par le même nombre de grammes à 0,80, de manière que les 100^{gr} d'alliage ne renferment plus que 87^{gr} d'or pur.

Mais, pour chaque gramme à 0,9 de *fin* remplacé par un gramme à 0,8, la quantité d'or contenue dans les 100 grammes d'alliage diminue de $0^{gr},1$. On devra donc prendre autant de grammes à 0,8 de *fin* que $0^{gr},1$ est contenu de fois dans 3^{gr}. Divisant 3^{gr} par $0^{gr},1$, le quotient 30 fait voir qu'on doit remplacer 30 des 100^{gr} à 0,9 de *fin*, par 30^{gr} à 0,8.

Ainsi, 100^{gr} de l'alliage demandé doivent être composés de 100 — 30 ou 70 grammes du 1^{er} lingot à 0,9 de *fin*, et de 30 grammes du 2^{e} lingot à 0,8 de *fin*.

Remarque. L'*Algèbre* donnera le moyen de résoudre plus simplement les questions des n^{os} **338**, **339**, **340**, **341** et **342**.

§ VIII. *Problèmes sur des mobiles.*

*343. Nous supposerons que les *vitesses* sont *constantes*; c'est-à-dire que le *mouvement* est *uniforme*. De sorte que *les longueurs des routes parcourues par un même mobile seront proportionnelles aux temps employés à les parcourir.*

*45^{e} Problème. *Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de* 138 *lieues, fait* 3 *lieues en* 4 *heures, et part* 40 *heures avant le second qui parcourt* 6 *lieues en* 7 *heures. On demande dans combien de temps le* 2^{e} *courrier atteindra le* 1^{er} *courrier, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre.*

Le 1^{er} courrier mettant 4 heures à parcourir 3 lieues, fera en une heure $\frac{3^{lieues}}{4}$; et comme il part 40 heures avant le 2^{e} courrier, il fait pendant ce temps 40 fois $\frac{3^{lieues}}{4}$ ou 30 lieues; de sorte qu'à l'instant du départ du 2^{e} courrier, le 1^{er} a une avance de $138^{li}+30^{li}$ ou de 168 lieues. Le 2^{e} courrier n'atteindra donc le 1^{er} que lorsqu'il s'en sera rapproché de 168 lieues. Or, le 2^{e} courrier parcourant 6 lieues en 7 heures, fait $\frac{6^{lieues}}{7}$ par

heure, tandis que le 1^{er} courrier fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure. Il suit de là que pendant une heure, le 2^{e} courrier se rapproche du 1^{er} de $\frac{6^{li}}{7}-\frac{3^{li}}{4}$, ou de $\frac{3^{li}}{28}$. Il s'agit de trouver combien ce 2^{e} courrier mettra de temps à se rapprocher du 1^{er} des 168 lieues dont il est en arrière.

1^{re} Méthode. Puisque le 2^{e} courrier se rapproche du 1^{er} de $\frac{3^{li}}{28}$ par heure, il s'en rapprochera : de $\frac{1^{li}}{28}$ en $\frac{1^{h}}{3}$, d'une lieue en $\frac{28^{h}}{3}$, et de 168 lieues en 168 fois $\frac{28^{h}}{3}$ ou en 1568 heures. Le 2^{e} courrier atteindra donc le 1^{er} après 1568 heures de marche.

Pour vérifier ce résultat, on observe que le 2^{e} courrier parcourant $\frac{6^{li}}{7}$ par heure, fera en 1568 heures, 1568 fois $\frac{6^{li}}{7}$, ou 1344 lieues; le 1^{er} courrier, qui part 40^{h} avant le 2^{e}, aura marché pendant 1608^{h} et aura parcouru 1608 fois $\frac{3^{li}}{4}$ ou 1206 lieues; la différence, 138 lieues, entre les espaces parcourus, 1344^{lieues}, 1206^{lieues}, est effectivement égale à la distance des points de départ des courriers.

2^{e} Méthode. Le 2^{e} courrier se rapprochant du 1^{er} de $\frac{3^{li}}{28}$ par heure, pour trouver en combien d'heures ce 2^{e} courrier se rapprochera du 1^{er} des 168 lieues dont il est en arrière, on fera la proportion $\frac{3}{28} : 1 :: 168 : x$; d'où $x = 1568$.

* 46^{e} Problème. *Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de* 200 *lieues, fait* 3 *lieues en* 4 *heures, et part* 40 *heures avant le second qui fait* 6 *lieues en* 7 *heures; après combien d'heures de marche, le second courrier ne sera-t-il plus en arrière du premier que de* 62 *lieues?*

On verra, comme dans la question précédente, que le 1^{er} courrier a fait 30 lieues avant le départ du 2^{e} courrier; le 1^{er} courrier a donc 230 lieues d'avance; et par conséquent, le

2e courrier, pour n'être plus en arrière du 1er que de 62 lieues, doit s'en rapprocher de 230 — 62 lieues, ou de 168 lieues. On vient de trouver dans le 45e problème, que ce rapprochement aura lieu après 1568 heures de marche du 2e courrier.

*47e Problème. *Une montre bien réglée marque midi; il faut trouver combien de fois l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure chaque rencontre aura lieu.*

1re Solution. La circonférence du *cadran* étant divisée en 60 parties égales, la 1re rencontre, à partir de midi, aura lieu quand l'aiguille des minutes aura parcouru 60 divisions de plus que celle des heures, c'est-à-dire lorsque la différence des espaces parcourus par les aiguilles sera de 60 divisions. Or, en une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, et celle des heures parcourt les 5 divisions comprises entre deux heures consécutives; la différence entre les espaces que les deux aiguilles parcourent est donc :

de 55 divisions en une heure, d'une division en $\frac{1}{55}$ d'heure,

et de 60 divisions en $\frac{60^h}{55}$ ou en $\frac{12}{11}$ d'heure.

La 1re rencontre des aiguilles aura donc lieu à $\frac{12^h}{11}$.

Les aiguilles marchant toujours avec la même vitesse, le temps écoulé depuis une rencontre jusqu'à la suivante, est constamment égal à $\frac{12^h}{11}$. On en déduit, qu'à partir de midi, les rencontres successives des aiguilles ont lieu aux heures suivantes :

$\frac{12^h}{11}, \frac{24^h}{11}, \frac{36^h}{11}, \frac{48^h}{11}, \frac{60^h}{11}, \frac{72^h}{11}, \frac{84^h}{11}, \frac{96^h}{11}, \frac{108^h}{11}, \frac{120^h}{11}$, 12^h ou *minuit*.

2e Solution. Les aiguilles se rencontrent 11 fois en 12 heures à partir de midi ; car de midi à 1^h, il n'y a pas de rencontre, et pendant chacune des 11 heures suivantes, l'aiguille des minutes rencontre une seule fois celle des heures. Les 11 rencontres des aiguilles ayant lieu en 12 heures, et leurs vitesses étant constantes, le temps écoulé entre deux rencontres consécutives est égal à $\frac{12^h}{11}$ ou à $1^h\,5'\,27''\,\frac{3}{11}$.

*48e Problème. *Une montre qui avance de 3 minutes par jour, a été mise sur l'heure juste à midi. On demande quelle sera l'heure exacte (le même jour), lorsque cette montre marquera 7 heures 12 minutes après midi.*

Si la montre n'était pas dérangée, l'aiguille des minutes parcourrait en 24 heures, 24 fois 60 divisions du cadran ou 1440 divisions ; mais comme on suppose que la montre avance de 3 minutes par jour, l'aiguille des minutes parcourra 1443 divisions en 24 heures ; cette aiguille parcourt donc une de ces divisions en $\frac{24^h}{1443}$, ce qui se réduit à $\frac{8^h}{481}$.

Quand la montre marquera $7^h\,12'$, après midi, l'aiguille des minutes aura parcouru, depuis midi, 7 fois les 60 divisions du cadran en 7^h, plus 12 divisions en $12'$, ce qui fait en tout 432 divisions. Or, on vient de voir que cette aiguille parcourt une division en $\frac{8^h}{481}$; elle a donc parcouru les 432 divisions, en 432 fois $\frac{8^h}{481}$. L'heure cherchée est donc $\frac{8^h}{481} \times 432$ ou $7^h\,11'\,6''\,\frac{54}{481}$.

Problèmes divers.

*49e Problème. *On veut troquer du drap à 36f,36 le mètre, contre du casimir à 27f,27 le mètre. Combien devra-t-on recevoir de casimir en échange de 12 mètres de drap.*

Les 12 mètres de drap valant 12 fois 36f,36 ou 436f,32, on recevra autant de mètres de casimir que le prix 27f,27 d'un mètre de casimir est contenu de fois dans 436f,32; divisant 436f,32 par 27f,27, le quotient 16 exprimera le nombre de mètres demandé.

*50e Problème. *Un marchand veut échanger du drap contre du basin; 2 mètres de drap valent autant que 3 mètres de casimir, et 5 mètres de casimir valent autant que 7 mètres de basin. Com-*

bien le marchand recevra-t-il de mètres de basin pour 60 mètres de drap. D'après cet énoncé :

1^m de drap vaut $\frac{3^m}{2}$ de casimir, et 1^m de casimir vaut $\frac{7^m}{5}$ de basin. Il suit de là qu'un mètre de drap vaut les $\frac{3}{2}$ de 1^m de casimir, ou les $\frac{3}{2}$ de $\frac{7^m}{5}$ de basin, ou $\frac{21^m}{10}$ de basin. Les 60^m de drap valent donc 60 fois $\frac{21^m}{10}$ ou 126^m de basin.

* 51ᵉ PROBLÈME. *Trois ouvriers de forces différentes, sont employés à un ouvrage; si chacun d'eux travaillait seul, le 1ᵉʳ ferait l'ouvrage en $\frac{3^h}{2}$, le 2ᵉ en $\frac{7^h}{3}$, et le 3ᵉ en $\frac{7^h}{4}$. En combien de temps cet ouvrage sera-t-il fait par les trois ouvriers travaillant ensemble.*

Puisque le 1ᵉʳ ouvrier travaillant seul met $\frac{3^h}{2}$ à faire l'ouvrage, en $\frac{1^h}{2}$ il ferait $\frac{1}{3}$ de l'ouvrage, et en une heure il ferait les $\frac{2}{3}$ de l'ouvrage. On verra de même que pendant une heure, le 2ᵉ ouvrier ferait les $\frac{3}{7}$ de l'ouvrage, tandis que le 3ᵉ ouvrier ferait les $\frac{4}{7}$ de l'ouvrage. Par conséquent, lorsque les trois ouvriers travaillent à la fois, ils font en une heure $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$ ou $\frac{5}{3}$ de l'ouvrage; ils feraient donc $\frac{1}{3}$ de l'ouvrage en $\frac{1}{5}$ d'heure; ils feront donc l'ouvrage en $\frac{3^h}{5}$ ou en 36 minutes.

* 52ᵉ PROBLÈME. *Un bassin est alimenté par deux fontaines; la 1ʳᵉ le remplirait en $\frac{3}{2}$ heure, et la 2ᵉ en $\frac{3}{4}$ d'heure; la totalité de l'eau qu'il peut contenir sortirait en 3 heures par une*

ouverture pratiquée à ce bassin; en combien de temps, le bassin supposé vide, sera-t-il rempli, lorsque l'eau coulera par les trois ouvertures à la fois.

Puisque la 1ʳᵉ fontaine coulant seule met $\frac{3^h}{2}$ à remplir le bassin, en 3^h elle remplirait 2 fois le bassin, et en 1^h elle remplirait les $\frac{2}{3}$ du bassin. On verra de même qu'en une heure, la 2ᵉ fontaine remplit les $\frac{4}{3}$ du bassin, et que la 3ᵉ ouverture vide $\frac{1}{3}$ du bassin.

Ainsi, quand l'eau coule par ces trois ouvertures, la partie du bassin qui se remplit en une heure est $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, ou $\frac{5}{3}$.

Puisque les $\frac{5}{3}$ du bassin seraient remplis en une heure,

$\frac{1}{3}$ du bassin serait rempli en $\frac{1}{5}$ d'heure.

Le bassin serait donc rempli en 3 fois $\frac{1^h}{5}$, ou en $\frac{3}{5}$ d'heure.

* 53ᵉ PROBLÈME. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste 24^f au 1ᵉʳ joueur, 28^f au 2ᵉ joueur, et 14^f au 3ᵉ joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu.*

A la fin de la 3ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 24^f, le 2ᵉ a 28^f, et le 3ᵉ a 14^f.

Le 3ᵉ joueur ayant perdu la 3ᵉ partie a doublé l'argent des deux autres; ceux-ci n'avaient donc à la fin de la 2ᵉ partie que la moitié de ce qu'ils ont à la fin de la 3ᵉ, c'est-à-dire 12^f et 14^f; le 3ᵉ joueur avait les 26^f qu'il a perdus avec les deux autres, plus les 14^f qui lui restent, c'est-à-dire 40 francs. Ainsi,

à la fin de la 2ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 12^f, le 2ᵉ a 14^f, et le 3ᵉ a 40^f.

Des raisonnemens analogues conduisent aux résultats suivans :

à la fin de la 1ʳᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 6^f, le 2ᵉ a 40^f, et le 3ᵉ a 20^f;
en se mettant au jeu, le 1ᵉʳ joueur a 36^f, le 2ᵉ a 20^f, et le 3ᵉ a 10^f.

* 54e Problème. *La lumière met 8 minutes 13 secondes, ou 493 secondes, à parcourir la distance du soleil à la terre, qui est d'environ 39 millions de lieues de poste* (*). *On propose d'en déduire la* vitesse *de la lumière, c'est-à-dire l'espace qu'elle parcourt en une seconde.*

Puisque l'espace parcouru par la lumière en 493 secondes est 39 000 000 lieues, on obtiendra l'espace qu'elle parcourt pendant une seconde, en divisant 39000000 lieues par 493 ; le quotient est 79107^{lieues},5050 etc., ou 2000^{T} × 79107,5050 etc., ou environ 158 215 010 toises; telle est la vitesse de la lumière.

* 55e Problème. *Un militaire entend un coup de canon, sept secondes après avoir vu la lumière produite par l'inflammation de la poudre. On sait que le son parcourt 340 mètres par seconde. Il s'agit de calculer à quelle distance le militaire est du canon.*

La vitesse de la lumière est tellement grande qu'il est permis de supposer, sans erreur sensible, qu'on aperçoit l'inflammation de la poudre à l'instant où le coup part. Dans cette hypothèse, le militaire est éloigné du canon de 7 fois 340^{m}, ou de 2380^{m}, ou d'environ 1221 toises.

* 56e Problème. *Trouver un nombre dont la moitié plus le huitième donnent 60.*

La somme des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, étant $\frac{5}{8}$, il en résulte que :

les $\frac{5}{8}$ du nombre cherché font 60 ;

$\frac{1}{8}$ du nombre cherché vaut donc le 5e de 60 ou 12.

Le nombre cherché est donc 8 fois 12 ou 96.

* 57e Problème. *Un père laisse par testament : la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les 10000 francs qui restent à sa veuve ; il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant.*

(*) La *lieue de poste* est de 2000 toises, ou d'environ 3898 mètres.

La part du fils jointe à celle de la fille composent $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{6}$ de l'héritage ; les 10000^{f} qui restent à la mère expriment donc le sixième du bien total ; ce bien est donc 6 fois 10000^{f} ou 60000^{f} ; le fils en prend la moitié ou 30000^{f}, la fille le tiers ou 20000^{f} ; il reste effectivement 10000 francs à la veuve.

* 58e problème. *On place sur une table, un* étui, *un* anneau, *et une* montre. *Trois personnes prennent chacune un de ces trois bijoux à votre insu. Il s'agit de deviner quel est l'objet qui a été pris par chaque personne.*

A cet effet : donnez un jeton à la 1re personne, deux jetons à la 2e personne, et trois jetons à la 3e personne; posez 18 jetons sur la table, et après avoir passé dans une chambre voisine, ordonnez que la personne qui a l'étui prenne sur la table autant de jetons qu'elle en a dans la main, que celle qui a l'anneau prenne le double des jetons qu'elle a dans la main, et que la personne qui a la montre prenne le quadruple des jetons qu'elle a dans la main ; demandez alors combien il reste de jetons sur la table ; ce reste sera nécessairement un des nombres

1, 2, 3, 5, 6, 7 ;

vous rapporterez ces nombres aux mots

eaux, *aériennes*, *émues*, *amoncelées*, *ménagez*, *Marseille*.

La 1re lettre du mot correspondant au nombre des jetons qui restent sur la table est la lettre initiale du nom de l'objet pris par la 1re personne, et la 2e lettre du même mot est la lettre initiale du nom de l'objet pris par la 2e personne.

Par exemple, lorsqu'il reste 6 jetons, le mot *ménagez*, placé sous le reste 6, exprime que la première personne a la *montre* et que la seconde a l'*étui*.

Remarque. L'exactitude de cette règle est facile à vérifier, car trois objets ne peuvent être pris que de six manières différentes, et en appliquant la règle indiquée, on trouve que les six *restes* correspondans sont, 1, 2, 3, 5, 6, 7.

Note sur les différens systèmes de numération.

***344.** Nous avons vu (nº **5**) que pour écrire tous les nombres avec *dix* chiffres, il suffit de convenir qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de *dix* en *dix* fois plus grandes.

On peut établir d'autres systèmes de numération, c'est-à-dire écrire tous les nombres avec plus ou moins de *caractères*, en convenant, par *analogie*, qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités autant de fois plus grandes qu'il y a de chiffres dans le système.* Le nombre b des chiffres employé dans un système de numération, se nomme la *base* de ce système. Ainsi, quelle que soit la *base* b, le 1er chiffre d'un nombre, à partir de la droite, exprime des unités simples ou du 1er ordre; le 2e chiffre exprime des unités du 2e ordre, le 3e des unités du 3e ordre; etc. Chaque unité du 1er ordre vaut 1; chaque unité du 2e ordre est égale à la base b et vaut b unités; chaque unité du 3e ordre est égale à b^2; et en général, *une unité du* $n^{ième}$ *ordre vaut* b^{n-1} unités simples.

Du Système duodécimal.

***345.** Pour fixer les idées, nous considérerons le système composé de *douze* chiffres, et qu'on nomme, par cette raison, *système duodécimal*.

Les onze premiers nombres,

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze,

seront représentés par les *chiffres*,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δ, ω.

Les nombres que nous ne placerons pas entre parenthèses seront écrits dans le système *décimal*; et pour indiquer qu'un nombre est écrit dans le système *duodécimal*, nous le mettrons entre parenthèses.

Pour écrire tous les nombres entiers plus grands que onze, il suffit de convenir qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus grandes*; de sorte qu'en partant de la droite d'un nombre, chaque unité du 1er ordre vaut 1, chaque unité du 2e ordre vaut 12, chaque unité du 3e ordre vaut 12^2 ou 144, chaque unité du 4e ordre vaut 12^3 ou 1728, chaque unité du 5e ordre vaut 12^4 ou 20736; etc.

Ainsi, les nombres	(10),	(100),	(1000),	(10000),	etc.
ont pour valeurs	12,	144,	1728,	20736,	etc.

Cela posé : si l'on ajoute une unité à onze, on obtiendra le nombre (10). Pour écrire les nombres treize, quatorze,..., vingt-trois, on remplace successivement le zéro du nombre (10), par chacun des onze chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δ, ω.

Le nombre (1ω), qui vaut vingt-trois, étant composé d'une douzaine et de onze unités, en lui ajoutant 1, on obtient le nombre vingt-quatre, formé de 2 douzaines et qui s'écrit (20); remplaçant le zéro par chacun des onze chiffres significatifs, on trouve les onze nombres entiers compris entre 2 douzaines ou vingt-quatre, et 3 douzaines ou trente-six; et en continuant ainsi, on arrive au nombre ($\omega\omega$) composé de onze douzaines plus onze unités; ce nombre est égal à $11 \times 12 + 11$, ou à 143. De cette manière, on écrit avec deux chiffres tous les nombres compris entre onze et cent quarante-quatre. Ajoutant l'unité à ($\omega\omega$), on obtient le nombre cent quarante-quatre, qui vaut douze douzaines, et que l'on écrit (100). Remplaçant successivement les chiffres de ce dernier nombre, par chacun des onze chiffres significatifs, on parvient à écrire tous les nombres compris entre 144 et 1728. Et ainsi de suite.

1re Remarque. *Pour multiplier un nombre par* (10), *ou par* (100), *ou par* (1000), *etc., il suffit de mettre sur sa droite un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro, etc. Réciproquement, lorsqu'un nombre est terminé par des zéro, pour le diviser par* (10), *ou par* (100), *ou par* (1000), *etc., il suffit de supprimer sur sa droite un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro, etc.*

2e Remarque. *Lorsque le chiffre des unités d'un nombre* α, *écrit dans le système duodécimal, n'est pas un zéro, ce nombre n'est pas divisible par la base* (10); car α étant décomposable en deux parties, dont l'une terminée par un zéro admet le diviseur (10), et dont l'autre, qui est le chiffre des unités, n'admet pas le diviseur (10), il résulte du principe établi (nº **54**, 8º), que α n'est pas divisible par (10).

Par exemple, le nombre (237) ne saurait être divisible par (10); car il se décompose en deux parties (230), 7, dont la première est divisible par (10), et dont la seconde n'admet pas ce diviseur.

***346.** *Quand un nombre est écrit dans le système duodécimal, pour l'écrire dans le système décimal, on multiplie le* 1er *chiffre à droite par* 1, *le* 2e *par la base* 12, *le* 3e *par* 12^2, *le* 4e *par* 12^3; *et ainsi de suite, jusqu'au chiffre des plus hautes unités; la somme de ces produits est le nombre demandé.*

Exemple. On a, $(\delta 35) = 5 + 3 \times 12 + 10 \times 144 = 1481$.

***347.** *Lorsqu'un nombre est écrit dans le système décimal, pour l'écrire dans le système duodécimal, on le divise par* 12; *le reste est le* 1er *chiffre à droite du nombre demandé, et le quotient exprime des douzaines, c'est-à-dire des unités du* 2e *ordre; divisant ce quotient par* 12, *le reste est le* 2e *chiffre du nombre cherché, et le quotient représente des unités du* 3e *ordre; continuant ce calcul, on parvient à un quotient moindre que* 12, *qui est le dernier chiffre du nombre demandé.* Cela résulte de ce que, dans le système duodécimal, douze unités d'un ordre quelconque valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Ainsi, pour *écrire* 1481 *dans le système duodécimal,* on divise 1481 par