termes est à la différence entre les deux autres. Cette propriété se déduit de (3°), (4°), et du principe du n° **208**.

Ainsi, la proportion (1)... $18:6::12:4$, donne successivement

$$18+6:12+4::6:4\ (3°),\quad 18-6:12-4::6:4\ (4°);$$

et d'après le principe du n° **208**, ces deux dernières donnent

$$18+6:12+4::18-6:12-4.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

6°. *La somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit de changer l'ordre des moyens dans la proportion donnée, et d'appliquer ensuite à cette nouvelle proportion le principe énoncé (3°).

Par exemple, la proportion $18:6::12:4$, donne

$$18+12:6+4::12:4,\quad 18+12:6+4::18:6;$$

7°. *La différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

Cette propriété se démontre comme (6°), en changeant d'abord l'ordre des moyens dans la proportion donnée, et en appliquant à la nouvelle proportion le principe énoncé (4°).

Ainsi, la proportion $18:6::12:4$ donne

$$18-12:6-4::12:4,\quad 18-12:6-4::18:6.$$

8°. *La somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens.* Cette propriété se déduit de (6°), (7°), et du principe du n° **208**.

Par exemple, d'après (6°) et (7°), la proportion $18:6::12:4$ donne $18+12:6+4::12:4$, $18-12:6-4::12:4$, et d'après le principe du n° **208**, ces deux dernières proportions donnent $18+12:6+4::18-12:6-4$.

9°. *Les puissances semblables de quatre nombres qui sont en proportion, forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soit la proportion $18:6::12:4$,
je dis qu'on aura, $18^5:6^5::12^5:4^5$.

Car, la 1re proportion donnant $18\times4=6\times12$, on a

$$(18\times4)^5=(6\times12)^5,\text{ ou }18^5\times4^5=6^5\times12^5\ (\text{n° }\mathbf{147},\ 4°);$$

d'où, $18^5:6^5::12^5:4^5$, (n° **205**, 2°).

10°. *Les racines semblables de quatre nombres qui sont en proportion, forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soit la proportion $2:3::4:6$;

je dis qu'on aura $\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{3}::\sqrt[5]{4}:\sqrt[5]{6}$.

Car, la 1re proportion donnant $2\times6=3\times4$ (n° **205**, 1°)
on a $\sqrt[5]{2\times6}=\sqrt[5]{3\times4}$; ce qui revient à

$$\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{6}=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{4},\ (\text{n° }\mathbf{147},\ 5°);\quad\text{d'où}$$

$$\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{3}::\sqrt[5]{4}:\sqrt[5]{6},\ (\text{n° }\mathbf{205},\ 2°).$$

211. *Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions les uns par les autres et par ordre, les quatre produits forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soient les proportions

$$3:6::4:8,\quad 5:7::20:28,\quad 2:11::12:66.$$

Je dis qu'on aura

$$3\times5\times2:6\times7\times11::4\times20\times12:8\times28\times66.$$

Car, d'après le principe du n° **205** (1°), les trois premières proportions donnant

$$3\times8=6\times4,\quad 5\times28=7\times20,\quad 2\times66=11\times12,$$

le produit des facteurs 3×8, 5×28, 2×66, sera égal au produit des facteurs 6×4, 7×20, 11×12; et d'après les principes du n° **147** (1°, 2° et 3°), on aura

$$3\times8\times5\times28\times2\times66=6\times4\times7\times20\times11\times12,$$

ou $3.5.2 \times 8.28.66 = 6.7.11 \times 4.20.12$; d'où

$3 \times 5 \times 2 : 6 \times 7 \times 11 :: 4 \times 20 \times 12 : 8 \times 28 \times 66$, (nº **203**, 2º).

212. *Dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque d'antécédens est à la somme de leurs conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

En effet, soient les rapports égaux

$3 : 6 :: 4 : 8 :: 5 : 10$; on en déduit

$3 : 6 :: 4 : 8$, $4 : 8 :: 5 : 10$.

Cela posé, il résulte du principe du nº **210** (6º), que la proportion $3 : 6 :: 4 : 8$ donne $3 + 4 : 6 + 8 :: 4 : 8$.

Or, $4 : 8 :: 5 : 10$; ces deux dernières proportions donnent

$$3 + 4 : 6 + 8 :: 5 : 10, \text{ (nº 208)}.$$

Enfin, si l'on applique le principe du nº **210** (6º) à la dernière proportion, on aura

$$3 + 4 + 5 : 6 + 8 + 10 :: 5 : 10.$$

Ces relations démontrent le principe énoncé.

213. Les proportions jouissent de plusieurs autres propriétés qui seraient trop longues à énoncer, mais que l'on peut facilement déduire de ce qui précède. D'ailleurs, les principes du nº **203** (2º et 4º) fournissent le moyen de *reconnaître si une proportion jouit d'une propriété indiquée;* à cet effet, on pose d'abord la proportion qui résulte de la propriété indiquée; on forme ensuite le produit des extrêmes et celui des moyens; lorsque ces produits sont égaux, la propriété énoncée est vraie (nº **203**, 2º); quand ces produits ne sont pas égaux, la propriété indiquée est fausse (nº **203**, 4º).

§ III. *Des progressions.*

Des progressions arithmétiques, ou par différence.

214. *La progression arithmétique ou par différence est formée d'une suite de termes, croissans ou décroissans, tels que*

la différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante; cette différence est la *raison* de la progression.

Par exemple, les nombres 4, 7, 10, 13, 16, forment une *progression arithmétique croissante* dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi $\div 4.7.10.13.16$; on l'énonce

4 *est à* 7, *comme* 7 *est à* 10, *comme* 10 *est à* 13, *comme* 13 *est à* 16.

Les mêmes nombres écrits dans l'ordre inverse donnent la *progression arithmétique décroissante* $\div 16.13.10.7.4$.

215. *Dans toute progression arithmétique croissante*, le 2ᵉ terme est égal au 1ᵉʳ plus la raison; le 3ᵉ est égal au 2ᵉ plus la raison, c'est-à-dire au 1ᵉʳ terme augmenté de 2 fois la raison; et en général, *un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

On verra d'une manière semblable que *dans toute progression arithmétique décroissante, un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme diminué d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

216. Problème. *Insérer n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés A, B;* c'est-à-dire *placer n termes* entre A et B, de manière que l'ensemble de ces $n + 2$ termes forme une progression arithmétique. Supposons que A soit moindre que B.

Pour être en état de trouver les n moyens arithmétiques demandés, il suffit de déterminer la *raison x* d'une progression arithmétique croissante, dont le 1ᵉʳ terme est A, dont le dernier terme est B, et dont le nombre des termes est $n + 2$. Le terme B étant précédé de $n + 1$ termes, il suit du principe du nº **215** que B sera égal au 1ᵉʳ terme A augmenté de $n + 1$ fois la raison x. La différence $B - A$ est donc égale au produit de x par $n + 1$. *On obtiendra donc la raison x demandée, en divisant la différence $B - A$ par $n + 1$.*

Les n moyens arithmétiques demandés seront

$$A + x,\ A + 2x,\ A + 3x, \ldots,\ A + nx.$$

Exemple. *Insérer six moyens arithmétiques entre* 2 *et* 23.

On divise $23-2$ par $6+1$, c'est-à-dire 21 par 7, le quotient 3 exprimant la raison de la progression cherchée, cette progression est ÷ 2.5.8.11.14.17.20.23.

Les *moyens* demandés sont donc 5, 8, 11, 14, 17 et 20.

217. Dans toute progression arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs quelconques étant une constante d (nº **214**), il est facile de déduire de la règle du nº **216** que *si l'on insère successivement un même nombre n de moyens arithmétiques entre le* 1er *terme et le* 2e *terme d'une progression arithmétique, entre le* 2e *terme et le* 3e, *etc., l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression arithmétique*. Car ces termes croissent ou décroissent d'une quantité constante égale au quotient de la raison d par $n+1$.

Par exemple, soit la progression ÷ 2.14.26, dont la raison est 12; si l'on insère trois moyens arithmétiques entre 2 et 14, et trois autres moyens arithmétiques entre 14 et 26, on obtiendra la nouvelle progression ÷ 2.5.8.11.14.17.20.23.26, dont la raison 3 est égale au quotient de 12 par $3+1$.

218. *Pour obtenir la somme des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme, le nombre des termes et le dernier terme, il suffit d'ajouter le premier terme au dernier, et de multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes*. En effet; soit la progression arithmétique

÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

En écrivant ses termes dans un ordre inverse, on forme la progression ÷ 15. 13. 11. 9. 7. 5. 3.

Si l'on ajoute les termes correspondans de ces deux progressions, on obtiendra les sommes partielles

$$3+15,\ 5+13,\ 7+11,\ 9+9,\ 11+7,\ 13+5,\ 15+3.$$

Je dis que chacune de ces sommes partielles est égale à la première, c'est-à-dire au premier terme plus le dernier terme de la progression primitive. En effet, d'après les propriétés du nº **215** : dans la 2e somme partielle, 5 est égal au 1er terme 3 plus la raison, et 13 est égal au dernier terme 15 moins la raison; la somme de ces deux nombres se réduit donc au 1er terme plus le dernier; de même, dans la 3e somme partielle, 7 se compose du 1er terme 3 plus 2 fois la raison, et 11 se compose du dernier terme 15 moins 2 fois la raison; ce qui, en ajoutant, donne encore le 1er terme plus le dernier; et ainsi de suite. La somme des termes de ces deux progressions, c'est-à-dire le double de la somme des termes de l'une d'elles, est donc égale à la somme $3+15$ du 1er terme et du dernier, répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression. On en déduit la règle énoncée.

Exemple. *Calculer la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est* 1, *dont le nombre des termes est* 14, *et dont le dernier terme est* 27.

On obtiendra la somme demandée en multipliant $27+1$ par $\frac{14}{2}$, ou 28 par 7; ce qui donnera 196. Et en effet, les termes de la progression sont les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, dont la somme est 196.

***219**. Pour *déterminer la somme des termes d'une progression arithmétique croissante, connaissant le premier terme, le nombre n des termes et la raison*, on calcule d'abord le dernier terme, en observant que d'après le principe du nº **215**, ce terme est égal au 1er terme augmenté de $n-1$ fois la raison. On connaît alors le 1er terme, le nombre des termes et le dernier terme; la règle du nº **218** donne le moyen de trouver la somme demandée.

***220**. Problème. *Calculer la somme x des n premiers nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, *etc.*

Ces n nombres forment un progression arithmétique dont le 1er terme est 1, dont le nombre des termes est n, et dont la raison est 2. On déduira d'abord du principe du nº **215** que le $n^{ième}$ et dernier terme est $2n-1$. Connaissant : le 1er terme 1, le nombre n des termes, et le dernier terme $2n-1$, de la progression, on déduira de la règle du nº **218** que la somme x

de ces n termes est égale au produit de $1 + 2n - 1$ par $\frac{n}{2}$, ou à $2n \times \frac{n}{2}$, ou à n^2.

Ainsi, *la somme des n premiers nombres impairs*, 1, 3, 5, 7,..., $2n-1$, *est égale au carré* n^2 *de* n. Et en effet,

$$1+3=4=2^2,\ 1+3+5=4+5=9=3^2;\ \text{etc.}$$

Des progressions géométriques, ou par quotient.

221. *La progression géométrique ou par quotient est formée d'une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient reste constant;* ce quotient est la *raison* de la progression.

Par exemple, chacun des nombres 2, 6, 18, 54, 162, divisé par celui qui le précède, donnant le même quotient 3, ces nombres forment une *progression géométrique croissante* dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi,

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162;\quad \text{on l'énonce,}$$

2 *est à* 6, *comme* 6 *est à* 18, *comme* 18 *est à* 54, *comme* 54 *est à* 162.

Les mêmes nombres écrits dans un ordre inverse donnent la *progression géométrique décroissante*,

$$\div 162 : 54 : 18 : 6 : 2,\ \text{dont la raison est } \frac{1}{3}.$$

En général, *selon qu'une progression géométrique est croissante ou décroissante, la* RAISON *de cette progression est plus grande ou plus petite que l'unité.*

222. D'après cette définition de la progression géométrique: le 2ᵉ terme est égal au 1ᵉʳ multiplié par la raison; le 3ᵉ est égal au 2ᵉ multiplié par la raison, ce qui revient au produit du 1ᵉʳ terme par la 2ᵉ puissance de la raison; et en général: *Un terme d'un rang quelconque est égal au produit du premier terme par la raison élevée à une puissance indiquée par le nombre des termes qui le précèdent.*

223. PROBLÈME. *Insérer n moyens géométriques entre deux nombres donnés A, B;* c'est-à-dire, placer n termes entre A et B, de manière que l'ensemble de ces $n+2$ termes forme une progression géométrique.

Pour être en état de trouver les n moyens géométriques demandés, il suffit de déterminer la *raison* x d'une progression géométrique dont le 1ᵉʳ terme est A, dont le dernier terme est B, et dont le nombre des termes est $n+2$. Le terme B étant précédé de $n+1$ termes, il suit du principe du nº **222**, que B sera égal à $A \times x^{n+1}$; le quotient de B par A sera donc égal à x^{n+1}. *On obtiendra donc la raison x demandée en extrayant la racine $n+1^{ième}$ du quotient de B par A.*

Les n moyens géométriques demandés sont,

$$A \times x,\ A \times x^2,\ A \times x^3, \ldots, A \times x^n.$$

EXEMPLE. *Insérer deux moyens géométriques entre* 5 *et* 320.

On divise 320 par 5, et on extrait la racine 3ᵉ du quotient 64; le résultat 4 exprimant la raison de la progression, cette progression est $\div 5 : 20 : 80 : 320$. De sorte que les moyens géométriques demandés sont 20 et 80.

224. Dans toute progression géométrique, la division de chaque terme par celui qui le précède donnant toujours un même quotient q (nº **221**), il est facile de déduire de la règle du nº **223**, que *si l'on insère successivement un même nombre n de moyens géométriques entre le* 1ᵉʳ *terme et le* 2ᵉ *terme d'une progression géométrique, entre le* 2ᵉ *terme et le* 3ᵉ, etc., *l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression géométrique.* Car en divisant chacun de ces termes par celui qui le précède, on obtient un quotient constant égal à la racine $n+1^{ième}$ de la raison q de la progression primitive.

Par exemple, soit la progression $\div 2 : 128 : 8192$, dont la raison est 64; si l'on insère deux moyens géométriques entre 2 et 128, et deux autres moyens entre 128 et 8192, on trouvera la nouvelle progression,

$$\div 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048 : 8192,$$

dont la raison 4 est égale à $\sqrt[3]{64}$.

*225. Lorsque dans la résolution du problème du nº **223**, on ne veut faire usage que de l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique, le nombre n des moyens géométriques qu'on insère entre les deux nombres donnés, doit être tel que l'*indice* $n+1$ de la racine qu'il faut extraire pour obtenir la *raison* cherchée, ne renferme que les facteurs premiers 2 et 3 (nº **194**); c'est-à-dire que $n+1$ doit être de la forme $2^a \times 3^b$, a et b désignant des nombres entiers quelconques.

* **226**. *Pour obtenir la somme x des termes d'une progression géométrique croissante, connaissant le premier terme a, la raison q et le dernier terme d, on multiplie le dernier terme par la raison; on retranche du produit le premier terme de la progression, et on divise le reste par la raison diminuée d'une unité; le quotient exprime la somme demandée.*

En effet; il suit des propriétés des nºs **221** et **222**, que q est plus grand que 1, et que les termes de la progression sont, $a, aq, aq^2, \ldots, \frac{d}{q^2}, \frac{d}{q}, d$. De sorte que,

$$x = a + aq + aq^2 + \ldots + \frac{d}{q^2} + \frac{d}{q} + d.$$

Si l'on multiplie la somme x et toutes ses parties, par q, on aura $\quad x \times q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + \frac{d}{q} + d + dq.$

Si l'on retranche une fois x de q fois x, les termes aq, $aq^2, \ldots, d$, disparaîtront, car ils se trouvent en même temps dans x et dans $x \times q$; il restera,

$$q \text{ fois } x \text{ moins une fois } x = dq - a.$$

Or, x pris q fois moins une fois, revient à $q-1$ fois x, ou au produit de x par $q-1$. Le nombre $dq-a$ étant le produit de x par $q-1$, on obtiendra x en divisant $dq-a$ par $q-1$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Exemple. *Soit la progression*

$$\div 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048.$$

La règle indiquée donnera

$$x = \frac{2048 \times 4 - 2}{4-1} = \frac{8192-2}{3} = \frac{8190}{3} = 2730.$$

Et en effet, si l'on effectue l'addition des nombres 2, 8, 32, 128, 512, 2048, on trouvera que leur somme est 2730.

* **227**. Pour *déterminer la somme des termes d'une progression géométrique, connaissant le premier terme, la raison et le nombre des termes*, on calcule d'abord le dernier terme, en observant que d'après le principe du nº **222**, ce terme est égal au produit du 1er terme par une puissance de la raison indiquée par le nombre des termes diminué de 1. On connaît alors le 1er terme, la raison et le dernier terme; la règle du nº **226** fournit la somme demandée.

§ IV. *Théorie des logarithmes.*

Des logarithmes dans un système quelconque.

228. Quand on compare deux progressions indéfinies, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro, chaque terme de la seconde progression est le *logarithme* du terme correspondant de la première progression; l'ensemble des termes de ces deux progressions, forme un *système de logarithmes*. Il suit de cette définition que *le logarithme de l'unité est égal à zéro.*

Pour indiquer le logarithme d'un nombre, on place devant ce nombre le signe *log*, ou simplement la lettre initiale l. Ainsi, chacune des expressions $log\ 64$, $l\ 64$, désigne le logarithme de 64; $l\,(a+b)$ représente le logarithme de la somme des nombres a, b; la^n indique le logarithme de a^n; $l\frac{a}{b}$ représente le logarithme du quotient de a par b, ou le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$; chacune des expressions $\log \sqrt[m]{a^n}$, $l \sqrt[m]{a^n}$, indique le logarithme de la racine $m^{ième}$ de a^n.

229. Nous supposerons que les deux progressions sont croissantes, que le premier terme de la progression géométrique est l'unité, que le terme correspondant de la progression arithmétique est zéro, et nous représenterons les *raisons* de ces progressions par R et r. De sorte que ces progressions seront

$$\div\!\div\, 1 : R : R^2 : R^3 : R^4 : R^5 : \ldots$$
$$\div\, 0 . r . 2r . 3r . 4r . 5r . \ldots$$

On déduit des propriétés des n^{os} **222** et **215** que dans des progressions de cette espèce, *chaque terme de la progression géométrique est égal à la raison élevée à une puissance indiquée par le nombre des termes qui le précèdent, et chaque terme de la progression arithmétique est égal à la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui.*

Ainsi, le $n+1^{ième}$ terme de la progression géométrique est R^n, et le terme correspondant de la progression arithmétique est n fois r ou nr.

230. *Lorsqu'on forme le produit de plusieurs termes de la progression géométrique, et lorsqu'on ajoute les termes correspondans de la progression arithmétique, le* PRODUIT *et la* SOMME *sont des termes qui se correspondent dans les deux progressions.*

Par exemple; soient deux termes R^m, R^n, de la progression géométrique; leur produit R^{m+n} (n° **51**) est le $m+n+1^{ième}$ terme de cette progression (n° **229**). Les termes correspondans de la progression arithmétique sont mr et nr; leur *somme* $mr+nr$ ou $(m+n)$ fois r, est le $m+n+1^{ième}$ terme de la progression arithmétique. Le *produit* et la *somme* sont donc deux termes qui se correspondent dans les deux progressions.

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer, quel que soit le nombre des termes qu'on multiplie et qu'on ajoute dans les deux progressions, le principe énoncé est démontré.

On en déduit que *pour trouver le produit de plusieurs termes de la progression géométrique, il suffit d'ajouter les termes correspondans de la progression arithmétique; la* SOMME *correspond au* PRODUIT *demandé.*

EXEMPLE. Soient les deux progressions

$$\div\!\div\, 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 : \text{etc.}$$
$$\div\, 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 . \text{etc.}$$

Pour en déduire le produit des termes 3, 27, 81, de la progression géométrique, il suffit d'ajouter les termes correspondans 2, 6, 8, de la progression arithmétique; la *somme* 16 est un terme de cette progression, et le terme correspondant 6561 de la progression géométrique est le *produit* cherché.

231. Les termes de la progression arithmétique étant les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique, il résulte du principe du n° **230** que *le logarithme du produit de plusieurs termes de la progression géométrique, est égal à la somme des logarithmes de ces termes.*

Ainsi, dans l'exemple précédent, le logarithme 16 du produit 6561 des termes 3, 27, 81, de la progression géométrique, est égal à la somme des logarithmes 2, 6, 8, de ces termes.

232. Cette propriété fondamentale des logarithmes, d'après laquelle *le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs, ne paraît applicable qu'aux nombres qui font partie de la progression géométrique.* Pour démontrer que *la même propriété convient à tous les nombres compris entre les termes de la progression géométrique*, nous concevrons qu'on insère successivement m moyens géométriques entre deux termes consécutifs quelconques de la progression géométrique, et m moyens arithmétiques entre les termes correspondans de la progression arithmétique. On obtiendra ainsi deux nouvelles progressions (n^{os} **224** et **217**) qui jouiront encore de la propriété énoncée;