

lares qui le comprennent, et en divisant cette différence par la différence tabulaire entre les deux logarithmes qui comprennent le logarithme donné.

2°. Lorsque la caractéristique du logarithme donné n'est pas 3, on ramène ce cas au précédent en augmentant ou en diminuant la caractéristique d'assez d'unités pour qu'elle devienne égale à 3, afin de trouver, au moyen de la Table, le plus de chiffres possible du nombre  $x$  demandé; on cherche le nombre  $A$  auquel appartient le nouveau logarithme; ce nombre étant égal à  $x$  multiplié ou divisé par une puissance  $10^n$  de 10 indiquée par le nombre  $n$  d'unités dont on a augmenté ou diminué la caractéristique (n° 255, 2°), on obtient  $x$  en divisant ou en multipliant  $A$  par  $10^n$ , ce qui s'effectue en avançant la virgule de  $n$  rangs vers la gauche ou vers la droite dans  $A$ .

1<sup>er</sup> EXEMPLE. Trouver à quel nombre  $x$  appartient le logarithme 1,33425.

On ajoute deux unités à la caractéristique 1; on trouve que le logarithme 3,33425 qui en résulte, appartient au nombre 2159. On divise ce dernier nombre par  $10^2$  ou par 100, à cause des deux unités ajoutées à la caractéristique; le quotient 21,59 exprime  $x$ .

REMARQUE. En supposant la caractéristique égale à 3, la partie décimale 33425 du logarithme donné s'est trouvée dans les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres; mais si l'on eût conservé la caractéristique 1, cette partie décimale ne se serait pas trouvée dans les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de deux chiffres.

2° EXEMPLE. Trouver à quel nombre  $x$  appartient le logarithme 7,33441.

On diminue la caractéristique 7 de 4 unités; on trouve que le logarithme 3,33441 qui en résulte appartient au nombre 2159,8 (page 225); on multiplie 2159,8 par  $10^4$  ou par 10000, à cause des 4 unités qui ont été ôtées de la caractéristique 7; le produit 21598000 exprime  $x$ .

REMARQUE. Les calculs précédens se réduisent à supposer que la caractéristique du logarithme donné est 3; à chercher le

nombre auquel appartient ce nouveau logarithme; et à séparer ensuite par la virgule autant de chiffres plus un, à partir de la gauche de ce nombre, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme donné. Quand le nombre des chiffres nécessaires au placement de la virgule n'est pas assez grand, on y supplée par des zéro, et on fait abstraction de la virgule quand elle n'est pas suivie de chiffres décimaux.

2° Cas. Lorsque le logarithme donné est négatif, il appartient à un nombre  $x$  moindre que l'unité.

1°. Si le logarithme donné est entièrement négatif, et si  $n$  désigne sa caractéristique, on ajoute assez d'unités à ce logarithme pour que le résultat soit entièrement positif et affecté de la caractéristique 3 (cela revient à ajouter  $n + 4$  au logarithme donné); on cherche le nombre  $N$  auquel appartient ce nouveau logarithme; et on divise  $N$  par  $10^{n+4}$  (ce qui revient à avancer la virgule de  $n + 4$  rangs vers la gauche dans  $N$ ); le résultat exprime le nombre  $x$  auquel appartient le logarithme donné, car d'après le principe du n° 255 (2°), en ajoutant  $n + 4$  unités au logarithme donné, on obtient un nouveau logarithme qui appartient à  $x$  multiplié par  $10^{n+4}$ .

EXEMPLE. Déterminer à quel nombre appartient le logarithme entièrement négatif — 3,66559.

On ajoute 3 + 4 ou 7 unités à — 3,66559, ce qui donne 3,33441; on trouve, par la méthode indiquée (1°), que le logarithme 3,33441 appartient au nombre 2159,8; ce dernier nombre étant égal au produit de  $x$  par  $10^7$  (n° 255, 2°), on obtiendra  $x$  en divisant 2159,8 par  $10^7$ ; ce qui revient à avancer la virgule de 7 rangs à gauche dans 2159,8; de sorte que le logarithme — 3,66559 appartient au nombre 0,00021598.

REMARQUE. Le calcul précédent consiste à retrancher de 100000, la partie décimale du logarithme proposé (ce qui s'exécute en retranchant de 10 le premier chiffre à droite de cette partie décimale, et en ôtant de 9 tous les autres chiffres décimaux); à considérer le reste comme la partie décimale d'un logarithme dont la caractéristique est 3; à chercher le nombre décimal auquel appartient ce nouveau logarithme; et à avancer



la virgule d'assez de rangs vers la gauche de ce nombre décimal, pour que le résultat contienne autant de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme donné.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes  $-0,66559$ ,  $-1,66559$  et  $-3,66559$ , on retranche  $66559$  de  $100000$ , le reste est  $33441$ ; et  $3,33441$  étant le logarithme de  $2159,8$ , les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598 \quad \text{et} \quad 0,00021598.$$

2°. Si la caractéristique seule est négative, en la désignant par  $-n$ , on ajoute  $n+3$  unités au logarithme donné, afin d'obtenir un logarithme positif affecté de la caractéristique 3 (ce qui revient à supposer que la partie décimale du logarithme donné est affectée d'une caractéristique positive égale à 3); on cherche à quel nombre  $N$  appartient ce nouveau logarithme, et on divise ce nombre par  $10^{n+3}$  (ce qui revient à avancer la virgule décimale de  $n+3$  rangs vers la gauche de  $N$ ); le résultat exprime le nombre  $x$  auquel appartient le logarithme donné, car en ajoutant  $n+3$  unités à la caractéristique du logarithme donné, on obtient un nouveau logarithme qui appartient au nombre  $x$  cherché multiplié par  $10^{n+3}$  (n° 255, 2°).

EXEMPLE. On propose de trouver à quel nombre  $x$  appartient le logarithme  $\bar{4},33441$ .

Il suit de la convention établie (page 222) que

$$\bar{4},33441 = -4 + 0,33441.$$

Si donc on ajoute 7 à  $\bar{4},33441$ , le résultat sera

$$7 - 4 + 0,33441, \quad \text{ou} \quad 3 + 0,33441, \quad \text{ou} \quad \text{enfin} \quad 3,33441;$$

et le nouveau logarithme  $3,33441$  appartiendra au nombre  $x$  demandé multiplié par  $10^7$ . On cherchera donc le nombre  $2159,8$  auquel correspond le logarithme  $3,33441$ , et on divisera ensuite  $2159,8$  par  $10^7$ ; le résultat  $0,00021598$  exprimera  $x$ .

REMARQUE. Le mécanisme du calcul précédent se réduit à supposer que la partie décimale du logarithme donné est af-

fectée de la caractéristique 3; à chercher le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme; et à avancer la virgule d'assez de rangs vers la gauche de ce nombre, pour que le résultat renferme autant de zéro moins un, entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative du logarithme donné.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes  $\bar{1},33441$ ,  $\bar{2},33441$ ,  $\bar{3},33441$  et  $\bar{4},33441$ , on cherche le nombre  $2159,8$  auquel correspond le logarithme  $3,33441$ ; on en déduit que les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598, \quad 0,0021598 \quad \text{et} \quad 0,00021598.$$

250. Les raisonnemens et les exemples des n°s 248 et 249, suffisent pour mettre en état de calculer le logarithme d'un nombre donné, et de trouver à quel nombre appartient un logarithme donné. Nous avons toujours ramené la question à opérer sur les logarithmes de nombres compris entre 1000 et 10000, parce que cette méthode a l'avantage de fournir le plus grand degré d'exactitude dont notre Table de logarithmes est susceptible. En opérant ainsi :

1°. Quand on veut trouver le logarithme d'un nombre, la proportion indiquée (page 219), ne fournit que les cent-millièmes d'unité du logarithme demandé; c'est-à-dire qu'on obtient le logarithme cherché à moins d'un cent-millième d'unité.

2°. Nos logarithmes tabulaires n'ayant que cinq décimales, on ne connaît leurs valeurs qu'à moins d'un demi-cent-millième d'unité (n° 246); les erreurs qui résultent des décimales négligées dans les logarithmes, et de la proportion indiquée (page 225), sont telles que lorsqu'on veut trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné  $A$  dont la caractéristique est 3, la Table ne fournit quelquefois que les quatre premiers chiffres à gauche de  $x$ ; c'est-à-dire que, dans certains cas, la proportion indiquée (page 225), ne fournit aucun des chiffres décimaux de  $x$ .

Lorsqu'on veut trouver le nombre  $x$  auquel appartient un logarithme donné dont la caractéristique n'est pas 3, on aug-



mente ou on diminue ce logarithme de  $n$  unités, de manière que le nouveau logarithme soit positif et affecté de la caractéristique 3; on cherche le nombre  $N$  auquel appartient ce nouveau logarithme (on vient de voir qu'on ne peut compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche de  $N$ ); ensuite on divise ou on multiplie  $N$  par  $10^n$ ; le résultat est une valeur approchée du nombre  $x$  auquel appartient le logarithme donné; et l'approximation est telle qu'on ne doit généralement compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à partir du premier chiffre significatif à gauche du résultat; ou, pour parler d'une manière plus exacte, l'erreur est toujours moindre qu'une unité de l'ordre indiqué par le dernier de ces quatre chiffres.

Quand ce degré d'approximation ne sera pas suffisant, il faudra renoncer à l'emploi de nos tables de logarithmes.

251. Lorsque, pour obtenir le logarithme d'une fraction, on prend la différence entre les logarithmes tabulaires du numérateur et du dénominateur; l'erreur commise, sur le logarithme de la fraction, ne saurait surpasser un cent millième d'unité. Cette propriété se déduit de ce que dans nos tables à cinq décimales, la plus forte erreur qui puisse affecter chaque logarithme tabulaire est égale à une demi-unité du cinquième ordre décimal, c'est-à-dire à 0,000005 (n° 246).

Par exemple, lorsque le logarithme du numérateur étant trop fort de 0,000005, le logarithme du dénominateur est trop faible de 0,000005, il suit du principe du n° 55, que la différence entre ces deux logarithmes, est trop forte de deux fois 0,000005, c'est-à-dire d'un cent-millième; l'erreur totale qui affecte le logarithme d'une fraction ne saurait jamais être plus grande.

En général, lorsqu'on combinera  $N$  logarithmes tabulaires par voie d'addition et de soustraction, l'erreur totale qui en résultera ne pourra jamais surpasser  $N$  fois un demi-cent-millième d'unité.

Lorsque dans les tables dont on fait usage, les logarithmes renferment un plus grand nombre de décimales, l'erreur ne

saurait surpasser le produit d'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé, par le nombre total des logarithmes employés dans les additions et les soustractions.

*Des compléments arithmétiques.*

252. Le reste que l'on obtient en retranchant un logarithme de 10, est ce qu'on nomme le COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE de ce logarithme.

Ainsi, le logarithme de 2 étant 0,30103, le complément arithmétique de ce logarithme est  $10 - 0,30103$  ou 9,69897.

On voit que pour obtenir le complément arithmétique d'un logarithme, il suffit d'ôter de 10 le premier chiffre significatif à droite du logarithme donné, et de retrancher de 9 tous les autres chiffres.

Pour indiquer le complément arithmétique d'un logarithme, nous ferons précéder ce logarithme du signe  $C'$ . Ainsi,  $C'12$  désignera le complément arithmétique du logarithme de 2.

Le but qu'on se propose en faisant usage des compléments arithmétiques, est de remplacer des soustractions par des additions, et d'éviter l'emploi des logarithmes négatifs.

253. Lorsqu'on veut soustraire d'un nombre donné un logarithme, et qu'au lieu d'effectuer cette soustraction, on ajoute au nombre donné, le complément arithmétique du logarithme, la somme est égale au reste cherché augmenté de 10 unités. Car cette somme est trop forte, non-seulement du logarithme qu'on devait soustraire, mais encore du complément qu'on a ajouté; et d'après la définition du complément, la somme de ces deux derniers nombres est égale à 10.

Cela est d'ailleurs évident; car lorsqu'au lieu de retrancher  $IB$  de  $IA$  pour obtenir le reste  $IA - IB$ , on ajoute à  $IA$  le complément arithmétique  $10 - IB$  de  $IB$ , la somme  $IA + 10 - IB$  est égale au reste  $IA - IB$  augmenté de 10.

Par exemple, soit proposé d'ôter 0,95424 de 3,54133; si au lieu d'effectuer cette soustraction, on ajoute à 3,54133, le complément de 0,95424, qui est 9,04576, le résultat 12,58709,



sera trop fort de 10 unités; car

$$\begin{aligned} 3,54133 - 0,95424 &= 3,54133 + 10 - 0,95424 - 10 \\ &= 3,54133 + C^t 0,95424 - 10. \end{aligned}$$

254. Le principe du n° 255 conduit aux propriétés suivantes :

1°. *En ajoutant au logarithme du numérateur d'une fraction, le complément arithmétique du logarithme du dénominateur, la somme exprime le logarithme de cette fraction augmenté de 10 unités.*

2°. *Le logarithme du quatrième terme d'une proportion peut s'obtenir en ajoutant à la somme des logarithmes des moyens, le complément arithmétique du logarithme du premier terme, et en diminuant le résultat de dix unités.* Cela se déduit des principes des n°s 253 (7°) et 255.

3°. *Lorsqu'un calcul conduit à combiner plusieurs logarithmes positifs, par voie d'addition et de soustraction, on simplifie l'opération en ajoutant aux logarithmes qui doivent être additionnés, les complémens des logarithmes à soustraire; la somme étant trop forte d'autant de fois 10, qu'on a pris de complémens (n° 255), il suffit, pour en déduire le résultat demandé, de diminuer cette somme d'autant de dizaines qu'on a ajouté de complémens.*

Par exemple, pour calculer le quotient  $x$  de  $9724 \times 3849$  par  $5676 \times 998$ , on observe que

$$lx = l9724 + l3849 - l5676 - l998 \text{ (n° 255).}$$

Ainsi, on prend les logarithmes des nombres 9724, 3849, on leur ajoute les complémens des logarithmes des nombres 5676, 998; la somme 20,82002 exprimant  $lx$  augmenté de 2 dizaines ou de 20, on a  $lx = 0,82002$ ; d'où  $x = 6,60728$  etc. La valeur exacte de  $x$  est 6,60720 etc.

255. Il suit des propriétés du n° 253 que lorsqu'on n'a besoin que d'une valeur approchée du résultat d'une opération, l'emploi des logarithmes tabulaires peut souvent simplifier les calculs en réduisant les multiplications, les divisions, la formation des puissances et l'extraction des racines, à des additions,

à des soustractions, à des multiplications et à des divisions très simples. En voici des exemples.

1<sup>er</sup> EXEMPLE. Soit proposé de calculer le produit  $x$  de 3,4567892 par 1,23456789.

Les logarithmes des deux facteurs sont 0,53867 et 0,09152; leur somme est 0,63019. Le nombre 4,2677, auquel appartient le logarithme 0,63019, est une valeur approchée de  $x$ .

La valeur exacte de  $x$  étant 4,267640948818788, on voit que l'emploi des logarithmes n'a fourni que les quatre premiers chiffres à gauche du produit demandé.

2<sup>e</sup> EXEMPLE. Déterminer le quotient  $x$  de la division de 4,267640948818788 par 3,4567892.

1<sup>re</sup> MÉTHODE. On cherche les logarithmes du dividende et du diviseur, qui sont 0,63018 et 0,53867; on retranche le second logarithme du premier, le reste 0,09151 exprime  $lx$ . Le nombre 1,2345 auquel appartient ce logarithme est une valeur approchée de  $x$ . Le quotient exact est 1,23456789.

2<sup>e</sup> MÉTHODE. On ajoute au logarithme 0,63018 du dividende, le complément arithmétique 9,46133 du logarithme du diviseur; la somme 10,09151 étant égale à  $lx$  augmenté de 10 (n° 255), on a  $lx = 0,09151$ ; d'où  $x = 1,2345$ .

3<sup>e</sup> EXEMPLE. Calculer la valeur  $x$  de  $\sqrt[7]{128}$ .

$$\text{On a } lx = \frac{l128}{7} = \frac{2,10721}{7} = 0,30103.$$

On en déduit  $x = 2$ . Cette valeur de  $x$  est exacte, car il est facile de s'assurer que  $2^7 = 128$ .

4<sup>e</sup> EXEMPLE. Calculer la racine cubique  $x$  de  $\frac{2}{7899}$ .

$$\text{On a, } x = \sqrt[3]{\frac{2}{7899}}; \text{ d'où } lx = \frac{l2 - l7899}{3} \text{ (n° 255).}$$

On retranche  $l7899$  de  $l2$ , le reste est  $-3,59654$ ; on divise ce reste par 3, le quotient  $-1,19884$  exprime  $lx$ . On en déduit  $x = 0,06326$  etc.



5<sup>e</sup> EXEMPLE. Calculer la racine cubique  $x$  de la quatrième puissance de  $\frac{2}{25}$ .

$$\text{On a, } x = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{25}\right)^4}; \text{ d'où } lx = \frac{(l2 - l25) \times 4}{3} \text{ (n}^\circ \text{ 255)}.$$

1<sup>re</sup> MÉTHODE. On ôte  $l25$  de  $l2$ ; on multiplie le reste  $-1,09691$  par  $4$ , et on divise le produit  $-4,38764$  par  $3$ ; le quotient  $-1,462546$  etc., exprime  $lx$ . On en déduit,  $x = 0,03447$  etc.

2<sup>e</sup> MÉTHODE. On ajoute à  $l2$  le complément de  $l25$ ; la somme étant le logarithme de  $\frac{2}{25}$ , augmenté de  $10$ , son qua-

druple  $35,61236$  exprime le logarithme de  $\left(\frac{2}{25}\right)^4$ , augmenté de  $40$ . Pour en déduire un logarithme trop grand d'un multiple  $6$  de l'indice  $3$  de la racine à extraire, on ôte  $34$  unités de  $35,61236$ ; le reste  $1,61236$  étant le logarithme de  $\left(\frac{2}{25}\right)^4$ , augmenté de  $6$ , le tiers  $0,53745$  de ce reste est le logarithme de  $x$ , augmenté de  $2$ , ou  $l(x \times 100)$ ; le logarithme  $0,53745$  appartenant au nombre  $3,447$  etc., on voit que  $x = 0,03447$  etc.

\* En général, lorsqu'on fait usage des compléments arithmétiques pour extraire la racine  $m^{\text{ième}}$  de la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'une fraction, le logarithme qui doit être divisé par l'indice  $m$  de la racine est trop fort de  $n$  fois  $10$ ; avant de diviser ce logarithme par  $m$ , on l'augmente ou on le diminue d'assez d'unités pour que le nouveau logarithme soit trop fort d'un multiple  $m \times p$  de  $m$ . De cette manière, en divisant le nouveau logarithme par  $m$ , on obtient un logarithme qui est trop fort de  $p$ ; on cherche le nombre correspondant à ce dernier logarithme, et on avance la virgule de  $p$  rangs vers la gauche de ce nombre; le résultat est une valeur approchée de la racine demandée.

## DEUXIÈME PARTIE.

### DES NOMBRES CONCRETS.

### CHAPITRE VI.

#### *Des Mesures de France anciennes et nouvelles.*

##### § 1<sup>er</sup>. Notions préliminaires.

256. Lorsqu'on veut comparer entre elles les grandeurs de plusieurs quantités de même nature, on choisit pour terme de comparaison une quantité de leur espèce qui sert d'unité de mesure; et mesurer ces quantités, c'est chercher combien elles contiennent d'unités de mesure.

257. Pour mesurer des lignes, ou des surfaces, ou des volumes, on choisit une longueur arbitraire pour unité de ligne; l'unité de surface est le carré dont chaque côté est égal à cette unité de ligne; l'unité de surface se nomme aussi unité carrée; l'unité de volume ou de solidité est le cube dont chaque face est égale au carré pris pour unité de surface; tous les côtés de ce cube sont égaux à l'unité de ligne. L'unité de volume se nomme aussi unité cubique. De cette manière, l'unité de surface et l'unité de volume dépendent le plus simplement possible de l'unité de longueur.

(\*) Les définitions exactes des surfaces, des volumes ou solides, du carré et du cube, dépendant de la Géométrie, nous nous bornerons ici à donner une idée de ces quantités en observant que chacune des six faces d'un dé à jouer est une surface nommée carré, et que ce dé est un solide nommé cube.