Ainsi, $345^{m.q.},7892$ valent $34578^{décim.q.},92$, ou 3457892 centimètres carrés; et $34^{m.c.},2567$ valent $34256^{décim.c.},7$, ou 34256700 centimètres cubes.

L'are vaut cent mètres carrés, et l'*hectare* vaut 10000 mètres carrés. Par conséquent, pour *convertir des mètres carrés en ares ou en hectares*, il suffit de diviser le nombre donné par 100 ou par 10000; ce qui revient à avancer la virgule de deux ou de quatre rangs à gauche (nº **130**, 3°).

Ainsi, $6274^{m.q.},5$ valent $62^{ares},745$ ou $0^{hectare},62745$.

Réciproquement, on convertit des ares ou des hectares en mètres carrés, en avançant la virgule de deux ou de quatre rangs vers la droite du nombre donné. Ainsi, $62^{ares},745$ valent $6274^{m.q.},5$, et $7^{hectares},234568$ valent $72345^{m.q.},68$.

295. L'*addition* et la *soustraction* des nombres rapportés à la même unité, s'effectuent d'après la règle du nº **132**; les unités du résultat sont les mêmes que celles des nombres sur lesquels on a opéré, (nº **266**, 1°).

Exemples d'addition.

	$37^m,93$	$9479^m,24$	$3^m,4$
	$78,95$	$0,456$	$475,279$
	$40,97$	$30,02$	32
Sommes,	$157^m,85$	$9509^m,716$	$510^m,679$.

Exemples de soustraction.

	$7389^m,785$	$3005^m,06002$	$0^m,045007$
	$254,321$	$47,87258$	$0,0032$
Reste,	$7135^m,464$	$2957^m,18744$	$0^m,041807$.

Quand les nombres donnés expriment des unités de grandeurs différentes, on ramène la question à la précédente, en les rapportant d'abord à la même unité (nº **269**).

296. Dans la *multiplication*, le produit étant de la nature du multiplicande, il suffit de trouver le nombre des unités du produit; pour trouver ce nombre, on effectue la multiplication en faisant abstraction de la nature des unités du multiplicande. La règle du nº **133** fournit le résultat demandé.

297. La DIVISION présente trois cas :

1°. *Lorsque le dividende et le diviseur sont rapportés à la même unité, le quotient est abstrait; et pour calculer ce quotient, il suffit d'effectuer la division d'après la règle du* nº **136**, *en faisant abstraction de la nature des unités du dividende et du diviseur.*

Par exemple, le quotient de la division de $8^m,568$ par $2^m,4$ est le même que celui de 8,568 par 2,4. En effectuant cette dernière division, d'après la règle du nº **136**, on trouve le quotient exact 3,57.

2°. *Lorsque le dividende et le diviseur sont deux nombres concrets de même nature rapportés à des unités différentes, on ramène ce cas au précédent en rapportant d'abord ces deux nombres à la même unité* (nº **269**).

3°. Enfin, *lorsque le dividende est concret et le diviseur abstrait, le quotient est de la nature du dividende; pour obtenir le nombre des unités du quotient, il suffit d'effectuer la division comme si le dividende était abstrait.*

Par exemple, le quotient de $8^m,568$ par 3,57 sera des mètres; et pour trouver le nombre des unités du quotient, il suffit de diviser 8,568 par 3,57, ce qui donne le quotient exact 2,4; de sorte que le quotient demandé est $2^m,4$.

298. Les règles des nºs **141** et **142** s'appliquent aux nouvelles mesures. Ainsi, la valeur du quotient de $3^m,6$ par 1,1, à moins d'un millimètre, est $3^m,272$; et suivant qu'on ne veut conserver que deux ou trois décimales, la valeur la plus approchée de $3^m,2727$ etc. est $3^m,27$ ou $3^m,273$.

Comparaison des mesures anciennes avec les mesures nouvelles.

299. Lorsque le SYSTÈME MÉTRIQUE sera généralement adopté, on ne fera plus usage des mesures anciennes; il sera donc inutile de comparer ces deux systèmes. Mais, les mesures anciennes étant encore employées, nous allons voir comment on convertit les mesures anciennes en mesures nouvelles et réciproquement.

300. 1°. Pour *évaluer la toise en mètres, et le mètre en toises,* on observe que la longueur du quart de la circonférence de la terre étant égale à 5130740 toises (page 236), et à 10 000 000 mètres (page 251), on a,

$$5130740 \text{ toises} = 10\,000\,000 \text{ mètres}; \text{ d'où}$$

$$1^{\text{T}} = \frac{10\,000\,000^{\text{m}}}{5130740} \text{ et } 1^{\text{m}} = \frac{5130740^{\text{T}}}{10\,000\,000}.$$

En effectuant les divisions indiquées, on trouve

$$1^{\text{T}} = 1^{\text{m}},949036591212963 \text{ etc.}, \quad 1^{\text{m}} = 0^{\text{T}},513074.$$

Connaissant la valeur d'une toise en mètres, la règle du n° **269** donnera les expressions en mètres du pied, du pouce, etc., en divisant $1^{\text{m}},949$ etc. par 6, puis le quotient par 12, etc. On obtiendra de même les expressions du mètre en pieds, en pouces, etc., en convertissant successivement $0^{\text{T}},513074$ en pieds, en pouces, etc. On trouvera de cette manière que

$$1^{pi} = 0^{m},324839431868827 \text{ etc.}, \qquad 1^{po} = 0^{m},027069952655735 \text{ etc.},$$
$$1^{ligne} = 0^{m},002255829387977 \text{ etc.}, \qquad 1^{point} = 0^{m},000187985782331 \text{ etc.},$$

$$1^{m} = 3^{pi},078444 = 36^{po},941328 = 443^{lig},295936.$$

Le nombre $3^{pi},078444$ étant égal à $3^{pi}\ 11^{li},29593$ etc. (page 244), on voit qu'*un mètre vaut 3 pieds* $11^{li},296$ *à moins d'un millième de ligne.*

2°. Pour *comparer l'aune au mètre,* on observe qu'une aune vaut 6322 points, et qu'un point vaut $0^{\text{m}},000187985782331$ etc.; l'aune est donc égale à 6322 fois $0^{\text{m}},000187985782331$ etc., ou à $1^{\text{m}},188446158965$ etc.

Réciproquement: Une aune valant $1^{\text{m}},1884461158$ etc., ou $1^{\text{m}} \times 1,1884461$ etc., si l'on divise 1^{aune} par $1,188461$ etc., le quotient $0^{aune},8414348$ etc., sera la valeur du mètre en aunes.

3°. Pour *évaluer les lieues en kilomètres, et* réciproquement *les kilomètres en lieues,* on fera usage de l'ancienne division de la circonférence en 360 degrés, et l'on dira :

Le quart de la circonférence de la terre vaut 90° terrestres ou $10\,000\,000^{\text{m}}$ ou 10000 kilomètres. D'ailleurs,

Un degré terrestre = 25 lieues terrestres = 20 lieues marines,
Une lieue de poste = 2000 toises,
Une toise = $1^{m},9490365$9 etc. = $0^{kilom},0019490365$9 etc.,
Un mètre = $0^{\text{T}},513074$, un kilomètre = $513^{\text{T}},074$.

On en déduira facilement les valeurs de la lieue terrestre, de la lieue marine, et de la lieue de poste, en kilomètres, et réciproquement; on trouvera

$$1^{li.\ ter.} = 4^{kilom.},444 \text{ etc.}, \quad 1^{li.\ mar.} = 5^{kilom},555 \text{ etc.}, \quad 1^{li.\ de\ poste} = 3^{kilom},898 \text{ etc.}$$
$$1^{kilom.} = 0^{li.\ ter.},225 = 0^{li.\ mar.},18 = 0^{li.\ de\ poste},256537.$$

4°. Pour *évaluer les degrés en grades, et réciproquement,* on observe que le quart de la circonférence se divisant en 90 degrés anciens, et en 100 *grades* (pages 236 et 251), il en résulte que

$$\textit{L'ancien degré} = \frac{10}{9} \textit{ de grade, le grade} = \frac{9}{10} \textit{ de degré ancien.}$$

301. Les *valeurs de la toise carrée en mètres carrés, et du mètre carré en toises carrées,* se déduisent des relations

$$1^{\text{T}} = 1^{\text{m}},949036591212963 \text{ etc.}, \quad 1^{\text{m}} = 0^{\text{T}},513074 \text{ (page 250)},$$

au moyen de la règle du n° **259**, en formant les carrés des nombres $1,949$ etc., $0,513074$. On trouve de cette manière que

$$1^{\text{T}.q.} = 3^{m.q.},7987436338 \text{ etc.}, \quad 1^{m.q.} = 0^{\text{T}.q.},263244929476.$$

On en déduit les valeurs du pied carré, du pouce carré, etc., en mètres carrés, et réciproquement: car d'après les relations

$$1^{\text{T}.q.} = 36^{pi.q.}, \quad 1^{pi.q.} = 144^{po.q.}, \quad 1^{po.q.} = 144^{lig.q.}, \text{ etc.},$$

si l'on divise la valeur $3^{m.q.},798$ etc., de la toise carrée par 36, le quotient $0^{m.q.},10552065$ etc., exprimera le pied carré; ce quotient, divisé par 144, donnera le pouce carré; etc.

Pour exprimer le mètre carré, en pieds carrés, en pouces carrés, etc., il suffit de convertir la valeur $0^{\text{T}.q.},26324$ etc., du mètre carré, en pieds carrés, en pouces carrés, etc.; ce qui s'exécute en multipliant successivement, par 36, par 144, etc. (n° **269**).

Des calculs analogues conduiront aux expressions de *l'aune carrée en mètres carrés,* du *mètre carré en aunes carrées,* de la *lieue terrestre carrée, en myriamètres carrés et en myriares, et réciproquement;* etc.

302. Pour *trouver les rapports des mesures de volume et de capacité, anciennes et nouvelles*, on suivra la même marche que pour les mesures de superficie. Il suffira de former des cubes au lieu de carrés.

Par exemple, une toise valant $1^{m},949\ 036\ 591\ 212\ 96$ etc., on obtiendra le nombre de mètres cubes contenus dans une toise cube en formant le cube de $1,949036$ etc.; or on a trouvé (page 261) que le carré de $1,949$ etc., est $3,7987436338$ etc.; il suffit donc de multiplier ce carré par $1,949$ etc. Le produit $7,4038903$ etc., exprimera le cube de $1,949036591212$ etc. Une toise cube vaut donc $7^{m.c.},4038903430883$ etc.

On parviendra d'une manière semblable, aux valeurs du mètre cube en toises cubes, en pieds cubes, etc., et réciproquement. On trouvera,

$$1^{T.c.} = 7^{m.c.},4a38903430 83 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 0^{T.c.},135064128946 \text{ etc.},$$
$$1^{pi.c.} = 0^{m.c.},034277270106 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 29^{pi.c.},173851 \text{ etc.},$$
$$1^{po.c.} = 0^{m.c.},0000198363 83 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 50412^{po.c.},416 \text{ etc.}$$

Pour déterminer les rapports entre les mesures de capacité anciennes et nouvelles, on a pris une pinte de $46^{po.c.},95$ et un litron de $40^{po.c.},98625$ etc. Or,

$$1^{po.c.} = 0^{m.c.},000019836 \text{ etc.} = 0^{décim.c.},019836 \text{ etc.} = 0^{litre},019836 \text{ etc.},$$

car le litre vaut un décimètre cube. On a donc,

$$1^{pinte} = 46^{po.c.},95, \quad 1^{litron} = 40^{po.c.},98625 \text{ etc.}, \quad 1^{po.c.} = 0^{lit.},019836 \text{ etc.}$$

On en déduit

$$1^{pinte} = 0^{litre},9313181 8185 \text{ etc.}, \quad 1^{litron} = 0^{litre},8130189 \text{ etc.},$$
$$1^{litre} = 1^{pinte},07374688 \text{ etc.}, \quad 1^{litre} = 1^{litron},2299836 \text{ etc.}$$

Or, $1^{muid} = 288^{pintes}$, $1^{boisseau} = 16^{litrons}$, $1^{setier} = 12^{boisseaux}$.

On en déduit

$$1^{muid} = 2^{hectol.},68219 \text{ etc.}, \quad 1^{boiss.} = 13^{litres},0083 \text{ etc}, \quad 1^{setier} = 1^{hect.},56099 \text{ etc.},$$
$$1^{hect.} = 0^{muid},372828 \text{ etc.}, \quad 1^{litre} = 0^{boi.},0768739 \text{ etc.}, \quad 1^{hect.} = 0^{setier},640616 \text{ etc.}$$

303. Pour *évaluer la livre poids en kilogrammes, et réciproquement*, on observe que le gramme exprime le poids d'un

centimètre cube d'eau (nº **287**). Or, on a trouvé que le poids d'un centimètre cube d'eau est $18^{grains},82715$. Le gramme vaut donc $18^{grains},82715$; le kilogramme ou la livre poids nouvelle, vaut donc $18827^{grains},15$. Mais,

$$1^{grain} = \frac{1\text{℔}}{9216}; \text{ donc } 1^{kilog.} = \frac{1882715}{100} \text{ de } \frac{1\text{℔}}{9216} = \frac{1882715\text{℔}}{921600}.$$

Ainsi, 1882715℔ valent 921600 kilogrammes. On en déduit,

$$1\text{℔} = \frac{921600^{kilog.}}{1882715} = 0^{kilog},489\ 505\ 84660 \text{ etc.},$$
$$1^{kilgg} = \frac{1882715\text{℔}}{921600} = 2\text{℔},042\ 876\ 519 \text{ etc.}$$

On en déduit, $1^{once} = 0^{kilog.},030594$ etc., $1^{gros} = 0^{kilog.},003824$ etc.

304. Pour *convertir la livre tournois en francs, et réciproquement*, on observe que la pièce d'un franc pèse 5 grammes, et qu'elle contient en argent fin les $\frac{9}{10}$ de son poids (page 254), c'est-à-dire les $\frac{9}{10}$ de 5 grammes, ou $\frac{9}{2}$ grammes, ou les $\frac{9}{2}$ de $18^{grains},82715$, ou $84^{grains},722175$.

Puisque $84^{grains},722175$ d'argent, valent un franc,

Le prix d'un grain d'argent est $\frac{1^f}{84,722175}$ *ou* $\frac{1000000^f}{84722175}$.

Or, la *livre tournois*, déduite de l'écu de $6^{\#}$, contient $83^{grains},675936$ d'argent fin. Par conséquent, $83^{grains},675936$ d'argent fin valent $1^{\#}$; *le prix d'un grain d'argent est donc*

$$\frac{1^{\#}}{83,675936} \text{ ou } \frac{1000000^{\#}}{83675936}.$$

Ces deux expressions du prix d'un grain d'argent fin devant être égales, on a $\frac{1000000^f}{84722175} = \frac{1000000^{\#}}{83675936}$. On en déduit,

$$1000000^f \times 83675936 = 1000000^{\#} \times 84722175 \text{ (nº } \mathbf{110}),$$
$$83675936000000^f = 84722175000000^{\#}, \quad 83675936^f = 84722175^{\#},$$
$$1^{\#} = \frac{83675936^f}{84722175} = \cancel{0^f,987659 \text{ etc.}}, \quad 1^f = \frac{84722175^{\#}}{83675936} = 1^{\#},01250 \text{ etc.}$$

0f,9887650982 etc

305. Nous avons vu (page 239) que 80 degrés du *thermomètre de Réaumur* valent 100 degrés du *thermomètre centigrade*. Par conséquent,

$$1^\circ \text{ de Réaumur vaut } \frac{5^\circ}{4} \text{ centigrades, et}$$

$$1^\circ \text{ centigrade vaut } \frac{4^\circ}{5} \text{ de Réaumur.}$$

306. Connaissant la valeur de chaque espèce d'unité ancienne, en mesures nouvelles, et réciproquement, il est facile de *convertir les mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement;* car cela se réduit à multiplier la valeur de l'unité que l'on veut convertir, par le nombre de ces unités.

1er Exemple. *Convertir* 907 *toises en mètres.*

Une toise vaut $1^m,9490365 9$ etc.; les 907 toises valent donc 907 fois $1^m,94903659$ etc., ou $1767^m,776$ etc.

2^e Exemple. *Convertir* 28℔ 4^o 2^G *en kilogrammes.*

On a vu (page 263) que 1℔ $= 0^{kilog},4895058$ etc., $1^{once} = 0^{kilog},030594$ etc., $1^{gros} = 0^{kilog},003824$ etc.

On en déduira les valeurs en kilogrammes, des parties 28℔, 4^{onces}, 2^{gros}; et en les ajoutant, on trouvera que les 28℔ 4^o 2^G valent $13^{kilog},836$ etc.

3^e Exemple. *Convertir* $16847^f,93$ *en livres tournois.*

Si l'on multiplie la valeur $1^{\#},0125034 6$ etc., de 1^f, par le nombre 16847,93 des francs, on trouvera que les $16847^f,93$ valent $17058^{\#},5874$ etc.

Remarque. La relation $1^f = 1^{\#},01250 3$ etc., donnant $80^f = 81^{\#}$ à moins de $0^{\#},001$, on voit que, *pour convertir des livres tournois en francs, il suffit de diminuer le nombre des livres de leur* $81^{ième}$ *partie*, et que, *pour convertir des francs en livres tournois, il n'y a qu'à augmenter le nombre des francs de leur* $80^{ième}$ *partie.* On obtient la $81^{ième}$ partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 9, et en prenant le $9^{ième}$ du quotient; et on trouve la $80^{ième}$ partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 10, et en prenant le $8^{ième}$ du quotient.

Ainsi, pour convertir $16847^f,93$ en livres tournois, on prend le dixième de 16847,93 qui est 1684,793, et le huitième de 1684,793 qui est 210,599 etc.; ajoutant 210,599 etc. à 16847,93, on trouve que $16847^f,93$ valent $17058^{\#},529$ etc.

307. Les *tables* placées à la fin de l'Arithmétique fournissent le moyen de résoudre les problèmes suivants :

1er Problème. *Convertir des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.*

On a réuni (p. 324, ..., 328) les différens produits des valeurs de chaque espèce d'unité, par les nombres d'un seul chiffre; alors, pour passer d'un système à l'autre, il suffit de décomposer le nombre donné en ses unités des différens ordres, de chercher les valeurs de ces diverses parties dans les *tables,* et d'en faire la somme.

1er Exemple. *Convertir* 907 *toises en mètres.*

On décompose ce nombre en 900^T plus 7^T; les conversions de ces parties en mètres s'effectuent à l'aide de la première table (page 324) et du déplacement de la *virgule*. Voici le calcul:

9 toises valent $17^m,54133$; les 900^T valent donc	$1754^m,133$,
les 7 toises valent........................	$13^m,64326$;
les 907 toises valent donc........................	$1767^m,77626$.

2^e Exemple. *Convertir* $16847^f,93$ *en livres tournois.*

On trouve à l'aide de la 6^e *table* (page 328) que les $16847^f,93$ valent $17058^{\#},529$ etc.

2^e Problème. *Déterminer le prix d'une mesure nouvelle, lorsque le prix de la mesure ancienne est donné, et réciproquement.*

On multiplie le prix donné, par le nombre abstrait qui exprime combien la mesure dont on cherche le prix contient de fois la mesure dont le prix est donné; le produit exprime le prix cherché.

1er Exemple. *Une toise d'ouvrage coûte* 12 *francs; trouver le prix d'un mètre du même ouvrage.*

On voit dans la 1re *table* (p. 324) qu'un mètre vaut $0^T,51307$, ou 0,51307 fois 1^T; le prix d'un mètre est donc, 0,51307 fois 12^f ou $6^f,15684$.

2^e Exemple. *Un mètre d'ouvrage coûtant* $6^f,15684$, *calculer le prix d'une toise du même ouvrage.*

Une toise vaut $1^{m},94904$; la toise coûtera donc $1,94904$ fois $6^{f},15684$, ou $11^{f},999$ etc., ou 12 francs à moins de $0^{f},001$.

3ᵉ PROBLÈME. *Comparer entre elles les mesures et les monnaies des différens pays.*

1ᵉʳ EXEMPLE. *Déterminer combien 24787 pieds anglais valent de pieds russes.*

On trouve (page 317) que

Le pied anglais $= 304^{millimètres},8$, et que le pied russe $= 354^{millimètres},1$.

Donc, $$\frac{1^{pi}\ \text{Anglais}}{1^{pi}\ \text{Russe}} = \frac{304,8}{354,1} = \frac{3048}{3541}.$$

Le pied anglais vaut donc $\frac{3048}{3541}$ pieds russes.

Les 24787 pieds anglais valent donc 24787 fois $\frac{3048}{3541}$ pieds russes, ou 21336 pieds russes.

2ᵉ EXEMPLE. *Calculer combien 14220 guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre, valent de ducats d'or de l'empereur d'Autriche.*

On trouve (page 317) qu'une guinée vaut $26^{f},47$ et que un ducat vaut $11^{f},85$. Par suite,

$$\frac{1^{guinée}}{1^{ducat}} = \frac{2647}{1185}\,;\ \text{donc}\ 1^{guinée} = \frac{2647^{ducats}}{1185}.$$

Les 14220 guinées valent donc 14220 fois $\frac{2647^{duc.}}{1185}$, ou 31764 ducats.

3ᵉ EXEMPLE. *Calculer combien 31764 ducats d'or de l'empereur d'Autriche valent de guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre.*

On déduit du *tableau* (page 317) que

$$\frac{1^{ducat}}{1^{guinée}} = \frac{1185}{2647}\,;\ \text{d'où}\ 1^{ducat} = \frac{1185^{guinées}}{2647}.$$

Les 31764 ducats valent donc

$$31764 \text{ fois } \frac{1185^{guinées}}{2647},\ \text{ou } 14220 \text{ guinées.}$$

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES.

308. Les méthodes exposées dans les chapitres précédens, fournissent le moyen d'effectuer les diverses opérations de l'arithmétique sur les nombres abstraits et concrets ; nous allons voir comment on peut en déduire la solution de tous les problèmes de l'arithmétique. Nous aurons recours à deux méthodes principales : la première, que nous nommerons *méthode de l'unité*, n'exige que la connaissance des quatre premières règles ; elle offre le double avantage de fournir les solutions de plusieurs problèmes qu'on ne savait pas résoudre arithmétiquement, et d'exercer les élèves en les préparant à l'étude de l'*Algèbre* (*). La seconde méthode est fondée sur la théorie des proportions.

§ Iᵉʳ. *Règles de trois directes et inverses.*

Règle de trois directe.

309. 1ᵉʳ PROBLÈME. *Quatre ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage ; combien 9 ouvriers en feront-ils ?*

1ʳᵉ MÉTHODE. Puisque 4 ouvriers ont fait 20^{m} d'ouvrage, un ouvrier ferait le quart de 20^{m}, ou $\frac{20^{m}}{4}$.

Les 9 ouvriers feront donc 9 fois $\frac{20^{m}}{4}$, ou $\frac{20^{m} \times 9}{4}$, ou 45 mètres.

En général : lorsqu'on connaît l'ouvrage exécuté par des

(*) J'ai trouvé ces méthodes en 1800. Je les ai publiées à cette époque, sous le titre d'*Introduction à l'Algèbre*.