12, ce qui donne le reste 5 et le quotient 123; la division de 123 par 12, fournit le reste 3 et le quotient δ; de sorte que le nombre demandé est (δ35).

* **348**. Pour *énoncer un nombre écrit dans le système duodécimal*, on l'écrit d'abord dans le système décimal (n° **346**), et on énonce ensuite ce dernier nombre d'après la règle du n° **7**.

* **349**. *Les méthodes qui ont été données pour opérer sur les nombres écrits dans le système décimal, s'appliquent au système duodécimal, avec cette seule différence que la base étant douze, il faut douze unités d'un ordre pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur.*

Exemples d'addition.

	(23δ5)	(ω0δ23)	(δω0000ω5)
	(437)	(70845)	(489δ2346)
	(60ω)	(δωδωδ)	(97δ56320)
	(4δω0)	(8δ9δδ)	(4789000)
Somme,	(811ω)	(320354)	(2184057 5ω)

Exemples de soustraction.

De	(δ98987)	(900084005)	(9000002)
Otez	(375712)	(8234δ7δ27)	(8785674)
Reste	(723275)	(9879819δ)	(43654δ).

Exemples de multiplication.

Multiplicande	(47δω8)	(113δω)
Multiplicateur	(113δω)	(47δω8)
	(433084)	(8δ734)
	(3δ71880)	(1027010)
	(11ω8ω000)	(ω131200)
	(47δω8000)	(79345000)
	(47δω80000)	(45378000 0)
Produit	(52112ω944)	(52112ω944).

Exemple de division.

Soit proposé de diviser (23832) par (3ω).
On effectue le calcul de la manière suivante :

Dividende,	(3ω) *diviseur.*	*Multiples du diviseur.*	
(23832)	(70δ) *quotient.*	(3ω) × 2 = (7δ)	(3ω) × 7 = (235)
(235)		(3ω) × 3 = (ω9)	(3ω) × 8 = (274)
(33)		(3ω) × 4 = (138)	(3ω) × 9 = (2ω3)
(332)		(3ω) × 5 = (177)	(3ω) × δ = (332)
(332)		(3ω) × 6 = (1ω6)	(3ω) × ω = (371).
0			

On forme d'abord les produits du diviseur (3ω), par chacun des nombres d'un seul chiffre. On voit alors que le 1[er] dividende partiel (238) tombe entre (235) et (274), c'est-à-dire entre (3ω) × 7 et (3ω) × 8; le 1[er] chiffre à gauche du quotient est donc 7; on retranche (235) de (238), et sur la droite du reste 3, on abaisse 3 qui est le chiffre suivant du dividende; le 2[e] dividende partiel (33) qui en résulte étant moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient est 0; on abaisse sur la droite de (33) le dernier chiffre 2 du dividende; le 3[e] dividende partiel (332) étant le produit de (3ω) par δ, le chiffre correspondant du quotient est δ; on retranche (332) de (332); le reste zéro indique que le quotient obtenu (70δ) est exact.

Les *preuves des quatre règles* s'exécutent comme dans le système décimal par les méthodes des (n°s **15**, **17**, **22**, **31**).

* **350**. *Les théories exposées dans le 2[e] et le 3[e] chapitre, s'appliquent au système duodécimal, en substituant la base douze à la base dix.* Ainsi :

1°. Comme en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un *nombre duodécimal*, ses chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus petites, les chiffres placés à la droite de la *virgule*, expriment des unités dont les valeurs respectives sont

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{12^2} \text{ ou } \frac{1}{144},\ \frac{1}{12^3} \text{ ou } \frac{1}{1728},\ \frac{1}{12^4} \text{ ou } \frac{1}{20736}, \text{ etc.}$$

$$\text{Ainsi, } (623{,}45\delta) = 6 \times 12^2 + 2 \times 12 + 3 + \frac{4}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{\delta}{12^3}.$$

2°. Un nombre écrit dans le système duodécimal, est multiplié ou est divisé autant de fois par le facteur (10), que la *virgule* a été avancée de rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre (n° **130**, 2° et 3°).

3°. Tout nombre duodécimal équivaut à une fraction dont le numérateur est le nombre duodécimal, abstraction faite de la *virgule*, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la *virgule* (n° **126**).

$$\text{Ainsi, } (623{,}45\delta7) = \frac{(62345\delta7)}{(10000)}, \text{ et } (0{,}0031) = \frac{\cancel{(31)}}{\cancel{(1000)}}.\ \frac{(31)}{(10000)}$$

4°. Pour convertir en nombre duodécimal, une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on écrit le numérateur, et on sépare à l'aide de la *virgule* autant de chiffres sur la droite de ce numérateur, qu'il y a de zéro dans le dénominateur (n° **125**). Ainsi,

$$\frac{(62345\delta7)}{(10000)} = (623{,}45\delta7), \text{ et } \frac{(31)}{(10000)} = (0{,}0031).$$

* **351**. *Les règles des n°s* **132**,..., **142**, *s'appliquent aux nombres duodécimaux*, avec cette seule différence que la base *dix* et ses facteurs premiers, 2, 5, doivent être remplacés par la base *douze* et ses facteurs premiers 2, 3;

les fractions décimales périodiques deviennent des *fractions duodécimales périodiques;* et dans les dénominateurs des fractions ordinaires équivalentes, chaque 9 est remplacé par ω.

On trouve de cette manière que la *somme* des nombres (23,δ5), (4,37), (6,0ω), (4δ,ω0) est (81,1ω), que la *différence* entre (9008,4005) et (8234δ,17δ27) est (9879,819δ), et que le *produit* de (47,δω8) par (11,3δω) est (521,12ω944).

Pour *calculer le quotient de* (238,32) *par* (3,ω), on multiplie le dividende et le diviseur par (100), ce qui ne change pas le quotient (n° **199**). La question est ainsi réduite à diviser (23832) par (3ω0). En opérant d'une manière analogue à celle qui a été indiquée dans le n° **349**, on verra que le quotient cherché est (70,δ). Ce quotient est exact, car la multiplication du diviseur (3,ω) par (70,δ) donne le dividende (238,32).

On trouvera d'une manière semblable, en appliquant la règle du n° **136** au système duodécimal, que

$$\left(\frac{7}{300}\right) = (0{,}024),\quad \left(\frac{27}{\omega\omega}\right) = (0{,}27\ 27\ 27\ \text{etc.}),$$

$$\left(\frac{7\omega5354}{\omega\omega000}\right) = (8{,}013\ 67\ 67\ \text{etc.}),\qquad \left(\frac{12\omega4}{\omega\omega0000}\right) = (0{,}0013\ 07\ 07\ \text{etc.}).$$

Réciproquement, si l'on applique les règles du n° **139** au système duodécimal, on trouvera

$$(0{,}27\ 27\ 27\ \text{etc.}) = \left(\frac{27}{\omega\omega}\right),$$

$$(8{,}013\ 67\ 67\ \text{etc.}) = \frac{(801367) - (8013)}{(\omega\omega000)} = \frac{(7\omega5354)}{(\omega\omega000)},$$

$$(0{,}0013\ 07\ 07\ 07\ \text{etc.}) = \frac{(1307) - (13)}{(\omega\omega0000)} = \frac{(12\omega4)}{(\omega\omega0000)},$$

$$(0{,}\omega\omega\omega\omega\ \text{etc.}) = \left(\frac{\omega}{\omega}\right) = 1,\quad (0{,}0\omega\omega\omega\ \text{etc.}) = \left(\frac{\omega}{\omega0}\right) = (0{,}1);\ \text{etc.}$$

* **352.** Les règles du n° **144**, appliquées au système duodécimal, serviront à *reconnaître si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur conduirait à un quotient exact, ou à un quotient périodique simple, ou à un quotient périodique mixte.*

1°. *Quand le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on obtient directement le quotient de la division du numérateur par le dénominateur, en écrivant le numérateur, et en séparant par la virgule autant de chiffres sur la droite de ce numérateur qu'il y a de zéro dans le dénominateur.* Ainsi,

$$\left(\frac{347}{100}\right) = (3{,}47),\ \left(\frac{24}{1000}\right) = (0{,}024),\ \left(\frac{36}{1000}\right) = (0{,}036).$$

2°. *Quand le dénominateur n'étant pas l'unité suivie de plusieurs zéro, ne contient que les facteurs premiers* 2, 3, *de la base douze, la division du numérateur par le dénominateur fournit toujours un quotient duodécimal exact;* car les puissances successives de la *base* étant

$$(10) = 2^2 \times 3,\ (10)^2 = (100) = 2^4 \times 3^2,\ (10)^3 = (1000) = 2^6 \times 3^3,\ \text{etc.},$$

on voit que pour transformer la fraction donnée en une fraction équivalente dont le dénominateur soit l'unité suivie de plusieurs zéro, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction proposée par des puissances de 2 et de 3 telles que dans le nouveau dénominateur, l'exposant du facteur 2 soit double de l'exposant du facteur 3. Ainsi,

$$\left(\frac{7}{200}\right) = \frac{7}{288} = \frac{7}{2^5 \times 3^2} = \frac{7 \times 2 \times 3}{2^6 \times 3^3} = \left(\frac{36}{1000}\right) = (0{,}036).$$

3°. *Quand le dénominateur contient des facteurs premiers autres que* 2 *et* 3, *qui n'entrent pas dans le numérateur, la division du numérateur par le dénominateur conduit nécessairement à un quotient périodique simple ou mixte.*

Soit la fraction $\left(\frac{7}{26}\right)$. Le dénominateur (26) = 30, contenant le facteur 5 qui n'entre pas dans le numérateur 7, je dis que la division de 7 par (26) fournira un quotient périodique. En effet, si l'on pouvait obtenir un quotient exact, tel que (0,89) par exemple, on aurait

$$\left(\frac{7}{26}\right) = (0{,}89) = \left(\frac{89}{100}\right);\ \text{d'où}\ (89) \times (26) = (100) \times 7,\ (\text{n}^\circ\ \mathbf{110}).$$

Or, 5 divise (26); 5 devrait donc diviser (100) × 7; mais 5 est premier avec 7; 5 diviserait donc (100) ou (10) × (10); 5 diviserait donc (10), (n° **72**); 5 diviserait donc un des facteurs 2, 3, de (10); ce qui est impossible. La division de 7 par (26), fournira donc un quotient qui se prolongera indéfiniment.

Tous les restes étant moindres que le diviseur (26), on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, après un nombre de divisions plus petit que (26); et on en conclura, par des raisonnemens analogues à ceux du n° **137**, que le quotient sera périodique. Et en effet, la division de 7 par (26), donne le quotient périodique mixte (0,2 9724 9724 etc.).

4°. *Lorsque le dénominateur ne renferme aucun des facteurs* 2, 3, *de la base douze, la division du numérateur par le dénominateur fournit un quotient périodique simple.*

En effet, soit la fraction $\left(\frac{10\omega}{4\omega7}\right)$; son dénominateur (4ω7) = 715, ne renfermant aucun des facteurs 2, 3, de la base 12, je dis que la division de (10ω) par (4ω7) donnera un quotient périodique simple. Le quotient étant nécessairement périodique (3°), il suffit de faire voir que la division de (10ω) par (4ω7) ne saurait fournir un quotient périodique mixte, tel que (0,5 89 89 etc.) par exemple.

Si l'on avait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = (0{,}5\ 89\ 89 \text{ etc.})$,

il en résulterait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = \left(\frac{589 - 5}{\omega\omega 0}\right)$, (n° **139**, 3°);

et par suite $(10\omega) \times (\omega\omega 0) = (4\omega 7) \times [(589) - 5]$, (n° **110**).

Or, $(\omega\omega 0)$ est divisible par (10); (10) diviserait donc le produit de $(4\omega 7)$ par $(589) - 5$. D'ailleurs, (10) est premier avec $(4\omega 7)$, car on suppose que le dénominateur $(4\omega 7)$ ne renferme aucun des facteurs 2, 3, de (10); le nombre (10) diviserait donc $(589) - 5$; le 1er chiffre à droite du nombre que l'on obtient en retranchant 5 de (589) serait donc un zéro (n° **55**, 1°); ce qui est impossible. La période commencera donc au premier chiffre après la *virgule*. Et en effet, la division de (10ω) par $(4\omega 7)$ fournit le quotient périodique simple (0,27 27 27 27 etc.).

5°. Enfin, *quand la fraction proposée est irréductible, si le dénominateur renferme des facteurs* 2, 3, *de la base douze, combinés avec d'autres facteurs premiers, la division du numérateur par le dénominateur fournit un quotient périodique mixte.*

Pour fixer les idées, considérons la fraction irréductible $\left(\frac{7}{26}\right)$. Le dénominateur étant égal à $2 \times 3 \times 5$, je dis que la division de 7 par (26) donnera un quotient périodique mixte. En effet; d'après (3°), le quotient sera nécessairement périodique; il suffit donc de prouver qu'on ne peut obtenir un quotient périodique simple, tel que (0,89 89 89 etc.) par exemple. Si l'on avait

$$\left(\frac{7}{26}\right) = (0{,}89\ 89\ 89 \text{ etc.}) = \left(\frac{89}{\omega\omega}\right), \text{ (n° } \mathbf{139}, 2°),$$

il en résulterait $(89) \times (26) = 7 \times (\omega\omega)$, (n° **110**).

Or, 3 divise (26); 3 diviserait donc $7 \times (\omega\omega)$. Mais, la fraction donnée étant irréductible, le facteur 3 du dénominateur est premier avec le numérateur 7; 3 devrait donc diviser $(\omega\omega)$ ou $(10)^2 - 1$; d'ailleurs 3 divise $(10)^2$; 3 diviserait donc la différence 1 entre $(10)^2$ et $(10)^2 - 1$, (n° **54**, 2°); ce qui est impossible. On obtiendra donc un quotient périodique mixte. Et en effet, ce quotient est (0,2 9724 9724 etc.).

* **353.** Pour *déterminer le reste de la division d'un nombre par la base douze diminuée ou augmentée de* 1, *c'est-à-dire par onze ou par treize*, il suffit d'avoir recours aux règles des n^os **57**, **59**, et d'y remplacer les nombres *neuf* et *onze*, par *onze* et *treize*.

Ainsi, le reste de la division de (234) par onze est $2+3+4$ ou 9; le reste de la division de $(7\omega 5354)$ par treize est $(4+3+\omega) - (5+5+7)$, ou $(16) - (15)$, ou 1; le reste de la division de $(7\omega 53540)$ par treize est

$$(5+5+7) + (11) - (4+3+\omega), \text{ ou } (15) + (11) - (16), \text{ ou } (26) - (16), \text{ ou } (10).$$

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.	POIDS.	Gram.
Ancien pied français	324,7	Liv. poids de marc	489,2
Pied anglais	304,8	Angl. { livre troy	372,6
Vare de Castille	836,6	Angl. { avoir du pois	453,1
Pied du Rhin	313,9	Castille	459,4
De Vienne	316,0	Cologne	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienne	558,6
De Suède	297,1	Amsterdam	491,4
De Russie	354,1	Suède	424,6
De la Chine	320,0	Russie	409,5

TABLEAU de comparaison des monnaies étrangères avec les monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication.

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ANGLETERRE.			
Or.	Guinée de 21 shillings	8g380	917	26f 47c
	Demi	4,190	917	13 23,50
	Un quart	2,095	917	6 61,75
	Un tiers, ou 7 shillings	2,793	917	8 82,33
	Souverain depuis 1818, de 20 shillings	7,981	917	25 21
Arg.	Crown, ou couronne de 5 shill. anciens	30,074	925	6 16
	Shilling ancien	6,015	925	1 24
	Crown, ou couronne, depuis 1818	28,251	925	5 81
	Shilling, depuis 1818	5,650	925	1 16
	AUTRICHE ET BOHÊME.			
Or.	Ducat de l'Empereur	3,490	986	11 85
	Ducat de Hongrie	3,491	984	11 91
	Souverain	5,567	917	17 58
	Demi	2,783	917	8 79
Arg	Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753	28,064	833	5 19
	Demi-risdale, ou florin	14,032	833	2 60
	Vingt kreutzers	6,639	581	0 86
	Dix kreutzers	3,898	500	0 43
	BADE.			
Or	Pièce de 10 florins, depuis 1819	6,878	902	21 04
	—— de 5 florin	3,439	902	10 52
Arg.	Pièce de 3 florins. nouveaux	32,795	871	6 35
	—— de 2 florins	25,450	750	4 18
	—— de 1 florin	12,725	750	2 09