 10 *est à* 14.

209. *Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédens ou les mêmes conséquens, les quatre autres termes forment une proportion.* Cette propriété se démontre, en transposant d'abord les moyens (nº **205**, 3°), et en appliquant ensuite le principe du nº **208** à la nouvelle proportion.

Ainsi, les proportions $5:15::7:21$, $5:10::7:14$, donnent $15:21::10:14$;

car en transposant les moyens (nº **205**, 3°), elles deviennent,

$$5:7::15:21,\quad 5:7::10:14;$$

et ces deux dernières ayant un rapport commun, le principe du nº 208 donne $15:21::10:14$.

210. *Toute proportion jouit encore des propriétés suivantes :*

1°. *La somme des deux premiers termes est au* 2^e^ *terme, comme la somme des deux autres termes est au* 4^e^ *terme.*

En effet; le rapport d'un antécédent à son conséquent exprimant le quotient de l'antécédent par son conséquent, si l'on augmente chaque antécédent de son conséquent, chaque rapport augmentera d'une unité (nº **45**); or les deux premiers rapports étaient égaux; les deux nouveaux rapports seront donc égaux; ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, la proportion $18:6::12:4$, donne

$$18+6:6::12+4:4,\quad \text{ou}\quad 24:6::16:4.$$

2°. *La différence entre les deux premiers termes est au* 2^e^ *terme, comme la différence entre les deux autres termes est au quatrième terme.* Chaque antécédent pouvant être plus grand ou plus petit que son conséquent, nous allons considérer successivement ces deux cas :

Lorsque les antécédens sont plus grands que leurs conséquens, en diminuant chaque antécédent de son conséquent, chaque rapport diminue d'une unité; et comme les deux premiers rapports étaient égaux, les deux nouveaux rapports seront encore égaux.

Ainsi, la proportion $18:6::12:4$ donne

$$18-6:6::12-4:4,\quad \text{ou}\quad 12:6::8:4.$$

Lorsque les antécédens sont moindres que leurs conséquens, on ramène ce cas au précédent en transposant d'abord les deux termes de chaque rapport (nº **205**, 4°).

3°. *La somme des deux premiers termes est à la somme des deux autres, comme le* 2^e^ *terme est au* 4^e^, *et comme le* 1^er^ *terme est au* 3^e^.

Par exemple, la proportion (1)... $18:6::12:4$, donne

(2)... $18+6:12+4::6:4$ et (3)... $18+6:12+4::18:12$.

En effet; d'après (1°), la proportion (1) donne

$$18+6:6::12+4:4;$$

en changeant l'ordre des moyens dans cette dernière (nº **205**, 3°), on obtient la proportion (2). D'ailleurs, d'après le principe du nº **205** (5°), la proportion (1) donne (4)... $6:4::18:12$; et les proportions (2), (4), ayant un rapport commun, si on leur applique le principe du nº **208**, on en déduira la proportion (3).

4°. *La différence entre les deux premiers termes est à la différence entre les deux autres, comme le* 2^e^ *terme est au* 4^e^, *et comme le* 1^er^ *terme est au* 3^e^. Cette propriété se démontre comme (3°).

5°. *La somme des deux premiers termes est à la somme des deux autres, comme la différence entre les deux premiers*