REYNAUD

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE

Antonio Lafon

Antonio Lafon

Año de 1840

Antonio Lafon, estudiante en el colegio de Luis el Grande

Año de mil ochocientos cuarenta.

Antonio Lafox

Año de 1840

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE.

Ouvrages du Baron Reynaud.

1° *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.

2°. *Traité d'Arithmétique*, suivi d'une *Table de logarithmes*, à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de la Marine, et des Forêts (21e édit. 1839). 4 fr. 50 c.

3°. *Petit Traité Élémentaire d'Arithmétique*, en deux parties, un volume in-12, 1835. 3 fr. 50 c.
Chaque partie se vend séparément 2 fr.

4°. *Élémens d'Algèbre*, 10e édition, 1839. 4 fr. 50 c.
Complément des Élémens d'Algèbre (sous presse).

5°. *Cours de Mathématiques*, à l'usage des Élèves de la Marine, par MM. *Reynaud, Nicollet* et *Gerono*; 3 v. in-8°.
1er vol., Arithmétique et Algèbre, par M. *Reynaud*, 1829. 5 fr.
2e vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. *Nicollet*, 1829. 7 fr.
3e vol., Statique, par MM. *Reynaud* et *Gerono*, 1838 5 fr.

6°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie de Tables de logarithmes à cinq décimales par Lalande (3e édition, 1818). 3 fr.
Les Tables de logarithmes se vendent séparément 2 fr.

7°. *Tables de logarithmes* (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques, précédées d'une instruction très détaillée sur la manière de s'en servir; in-12 (édition stéréotype, tirage de 1837 corrigé). 3 fr. 50 c.

8°. *Traité d'Application* de l'Algèbre à la Géométrie (2e édit. sous presse).

9°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4° avec 11 pl. 5 fr.

10°. *Problèmes et développemens* sur les diverses parties des Mathématiques, avec 11 pl. 6 fr.

11°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de notions sur la *Chimie* et sur l'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour la Marine et le Baccalauréat ès-lettres, 3e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée; 2 vol. in-8° avec 21 pl., 1832. 12 fr. 50 c.
Chaque volume se vend séparément 7 fr.

12°. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, suivis de la *Théorie des plans* et des *préliminaires de la Géométrie descriptive*, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polytechnique, 10e édit., avec 21 pl., 1838. 5 fr.

13°. Élémens de *Géométrie descriptive*, suivis de la *Perspective*, des *Ombres*, de la *Gnomonique*, etc. (sous presse).

14°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud. 7 fr.

Notes sur Bezout.

15°. *Arithmétique*, 15e édition, 1832. 2 fr. 50 c.

16°. *Notes sur l'Algèbre.* (7e édition, 1834). 4 fr. 50 c.

17°. *Géométrie* contenant un grand nombre de théorèmes et de problèmes, et des *Élémens de Géométrie descriptive*, 10e édit., avec pl., 1838. 4 fr 50 c.

Nota. L'*Arithmétique* (21e édition), l'*Algèbre* (10e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (comprenant la *Trigonométrie*), la *Statique*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie*, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École Polytechnique, à l'*École Navale* et à l'École Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

QUI SE DESTINENT A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A LA MARINE, A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR ET A L'ÉCOLE FORESTIÈRE;

PAR LE BARON **REYNAUD**,
Ancien Examinateur pour l'admission dans ces Écoles;

Examinateur de la Marine Royale, Officier de la Légion-d'Honneur, Chevalier de St.-Michel, de l'ordre polonais Russe de St.-Stanislas, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

VINGT-UNIÈME ÉDITION,

DEUXIÈME TIRAGE.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1839

Copie de la circulaire de Monsieur le MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE à MM. les Recteurs :

Du 17 octobre 1838.

MONSIEUR LE RECTEUR,

« Les principaux Libraires de Paris qui s'occupent de la publication des Livres employés dans l'enseignement, en me faisant connaître qu'il existe de nombreuses contrefaçons de ces ouvrages, se plaignent de la facilité avec laquelle elles sont introduites dans les Colléges et dans les Écoles primaires, où leur prix semble, disent-ils, les faire préférer aux éditions originales. De là le double inconvénient de propager l'usage d'*éditions incorrectes* et de décourager les Éditeurs légitimes qui, trompés dans leurs prévisions, sont souvent forcés de renoncer, au détriment de la science, à améliorer et même à publier des ouvrages qu'ils craignent de ne pouvoir exploiter sans dommage et sans trouble.

» Vous voudrez bien, en conséquence, M. le Recteur, inviter les chefs d'établissement d'instruction secondaire et d'instruction primaire à prendre des précautions pour qu'*aucune édition contrefaite* ne soit à l'avenir admise dans les Colléges et dans les Écoles. Vous appellerez leur attention sur les inconvénients qui résultent, pour les études, de l'*incorrection de ces éditions*. Il y a d'ailleurs, dans le fait de la contrefaçon, une action coupable que la loi et la morale réprouvent également, et dont aucun membre de l'Université ne voudra, j'en suis assuré, se rendre complice. Je vous invite à rappeler à MM. les chefs d'établissements de tous les degrés qu'ils ne doivent employer que des Livres régulièrement approuvés ou autorisés par l'Université, et à leur faire remarquer que comme l'indication du nom de l'Éditeur accompagne toujours le titre des ouvrages dans les notifications des décisions dont ces ouvrages ont été l'objet, toute erreur est facile à éviter. L'intérêt des études leur prescrit d'y veiller.

» *Le Ministre de l'Instruction publique, grand-maître de l'Université,*

» Signé SALVANDY. »

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricans et les débitans de ces Exemplaires.

Bachelier   Reynaud

AVERTISSEMENT.

L'ARITHMÉTIQUE, utile dans toutes les professions, doit être considérée comme une des premières branches de l'instruction publique; elle dirige les plus belles spéculations du commerce, et sans elle, l'homme le plus instruit d'ailleurs serait incapable d'exercer le moindre emploi; elle sert de base et d'introduction à toutes les parties des *Mathématiques*, car c'est toujours aux nombres qu'il faut ramener les résultats des calculs. Il est donc nécessaire de traiter avec soin les diverses parties d'une science qui a occupé, dans tous les temps, les génies les plus vastes, et que le célèbre LAGRANGE enseigna à l'*École Normale*.

La clarté des *méthodes arithmétiques* convient à la faiblesse des commençans, et les formes variées dont elles sont susceptibles, en exerçant l'esprit des jeunes gens, les disposent à saisir plus facilement les considérations abstraites de l'ALGÈBRE. *Les procédés algébriques, employés de trop bonne heure, accoutument les élèves à se laisser aveuglément conduire par le* MÉCANISME *des transformations;* tandis que les considérations fines et ingénieuses qu'exigent les solutions arithmétiques, fortifient le raisonnement et le préparent aux artifices brillans de l'analyse.

Ces motifs m'ont déterminé à *présenter toutes les démonstrations sous une forme entièrement arithmétique; car je crois qu'on ne doit avoir recours à l'Algèbre, qu'à l'instant où les ressources de l'Arithmétique deviennent insuffisantes.*

Je me suis conformé au programme des examens pour l'admission à l'École Polytechnique, en exposant la théorie des logarithmes d'une manière purement arithmétique; j'ai cherché à traiter cette théorie avec tous les développemens que mérite son importance. J'ai fortement insisté sur les *logarithmes négatifs;* et à l'aide de définitions générales des quatre règles, je suis parvenu, sans le secours de l'Algèbre, à donner le moyen d'effectuer les opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres positifs et négatifs. Enfin, de nombreux exemples sont destinés à lever toutes les difficultés qui peuvent se présenter lorsqu'on fait usage des *Tables* de logarithmes pour simplifier les calculs numériques.

Les raisonnemens que l'on emploie ordinairement dans l'Arithmétique ne me paraissent pas offrir assez de généralité. Par exemple, ils supposent: que dans la division le quotient sera un nombre entier; que, dans la formation du carré et du cube de la somme de deux quantités, ces quantités sont commensurables; que, dans l'extraction des racines, la racine sera commensurable; que, dans la théorie des proportions, les termes des rapports sont commensurables; et ainsi de suite. J'ai cherché, dans cette nouvelle édition, à donner des démonstrations qui conviennent également aux quantités commensurables et aux quantités incommensurables. L'Arithmétique, présentée de cette manière, offre sans doute plus de difficulté; mais il en résulte que les principes qui servent de base à l'*Algèbre,* sont établis d'une manière complétement rigoureuse.

L'Arithmétique est divisée en deux parties. La première partie, formée de cinq chapitres, traite du calcul des *nombres abstraits*. La deuxième partie, composée de deux chapitres, traite des *nombres concrets,* et des applications du calcul aux diverses questions de l'Arithmétique.

J'ai cru nécessaire, pour ne pas rompre l'enchaînement des idées, de réunir dans le deuxième chapitre tous les principes qui serviront de base aux théories exposées dans la suite de l'ouvrage; mais on pourra passer les principes dont les démonstrations paraîtront trop difficiles, pour ne s'en occuper qu'à mesure qu'on en fera usage.

On remarquera (n^{os} **88** et **245**) des méthodes nouvelles pour déterminer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés (sans décomposer ces nombres en facteurs premiers), et pour calculer avec certitude les *logarithmes* des nombres entiers avec une approximation donnée (sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'extraction des racines).

Tous les problèmes sont réunis dans le dernier chapitre; ce qui offre le double avantage d'éviter des répétitions nombreuses, et de permettre d'exposer de suite les diverses manières de résoudre une même question.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent des renvois aux articles correspondans de l'Arithmétique. Par exemple, dans la ligne 4 de la page 38, le signe (n° **27**) indique un renvoi au principe établi dans l'article 27 de la page 36.

J'ai placé à la fin de l'ouvrage des TABLEAUX qui contiennent les rapports des mesures et des monnaies des différens pays, ainsi qu'une *Table des logarithmes* des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 9999.

Les raisonnemens arithmétiques ne suffisant pas pour déterminer le degré d'approximation qui résulte de l'hypothèse que les différences entre des nombres sont proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres, et pour établir rigoureusement les *propriétés des fractions continues*, j'ai pensé qu'il était convenable de renvoyer ces diverses théories à l'*Algèbre*.

Messieurs les candidats à l'École Polytechnique trouveront, je l'espère, dans cette Arithmétique, tout ce qui peut leur être utile. Les Élèves qui se destinent aux autres Écoles du Gouvernement, pourront passer ce qui concerne les quantités incommensurables, ainsi que les articles précédés de l'*astérisque* *.

Enfin, les personnes qui ne se proposent pas de concourir pour l'admission dans les Écoles du Gouvernement, pourront se borner à étudier mon *petit Traité élémentaire d'Arithmétique*. La première partie de ce Traité contient toutes les connaissances qui sont devenues suffisantes, en Arithmétique, depuis l'établissement du *système des nouvelles mesures*; les notions de *Géométrie* et de *Physique* nécessaires à l'intelligence de ce système, y sont exposées avec soin. Cette première partie est terminée par une Méthode fort simple à l'aide de laquelle on peut résoudre directement les problèmes d'Arithmétique les plus compliqués, sans recourir à la théorie des proportions.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES NOMBRES ABSTRAITS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. De la numération et des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, sur les nombres entiers abstraits.

§ Ier.

Numéros.		Pages.
1.	Notions *préliminaires*.	1 et 2

§ II.

2... 8.	De la *Numération* des nombres entiers.	2... 7

§ III. *Des quatre règles*.

9...13.	De l'*Addition*.	7...11
14...17.	De la *Soustraction*.	11...15
18...22.	De la *Multiplication*.	15...21
23...31.	De la *Division*.	21...39
32.	Les quatre règles ci-dessus sont les *quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique*.	39

Les raisonnemens arithmétiques ne suffisant pas pour déterminer le degré d'approximation qui résulte de l'hypothèse que les différences entre des nombres sont proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres, et pour établir rigoureusement les *propriétés des fractions continues*, j'ai pensé qu'il était convenable de renvoyer ces diverses théories à l'*Algèbre*.

Messieurs les candidats à l'École Polytechnique trouveront, je l'espère, dans cette Arithmétique, tout ce qui peut leur être utile. Les Élèves qui se destinent aux autres Écoles du Gouvernement, pourront passer ce qui concerne les quantités incommensurables, ainsi que les articles précédés de l'*astérisque* *.

Enfin, les personnes qui ne se proposent pas de concourir pour l'admission dans les Écoles du Gouvernement, pourront se borner à étudier mon *petit Traité élémentaire d'Arithmétique*. La première partie de ce Traité contient toutes les connaissances qui sont devenues suffisantes, en Arithmétique, depuis l'établissement du *système des nouvelles mesures*; les notions de *Géométrie* et de *Physique* nécessaires à l'intelligence de ce système, y sont exposées avec soin. Cette première partie est terminée par une Méthode fort simple à l'aide de laquelle on peut résoudre directement les problèmes d'Arithmétique les plus compliqués, sans recourir à la théorie des proportions.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES NOMBRES ABSTRAITS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. De la numération et des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, sur les nombres entiers abstraits.

§ I[er].

Numéros.		Pages.
1.	Notions *préliminaires.*	1 et 2

§ II.

2... 8.	De la *Numération* des nombres entiers.	2... 7

§ III. *Des quatre règles.*

9...13.	De l'*Addition.*	7...11
14...17.	De la *Soustraction.*	11...15
18...22.	De la *Multiplication.*	15...21
23...31.	De la *Division.*	21...39
32.	Les quatre règles ci-dessus sont les *quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique.*	39

CHAPITRE DEUXIÈME.

Notations. Propriétés relatives aux quatre règles, aux puissances, aux diviseurs et aux multiples des nombres; nombres premiers; plus grand commun diviseur; propriétés des facteurs et des diviseurs premiers; recherche des diviseurs d'un nombre; etc.

§ Ier.

Numéros.		Pages.
33.	Notations.	40 et 41
34...49.	Propriétés relatives aux quatre règles.	41...48

§ II.

50...53.	Des *puissances*.	48...51

§ III.

54.	Propriétés des diviseurs et des multiples d'un nombre.	51...53
55...59.	Déterminer le reste de la division d'un nombre par l'un des diviseurs 10, 100, 1000,..., 2, 5, 2^2, 5^2, 2^3, 5^3,..., 9, 3, 11; en déduire si un nombre admet l'un de ces diviseurs.	53...60
*60 et *61.	Propriété des facteurs d'un produit, de laquelle on déduit les *preuves* de la multiplication et de la division par 9 et par 11.	60...62

§ IV.

62.	Des *Nombres premiers*.	62 et 63
63...70.	Du *plus grand commun diviseur*.	63 ..70
71...81.	Propriétés des *diviseurs premiers*.	70...78
82.	Décomposer un nombre en ses *facteurs premiers*.	78...80
83 et 84.	Déterminer tous les diviseurs d'un nombre.	80...83
85...87.	La décomposition des nombres en facteurs premiers fournit le moyen de trouver : le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, les diviseurs communs à plusieurs nombres, et le plus petit nombre divisible par des nombres donnés.	83...85
*88.	Méthode nouvelle pour calculer directement le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, sans décomposer ces nombres en facteurs.	85...87
89.	Lorsque des nombres sont premiers entre eux, deux à deux, le plus petit nombre divisible par chacun d'eux est leur produit. *Table* des nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1009.	87

CHAPITRE TROISIÈME.

Des Fractions ordinaires et décimales.

§ Ier. *Des Fractions ordinaires.*

Numéros		Pages.
90... 92.	Origine et *numération* des *fractions*.	88... 90
93... 97.	Propriétés fondamentales des fractions.	90... 92
98.	Simplifier une fraction.	92
99...104.	Propriétés des *fractions irréductibles*.	92... 95
105...107.	Réduire plusieurs fractions au même dénominateur.	95... 99
108.	Comparer les grandeurs de plusieurs fractions.	99
109 et 110.	Propriétés remarquables des fractions.	99 et 100
111 et 112.	*Addition* et *Soustraction* des fractions.	100 et 101
113.	*Multiplication*.	101...103
114.	Fractions de fractions.	103
*115.	Toutes les puissances d'une fraction irréductible sont des fractions irréductibles.	103
116.	*Division*.	103...105
117 et 118.	Convertir un nombre, entier ou fractionnaire, en une fraction équivalente qui ait un dénominateur donné.	105
119.	Trouver l'entier contenu dans un nombre fractionnaire.	105 et 106
120.	Convertir en une seule expression fractionnaire, un entier joint à une fraction.	106
121.	Calcul des nombres composés d'entiers et de fractions.	106 et 107
122.	Preuves des quatre Règles.	107

§ II. *Des Fractions décimales.*

123.	Définition et propriété des *fractions décimales*.	108
124 et 125.	On peut mettre les fractions décimales sous la forme de nombres entiers.	108 et 109
126.	Convertir un *nombre décimal* en fraction ordinaire.	109 et 110
127 et 128.	Énoncer un nombre décimal écrit.	110 et 111
129.	Écrire un nombre décimal énoncé.	111

Numéros.		Pages.
130.	Effets produits sur un nombre décimal, lorsqu'on ajoute ou qu'on supprime des zéro sur sa droite, et lorsqu'on déplace la *virgule*.	111 et 112
131...137.	Calcul des nombres décimaux.	112...119
138.	Réduire une fraction en décimales.	119
139.	Conversion des nombres décimaux en fractions ordinaires.	119...122
140 et 141.	Déterminer la valeur d'un nombre décimal, ou du quotient d'une division, ou d'une fraction, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.	122 et 123
142.	Approcher le plus possible de la valeur d'un nombre décimal, en ne conservant qu'un certain nombre de décimales.	123
*143.	Propriétés remarquables de la fraction ordinaire équivalente à un nombre décimal périodique mixte.	123 et 124
*144.	Reconnaître d'avance si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur, conduira à un quotient exact ou à un quotient périodique.	124...130

CHAPITRE QUATRIÈME.

Des carrés et de la Racine carrée; des Cubes et de la Racine cubique. Des Puissances et des Racines; du calcul des Radicaux.

§ I^er^. *Des carrés et de la Racine carrée.*

145.	Définitions et Notations.	131
146 et *147.	Propriétés des quantités commensurables et incommensurables.	131...135
148.	Formation du carré d'un nombre quelconque.	136
149...157.	De la racine carrée des nombres entiers.	136...150
158...169.	Du carré et de la racine carrée des fractions et des nombres décimaux.	151...158

§ II. *Des cubes et de la racine cubique.*

170.	Définitions et notations.	158 et 159
171 et 172.	Formation du cube d'un nombre quelconque.	159
173...181.	De la racine cubique des nombres entiers.	159...170
182...190.	Du cube et de la racine cubique des fractions et des nombres décimaux.	170...174

§ III.

Numéros.		Pages.
191...194.	Des *puissances* et des *racines* de tous les degrés.	174...176
195 et 196.	Du calcul des *radicaux*.	176 et 177

CHAPITRE CINQUIÈME.

Rapports, Proportions, Progressions et logarithmes.

§ I^er^.

197...199.	*Rapports* arithmétiques et géométriques.	178 et 179

§ II.

200...213.	*Proportions* arithmétiques et géométriques.	179...192

§ III.

214...227.	Des *progressions*.	192...199

§ IV.

228...255.	Des *logarithmes*, et du calcul des *nombres positifs et négatifs*.	199...234

DEUXIÈME PARTIE

DES NOMBRES CONCRETS.

CHAPITRE SIXIÈME.

Des mesures de France anciennes et nouvelles.

§ I^er^.

256...259.	Notions préliminaires.	235 et 236

§ II.

260...265.	Nomenclature des *mesures anciennes*.	236...241
266...278.	Calcul des nombres concrets.	241...248
279.	Problèmes sur les anciennes mesures.	248...250

§ III.

280...307.	Du système des *nouvelles mesures*.	251...266

CHAPITRE SEPTIÈME.

PROBLÈMES.

Numéros.		Pages.
308.	Préliminaires.	267
	§ Ier.	
309...315.	*Règles de trois* directes et inverses, simples et composées.	267..277
	§ II.	
316.	*Règle de compagnie ou de société.*	277...279
	§ III.	
317.	Partages proportionnels.	279 et 280
	§ IV. *Intérêts simples.*	
318...325.	Problèmes sur les *intérêts simples.*	280...284
*326...329.	Problèmes sur les fonds publics.	284...287
330...332.	*Règle d'escompte.*	287...289
	§ V. *Intérêts composés.*	
333...339.	Problèmes sur les *intérêts composés* et sur les *annuités.*	289...297
	§ VI.	
*340.	*Règle de fausse position et de double fausse position.*	298 et 299
	§ VII.	
*341 et 342.	Problèmes sur des mélanges et des alliages.	299...302
	§ VIII.	
*343.	Problèmes sur des mobiles, et problèmes divers.	302...309
	* *Note relative aux différens systèmes de numération.*	
*344.	De la numération dans un système quelconque.	310
*345..353.	Du *système duodécimal.*	310...316

TABLES ET TABLEAUX.

	Pages.
Tableaux de comparaison des mesures et des monnaies étrangères, avec les mesures et les monnaies nouvelles de France.	317...323
Tables pour convertir les mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.	324...328
Table des logarithmes des nombres entiers 1, 2, 3, 4, ..., 9999	329...368

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Ellas son corregidas —

Pages 28, lignes 12 en remontant; qu *lisez* qui
73, 1, acteurs *lisez* facteurs
73, 6 et 7, au lieu de
Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers
lisez
Un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers
75, 18, premiers facteurs *lisez* facteurs premiers
102, 2, en remontant; *la multiplicande* lisez *le multiplicande*
103, 4 en remontant; anologues *lisez* analogues
117, 8, chiffre 2,7 *lisez* chiffres 2,7
119, 9, ou déduit *lisez* on déduit
130, 8, au lieu de décmial *lisez* décimal
133, 10, au lieu de moindre *lisez* moindres
134, 1 de 5°, au lieu de *qnantités* lisez *quantités*
179, 2, en remontant; au lieu de 1rr terme *lisez* 1er terme
188, 1 en remontant; 18 6 : 6 *lisez* 18 + 6 : 6
235, 1 du n° **257**, au lieu de *surfaces* lisez *surfaces* (*)
241, 12, lettre initiale *q* lisez lettre *q*
242, Cette page porte par erreur (dans quelques exemplaires) le folio 42 au lieu de 242
251, 1, *lisez* § III. *Du système des nouvelles mesures.*
263, 1 en remontant; la valeur de 1# est $0^f,987\,650\,942$ etc.
275, 5, au lieu de $\frac{1200^f}{9}$ *lisez* $\frac{1200^f}{9}$
284, 3 en remontant; au lieu de 108,675 *lisez* 108,75
289, 5 en remontant; au lieu de 1000 *lisez* 1000^f
295, 1 en remontant; au lieu de 3,1 etc., *lisez* 3,5 etc.
304, 15, et elle cdes heures, *lisez* et celle des heures
307, 13, Le bassin serait, *lisez* Le bassin sera
312, 3, au lieu de 348 *lisez* *348
312, 6, au lieu de 349 *lisez* *349
313, 12, des (nos **13, 17, 22, 31**), *lisez* des nos **13, 17, 22, 31**
315, 5, de 3°; au lieu de $0,0031 = \frac{(31)}{(1000)}$,
lisez $0,0031 = \frac{(31)}{(10000)}$
328, 5, au lieu de 6,987 etc. *lisez* 0,987 etc.

ARITHMÉTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES NOMBRES ABSTRAITS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. De la numération et des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, sur les nombres entiers abstraits.

§ Ier. *Notions préliminaires.*

1. On a donné le nom de *quantité* à tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. Il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même nature, si l'on ne choisissait parmi elles une quantité connue qui pût leur servir de terme de comparaison; cette dernière quantité se nomme *unité;* et la réunion de plusieurs unités de même espèce s'appelle un *nombre.* Lorsque toutes ces unités sont égales entre elles, leur réunion forme ce qu'on nomme un *nombre entier,* ou simplement un *entier.*

Par exemple, la réunion de plusieurs *jetons* forme un *nombre* de jetons, et le jeton est l'*unité* qui a servi à composer ce nombre. Lorsqu'on prend un jeton et un autre jeton, leur réunion forme *deux* jetons, et l'on dit que le nombre des jetons est *deux.* En ajoutant un nouveau jeton à deux jetons, la réunion de ces jetons forme *trois* jetons, et on dit que le nombre des jetons est *trois.* Et ainsi de suite.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Elles sont corrigées —

Pages 28, lignes 12 en remontant; qu *lisez* qui
73, 1, acteurs *lisez* facteurs
73, 6 et 7, au lieu de
Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers
lisez
Un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers
75, 18, premiers facteurs *lisez* facteurs premiers
102, 2, en remontant; *la multiplicande* lisez *le multiplicande*
103, 4 en remontant; anologues *lisez* analogues
117, 8, chiffre 2,7 *lisez* chiffres 2,7
119, 9, ou déduit *lisez* on déduit
130, 8, au lieu de décmial *lisez* décimal
133, 10, au lieu de moindee *lisez* moindres
134, 2 de 5°, au lieu de *qnantités* lisez *quantités*
179, 2, en remontant; au lieu de 1rr terme *lisez* 1er terme
188, 1 en remontant; 18 6 : 6 *lisez* 18 + 6 : 6
235, 1 du n° **257**, au lieu de *surfaces* lisez *surfaces* (*)
241, 12, lettre initiale *q* lisez lettre *q*
242, Cette page porte par erreur (dans quelques exemplaires) le folio 42 au lieu de 242
251, 1, *lisez* §III. *Du système des nouvelles mesures.*
263, 1 en remontant; la valeur de 1# est 0f,987 650 942 etc.
275, 5, au lieu de $\frac{1200^f}{9}$ *lisez* $\frac{1200^f}{9}$
284, 3 en remontant; au lieu de 108,675 *lisez* 108,75
289, 5 en remontant; au lieu de 1000 *lisez* 1000f
295, 1 en remontant; au lieu de 3,1 etc., *lisez* 3,5 etc.
304, 15, et elle cdes heures, *lisez* et celle des heures
307, 13, Le bassin serait, *lisez* Le bassin sera
312, 3, au lieu de 348 *lisez* *348
312, 6, au lieu de 349 *lisez* *349
313, 12, des (nos **13, 17, 22, 31**), *lisez* des nos **13, 17, 22, 31**
315, 5, de 3°; au lieu de $0,0031 = \frac{(31)}{(1000)}$,
lisez $0,0031 = \frac{(31)}{(10000)}$
328, 5, au lieu de 6,987 etc. *lisez* 0,987 etc.

ARITHMÉTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES NOMBRES ABSTRAITS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. De la numération et des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, sur les nombres entiers abstraits.

§ Ier. *Notions préliminaires.*

1. On a donné le nom de *quantité* à tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. Il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même nature, si l'on ne choisissait parmi elles une quantité connue qui pût leur servir de terme de comparaison; cette dernière quantité se nomme *unité;* et la réunion de plusieurs unités de même espèce s'appelle un *nombre.* Lorsque toutes ces unités sont égales entre elles, leur réunion forme ce qu'on nomme un *nombre entier,* ou simplement un *entier.*

Par exemple, la réunion de plusieurs *jetons* forme un *nombre* de jetons, et le jeton est l'*unité* qui a servi à composer ce nombre. Lorsqu'on prend un jeton et un autre jeton, leur réunion forme *deux* jetons, et l'on dit que le nombre des jetons est *deux.* En ajoutant un nouveau jeton à deux jetons, la réunion de ces jetons forme *trois* jetons, et on dit que le nombre des jetons est *trois.* Et ainsi de suite.

En général, quelle que soit la quantité prise pour unité, cette unité ajoutée à elle-même forme *deux* unités; en ajoutant une unité à deux unités, on obtient *trois* unités; et ainsi de suite.

Un nombre est dit *concret*, lorsqu'on désigne l'espèce des unités qui le composent; et un nombre est dit *abstrait*, lorsqu'on ne désigne pas l'espèce des unités qui le composent. Ainsi, trois jetons et deux pommes sont des *nombres concrets*; trois et deux sont des *nombres abstraits*.

L'*Arithmétique* a pour objet d'enseigner à traiter les diverses questions qu'on peut proposer sur les nombres. On dit par ce motif que l'Arithmétique est la *science des nombres*. Les procédés à suivre pour parvenir aux résultats cherchés constituent ce qu'on nomme le *calcul*.

§ II. *De la Numération des nombres entiers.*

2. La *numération* a pour objet de *former les nombres*, de les *énoncer* et de les *écrire* avec des *caractères* particuliers.

Des noms des nombres, ou de la numération parlée.

3. Pour *former les nombres entiers*, on part de l'unité ou de *un* que l'on considère comme le premier des nombres entiers; l'unité ajoutée à elle-même, donne le nombre *deux*; ce dernier nombre augmenté d'une unité, donne le nombre *trois*; et en continuant ainsi à ajouter successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on compose les nombres nommés *quatre, cinq, six, sept, huit, neuf*.

En ajoutant l'unité à neuf, on obtient le nombre nommé *dix*; ce dernier augmenté de l'unité, détermine un nouveau nombre, qu'on aurait pu désigner, comme les précédens, par un nom particulier. Mais, pour ne pas charger la mémoire d'une trop grande quantité de mots, on est convenu de considérer le nombre dix comme une nouvelle espèce d'unité nommée *dixaine*.

On compte par dixaines, comme par unités simples, depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines.

Pour énoncer les nombres

une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit:

dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix.

On désignait anciennement les trois derniers nombres par les noms plus simples, *septante, octante, nonante.*

Pour énoncer les autres nombres, plus grands que dix, qui ne contiennent pas plus de neuf dixaines et de neuf unités, on fait suivre les noms dix, vingt, trente,....., quatre-vingt, quatre-vingt-dix, des noms des neuf premiers nombres.

Par exemple, en ajoutant au nombre trente, chacun des neufs premiers nombres, on obtient tous les nombres compris entre trente et quarante; ces nombres sont

trente-un, trente-deux, trente-trois, trente-quatre, trente-cinq, trente-six, trente-sept, trente-huit et *trente-neuf.*

On doit seulement excepter de ce système, les nombres

dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six,

car on les énonce

onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

On parvient ainsi au nombre *quatre-vingt-dix-neuf*, composé de neuf dixaines et de neuf unités; si on l'augmente d'une unité, le nombre qui en résultera sera formé de dix dixaines; car, neuf unités plus une unité donnent une dixaine. Cette collection de dix dixaines forme une nouvelle espèce d'unité nommée *centaine*; de sorte que le nombre quatre-vingt-dix-neuf, augmenté d'une unité, donne le nombre *cent.*

On compte par centaines, comme par unités simples, depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et en combinant les noms, cent, deux cents,......., neuf cents, avec ceux des quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, on obtient les noms de tous les nombres depuis cent jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*.

Ce dernier nombre augmenté d'une unité, donne dix centaines; car quatre-vingt-dix-neuf plus un valent dix dixaines ou une centaine. Cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité nommée MILLE.

On compte par mille comme par unités simples, depuis un mille, jusqu'à neuf mille; et en combinant les noms, mille, deux mille, ..., neuf mille, avec ceux des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, on obtient les noms de tous les nombres depuis mille jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*.

Ce dernier nombre augmenté d'un, donne dix mille, car neuf cent quatre-vingt-dix-neuf plus un vaut dix centaines ou un mille.

Jusqu'ici la réunion de dix unités d'un certain ordre ayant déterminé une nouvelle espèce d'unité désignée par un nom simple, il paraîtrait naturel de former de dix unités de mille, une nouvelle espèce d'unité, et de lui donner un nom particulier. Mais, pour simplifier, on est convenu de considérer le MILLE comme une nouvelle *unité principale*, et de compter par unités, dixaines et centaines de mille, depuis un mille jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille, comme on a compté par unités, dixaines et centaines d'unités simples, depuis une unité jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf unités. On parvient de cette manière au nombre *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*.

Ce dernier nombre augmenté d'une unité, donne mille unités de mille; car neuf cent quatre-vingt-dix-neuf plus un, donne un mille, et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille plus un mille, donne mille fois un mille.

La collection de mille unités de mille, forme une nouvelle *unité principale* nommée MILLION. On compte par unités, dixaines et centaines de millions, depuis un million, jusqu'à mille millions qui forment un BILLION ou *milliard;* mille billions forment un TRILLION; et ainsi de suite.

D'après ce système de *numération parlée,* les noms de tous les nombres ne dépendent que des noms des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres, et de leurs combinaisons avec les mots *mille, million, billion,* etc.; de sorte que *l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce.*

L'unité primitive, qui a servi à composer tous les nombres, a reçu par cette raison le nom d'*unité simple* ou d'unité du *premier ordre;* les *dixaines,* les *centaines,* les *mille,* etc., ont reçu le nom d'unités du *deuxième ordre,* du *troisième ordre,* du *quatrième ordre,* etc.

Les UNITÉS SIMPLES ou du premier ordre, les MILLE ou unités du quatrième ordre, les MILLIONS ou unités du septième ordre, etc., sont les unités des *ordres* TERNAIRES, parce qu'elles se succèdent de trois en trois.

4. Il résulte de ce qui précède que *dix unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur;* car dix unités du premier ordre forment une dixaine ou une unité du deuxième ordre; dix dixaines forment une centaine ou une unité du troisième ordre; et ainsi de suite.

De l'écriture des nombres en chiffres, ou de la numération écrite.

5. La simplicité du système de la *numération parlée,* résultant du petit nombre de mots qu'il a suffi de créer pour exprimer tous les nombres, a fourni l'idée d'écrire ces nombres d'une manière plus abrégée et plus propre aux calculs, à l'aide de quelques *caractères* nommés *chiffres.*

Ainsi, de même qu'on employa neuf mots simples pour énoncer les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des divers ordres d'unités avaient donné les noms de tous les nombres, on convint que les chiffres placés les uns à côté des autres, indiqueraient par leur valeur, le nombre des unités de chaque espèce, et par leur position, l'ordre de ces unités. Ces *chiffres* sont :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

ils représentent les nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

Pour écrire un nombre plus grand que neuf, on place à la suite les uns des autres les chiffres qui indiquent combien il contient d'unités de chaque ordre; de manière que le chiffre des unités simples ou du 1er ordre, occupe le 1er rang à droite; celui des dixaines ou du 2^{e} ordre, le 2^{e} rang; celui des centaines ou du 3^{e} ordre, le 3^{e} rang; et ainsi de suite.

Par exemple, le nombre

neuf mille huit cent cinquante-sept

étant composé de 9 *mille*, 8 *centaines*, 5 *dixaines et* 7 *unités*, c'est-à-dire de 9 *unités du* 4^{e} *ordre*, 8 *unités du* 3^{e} *ordre*, 5 *unités du* 2^{e} *ordre et* 7 *unités du* 1er *ordre*,

on écrit ce nombre de cette manière abrégée, 9857.

On verra de même que le nombre

quatre cent vingt-sept mille, six cent quatre-vingt dix-huit, peut s'écrire ainsi, 427698.

Lorsque le nombre proposé ne contient pas des unités de tous les ordres inférieurs à ses plus hautes unités, on a recours au *chiffre auxiliaire* 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux *chiffres significatifs* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités.

Par exemple, le nombre *neuf cent sept*, composé de neuf centaines et de sept unités, sans dixaines, s'écrit ainsi 907.

6. En général: *Pour écrire un nombre énoncé, on place successivement à côté les uns des autres (en commençant par la gauche), les chiffres qui expriment combien ce nombre contient de centaines, de dixaines et d'unités de chaque ordre ternaire; et on remplace par des zéro, les unités, dixaines et centaines qui manquent.* Ainsi, le nombre

neuf cent millions, cinq cent trois s'écrit 900 000 503.

7. *Pour énoncer un nombre écrit, on le partage ordinairement en tranches de trois chiffres à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche; commençant ensuite par la gauche, on énonce chaque tranche comme si elle était seule, et on lui donne le nom des unités de cette tranche. La* 1re *tranche (à partir de la droite) exprime des unités simples, la* 2^{e} *des mille, la* 3^{e} *des millions, la* 4^{e} *des billions ou milliards, la* 5^{e} *des trillions, etc.*

Ainsi, le nombre 900 000 503 s'énonce

neuf cent millions, cinq cent trois.

Le système de numération que nous venons d'exposer se nomme *système décimal*, parce qu'on y emploie *dix chiffres*; et pour cette raison, on dit que sa *base* est *dix*.

8. Il résulte de la convention qui sert de fondement à la numération écrite, que *les différens chiffres d'un nombre expriment des unités de dix en dix fois plus grandes à mesure qu'on avance d'un rang vers la gauche.*

§ III. *Des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres entiers abstraits.*

DE L'ADDITION.

9. L'ADDITION *est une opération qui a pour objet de calculer un nombre nommé* SOMME *ou* TOTAL, *qui contienne à lui seul toutes les parties de plusieurs autres nombres.*

10. Nous avons vu (n° 5) comment on forme la suite des nombres, un, deux, trois, etc., en ajoutant successivement une nouvelle unité au dernier nombre obtenu. On peut en déduire le moyen de trouver la somme de deux nombres quelconques, car il suffit d'ajouter à l'un de ces nombres toutes les unités qui composent l'autre nombre.

Ainsi, pour ajouter 3 à 5, on dit: 5 et 1 font 6; 6 et 1 font 7; 7 et 1 font 8; le nombre 8, qu'on obtient après avoir augmenté 5 de 3 unités, est la *somme* des nombres 5 et 3.

On devra opérer de cette manière pour obtenir la *somme de deux nombres quelconques d'un seul chiffre.*

11. Lorsque les nombres donnés ont plusieurs chiffres, on simplifie le calcul, à l'aide de la méthode que nous allons indiquer.

1°. Pour *additionner un nombre d'un seul chiffre avec un nombre de plusieurs chiffres,* on observe que la somme devant être formée de la réunion de toutes les parties des nombres donnés, il est naturel d'ajouter d'abord les chiffres des unités entre eux. En voici des exemples :

Nombres à ajouter..	745	349	398	9999
	3	7	7	8
Sommes...	748	356	405	10007.

Dans le 1er *exemple,* on ajoute 3 unités à 5 unités, ce qui donne 8 unités ; la somme des nombres 745 et 3 est 748.

Dans le 2e *exemple,* on ajoute 7 unités à 9 unités, ce qui donne 16 unités, ou une dixaine plus 6 unités; on écrit les 6 unités au rang des unités de la somme cherchée, et on ajoute la *retenue* une dixaine aux 4 dixaines de 349, ce qui donne 5 dixaines; on écrit 5 au rang des dixaines de la somme cherchée; enfin on pose le chiffre 3 des centaines de 349, au rang des centaines de la somme demandée; de sorte que cette somme est 356.

On trouvera d'une manière semblable que la somme des nombres 398, 7, est 405, et que celles des nombres 9999, 8 est 10007.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on peut ajouter un nombre d'un seul chiffre à un nombre de plusieurs chiffres.

2°. Pour *calculer la somme de plusieurs nombres quelconques,* on observe que cette somme devant être composée de toutes les parties des nombres donnés, on peut faire dépendre l'addition totale d'additions partielles plus simples, en réunissant séparément entre elles toutes les unités, toutes les dixaines, toutes les centaines, etc., dont se composent les nombres qu'on veut additionner ; à cet effet, on place les nombres proposés les uns sous les autres de manière que leurs

unités de même ordre se trouvent dans une même colonne *verticale,* et on met un *trait* horizontal sous les nombres donnés, pour les séparer de la somme cherchée, qu'on placera dessous.

1er Exemple. *Soit proposé d'additionner les nombres* 42, 36.

Au lieu d'ajouter successivement 36 fois l'unité à 42, on dispose ainsi le calcul :

42
36
78

et on dit : 6 unités plus 2 unités, valent 8 unités, que l'on écrit sous les unités ; 3 dixaines plus 4 dixaines valent 7 dixaines que l'on pose sous les dixaines. De sorte que la somme demandée est 78.

Remarque. On se dispense ordinairement d'énoncer le nom de l'espèce des unités sur lesquelles on opère, et on dit : 6 et 2 font 8 ; 3 et 4 font 7.

2e Exemple. *Trouver la somme des nombres* 874, 648, 5496.

On dispose et on exécute ainsi le calcul :

874
648
5496
7018

On commence par la colonne des unités et on dit : 4 plus 8 font 12 ; 12 plus 6 font 18, ou une dixaine plus 8 unités ; on écrit les 8 unités au rang des unités de la somme cherchée, et on retient une dixaine pour la joindre aux dixaines des nombres donnés. On passe à la colonne des dixaines, et l'on dit : une dixaine de retenue plus 7 dixaines font 8 dixaines ; 8 dixaines plus 4 dixaines font 12 dixaines ; 12 dixaines plus 9 dixaines font 21 dixaines, ou 2 centaines plus une dixaine ; on écrit cette dixaine au rang des dixaines de la somme cherchée, et on retient les 2 centaines pour les joindre aux centaines des nombres donnés. On passe à la colonne des centaines et on dit : 2 centaines de retenue plus 8 centaines font 10 centaines ; 10 centaines plus 6 centaines font 16 centaines ; 16 centaines plus 4 centaines font 20 centaines ou 2 mille ; la somme cherchée ne contenant pas de centaines, on pose un zéro au rang des centaines de cette somme, et on retient les 2 mille pour les joindre aux 5 mille contenus dans la colonne des mille, ce qui donne 7 mille que l'on écrit au rang des mille de la somme cherchée.

On trouve ainsi, que la somme des nombres 874, 648, 5496, est 7018.

REMARQUE. Dans la pratique, on se dispense d'énoncer le nom de l'espèce des unités qu'on ajoute entre elles; et dans le cours de l'addition des chiffres d'une même colonne, on ne répète pas la dernière somme obtenue.

Ainsi, pour additionner les nombres 874, 648, 5496, on commence par la colonne des unités et l'on dit : 4 et 8 font 12 et 6 font 18; je pose 8 et je retiens 1; passant à la colonne des dixaines, on dit : 1 de retenue et 7 font 8, et 4 font 12, et 9 font 21, je pose 1 et je retiens 2. On passe à la colonne des centaines et on dit : 2 de retenue et 8 font 10, et 6 font 16, et 4 font 20; je pose zéro et je retiens 2. Enfin, on passe à la colonne des mille, et on dit : 2 de retenue et 5 font 7; je pose 7 au rang des mille. La somme cherchée est 7018.

12. En général : *Pour additionner plusieurs nombres, on les met les uns sous les autres, de manière que leurs unités de même ordre se trouvent dans une même colonne verticale. On place ensuite un trait sous ces nombres, pour les séparer du résultat qu'on mettra dessous. On fait une somme des nombres contenus dans la première colonne à partir de la droite; quand cette somme n'est pas plus grande que 9, on l'écrit au résultat sous les nombres qui l'ont fournie; quand elle surpasse 9, on n'écrit que ses unités, et on retient ses dixaines pour les joindre à la 2e colonne, sur laquelle on opère d'une manière semblable; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière colonne.*

1re REMARQUE. D'après cette règle générale, les additions les plus composées se réduisant à ajouter successivement un nombre d'un seul chiffre, à un nombre quelconque, il est fort utile de retenir dans la mémoire toutes les sommes de deux nombres d'un seul chiffre, et de s'exercer à ajouter (par la pensée) un nombre d'un seul chiffre à un nombre de plusieurs chiffres, sans écrire ces nombres.

2e REMARQUE. *On peut toujours effectuer directement l'addition en la commençant par la droite;* car de cette manière, l'addition de chaque colonne fournit un chiffre de la somme demandée. Mais *il n'en serait pas toujours de même en commençant par la gauche;* car si l'addition d'une colonne donnait plus de 9 unités, il faudrait écrire les unités et ajouter les dixaines de surplus au chiffre déjà placé sous la colonne précédente; ce qui ne pourrait se faire qu'en changeant ce chiffre.

13. Le procédé qui sert à vérifier si l'on a commis des fautes de calcul, se nomme la *preuve*.

Pour faire la *preuve de l'addition*, il suffit de recommencer le calcul dans un autre ordre. En voici un exemple :

$$\begin{array}{r} 927 \\ 43 \\ 5618 \\ \hline 6588 \end{array}$$

Supposons qu'on ait obtenu la somme 6588 en additionnant chaque colonne verticale de haut en bas. Pour s'assurer que la somme 6588 est exacte, on opère dans un sens inverse, en additionnant chaque colonne de bas en haut, et on dit : 8 et 3 font 11 et 7 font 18, je pose 8 et je retiens 1; 1 de retenue et 1 font 2 et 4 font 6 et 2 font 8, je pose 8; 6 et 9 font 15, je pose 5 et je retiens 1; 1 et 5 font 6, je pose 6. Cette seconde opération conduisant à la même somme, *il est probable qu'on n'a pas commis de faute de calcul.*

En général : *Le but de la* PREUVE *est de vérifier l'exactitude du résultat, par une opération différente de celle qui l'a fourni.* On conçoit que les nouvelles opérations faites pour vérifier les premières, pouvant être affectées d'erreurs, il arrive quelquefois que ces erreurs se compensent; de sorte que *la preuve d'une opération ne sert qu'à donner une grande probabilité à l'exactitude du résultat fourni par cette opération.*

DE LA SOUSTRACTION.

14. *La* SOUSTRACTION *a pour but, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre nombre nommé* RESTE *ou* DIFFÉRENCE.

La différence entre deux nombres peut s'obtenir de deux manières : soit en ôtant du plus grand nombre toutes les unités du plus petit, soit en cherchant ce qu'il faut ajouter au plus petit nombre pour obtenir le plus grand.

Par exemple, on trouve la différence entre 5 et 3, en ôtant 3 unités de 5, de cette manière : de 5 ôtez 1 reste 4, de 4 ôtez 1 reste 3, de 3 ôtez 1 reste 2 ; la différence est 2.

On trouve aussi cette différence en disant : 3 et 1 font 4, 4 et 1 font 5 ; on doit donc ajouter 2 unités à 3 pour obtenir 5 ; la différence entre 5 et 3 est donc 2.

15. 1°. Lorsque *le nombre à soustraire n'ayant qu'un seul chiffre, le nombre dont on soustrait est moindre que le nombre à soustraire augmenté de* 10, le reste cherché est nécessairement moindre que 10 ; de sorte que ce reste n'a qu'un seul chiffre ; on détermine ce reste par l'une quelconque des deux méthodes du n° **14**.

2°. Lorsque *les deux nombres à soustraire l'un de l'autre ne satisfont pas aux conditions indiquées* (1°), on ramène ce cas au précédent en décomposant la soustraction totale en soustractions partielles, dans lesquelles le nombre à soustraire et le reste n'ont qu'un chiffre ; à cet effet, on retranche successivement les unités de même ordre les unes des autres ; et, pour faciliter le calcul, on écrit le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent ; on met une barre horizontale sous les deux nombres pour les séparer du résultat qu'on placera dessous.

Quand *aucun des chiffres du nombre à soustraire ne surpasse le chiffre correspondant du nombre dont on soustrait*, la méthode indiquée (1°) suffit pour effectuer directement chaque soustraction partielle.

Exemple. *Soustraire* 42 *de* 78. On dispose ainsi le calcul,

de	78
ôtez	42
reste	36

et l'on dit : de 8 unités, ôtez 2 unités, reste 6 unités, je pose 6 au rang des unités du reste cherché ; de 7 dixaines ôtez 4 dixaines, reste 3 dixaines, je pose 3 au rang des dixaines du reste cherché. Le reste, composé de 6 unités plus 3 dixaines, est 36.

Lorsque *des chiffres du nombre à soustraire sont plus grands*

que ceux du même rang dans le nombre dont on soustrait, on rend les soustractions partielles possibles à l'aide d'*emprunts*.

Exemple. *Retrancher* 29 *de* 67.

Comme on ne peut ôter 9 de 7, on *emprunte* une dixaine sur les 6 dixaines de 67, ce qui revient à décomposer 67 en 5 dixaines et 17 unités ; la question est alors réduite à cette autre :

de	5 *dixaines et* 17 *unités*,
ôtez	2 *dixaines et* 9 *unités*.

Retranchant les unités du même ordre les unes des autres, on dit : de 17 unités ôtez 9 unités, reste 8 unités ; de 5 dixaines ôtez 2 dixaines, reste 3 dixaines ; le reste cherché est donc 8 unités plus 3 dixaines ou 38.

Remarque. Dans la pratique, on exécute ainsi le calcul,

$$\begin{array}{r} 67 \\ \underline{29} \\ 38 \end{array}$$

et on dit : 9 ôté de 7, cela ne se peut ; j'emprunte une dixaine sur les 6, et je retranche 9 de 17 ; reste 8 que j'écris au rang des unités ; diminuant 6 de la dixaine empruntée, j'ôte 2 de 5 ; reste 3 que j'écris au rang des dixaines ; ce qui donne le reste 38.

Il est un cas qui pourrait encore embarrasser ; c'est celui où *le chiffre sur lequel on doit emprunter est un zéro*.

Exemple. *Soit proposé de retrancher* 467 *de* 8005.

Comme on ne saurait ôter 7 de 5, il faut *emprunter* ; or l'*emprunt* ne peut se faire que sur le premier chiffre significatif 8 ; on emprunte donc un mille sur les 8 mille ; ce mille valant 10 centaines, on en laisse 9 au rang des centaines ; la centaine qui reste, valant 10 dixaines, on en laisse 9 au rang des dixaines. La dixaine qui reste, jointe aux 5 unités, donne 15 unités ; le mille emprunté se trouve ainsi décomposé en 9 centaines, 9 dixaines et 10 unités. On voit que cela se réduit à diminuer d'un le chiffre 8, sur lequel on emprunte, à substituer des 9 aux zéro placés entre 8 et 5, et à augmenter 5 de 10, ce qui conduit au calcul suivant :

$$\begin{array}{r} 8005 \\ \underline{467} \\ 7538 \end{array}$$

On obtient le reste 7538 en retranchant 7 unités de 15 unités, 6 dixaines de 9 dixaines, 4 centaines de 9 centaines, et en diminuant le 8 de l'unité de mille empruntée.

Remarque. Les soustractions partielles s'effectuant sur des unités de même ordre, on se dispense d'énoncer l'espèce des unités ; de sorte qu'on trouve les chiffres du reste en disant : 7 de 15 reste 8 ; 6 de 9 reste 3 ; 4 de 9 reste 5 ; 1 d'emprunté, ôté de 8, reste 7.

16. En général : *Pour retrancher un nombre d'un autre, placez le plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent ; mettez un trait sous ces nombres ; retranchez chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, en commençant par la droite, et placez chaque reste partiel sous la colonne qui l'a fourni. Quand le chiffre inférieur n'est pas plus grand que le chiffre supérieur correspondant, posez leur différence. Quand le chiffre inférieur est plus grand que le chiffre supérieur correspondant, empruntez sur le nombre dont vous devez soustraire, une des unités du premier chiffre significatif à gauche, qui devra par conséquent être diminué d'un ; augmentez de dix le chiffre supérieur sur lequel vous opérez, et s'il y a des zéro compris entre ce chiffre et celui sur lequel vous avez emprunté, remplacez ces zéro par des neuf. Lorsque vous serez parvenu à la dernière colonne, vous poserez dessous le reste qu'elle aura fourni ; ce qui terminera l'opération.*

1re Remarque. D'après cette règle générale, *les soustractions les plus composées se réduisant à trouver la différence entre un nombre d'un seul chiffre et un nombre moindre que ce chiffre augmenté de* 10, *il est fort utile de retenir dans la mémoire toutes ces différences,* afin de pouvoir les écrire de suite sans être obligé de recourir continuellement aux méthodes du n° **14**.

2e Remarque. *On peut toujours effectuer directement la soustraction en la commençant par la droite ;* car, de cette manière, chaque soustraction partielle fournit un chiffre du reste demandé. Mais *il n'en serait pas toujours de même en commençant la soustraction par la gauche ;* car si des chiffres du nombre à soustraire étaient plus grands que les chiffres correspondans du nombre dont on soustrait, comme les chiffres précédens seraient employés par les soustractions précé-

dentes, on ne pourrait plus rendre la soustraction possible à l'aide d'un *emprunt*, à moins de changer des chiffres du reste déjà obtenu.

3e Remarque. Lorsque la soustraction conduit à faire des *emprunts*, on peut l'effectuer d'une autre manière ; car au lieu de diminuer un chiffre supérieur de l'unité qu'on lui a empruntée et d'en ôter ensuite le chiffre inférieur correspondant, il revient évidemment au même de ne pas changer ce chiffre supérieur, mais d'en ôter le chiffre inférieur correspondant augmenté de l'unité empruntée dans la soustraction précédente. Lorsqu'il y a des zéro entre le chiffre significatif sur lequel on emprunte et le chiffre supérieur qui a été augmenté de dix, au lieu de compter ces zéro pour des 9 et d'en ôter les chiffres inférieurs correspondans, on compte chacun de ces zéro pour 10, et on en ôte les chiffres inférieurs correspondans augmentés d'une unité ; ce qui conduit nécessairement au même résultat.

Appliquons ce procédé aux exemples du n° **15** (2°).

de	67	*de*	8005
ôtez	29	*ôtez*	467
reste	38	*reste*	7538.

Dans la 1re soustraction on dira : 9 ôté de 7 plus 10 ou de 17, reste 8 ; 2 plus 1 ou 3 ôté de 6, reste 3. Dans la 2e soustraction, on dira : 7 ôté de 15, reste 8 ; 6 plus 1 ou 7 ôté de 10, reste 3 ; 4 plus 1 ou 5 ôté de 10, reste 5 ; 1 ôté de 8, reste 7.

17. Pour faire la *preuve de la soustraction*, on ajoute le reste au plus petit des deux nombres donnés ; la somme doit être égale au plus grand nombre.

DE LA MULTIPLICATION.

18. *Le but de la* MULTIPLICATION *est de répéter un nombre nommé* MULTIPLICANDE, *autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre nommé* MULTIPLICATEUR ; *le résultat se nomme* PRODUIT. Le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du produit.

D'après cette définition, pour obtenir le produit, on peut écrire le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faire l'addition ; la somme exprime le produit demandé.

Ainsi, le produit de 2 par 3 est 2 plus 2 plus 2, ou 6.

19. Les multiplications les plus composées ne dépendant, comme nous le ferons voir, que des *produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre*, on a réuni tous ces produits dans la *table* suivante attribuée à PYTHAGORE :

Sens horizontal.

Sens vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dans cette table, la première ligne *horizontale* renferme les neuf premiers nombres. La 2e ligne contient les produits de ces nombres par 2, et se forme en ajoutant chacun de ces nombres à lui-même. La 3e ligne contient les produits des neuf premiers nombres par 3 ; on pourrait la former par le procédé du n° **18**, en écrivant trois fois chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et en faisant les sommes ; mais comme la 2e ligne renferme déjà 2 fois chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on obtiendra plus simplement les produits de ces nombres par 3, en ajoutant les nombres de la 2e ligne à ceux de la 1re. La 4e ligne renferme les produits des neuf

premiers nombres par 4, et peut se former d'une manière semblable en ajoutant les nombres de la 3e ligne à ceux de la 1re ; et ainsi de suite.

D'après la manière dont on a formé cette *table*, chaque ligne horizontale renferme les produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, par le premier nombre de cette ligne horizontale. Par conséquent, pour *déterminer, à l'aide de la table de* PYTHAGORE, *le produit de deux nombres d'un seul chiffre*, il suffit de chercher le multiplicande dans la première ligne horizontale, et le multiplicateur dans la première ligne *verticale ;* le produit se trouve à la rencontre des deux lignes qui commencent par ces facteurs.

Ainsi, le produit 56 de 7 par 8 se trouve à la rencontre de la ligne verticale qui commence par le multiplicande 7, et de la ligne horizontale qui commence par le multiplicateur 8.

REMARQUE. L'inspection de la table de *Pythagore* fait voir que le produit de deux nombres d'un seul chiffre reste le même dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication. On voit, par exemple, que le produit de 7 par 8 est le même que celui de 8 par 7. Si l'on prolongeait la table de multiplication, on reconnaîtrait que la même propriété convient à des nombres quelconques. Nous admettrons dans toute la suite de ce 1er chapitre, que *le produit de plusieurs nombres ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication.* Ce principe sera démontré rigoureusement dans le n° **36**.

Lorsque *le multiplicande et le multiplicateur ne sont pas tous les deux des nombres d'un seul chiffre*, on simplifie le procédé du n° **18** à l'aide des méthodes que nous allons indiquer sur des exemples.

1°. *Soit proposé de multiplier* 567 *par* 4.

On pourrait additionner 4 nombres égaux à 567, de la manière suivante :

567
567
567
567
2268

La *somme* 2268 de ces quatre nombres serait le *produit* demandé. Mais, comme cette addition revient à prendre, 4 fois chacune des parties, (7 unités, 6 dixaines, 5 centaines) du multiplicande 567, on écrit une seule fois ce multiplicande, on place dessous le multiplicateur 4, on tire une barre sous ces deux nombres pour les séparer du produit qu'on placera dessous, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 567 \\ 4 \\ \hline 2268 \end{array}$$

et on dit : 4 fois 7 font 28, je pose 8 au rang des unités du produit, et je *retiens* 2 dixaines ; 4 fois 6 dixaines font 24 dixaines et 2 de retenue valent 26 dixaines, ou 2 centaines plus 6 dixaines ; j'écris les 6 dixaines au rang des dixaines du produit, et j'ajoute les deux centaines de retenue à 4 fois 5 centaines ; ce qui me donne 22 centaines, ou 2 mille plus 2 centaines : j'écris 2 au rang des centaines du produit et 2 au rang des mille ; ce qui me donne le produit 2268 de 567 par 4.

On abrége le discours en disant : 4 fois 7 font 28, je pose 8 et je retiens 2 ; 4 fois 6 font 24 et 2 de retenue font 26, je pose 6 et je retiens 2 ; 4 fois 5 font 20 et 2 de retenue font 22, je pose 2 et j'avance 2.

En général : *Pour former le produit d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, il suffit de multiplier successivement les unités, les dixaines, les centaines, etc., du multiplicande, par le multiplicateur, en ajoutant successivement à chaque produit partiel (considéré comme des unités simples), le nombre des dixaines contenues dans le produit précédent.*

2°. *Soit proposé de multiplier* 347 *par* 10.

Il est facile de déduire du principe du n° 8, qu'on obtiendra le produit demandé en plaçant un zéro sur la droite de 347 ; car d'après ce principe, les chiffres d'un nombre exprimant des unités de dix en dix fois plus grandes, à mesure qu'on avance d'un rang vers la gauche, chacun des chiffres 3, 4, 7, du nombre 3470, représente des unités dix fois plus grandes que dans 347 ; toutes les parties du nombre 3470 exprimées

par ses chiffres significatifs 3, 4, 7, sont donc dix fois plus grandes que celles de 347 ; 3470 est donc 10 fois plus grand que 347 ; 3470 exprime donc le produit de 347 par 10.

En général, *pour obtenir le produit d'un nombre donné par* 10, *ou par* 100, *ou par* 1000, *etc., il suffit de mettre un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro, etc., sur la droite de ce nombre.* Car de cette manière, les différens chiffres du nombre donné, se trouvant plus avancés d'un rang, ou de deux rangs, ou de trois rangs, etc., vers la gauche, expriment (par leur nouvelle position) des unités, 10 fois, ou 100 fois, ou 1000 fois, etc., plus grandes qu'auparavant ; de sorte que le nombre est multiplié par 10, ou par 100, ou par 1000, etc.

3°. *Soit proposé de multiplier* 567 *par* 40.

On obtiendrait le produit en formant la somme de 40 nombres égaux à 567 ; et comme le multiplicateur 40 est égal à 10 fois 4, la somme totale serait composée de 10 fois quatre nombres égaux à 567. On obtiendra donc le produit demandé en cherchant d'abord la somme 2268 de quatre nombres égaux à 567 (comme il a été indiqué 1°), et en multipliant cette somme par 10 ; ce qui revient, d'après 2°, à mettre un zéro sur la droite de 2268. Par conséquent, pour former le produit de 567 par 40, il suffit de multiplier 567 par 4, ce qui donne 2268, et de poser un zéro sur la droite de 2268 ; le résultat 22680 est le produit demandé.

En général, *la multiplication d'un nombre quelconque par un des chiffres significatifs* 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *suivi d'un ou de plusieurs zéro, se réduit à multiplier d'abord le multiplicande par ce chiffre significatif, et à placer ensuite sur la droite du produit, autant de zéro qu'il y en a dans le multiplicateur ; le résultat exprime le produit demandé.*

4°. Enfin, *soit proposé de multiplier* 567 *par* 834.

On obtiendrait le produit en formant la somme de 834 nombres égaux à 567. Or, cette somme serait composée de 567 répété 4 fois, plus 30 fois, plus 800 fois ; il suffit donc de multiplier successivement 567 par les parties 4, 30, 800, du multiplicateur 834, ce qui s'exécutera par les méthodes indiquées (1°) et (3°), et de faire la somme de ces *produits partiels*; cette somme devant composer le *produit total*, on facilite l'addition en posant les produits partiels les uns sous les autres de manière que leurs unités de même ordre se correspondent; de sorte que le calcul s'effectue de la manière suivante :

567, *multiplicande*
834, *multiplicateur*

2268, 1^er^ *produit partiel de 567 par 4*
17010, 2^e^ *produit partiel de 567 par 30*
453600, 3^e^ *produit partiel de 567 par 800*

472878, *somme des produits partiels, ou produit total de 567 par 834.*

Remarque. Il est facile de voir que le mécanisme du calcul se réduit à multiplier successivement le multiplicande 567 par chacun des chiffres significatifs 4, 3, 8, du multiplicateur 834; et à écrire les produits 2268, 1701, 4536, de manière que lorsqu'on les additionnera, le premier chiffre à droite de chacun de ces produits exprime des unités de même ordre que le chiffre qui sert de multiplicateur; à cet effet, on met des zéro sur la droite de chaque produit partiel, ce qui revient à placer chaque produit partiel de manière que son premier chiffre à droite se trouve sous le chiffre qui a servi de multiplicateur.

20. En général : *Pour multiplier un nombre par un autre, écrivez le multiplicateur sous le multiplicande, et mettez un trait sous ces nombres ; multipliez le multiplicande successivement par chaque chiffre du multiplicateur, et placez les produits de manière que lorsque vous les additionnerez, le premier chiffre à droite de chacun de ces produits exprime des unités de même ordre que le chiffre qui a servi de multiplicateur; mettez un trait sous les produits partiels ; leur somme, que vous poserez dessous, sera le produit demandé.*

1^re^ Remarque. D'après cette règle générale, *les multiplications les plus composées ne dépendant que des produits deux à deux des nombres d'un seul chiffre*, il est utile de retenir ces produits dans la mémoire, afin de n'avoir pas besoin de recourir à la *table de Pythagore*.

2^e^ Remarque. Pour former les produits partiels du multiplicande par les chiffres du multiplicateur, *on doit commencer chaque multiplication par la droite du multiplicande*, car la multiplication n'est qu'une addition abrégée.

3^e^ Remarque. Les divers produits d'un nombre par 2, 3, 4, etc., sont des *multiples* de ce nombre. Ainsi, les *multiples* de 7 sont 2 fois 7 ou 14, 3 fois 7 ou 21, 4 fois 7 ou 28, 5 fois 7 ou 35, 6 fois 7 ou 42; etc.

21. Pour *former le produit de plusieurs nombres*, on multiplie successivement le premier nombre par le second, le produit de ces deux nombres par le troisième; et ainsi de suite, jusqu'à l'entier épuisement des facteurs.

Par exemple, pour obtenir le produit des facteurs 9, 5, 7, on multiplie d'abord 9 par 5, ce qui donne 45; on multiplie ensuite 45 par 7, le résultat 315, est le produit cherché.

22. Pour faire la *preuve de la multiplication*, il suffit d'effectuer le produit des mêmes facteurs dans un autre ordre; on doit parvenir au même produit (n° 36).

DE LA DIVISION.

23. *La* division *a pour but, étant donnés un produit de deux facteurs nommé* dividende, *et l'un de ces facteurs nommé* diviseur, *de trouver l'autre facteur nommé* quotient.

24. Le diviseur, multiplié par le quotient devant donner un produit égal au dividende, *on peut trouver le quotient, à l'aide de soustractions successives, en cherchant combien le diviseur est contenu de fois dans le dividende.*

Par exemple, pour trouver le quotient de 21 par 7, il suffit de chercher combien 7 est contenu de fois dans 21 ; à cet effet on ôte 7 de 21, ce qui donne le 1^er^ reste 14; on ôte 7 de 14, ce qui donne le 2^e^ reste 7; enfin on ôte 7 du 2^e^ reste 7, ce qui donne le 3^e^ reste zéro; le nombre 7 est donc contenu 3 fois *juste* dans 21; le quotient *exact* de 21 par 7 est donc 3.

Par une raison semblable, pour trouver le quotient de 25 par 7, on ôte 7 de 25, ce qui donne le 1^er^ reste 18; on retranche 7 de 18, ce qui donne le 2^e^ reste 11; on retranche 7 de 11, ce qui donne le 3ᵉ reste 4; ce *dernier reste* étant moindre que le diviseur 7, ne contient plus ce diviseur; et comme on a obtenu le 3ᵉ reste 4 après avoir diminué 25 de 3 fois 7, on voit que 25 est composé de 3 fois 7 augmenté de 4; de sorte que 25 est compris entre 3 fois 7, et 4 fois 7. On dit, par ce motif, que 7 est contenu 3 fois dans 25, avec un *reste* 4, et que 21 est le *plus grand multiple* de 7 contenu dans 25.

Le quotient de 25 par 7 étant compris entre 3 et 4, est composé de 3 unités, plus d'une quantité moindre que l'unité qui est égale au quotient du dernier reste 4 par le diviseur 7; on dit par cette raison, que 3 est la *partie entière* du quotient de 25 par 7, ou que trois est le *quotient entier* de 25 par 7. Les deux nombres entiers consécutifs 3, 4, qui comprennent le quotient de 25 par 7, sont les *valeurs entières approchées* de ce quotient; et 3 est la *plus petite valeur entière approchée* du quotient.

25. En général : *Lorsqu'une quantité est comprise entre deux nombres entiers consécutifs, ces deux nombres sont les valeurs entières approchées de cette quantité; le plus petit de ces deux nombres entiers est la plus petite valeur entière approchée de cette même quantité.*

26. La manière de trouver le quotient, à l'aide de soustractions successives, conduisant à des calculs très longs, lorsque le diviseur est contenu un grand nombre de fois dans le dividende, nous allons donner le moyen de simplifier ces calculs.

1°. *Lorsque le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre, le dividende est moindre que* 10 *fois le diviseur, ou que le diviseur suivi d'un zéro* (n° **19**, 2°), *le quotient est nécessairement moindre que* 10, et la table de *Pythagore* (page 16) détermine directement la *partie entière* du quotient.

Par exemple, pour *trouver le quotient de* 21 *par* 7, on observe que 21 étant moindre que 70 ou que 10 fois 7, le quotient demandé est nécessairement moindre que 10; et comme tous les produits du diviseur 7, par les nombres d'un seul

chiffre, sont dans la 7ᵉ ligne *horizontale* de la *table* indiquée, il suffit de chercher le dividende 21 dans la ligne horizontale qui commence par le diviseur 7; on trouve 21 dans la 3ᵉ ligne *verticale*; de sorte que 21 est le produit de 7 par 3; le quotient *exact* de 21 par 7 est donc 3.

De même, pour *trouver le quotient de* 25 *par* 7, on observe que 25 étant moindre que 70, ou que 10 fois 7, le quotient est moindre que 10; on cherche le dividende 25 dans la 7ᵉ rangée horizontale de la *table* qui commence par le diviseur 7; 25 ne se trouve pas dans cette rangée; mais on voit que 25 est compris entre 21 et 28, c'est-à-dire entre 3 fois 7 et 4 fois 7. Ainsi, 7 est contenu 3 fois dans 25, le plus grand *multiple* de 7 contenu dans 25 est 21, et la *partie entière* ou la *plus petite valeur entière approchée* du quotient de 25 par 7 est 3.

Les élèves qui auront appris par cœur tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre, pourront effectuer les divisions de l'espèce précédente, sans recourir à la table de *Pythagore*.

2°. La manière de *diviser un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre*, peut se déduire de (1°).

1ᵉʳ Exemple. *Soit proposé de diviser* 1976 *par* 8.

On exécute le calcul de la manière suivante :

Dividende	1976	8 *diviseur*	
	16	2 *centaines*	*quotiens partiels*
1ᵉʳ *reste*	376	4 *dixaines*	
	32	7 *unités*	
2ᵉ *reste*	56	247 *quotient total.*	
	56		
3ᵉ *reste*	0		

Pour *déterminer l'espèce des plus hautes unités du quotient*, on observe que le dividende 1976 étant compris entre 800 et 8000, c'est-à-dire entre 8×100 et 8×1000 (*), le quo-

(*) Le signe × signifie *multiplié par*.

tient de 1976 par 8 est nécessairement compris entre 100 et 1000; *les plus hautes unités du quotient sont donc des centaines*. Le quotient cherché sera donc composé d'un nombre de centaines exprimé par un seul chiffre, plus d'une quantité moindre que 100.

Pour *déterminer le chiffre des centaines du quotient demandé*, c'est-à-dire le *premier chiffre à gauche du quotient*, on observe que ce quotient étant composé du nombre de centaines exprimé par le chiffre cherché, plus d'une quantité moindre que 100, le dividende 1976 (qui est égal au produit du diviseur 8 par le quotient), doit être formé du produit de 8 par les centaines du quotient (ce produit exprime nécessairement des centaines) et d'une partie moindre que 8×100 ou que 8 centaines; le nombre 19 des centaines du dividende 1976 peut donc être considéré comme un *premier dividende partiel*, composé du produit du diviseur 8 par le chiffre des centaines du quotient, plus d'une quantité moindre que 8; le plus grand multiple de 8 contenu dans 19 exprime donc le produit de 8 par le chiffre des centaines du quotient; on obtiendra donc ce chiffre en cherchant combien 8 est contenu de fois dans 19. Or, 19 est compris entre 8×2 et 8×3; 8 est donc contenu deux fois dans 19; le chiffre des centaines du quotient est donc 2. On voit qu'on a trouvé ce 1er chiffre à gauche du quotient en cherchant combien le diviseur 8 est contenu de fois dans le 1er dividende partiel 19. Le 1er chiffre 9 des unités de ce dividende partiel exprimait des centaines dans le dividende 1976, et le 1er chiffre 2 du quotient (fourni par ce dividende partiel) exprime aussi des centaines dans le quotient.

Pour *déterminer le chiffre des dixaines du quotient demandé*, c'est-à-dire le 2e chiffre du quotient, on observe que le dividende 1976 étant composé du produit 16 centaines du diviseur 8 par les 2 centaines du quotient, plus du produit du diviseur 8 par la somme des parties du quotient qui restent à calculer, si l'on ôte 16 centaines de 1976, le 1er *reste* 376 (résultant de cette soustraction) ne renfermera plus que le produit du diviseur 8 par la partie du quotient qui reste à calculer. Cette dernière partie du quotient étant formée du nombre de dixaines exprimé par le chiffre cherché, plus d'une quantité moindre que 10, le 1er reste 376 (qui exprime le produit du diviseur 8 par cette partie du quotient), sera formé du produit de 8 par les dixaines du quotient (ce produit exprime des dixaines), plus d'une quantité moindre que 8×10, ou que 8 dixaines; le nombre 37 des dixaines du 1er reste 376 peut donc être considéré comme un *deuxième dividende partiel*, composé du produit du diviseur 8 par le chiffre des dixaines du quotient, plus d'une quantité moindre que 8; le plus grand multiple de 8 contenu dans 37, exprime donc le produit de 8 par le chiffre des dixaines du quotient; on obtiendra donc ce chiffre en cherchant combien le diviseur 8 est contenu de fois dans 37. Or, 37 tombe entre 8×4 et 8×5; 8 est donc contenu 4 fois dans 37; le chiffre des dixaines du quotient total est donc 4. On a trouvé ce 2e chiffre du quotient en cherchant combien le diviseur 8 est contenu de fois dans le 2e dividende partiel 37. Le chiffre des unités de ce 2e dividende partiel, exprimait des dixaines dans le dividende 1976, et le 2e chiffre 4 du quotient (fourni par ce dividende partiel) exprime aussi des dixaines dans le quotient.

Le quotient cherché est donc composé de 2 centaines, de 4 dixaines, et d'une quantité moindre que 10 qu'il s'agit de calculer.

Pour *déterminer le chiffre des unités du quotient demandé*, on observe que le 1er reste 376 étant composé du produit 32 dixaines du diviseur 8 par les 4 dixaines du quotient, plus du produit du diviseur 8 par la partie du quotient qui reste à calculer, si l'on ôte 32 dixaines de 376, le 2e *reste* 56 (résultant de cette soustraction) ne renfermera plus que le produit du diviseur 8 par la partie du quotient qui reste à calculer et qui est moindre que 10. Cette partie du quotient étant formée, du nombre d'unités exprimé par le chiffre cherché, et d'une quantité moindre que l'unité, le 2e reste 56 (qui exprime le produit du diviseur 8 par cette même partie du quotient) sera

454.

formé du produit du diviseur 8 par le chiffre cherché des unités du quotient (produit qui exprime des unités), plus d'une quantité moindre que 8×1 ou que 8; le 2e reste, 56 unités, peut donc être considéré comme un *troisième dividende partiel* composé du produit du diviseur 8 par le chiffre des unités du quotient, plus d'une quantité moindre que 8; le plus grand multiple de 8 contenu dans 56, exprime donc le produit de 8 par le chiffre des unités du quotient; on obtiendra donc ce chiffre en cherchant combien le diviseur 8 est contenu de fois dans 56. Or, 8 est contenu 7 fois juste dans 56; le chiffre des unités du quotient est donc 7. On a trouvé ce 3e chiffre du quotient en cherchant combien le diviseur 8 est contenu de fois dans le 3e dividende partiel 56 unités; le chiffre 6 des unités de ce 3e dividende partiel exprimait des unités simples dans le dividende 1976, et le 3e chiffre 7 du quotient, fourni par ce 3e dividende partiel, exprime aussi des unités simples dans le quotient.

Or, on est parvenu au 2e reste 56, après avoir trouvé les 2 centaines et les 4 dixaines du quotient; et ce reste exprime le produit du diviseur 8 par la partie du quotient qu'il faut ajouter au quotient obtenu 240, pour trouver le quotient total; d'ailleurs en retranchant du 2e reste 56, le produit du diviseur 8 par le chiffre 7 des unités du quotient, on trouve zéro pour 3e reste; le chiffre 7 des unités du quotient exprime donc toute la partie du quotient qui restait à calculer. Le quotient total de 1976 par 8 est donc composé de 2 centaines, de 4 dixaines, et de 7 unités; ce quotient est donc 247.

1re Remarque. *Dans tout le cours de la division de* 1976 *par* 8, *chaque reste exprime l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le nombre obtenu au quotient.*

En effet, d'après la manière dont on a effectué la division de 1976 par 8, le 1er reste 376 est égal à 1976 diminué du produit 16 centaines du diviseur 8 par les 2 centaines obtenues au quotient. On a ensuite ôté de ce 1er reste, le produit du diviseur 8 par les 4 dixaines obtenues au quotient; le 2e reste 56 (résultant de cette soustraction) est donc égal au dividende

1976 diminué des deux produits du diviseur 8 par les parties 2 centaines, 4 dixaines, du nombre 240 obtenu au quotient; ou, ce qui revient au même, le 2e reste 56 est égal au dividende 1976 diminué du produit du diviseur 8 par le nombre 240 obtenu au quotient. Enfin, on a ôté du 2e reste 56, le produit du diviseur 8 par les 7 unités du quotient; le 3e reste (résultant de cette soustraction) est donc égal au dividende diminué des trois produits du diviseur 8 par les parties 2 centaines, 4 dixaines, 7 unités, du nombre 247 obtenu au quotient; ou, ce qui revient au même, le 3e reste est égal au dividende 1976 diminué du produit du diviseur 8 par le nombre 247 obtenu au quotient. Ce qui démontre la propriété énoncée.

Le 3e et *dernier reste* étant zéro, il suit de la propriété énoncée que le dividende 1976 est nécessairement égal au produit du diviseur 8 par le nombre 247 obtenu au quotient.

2e Remarque. D'après les raisonnemens précédens, pour calculer le quotient de 1976 par 8, on cherche d'abord le 1er chiffre à gauche du quotient, c'est-à-dire le chiffre des plus hautes unités du quotient; à cet effet, on prend assez de chiffres sur la gauche du dividende 1976, pour que le nombre 19 qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, jouisse de la double propriété de contenir au moins une fois le diviseur et de ne pas contenir plus de neuf fois le diviseur; ce qui revient à prendre assez de chiffres sur la gauche du dividende 1976 pour que le nombre 19 qui en résulte ne soit pas moindre que le diviseur 8, et soit moindre que 10 fois le diviseur 8, ou que le diviseur suivi d'un zéro. Le nombre 19 qui satisfait à ces deux conditions, est ce que nous désignerons toujours par 1er *dividende partiel*. On cherche combien le diviseur 8 est contenu de fois dans le 1er dividende partiel 19; on trouve que 8 est contenu 2 fois dans 19; le nombre 2 est le 1er chiffre à gauche du quotient. Le chiffre 9 des unités du 1er dividende partiel 19, exprimant des centaines dans le dividende proposé 1976, le 1er chiffre 2 du quotient, fourni par le 1er dividende partiel 19, exprime aussi des centaines dans le quotient cherché; de sorte que ce quotient contiendra 2 centaines, plus des dixaines et des unités.

Pour calculer le 2^e^ chiffre du quotient, on retranche du dividende 1976, le produit 16 centaines du diviseur 8 par les 2 centaines obtenues au quotient, ce qui donne le 1^er^ reste 376; le 2^e^ chiffre du quotient exprimant des dixaines, on prend pour 2^e^ *dividende partiel* le nombre 37 de dixaines du 1^er^ reste 376, et on cherche combien le diviseur 8 est contenu de fois dans 37, ce qui fournit le 2^e^ chiffre 4 du quotient.

Pour calculer le 3^e^ chiffre du quotient, on retranche du 1^er^ reste 376, le produit 32 dixaines du diviseur 8 par les 4 dixaines du quotient, ce qui donne le 2^e^ reste 56 unités; le 3^e^ chiffre du quotient exprimant des unités, on prend le 2^e^ reste 56 unités pour 3^e^ *dividende partiel*, et on cherche combien le diviseur 8 est contenu de fois dans ce 3^e^ dividende partiel, ce qui fournit le 3^e^ chiffre 7 du quotient; on retranche du 2^e^ reste 56, le produit du diviseur 8 par le chiffre 7 des unités du quotient. Le 3^e^ reste que l'on obtient étant zéro, il résulte de la 1^re^ remarque que le nombre 247 obtenu au quotient, exprime le quotient *exact* de 1976 par 8; c'est-à-dire que 1976 est le produit de 8 par 247.

3^e^ Remarque. *Dans la pratique, on n'écrit que les chiffres nécessaires à la formation des dividendes partiels* 19, 37, 56; de sorte que le calcul s'exécute de cette manière abrégée :

```
1976 | 8
16   |247
 37
 32
  56
  56
   0
```

Pour déterminer le 1^er^ dividende partiel qui fournira le 1^er^ chiffre à gauche du quotient, on prend assez de chiffres sur la gauche du dividende 1976, pour que le nombre qui en résulte, considéré comme exprimant des unités simples, jouisse de la double propriété de contenir au moins une fois le diviseur 8, et d'être moindre que 10 fois le diviseur 8, ou que ce diviseur suivi d'un zéro, ou que 80; le nombre 19 qui satisfait à ces deux conditions, est le 1^er^ dividende partiel demandé. On cherche combien 8 est contenu de fois dans 19. Or, 19 tombe entre 8×2 et 8×3; de sorte que 8 est contenu 2 fois dans 19; le 1^er^ chiffre à

gauche du quotient est donc 2. Le 1^er^ dividende partiel 19 exprimant des centaines dans le dividende proposé 1976, le 1^er^ chiffre 2 obtenu au quotient exprime aussi des centaines. Pour former le 2^e^ dividende partiel qui fournira le 2^e^ chiffre du quotient (c'est-à-dire le chiffre des dixaines), on ôte 8×2 ou 16 de 19, et sur la droite du reste 3, on abaisse le chiffre 7 des dixaines du dividende, ce qui fournit le 2^e^ dividende partiel 37. On cherche combien 8 est contenu de fois dans 37; on voit que 8 est contenu 4 fois dans 37; de sorte que le 2^e^ chiffre du quotient est 4. Pour former le 3^e^ dividende partiel qui déterminera le 3^e^ chiffre du quotient (ce chiffre exprime des unités), on ôte 8×4 ou 32 de 37; et sur la droite du reste 5, on abaisse le dernier chiffre 6 des unités du dividende; ce qui donne le 3^e^ dividende partiel 56. On cherche combien 8 est contenu de fois dans 56; on voit que 8 est contenu 7 fois juste dans 56; de sorte que le chiffre des unités du quotient est 7. On ôte 8×7 de 56; le reste étant zéro, le nombre 247 obtenu au quotient, est le quotient exact de la division de 1976 par 8.

4^e^ Remarque. Suivant qu'on divise un nombre par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 5, etc., on dit qu'on en prend la *moitié*, ou le *tiers*, ou le *quart*, ou le *cinquième*, etc.

Ainsi, la moitié de 6 est 3, le tiers de 18 est 6, le quart de 8 est 2, le cinquième de 20 est 4, etc.

5^e^ Remarque. Quand on a acquis quelque habitude de la division par un nombre d'un seul chiffre, on se dispense d'écrire les dividendes partiels et les restes.

Par exemple, pour trouver le quotient de 1976 par 8, on exécute le calcul de la manière suivante:

```
1976 | 8
     |247
```

Et l'on dit : le huitième de 19 centaines est 2 centaines pour 16 centaines; je pose les 2 centaines au quotient; il reste 3 centaines ou 30 dixaines, qui jointes aux 7 dixaines du dividende, donnent 37 dixaines, dont le huitième est 4 dixaines, pour 32 dixaines; j'écris les 4 dixaines au quotient; il reste 5 dixaines, ou 50 unités, qui jointes aux 6 unités du dividende donnent 56, dont le huitième est

7, sans reste; je pose 7 au quotient; ce qui fournit le quotient total 247.

Enfin, on abrége encore le discours en disant : le huitième de 19 est 2 pour 16, je pose 2 et je retiens 3; le huitième de 37 est 4 pour 32, j'écris 4 et je retiens 5; le huitième de 56 est 7, que je pose; et comme cette dernière division se fait sans reste, le *quotient exact* est 247.

2e Exemple. *Soit proposé de diviser* 14306 *par* 7.

On exécute le calcul de la manière suivante :

	14306	7	
	14	2 *mille*	*quotiens partiels*
1er *reste*	0306	0 *centaines*	
	28	4 *dizaines*	
2e *reste*	26	3 *unités*	
	21	2043 *partie entière du quotient.*	
3e *reste*	5		

On prend assez de chiffres sur la gauche du dividende 14306 pour que le nombre qui en résulte jouisse de la double propriété de contenir au moins une fois le diviseur 7, et d'être moindre que 7×10 ou 70; ce qui fournit le 1er dividende partiel 14; on cherche combien le diviseur 7 est contenu de fois dans 14, ce qui donne le 1er chiffre 2 du quotient; le 1er dividende partiel 14 exprimant des mille dans le dividende 14306 proposé, le 1er chiffre 2 du quotient exprime aussi des mille. Pour calculer le chiffre des centaines du quotient, on ôte du dividende 14306, le produit 14 mille du diviseur 7 par les 2 mille du quotient, ce qui fournit le 1er reste 306; le nombre 3 des centaines de ce reste, forme le 2e dividende partiel qui doit contenir le produit du diviseur 7 par le chiffre des centaines du quotient; ce 2e dividende partiel étant moindre que le diviseur 7, le chiffre des centaines du quotient est zéro; car, si le quotient contenait des centaines, le diviseur 7 multiplié par ces centaines donnerait un produit qui renfermerait au moins 7 centaines, et qui devrait être contenu dans le 2e dividende partiel 3; ce qui est impossible.

Le produit du diviseur 7 par les dixaines du quotient devant se trouver dans les 30 dixaines du reste 306, on cherche combien le diviseur 7 est contenu de fois dans le 3e dividende partiel 30, ce qui fournit le chiffre 4 des dixaines du quotient. On ôte du reste 306, le produit 28 dixaines du diviseur 7 par les 4 dixaines du quotient, ce qui fournit le reste 26; ce reste étant formé du produit du diviseur 7 par le chiffre des unités du quotient, plus du produit du diviseur 7 par une quantité moindre que l'unité, on cherche combien le diviseur 7 est contenu dans le reste 26, ce qui fournit le chiffre 3 des unités du quotient. Enfin, on ôte du reste 26, le produit 21 du diviseur 7 par les 3 unités du quotient, ce qui donne un *dernier reste* 5 *moindre que le diviseur* 7. On verra, comme dans la 1re *remarque* (page 26), que ce dernier reste exprime l'excès du dividende 14306 sur le produit du diviseur 7 par le nombre 2043 obtenu au quotient.

Les diverses simplifications indiquées dans le 1er exemple (page 29) s'appliquent au 2e exemple (page 30).

Remarque. En général, le plus grand multiple du diviseur contenu dans chaque dividende partiel, exprimant le produit du diviseur par le premier des chiffres du quotient qui restent à calculer, il est facile d'en conclure que *lorsqu'un dividende partiel est moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient, fourni par ce dividende partiel, est un zéro.*

3°. Les raisonnemens dont nous avons fait usage (2°), pour trouver le quotient, lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre, conviennent à la *division de deux nombres de plusieurs chiffres*, avec cette seule différence, que pour déterminer, sans tâtonnement, combien le diviseur est contenu de fois dans chaque dividende partiel, il faudra remplacer la *table de multiplication* (page 16), par une *table des multiples du diviseur* renfermant les produits du diviseur par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Chaque dividende partiel ne contenant jamais plus de 9 fois le diviseur, cette dernière *table* fera connaître, combien le diviseur est contenu de fois dans ce dividende partiel.

1er Exemple. *Soit proposé de diviser* 472878 *par* 567.

On dispose et on exécute le calcul de la manière suivante :

Dividende	472878	567	*diviseur*
	4536	834	*quotient.*
1er *reste*	19278		
	1701		
2^{e} *reste*	2268		
	2268		
	0		

Pour *déterminer l'espèce des plus hautes unités du quotient,* c'est-à-dire le 1er chiffre à gauche du quotient, on observe que le dividende 472878 étant compris entre 56700 et 567000, c'est-à-dire entre 567×100 et 567×1000, le quotient de 472878 par 567 est nécessairement compris entre 100 et 1000; *les plus hautes unités du quotient sont donc des centaines.* Le quotient cherché sera donc composé d'un nombre de centaines exprimé par un seul chiffre, plus d'une quantité moindre que 100.

Pour *déterminer le chiffre des centaines du quotient demandé,* on observe que ce quotient étant composé du nombre de centaines exprimé par le chiffre cherché, plus d'une quantité moindre que 100, le dividende 472878 (qui est égal au produit du diviseur 567 par le quotient), doit être formé du produit du diviseur 567 par les centaines du quotient (produit qui exprime nécessairement des centaines) plus d'une quantité moindre que 567×100 ou que 567 centaines; le nombre 4728 des centaines du dividende 472878 peut donc être considéré comme un *premier dividende partiel* composé du produit du diviseur 567 par le chiffre des centaines du quotient, plus d'une quantité moindre que 567; le plus grand multiple du diviseur 567 contenu dans le nombre 4728 des centaines du dividende, exprime donc le produit du diviseur 567 par le chiffre des centaines du quotient. On obtiendra donc le chiffre des centaines du quotient en cherchant combien 567 est contenu de fois dans le premier dividende partiel 4728.

Pour trouver, sans tâtonnement, combien 567 est contenu de fois dans 4728, on forme les produits de 567 par chacun des nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

ces produits sont

567, 1134, 1701, 2268, 2835, 3402, 3969, 4536, 5103, 5670 (*).

On voit, à l'aide de cette *table des multiples du diviseur,* que 4728 est compris entre les deux multiples consécutifs 4536, 5103, c'est-à-dire entre 567×8 et 567×9; de sorte que 567 est contenu 8 fois dans 4728. Le chiffre des centaines du quotient est donc 8.

Pour *déterminer le chiffre des dixaines du quotient demandé,* on observe que le dividende 472878 étant composé du produit 4536 centaines du diviseur 567 par les 8 centaines du quotient, plus du produit de 567 par la somme des parties du quotient qui restent à calculer, si l'on ôte 4536 centaines de 472878, le 1er reste 19278 ne contiendra plus que le produit du diviseur 567 par la partie du quotient qui reste à trouver. Cette dernière partie du quotient étant formée du nombre de dixaines exprimé par le chiffre cherché, plus d'une quantité moindre que 10, le 1er reste 19278 (qui exprime le produit du diviseur 567 par cette partie du quotient) sera formé du produit de 567 par les dixaines du quotient (ce produit exprime des dixaines), plus d'une quantité moindre que 567×10 ou que 567 dixaines; le nombre 1927 des dixaines du 1er reste 19278 peut donc être considéré comme un *deuxième dividende partiel* composé du produit du diviseur 567 par le chiffre cherché des dixaines du quotient, plus d'une quantité moindre que 567; le plus grand multiple de 567 contenu dans 1927, exprime donc le produit de 567 par le chiffre cherché; on obtiendra donc le chiffre des dixaines

(*) Pour *simplifier le calcul de ces multiples du diviseur,* on ajoute 567 à 567; la somme 1134 exprime 2 fois 567; ajoutant 567 à 1134, le résultat 1701 exprime 3 fois 567; et ainsi de suite, jusqu'au produit du diviseur par 10. Si l'on n'a pas commis de faute de calcul, le dernier produit doit être égal au diviseur suivi d'un zéro (n° **19**, 2°).

du quotient en cherchant combien 567 est contenu de fois dans 1927. Or, on voit dans la table des multiples du diviseur 567 que 1927 est compris entre les deux multiples consécutifs 1701, 2268, c'est-à-dire entre 567×3 et 567×4 ; 567 est donc contenu 3 fois dans 1927 ; le chiffre des dixaines du quotient total est donc 3.

Le quotient est donc formé de 8 centaines, de 3 dixaines, et d'une quantité moindre que 10 qu'il s'agit de calculer.

Pour *déterminer le chiffre des unités du quotient*, on observe que le 1ᵉʳ reste 19278 étant composé du produit du diviseur 567 par les 3 dixaines du quotient, plus du produit de 567 par la partie du quotient qui reste à trouver, si l'on ôte de ce 1ᵉʳ reste le produit 1701 dixaines de 567 par les 3 dixaines du quotient, le 2ᵉ reste 2268 (résultant de cette soustraction) sera le produit du diviseur 567 par la partie du quotient qui reste à trouver. On obtiendra donc le chiffre des unités du quotient total en cherchant combien 567 est contenu de fois dans 2268. Or, on voit dans la table des multiples du diviseur 567 que 2268 est le produit de 567 par 4 ; par conséquent, le chiffre des unités du quotient est 4, et ce chiffre exprime toute la partie du quotient qui restait à calculer. Le quotient de 472878 par 567 est donc composé de 8 centaines, de 3 dixaines et de 4 unités ; ce quotient est donc 834.

Si l'on retranche du 2ᵉ reste 2268, le produit du diviseur par les 4 unités du quotient, on obtiendra zéro pour 3ᵉ reste.

Le reste zéro indique que le *quotient* obtenu 834 est *exact*, c'est-à-dire que 472878 est le produit de 567 par 834 ; car on verra, comme dans les exemples précédens, que les calculs qui ont conduit au reste zéro, reviennent à retrancher du dividende 472878 la somme des produits partiels du diviseur 567 par les parties 8 centaines, 3 dixaines et 4 unités du nombre 834 obtenu au quotient ; le reste étant zéro, le dividende est le produit de 567 par 834.

1ʳᵉ Remarque. On voit que la *table des multiples du diviseur* offre le double avantage de faire connaître directement le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende

partiel que l'on considère, ce qui fournit immédiatement le chiffre correspondant du quotient ; et de donner, sans calcul, les produits du diviseur par les chiffres du quotient, ce qui réduit la division à des soustractions successives.

2ᵉ Remarque. *On peut aussi trouver le chiffre du quotient sans recourir à la table des multiples du diviseur* ; mais alors on n'obtient ces chiffres qu'à l'aide de tâtonnemens.

Ainsi, dans la division de 472878 par 567, pour trouver combien 567 est contenu de fois dans le 1ᵉʳ dividende partiel 4728, on observe que 4728 renferme les trois produits partiels des unités, des dixaines et des centaines de 567, par le nombre cherché ; le dernier de ces produits exprimant des centaines, se trouve dans les 47 centaines de 4728 ; de sorte que 47 renferme le produit du 1ᵉʳ chiffre 5 de 567 par le nombre cherché, plus les retenues de centaines fournies par les deux autres produits partiels. Il en résulte que si l'on cherche combien le 1ᵉʳ chiffre 5 des centaines du diviseur 567 est contenu de fois dans le nombre 47 des centaines du dividende partiel 4728, le nombre 9, qu'on obtiendra, exprimera le nombre cherché ou un nombre trop grand, mais jamais un nombre trop petit. Pour *essayer* 9, on multiplie 567 par 9 ; le produit 5103 surpassant 4728, on voit que 9 est trop fort. Pour essayer 8, on forme le produit de 567 par 8 qui est 4536 ; ce produit étant moindre que 4728, on est certain que 567 est contenu 8 fois dans 4728.

3ᵉ Remarque. Dans la pratique, on n'écrit que les chiffres nécessaires à la formation des dividendes partiels 4728, 1927, 2268 ; de sorte que la division de 472878 par 567 s'exécute de cette manière abrégée :

472878	567
4536	834
1927	
1701	
2268	
2268	
0	

On sépare assez de chiffres sur la gauche du dividende 472878 pour que le nombre qui en résulte jouisse de la double propriété de contenir au moins une fois le diviseur 567, et d'être moindre que 567×10 ou que 5670 ; ce qui fournit le 1ᵉʳ *dividende partiel* 4728. On cherche combien 567 est contenu de fois dans 4728, on trouve qu'il y est contenu 8 fois; le 1er chiffre à gauche du quotient est donc 8. Le 1er dividende partiel 4728 exprimant des centaines dans le dividende 472878, le 1er chiffre 8 obtenu au quotient exprime aussi des centaines. Pour former le 2e dividende partiel qui fournira le 2e chiffre du quotient (c'est-à-dire le chiffre des dixaines), on ôte 8 fois 567 ou 4536, de 4728, et à la droite du reste 192 on abaisse le chiffre 7 des dixaines du dividende, ce qui fournit le 2e *dividende partiel* 1927. On cherche combien 567 est contenu de fois dans 1927, on trouve qu'il y est contenu 3 fois; de sorte que le 2e chiffre du quotient est 3. Pour former le 3e dividende partiel qui déterminera le 3e chiffre du quotient (ce chiffre exprimera des unités), on ôte 3 fois 567 ou 1701, de 1927, et à la droite du reste 226 on abaisse le dernier chiffre 8 du dividende, ce qui donne le 3e *dividende partiel* 2268. On cherche combien 567 est contenu de fois dans 2268; on trouve que 567 est contenu *4 fois juste* dans 2268; de sorte que le chiffre des unités du quotient est 4. On ôte 4 fois 567 de 2268, le reste étant zéro, le nombre 834 obtenu au quotient est le quotient exact de 472878 par 567.

2e Exemple. *Soit proposé de diviser 473232 par 567.*

On trouvera par des raisonnemens analogues aux précédens que le diviseur 567 est contenu 834 fois dans 473232, et que le *reste* de cette division est 354.

Il est facile d'en conclure que 473232 est égal au produit de 567 par 834, augmenté du *dernier reste* 354; car les calculs qui ont conduit à ce reste reviennent à retrancher successivement du dividende 473232, les produits partiels des chiffres du diviseur 567 par les trois parties 800, 30 et 4, du nombre 834 obtenu au quotient, ce qui produit le même effet que si l'on eût ôté du dividende le produit de 567 par 834. On voit donc que le dernier reste exprime l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le nombre entier obtenu au quotient.

27. *Dans tout le cours d'une division, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient obtenu, plus le reste qui correspond à ce quotient partiel;* car d'après ce qu'on a vu (no **26**, 2° et 3°), les calculs qui conduisent à chaque reste, revenant à ôter du dividende, le produit du diviseur par le quotient obtenu, le reste correspondant à ce quotient exprime l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le quotient déjà obtenu; ce qui conduit au principe énoncé.

28. En général: *Pour diviser un nombre par un autre, écrivez le diviseur à la droite du dividende, et placez un trait entre ces nombres; mettez un autre trait sous le diviseur, pour le séparer du quotient demandé que vous poserez dessous. Prenez assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour que le nombre qui en résulte (considéré comme exprimant des unités simples), jouisse de la double propriété de contenir au moins une fois le diviseur, et de ne pas contenir plus de 9 fois le diviseur; ce qui revient à prendre assez de chiffres sur la gauche du dividende pour que le nombre qui en résulte (considéré comme exprimant des unités simples) ne soit pas moindre que le diviseur, et soit moindre que le diviseur suivi d'un zéro; le nombre qui satisfait à ces deux conditions forme le 1er dividende partiel, il contient autant de chiffres que le diviseur ou un chiffre de plus. Cherchez le nombre qui exprime combien le 1er dividende partiel contient de fois le diviseur; ce nombre sera le 1er chiffre à gauche du quotient; écrivez le 1er chiffre du quotient sous le diviseur; multipliez le diviseur par ce chiffre, et mettez le produit sous le 1er dividende partiel; placez un trait sous ces nombres, et retranchez-les l'un de l'autre; écrivez le reste dessous, et abaissez à sa droite le 1er des chiffres du dividende qui n'ont pas encore été employés; vous obtiendrez un 2e dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le précédent; ce qui déterminera le 2e chiffre du quotient que vous écrirez à la suite du 1er. Vous répéterez les mêmes opérations jusqu'à l'entier épuisement des chiffres du dividende, en observant que lorsqu'un dividende partiel est moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient est un zéro. Le dernier dividende partiel fournit le chiffre des unités du quotient; et en retranchant de ce dividende partiel le produit du diviseur par le* *chiffre des unités du quotient, on obtient un dernier reste, moindre que le diviseur, qui exprime l'excès du dividende sur le produit du diviseur par le nombre entier obtenu au quotient* (nº **27**). *Quand ce dernier reste est zéro, le dividende proposé est égal au produit du diviseur par le nombre entier obtenu au quotient* (nº **27**); on dit alors que le quotient est *exact*, et que le dividende est *divisible* par le diviseur.

Toutes les fois que nous dirons qu'un nombre est DIVISIBLE *par un autre, il faudra entendre que le quotient de la division du premier nombre par le second est un nombre entier.*

Quand le dernier reste n'est pas zéro, le dividende est compris entre le produit du diviseur par le nombre entier obtenu au quotient, et le produit du diviseur par ce dernier nombre entier augmenté d'une unité; de sorte que le quotient cherché est compris entre le nombre entier obtenu au quotient et ce nombre entier augmenté d'une unité. Ces deux nombres entiers consécutifs sont les *valeurs entières approchées* du quotient; le nombre entier obtenu au quotient est le *quotient entier*, ou la *partie entière* du quotient, ou la *plus petite valeur entière* approchée du quotient. *La partie entière du quotient indique combien le diviseur est contenu de fois dans le dividende.* Le quotient total est composé du nombre entier obtenu au quotient, plus d'une quantité moindre que l'unité qui exprime le quotient du dernier reste par le diviseur. Nous verrons (nº **90**) comment on détermine cette seconde partie du quotient.

29. D'après la règle générale du nº **28**, *pour être en état de trouver les différens chiffres du quotient, il suffit de savoir déterminer combien le diviseur est contenu de fois dans chaque dividende partiel.* On y parvient à l'aide des méthodes exposées dans le nº **26**.

30. Il est toujours facile de déterminer la partie du dividende qui renferme le produit du diviseur par le chiffre des plus hautes unités du quotient, et l'on en déduit quel est ce chiffre. Mais les produits partiels du diviseur par les autres chiffres du quotient étant confondus dans le dividende, il n'est pas possible d'apercevoir ces produits dans le dividende

total; ce qui empêche de trouver directement les autres chiffres du quotient, avant d'avoir obtenu celui des plus hautes unités. *Il est donc indispensable de commencer par la recherche du premier chiffre à gauche du quotient.*

31. Pour faire la *preuve de la division*, il suffit de multiplier le diviseur par le nombre entier obtenu au quotient, et d'ajouter le dernier reste à ce produit; la somme doit être égale au dividende (nº **27**).

32. L'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* et la *division* sont ce qu'on appelle les *quatre règles* ou les *quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique*. On verra que les calculs auxquels on est conduit en résolvant les questions les plus compliquées de l'Arithmétique, se réduisent toujours à effectuer ces opérations sur des nombres entiers abstraits.

Voici des exemples sur lesquels on pourra s'exercer :

ADDITION.		SOUSTRACTIONS.			
Nombres à ajouter.	313294	*de*	523703	*de*	400873
	122830	*ôtez*	122830	*ôtez*	87579
	87579	*Reste*	400873	*Reste*	313294
Somme.....	523703.	*Preuve*	523703.	*Preuve*	400873.

MULTIPLICATION.		DIVISION.			
Multiplicande.	513074	*Dividende...*	8865918 72	1728	*Diviseur.*
Multiplicateur.	1728		8640	513074	*Quotient.*
	4104592	1er *reste....*	2259		
	1026148		1728		
	3591518	2e *reste...*	5311		
	513074		5184		
Produit...	886591872.	3e *reste...*	12787		
			12096		
		4e *reste...*	6912		
			6912		
			0		

CHAPITRE II.

Notations. Propriétés relatives aux quatre règles, aux puissances, aux diviseurs et aux multiples des nombres; nombres premiers; plus grand commun diviseur; propriétés des facteurs et des diviseurs premiers.

§ Ier. *Notations et propriétés relatives aux quatre règles.*

33. Nous ferons souvent usage des *signes*

+	−	×	=

qui signifient respectivement

plus	*moins*	*multiplié par*	*égale*.

Ainsi, l'expression $8-3+4\times 6=29$,

est une *égalité* qui indique que

8 *moins* 3, *plus* 4 *multiplié par* 6, *égale* 29.

Pour effectuer le produit des facteurs 2, 3, 4, dans l'ordre indiqué par $2\times 3\times 4$, on multiplie d'abord 2 par 3, ce qui donne 6; et on multiplie ensuite 6 par 4; le résultat 24 est le produit demandé.

Lorsque nous voudrons indiquer que l'on regarde le produit de plusieurs facteurs comme effectué, de manière à mettre ces facteurs en évidence, nous placerons un point entre deux facteurs consécutifs quelconques.

Ainsi, $3.4.5$ indique le produit 60 des facteurs 3, 4, 5; et $2\times 3.4.5$ exprime qu'on doit multiplier 2 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5. On indique aussi quelquefois le produit de 2 par $3.4.5$, de cette manière $2\times(3\times 4\times 5)$.

Nous représenterons quelquefois des nombres par des lettres, A, B, C, a, b, c, *etc.* Pour indiquer le produit de facteurs représentés par des lettres, nous écrirons ces facteurs à la suite les uns des autres; ainsi, ABC indiquera le produit des nombres A, B, C; et $7A$ désignera le produit de A par 7 ou 7 fois A. Pour désigner le produit d'une somme $A+B$, par C ou par $C+D$, on écrit $(A+B)C$ ou $(A+B)(C+D)$.

34. 1°. *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier toutes les parties de cette somme par ce nombre.*

Par exemple, la somme des nombres 2, 4, 8, étant 14, si l'on veut obtenir le produit de cette somme par 3, il suffira d'écrire 3 fois la somme $2+4+8$, et de faire l'addition; chacune des parties 2, 4, 8, sera donc répétée 3 fois; le produit de la somme 14 par 3, sera donc égal à la somme des produits des nombres 2, 4, 8, par 3.

Ainsi, $(2+4+8)3=2\times 3+4\times 3+8\times 3$.

2°. *Pour former le produit de la somme de plusieurs nombres par la somme de plusieurs autres nombres (sans calculer ces sommes), il suffit de multiplier successivement chaque partie du multiplicande par chaque partie du multiplicateur; la somme des produits partiels forme le produit demandé.* Cela se déduit de (1°).

Par exemple, pour former le produit de $3+4$ par $5+7$, indiqué par $(3+4)(5+7)$, il faut prendre le multiplicande $3+4$, 5 fois plus 7 fois; or d'après (1°), le produit de $3+4$ par 5 est $3\times 5+4\times 5$, et le produit de $3+4$ par 7 est $3\times 7+4\times 7$. Le produit de $3+4$ par $5+7$, est donc $3\times 5+4\times 5+3\times 7+4\times 7$.

3°. On déduit de (2°) que *pour diviser une somme par un nombre, il suffit de diviser toutes les parties de cette somme par ce nombre.*

35. *Quand le nombre dont on veut soustraire un autre augmente ou diminue d'une certaine quantité, le reste éprouve la même augmentation ou la même diminution; mais au contraire quand le nombre à soustraire augmente ou diminue*

d'une certaine quantité, le reste diminue ou augmente de cette même quantité. Cela est évident.

Ainsi, la différence entre 7 et 4 étant 3, celle qui existe entre $7+5$ et 4 est $3+5$ ou 8.

On en déduit que *la différence entre deux nombres ne change pas, quand ils augmentent ou quand ils diminuent à la fois d'une même quantité.*

36. *Le produit de plusieurs nombres conserve la même valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

1°. Pour démontrer que *cette propriété convient à deux facteurs,* aux facteurs 4, 3, par exemple, nous observerons qu'on obtiendra toutes les unités qui composent le *produit de* 4 *par* 3, en écrivant 3 lignes horizontales de 4 unités chacune, comme il suit :

1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1.

Mais en comptant les unités de ce *tableau* par lignes verticales, il est formé de 4 lignes verticales de 3 unités chacune, c'est-à-dire de 4 fois 3 unités, ou du *produit de* 3 *par* 4. Les produits 4×3, 3×4, sont donc égaux. Ce qui démontre le principe énoncé (1°).

2°. Pour démontrer que *la propriété énoncée convient à trois facteurs,* aux facteurs 4, 3, 2, par exemple, il suffit de prouver qu'on ne change pas le produit en transposant les deux premiers facteurs 4, 3, ou les deux derniers facteurs 3, 2.

Or d'après (1°), les produits 4×3, 3×4, étant égaux, si on les multiplie par 2, les résultats $4\times3\times2$, $3\times4\times2$, seront nécessairement égaux. On peut donc changer l'ordre des deux premiers facteurs.

Pour démontrer qu'on peut changer l'ordre des deux derniers facteurs, nous écrirons deux lignes horizontales, composées chacune de 3 nombres égaux à 4, comme on le voit ici :

4, 4, 4,
4, 4, 4.

Dans ce *tableau,* chaque ligne horizontale contenant 3 fois 4 unités, ou 4×3 unités, les deux lignes horizontales qui le composent contiennent 2 fois 4×3 unités, ou $4\times3\times2$ unités.

Or, le même *tableau* peut être considéré comme formé de 3 lignes verticales, contenant chacune 2 fois 4 unités; c'est-à-dire qu'il est aussi composé de 4×2 unités répétées 3 fois, ou de $4\times2\times3$ unités.

Les produits $4\times3\times2$, $4\times2\times3$, sont donc égaux. On peut donc changer l'ordre des deux derniers facteurs.

3°. Enfin, pour faire voir que *le principe énoncé convient à un nombre quelconque de facteurs,* il suffit de prouver qu'on ne change pas la valeur du produit en transposant deux facteurs consécutifs quelconques.

Soit le produit $2\times6\times4\times3\times5\times8\times9\times7$.

Pour démontrer qu'il ne change pas de valeur quand on transpose les facteurs 3 et 5, on observe que le produit $2\times6\times4\times3\times5$ devant être effectué avant qu'on le multiplie par les facteurs 8, 9, 7, il suffit de prouver que

$$2\times6\times4\times3\times5=2\times6\times4\times5\times3\,;$$

Le produit 48 des facteurs 2, 6, 4, devant être formé avant qu'on le multiplie par les facteurs 3 et 5, la question se réduit à démontrer que $48\times3\times5=48\times5\times3$; et cette dernière égalité a nécessairement lieu, car nous venons de prouver (2°) que, dans le cas de trois facteurs, on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

Il résulte de ce qui précède que, sans changer la valeur d'un produit, on peut faire occuper à chaque facteur toutes les places, en avançant successivement ce facteur d'un rang vers la droite ou vers la gauche; ce qui démontre le principe énoncé.

37. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier successivement par ces facteurs.* C'est-à-dire que la multiplication d'un nombre par le produit de plusieurs facteurs, se réduit à multiplier ce nombre par le 1[er] facteur ; puis le résultat par le 2[me] facteur ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs soient épuisés.

Je dis, par exemple, que pour multiplier 2 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5, il suffit de multiplier d'abord 2 par 3 ce qui donne 6 ; puis de multiplier 6 par 4, ce qui donne 24 ; et enfin de multiplier 24 par 5, ce qui donne 120 ; le résultat 120 exprime le produit de 2 par 60. En effet, il suit du principe du n° 36 (1°) que le produit de 2 par 60 est égal au produit de 60 par 2, ou à $3.4.5 \times 2$, ou à $3 \times 4 \times 5 \times 2$; et comme d'après le principe général du n° 36, le produit $3 \times 4 \times 5 \times 2$ est égal à $2 \times 3 \times 4 \times 5$, on en déduit que $2 \times 3.4.5$ est égal à $2 \times 3 \times 4 \times 5$; ce qui démontre la propriété énoncée.

Cette démonstration peut être indiquée de la manière suivante :

$2 \times 3.4.5 = 3.4.5 \times 2$ (n° 36, 1°) $= 3 \times 4 \times 5 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$ (n° 36).

REMARQUE. On en déduit que *le produit de plusieurs nombres contient tous les facteurs de ces nombres.*

Par exemple, le produit 210 de 6 par 35, contient les facteurs 2, 3 de 6, et les facteurs 5, 7, de 35 ; car

$$210 = 6 \times 35 = 2.3 \times 5.7 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

38. *Pour diviser un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de diviser successivement par ces facteurs.*

Cette propriété est une conséquence du principe du n° 37. Ainsi, pour diviser 120 par le produit 60 des facteurs 3, 4, 5, on peut d'abord diviser 120 par 3, ce qui donne 40 ; ensuite on divise 40 par 4, ce qui donne 10 ; enfin on divise 10 par 5, ce qui donne 2 ; ce dernier nombre exprime le quotient de 120 par 60.

39. *Lorsqu'un des facteurs d'un produit augmente ou diminue, le produit augmente ou diminue en même temps ; et lorsque le produit de deux facteurs augmente ou diminue, si l'un des facteurs ne change pas, il faut que l'autre facteur augmente ou diminue en même temps.* Cela est évident.

Par conséquent, lorsque le produit de deux facteurs ne changeant pas, l'un des facteurs augmente ou diminue, il faut que l'autre facteur diminue ou augmente.

* **40.** *Lorsqu'on multiplie plusieurs facteurs d'un produit par des nombres, le produit des nouveaux facteurs qui en résultent est égal au résultat de la multiplication du produit des facteurs primitifs par le produit des nombres qui ont servi à multiplier les facteurs primitifs.*

Par exemple, le produit des facteurs 2,3,5, étant 30, je dis que si l'on multiplie les facteurs 2,5, respectivement par 7 et par 4, le produit des nouveaux facteurs $2.7, 3, 5.4$, sera égal à 30×7.4 ; car, les propriétés des n^os^ 36 et 37 donnent

$$2.7 \times 3 \times 5.4 = 2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 4 = 2.3.5 \times 7.4 = 30 \times 7.4.$$

RÉCIPROQUEMENT, *lorsqu'on divise des facteurs d'un produit par des nombres, le produit des nouveaux facteurs qui en résultent est égal au quotient de la division du produit primitif par le produit des nombres qui ont servi à diviser les facteurs primitifs.* Cette propriété se déduit de la précédente.

* **41.** Lorsque l'un des deux facteurs d'un produit devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, le produit devient le même nombre de fois plus grand ou plus petit (n° 40). Par conséquent, lorsque le produit de deux facteurs devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, si l'un des facteurs ne change pas, il faut que l'autre facteur devienne le même nombre de fois plus grand ou plus petit ; et lorsque le produit ne changeant pas, un des deux facteurs devient un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, il faut par compensation que l'autre facteur devienne au contraire le même nombre de fois plus petit ou plus grand.

42. 1°. *Dans toute division, le quotient est d'autant plus grand que le dividende est plus grand et que le diviseur est plus petit ; le quotient est d'autant plus petit que le dividende est plus petit et que le diviseur est plus grand.*

2°. *Quand le dividende devient un certain nombre de fois plus grand, si le diviseur ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus grand ; et quand le diviseur devient un certain nombre de fois plus grand, si le dividende ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus petit. Quand le dividende devient un certain nombre de fois plus petit, si le diviseur ne change pas, le quotient de-*

vient le même nombre de fois plus petit; et quand le diviseur devient un certain nombre de fois plus petit, si le dividende ne change pas, le quotient devient le même nombre de fois plus grand.

3°. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas.* Cela résulte de (2°).

Ces propriétés sont évidentes. On peut d'ailleurs les déduire des principes des nos **39** et **41**, en observant que le diviseur multiplié par le quotient doit être égal au dividende.

43. *Lorsque le dividende augmente ou diminue d'un certain nombre de fois le diviseur, la partie entière du quotient augmente ou diminue du même nombre de fois l'unité, mais le reste de la division ne change pas;* car la partie entière du quotient indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Remarque. Lorsque le dividende augmente ou diminue d'un multiple du diviseur, le reste de la division ne change pas.

44. *Lorsqu'après avoir multiplié le dividende et le diviseur par un nombre entier* N, *on divise les produits l'un par l'autre, la partie entière du quotient ne change pas, mais le reste de cette nouvelle division est égal au reste de la division précédente multiplié par* N. C'est-à-dire, que si la division de A par B a donné le quotient entier Q et le reste R, la division de AN par BN fournirait le même quotient entier Q et le reste RN.

En effet; le principe du n° **27**, donne $A=BQ+R$.

Si l'on multiplie la somme A, et ses deux parties BQ,R, par N, les propriétés des nos **34** (1°), **36** et **37** donneront

$$AN=BQN+RN=BNQ+RN=BN\times Q+RN.$$

Or, dans la 1re division le reste R est moindre que le diviseur B; RN est donc moindre que BN; la division de AN par BN, ou de $BN\times Q+RN$ par BN, donnera donc le quotient entier Q et le reste RN moindre que le diviseur BN. Ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, la division de 68 par 9 donnant le quotient entier 7 et le reste 5, la division de 68×3 par 9×3 donnera le même quotient entier 7 et le reste 5×3.

45. *Quand les facteurs d'un produit sont terminés par des zéro, on peut abréger l'opération en effectuant la multiplication sans avoir égard à ces zéro, que l'on place ensuite à la droite du résultat.*

Cette propriété se déduit de la règle générale du n° **20**.

Par exemple, pour trouver le produit de 54000 par 3200, il suffit de multiplier 54 par 32, ce qui donne 1728; et de mettre sur la droite de 1728 tous les zéro qui terminent les facteurs donnés; le résultat 172800000 est le produit demandé.

46. *Lorsqu'un nombre est terminé par des zéro, pour le diviser par* 10, *ou par* 100, *etc., il suffit de supprimer sur sa droite, un zéro, ou deux zéro, etc.*

Par exemple, pour diviser 4800000 par 100, il suffit de supprimer deux zéro sur la droite de 4800000; car 4800000 étant le produit de 48000 par 100 (n° **19**, 2°), le quotient de 4800000 par 100 est 48000.

47. Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéro, on peut simplifier la division en supprimant d'abord un même nombre de zéro sur la droite du dividende et du diviseur; car cette suppression revient à diviser le dividende et le diviseur par un même nombre (n° **46**), ce qui ne change pas le quotient (n° **42**, 3°).

***48.** *Le produit de plusieurs nombres contient autant de chiffres au plus qu'il y en a dans tous les facteurs; le nombre des chiffres du produit n'est jamais moindre que le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs et augmenté d'une unité.* En effet:

1°. Chaque facteur étant moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans ce facteur, le produit est moindre que l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres dans tous les facteurs (n° **45**); ce produit ne peut donc pas renfermer plus de chiffres qu'il n'y en a dans tous les facteurs.

2°. Chaque facteur ne saurait être moindre que l'unité suivie d'autant de zéro moins un, qu'il y a de chiffres dans ce facteur ; le produit ne peut donc pas être moindre que l'unité suivie d'un nombre de zéro marqué par le nombre total des chiffres des facteurs diminué du nombre des facteurs.

*** 49.** Il est facile de *déterminer le nombre des chiffres de la partie entière du quotient, sans effectuer la division.* En effet; d'après la règle du n° **28**, le 1er dividende partiel fournit le 1er chiffre à gauche du quotient, et en abaissant successivement chacun des autres chiffres du dividende sur la droite de chaque reste, on forme les dividendes partiels qui fournissent les autres chiffres du quotient; de sorte que chacun des chiffres du dividende qui suivent le 1er dividende partiel, détermine un chiffre du quotient ; d'ailleurs le 1er dividende partiel contient nécessairement autant de chiffres que le diviseur, ou un chiffre de plus. Par conséquent, *lorsque le 1er dividende partiel contient un chiffre de plus que le diviseur, le nombre des chiffres de la partie entière du quotient est égal à la différence entre le nombre des chiffres du dividende et le nombre des chiffres du diviseur; quand le 1er dividende partiel contient autant de chiffres que le diviseur, le nombre des chiffres de la partie entière du quotient est égal à la même différence augmentée d'un.*

§ II. *Des puissances.*

50. *Lorsque tous les facteurs d'un produit sont égaux à un nombre donné, le produit est ce qu'on nomme une* PUISSANCE *de ce nombre donné ;* et afin de distinguer les diverses puissances d'un même nombre, on dit *deuxième puissance, troisième puissance, quatrième puissance, etc.*, suivant que le nombre des facteurs égaux, est égal à 2, ou à 3, ou à 4, etc. Ainsi, la troisième puissance de 2 est le produit 8 de 3 facteurs égaux à 2.

Pour indiquer une puissance d'un nombre donné, on place à la droite de ce nombre et un peu au-dessus, le nombre qui marque combien de fois le nombre donné doit être pris comme facteur. Ainsi, 2^3 désigne la troisième puissance de 2 ; le nom-

bre 3 se nomme l'*exposant* de 2 ; et on dit que 3 est l'*exposant de la puissance.*

Remarque. *Tout nombre qui n'a pas d'exposant est censé affecté d'un exposant égal à l'unité.* Ainsi, 2^1 est égal à 2, et on dit que la *première puissance* de 2 est 2. En général, *la première puissance d'un nombre est égale à ce nombre.*

Le produit d'un nombre donné par lui-même, ou la *deuxième puissance* de ce nombre donné, se nomme aussi le *carré* du nombre donné ; et le nombre qui multiplié par lui-même donne un certain produit se nomme la *racine deuxième*, ou la *racine carrée* de ce produit. Ainsi, le produit 9 de 3 par 3 est la deuxième puissance ou le carré de 3 ; et 3 est la racine deuxième ou la racine carrée de 9.

Pour indiquer la racine carrée d'un nombre, on place ce nombre sous le signe $\sqrt{}$ nommé *radical*. Ainsi, $\sqrt{9}$ désigne la racine carrée de 9.

51. *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre donné est égal à ce nombre donné affecté d'un exposant égal à la somme des exposans du nombre donné dans les différens facteurs.* Cette propriété résulte de la remarque du n° **37**.

Par exemple, le produit de 2^3 par 2^4 est 2^7 ; car

$$2^3 \times 2^4 = 2.2.2 \times 2.2.2.2 = 2.2.2.2.2.2.2 = 2^7.$$

1re Remarque. Pour élever à une puissance un nombre affecté d'un exposant, il suffit de multiplier l'exposant de ce nombre par l'exposant de la puissance.

Par exemple, la troisième puissance de 2^4, indiquée par $(2^4)^3$, est $2^{4\times3}$ ou 2^{12} ; car

$$(2^4)^3 = 2^4 \times 2^4 \times 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{4\times3} = 2^{12}.$$

2^{e} Remarque. *Quand des facteurs d'un produit renferment plusieurs puissances d'un même nombre, il suffit d'écrire une seule fois ce nombre, dans le produit, et de lui donner pour exposant la somme des exposans dont ce nombre est affecté dans les facteurs.*

Ainsi, le produit de $2^3 \times 5^2$ par $2^8 \times 5^6$ est $2^{11} \times 5^8$; car il résulte des principes précédens, que ce produit est égal à

$2^3 \times 5^2 \times 2^8 \times 5^6$ (n° **37**), ou à $2^3 \times 2^8 \times 5^2 \times 5^6$ (n° **36**), ou au produit de $2^3 \times 2^8$ par $5^2 \times 5^6$ (n° **37**), ou enfin au produit de 2^{11} par 5^8 (n° **51**).

Cette démonstration peut être indiquée de la manière suivante :

$$2^3 . 5^2 \times 2^8 . 5^6 = 2^3 \times 5^2 \times 2^8 \times 5^6 \text{ (n° 37)} = 2^3 \times 2^8 \times 5^2 \times 5^6 \text{ (n° 36)}$$
$$= 2^3 . 2^8 \times 5^2 . 5^6 \text{ (n° 37)} = 2^{11} \times 5^8 \text{ (n° 51)}.$$

3ᵉ Remarque. *Pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.*

Par exemple, la troisième puissance de 2×5, indiquée par $(2 \times 5)^3$, devant se composer de trois facteurs égaux à 2×5, il suit des principes des n^{os} **36** et **37** que l'on a

$$(2.5)^3 = 2.5 \times 2.5 \times 2.5 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^3.$$

D'après ce principe, la troisième puissance de $2^4 \times 5^2$, indiquée par $(2^4 \times 5^2)^3$, est $(2^4)^3 \times (5^2)^3$ ou $2^{12} \times 5^6$ (1ʳᵉ *remarque*).

52 *Dans la division de deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre, le quotient est égal à ce nombre affecté d'un exposant égal à l'exposant du dividende diminué de l'exposant du diviseur;* car le dividende pouvant être considéré comme le produit du diviseur par le quotient, il résulte du principe du n° **51**, que l'exposant du nombre donné dans le dividende, est égal à l'exposant du diviseur augmenté de l'exposant du quotient.

Ainsi, le quotient de 2^7 par 2^3 est 2^4; et en effet, le produit du diviseur 2^3 par le quotient 2^4 est égal au dividende 2^7.

1ʳᵉ Remarque. *Quand le dividende et le diviseur renferment des puissances d'un même nombre, l'exposant de ce nombre dans le quotient s'obtient en retranchant l'exposant du diviseur de celui du dividende.*

Ainsi, le quotient de $2^{11} \times 5^8$ par $2^3 \times 5^2$ est $2^8 \times 5^6$; car d'après la 2ᵉ remarque du n° **51**, le diviseur $2^3 \times 5^2$ multiplié par le quotient $2^8 \times 5^6$, reproduit le dividende $2^{11} \times 5^8$.

En général : *Lorsque le dividende et le diviseur sont décomposés en facteurs, on obtient le quotient en supprimant dans le dividende tous les facteurs du diviseur.*

Ainsi, le quotient de

$2^5 \times 3^7 \times 5^8 \times 7^{10} \times 13$ par $2 \times 3^7 \times 5^2 \times 7$ est $2^4 \times 5^6 \times 7^9 \times 13$.

2ᵉ Remarque. Les diverses propriétés du n° **52**, supposent que les exposans des puissances d'un même nombre sont plus grands dans le dividende que dans le diviseur. Nous verrons dans le n° **98**, comment on opère lorsque cette condition n'est pas remplie.

53. Les puissances successives de la *base* 10, indiquées par $10, 10^2, 10^3$, etc., ayant pour valeurs 10, 100, 1000, etc., on voit que *toute puissance de* 10 *est égale à l'unité suivie d'un nombre de zéro marqué par l'exposant de* 10 *dans cette puissance.* Ainsi, 10^m est égal à l'unité suivie de *m* zéro.

Remarque. Dans notre système de numération, les valeurs 10, 100, 1000, etc., des unités des différens ordres, sont les puissances successives $10^1, 10^2, 10^3$, etc., de la *base* 10.

§ III. *Propriétés des diviseurs et des multiples d'un nombre. Déterminer le reste de la division d'un nombre par un des diviseurs* 10, 100, 1000,...., 2, 5, 2^2, 5^2, 2^3, 5^3,..., 9, 3, 11. *Reconnaître si un nombre admet un de ces diviseurs. Preuves par* 9 *et par* 11.

54. Les diviseurs et les multiples d'un nombre jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Quand plusieurs nombres ont un diviseur commun, leur somme admet le même diviseur.*

En effet, chacun des nombres donnés étant égal au diviseur commun répété un *nombre entier de fois* (c'est-à-dire 2 fois ou 3 fois, ou etc.), leur *somme* sera égale au diviseur commun pris autant de fois qu'il se trouve dans tous les nombres donnés; cette somme sera donc égale au diviseur commun pris un nombre entier de fois; elle sera donc divisible par le diviseur commun aux nombres donnés.

Par exemple, les nombres 12, 15, 21, étant divisibles par 3 leur somme 48 est nécessairement divisible par 3; car il résulte des égalités $12=4$ *fois* 3, $15=5$ *fois* 3, $21=7$ *fois* 3, que la somme des nombres 12, 15, 21, est formée de 3 répété 4 fois $+$ 5 fois $+$ 7 fois, c'est-à-dire de 3 répété 16 fois.

2°. *Lorsque deux nombres ont un diviseur commun, leur différence admet le même diviseur;* car chacun des deux nombres donnés étant égal au diviseur commun répété un nombre entier de fois, leur différence sera égale au diviseur commun pris autant de fois qu'il se trouve dans le plus grand des deux nombres donnés, moins le nombre de fois qu'il est contenu dans le plus petit de ces deux nombres donnés; cette différence sera donc égale au diviseur commun pris un nombre entier de fois; elle sera donc divisible par le diviseur commun aux deux nombres donnés.

Ainsi, les nombres 27, 15, étant divisibles par 3, leur différence 12 doit être divisible par 3; car il résulte des égalités,

$$27=9 \textit{ fois } 3, \quad 15=5 \textit{ fois } 3,$$

que $27-15$ ou 12 se compose du diviseur commun 3, répété 9 fois moins 5 fois, c'est-à-dire de 3 répété 4 fois.

3°. *La somme de plusieurs multiples d'un nombre donné est un multiple de ce nombre donné, et la différence de deux multiples d'un nombre donné est aussi un multiple de ce nombre donné;* cela se déduit de (1°) et (2°) en observant que tout multiple d'un nombre est divisible par ce nombre.

4°. *Lorsque l'on combine plusieurs multiples d'un nombre par voie d'addition et de soustraction, le résultat est un multiple du même nombre.* Cela résulte de (3°).

5°. *Tout multiple d'un nombre admet les diviseurs de ce nombre*, ou en d'autres termes, *tout nombre divisible par un autre, est aussi divisible par chacun des facteurs de ce dernier nombre.* Cela résulte de (1°), en observant que tout multiple d'un nombre donné exprime la somme de plusieurs nombres égaux à ce nombre donné.

Par exemple, 30 étant divisible par 6, les facteurs 2, 3, de 6, doivent aussi diviser 30; car on a,

$$30=6\times5=6+6+6+6+6,$$

et d'après (1°), chacun des diviseurs 2, 3, de 6, doit diviser la somme 30 des nombres 6, 6, 6, 6, 6.

6°. *Lorsqu'un nombre ne divise pas un autre nombre, aucun multiple du premier nombre ne saurait diviser le deuxième nombre.* Cette propriété se déduit de (5°).

Ainsi, 6 ne divisant pas 70, le multiple 30 de 6, ne saurait diviser 70; car d'après (5°), si 30 divisait 70, le facteur 6 de 30 diviserait 70, ce qui est contre l'hypothèse.

7°. *Quand une somme, composée de deux parties, et l'une de ces parties, ont un diviseur commun, l'autre partie admet nécessairement le même diviseur.* En effet; puisque la *somme* et la 1^re^ partie ont un diviseur commun, il résulte de (2°) que la *différence* entre la somme et la 1^re^ partie, admet le même diviseur; et comme cette *différence* exprime la 2^e^ partie de la somme, le principe est démontré.

Par exemple, la somme 35 des nombres 20 et 15, étant divisible par 5, et la 1^re^ partie 20 étant aussi divisible par 5, la 2^e^ partie 15, qui exprime la différence entre 35 et 20, sera nécessairement divisible par 5.

8°. *Quand une somme est composée de deux parties dont l'une est divisible par un nombre et dont l'autre n'admet pas ce diviseur, la somme proposée n'est pas divisible par ce diviseur;* car si elle l'était, comme la 1^re^ partie admet ce diviseur, la 2^e^ partie serait divisible par ce diviseur (7°); ce qui est contre l'hypothèse.

Par exemple, 6 divisant 24 et ne divisant pas 7, la somme 31 des nombres 24 et 7, ne saurait être divisible par 6.

9°. *Un nombre n'admet jamais un diviseur plus grand que sa moitié.* En effet, puisqu'en divisant un nombre par sa moitié le quotient est 2, si l'on divise un nombre par un autre plus grand que sa moitié, le quotient sera moindre que 2 (n° **42**, 1°); ce quotient ne sera donc pas un nombre entier.

53. Nous allons *déterminer le reste de la division d'un nombre par une puissance de* 10, *sans effectuer la division.*

1°. *Le reste de la division d'un nombre par* 10 *est exprimé par le premier chiffre à droite de ce nombre;* car tout nombre plus grand que 10 est décomposable en deux parties dont l'une (terminée par un zéro) est divisible par 10 (n° 46), et dont l'autre (toujours moindre que 10) est le premier chiffre à droite du nombre donné.

Par conséquent : *Pour qu'un nombre soit divisible par* 10, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit un zéro.*

2°. *Le reste de la division d'un nombre par* 100 *ou par* 10^2 *est égal au nombre formé par les deux premiers chiffres à droite du dividende.* Car tout nombre plus grand que 100 est décomposable en deux parties, dont l'une (terminée par deux zéro) est divisible par 100 (n° 46), et dont l'autre (formée par les deux premiers chiffres à droite du nombre donné) est moindre que le diviseur 100.

Ainsi, le reste de la division de 34 768 par 100 est 68; car

$$34\,768 = 34\,700 + 68 = 347 \times 100 + 68.$$

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 100 *ou par* 10^2, *il faut et il suffit que ses deux premiers chiffres à droite soient des zéro.*

Et ainsi de suite, pour les autres puissances de 10.

56. Nous allons donner le moyen de *déterminer le reste de la division d'un nombre par une puissance quelconque de l'un des facteurs* 2, 5, *de* 10, *sans effectuer la division.*

1°. *Le reste de la division d'un nombre par* 2 *est le même que celui de la division de son premier chiffre à droite par* 2. Car, tout nombre est décomposable en deux parties, dont l'une (terminée par un zéro) étant divisible par 10, admet nécessairement le diviseur 2 de 10 (n° 54, 5°), et dont l'autre est le chiffre des unités.

Par exemple, 587 est un multiple de 2 augmenté de 7, car

$$587 = 580 + 7 = 58 \times 10 + 7 = 58 \times 5 \times 2 + 7.$$

Le reste de la division de 587 par 2 est donc le même que celui de 7 par 2; ce reste est 1.

Par conséquent : *Pour qu'un nombre soit divisible par* 2, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit divisible par* 2, *ou soit un zéro; ce qui exige que le chiffre des unités soit* 0, *ou* 2, *ou* 4, *ou* 6, *ou* 8.

REMARQUE. Les nombres divisibles par 2 s'appellent *nombres pairs*, et les nombres qui ne sont pas divisibles par 2 sont dits *impairs*. De sorte que la suite des *nombres naturels*,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.,

est composée des *nombres pairs*, 2, 4, 6, 8, 10, 12, etc., et des *nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc.

2°. *Le reste de la division d'un nombre par* 5 *est le même que celui de la division de son premier chiffre à droite par* 5.

Cette propriété se démontre comme la précédente.

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 5, *il faut et il suffit que son premier chiffre à droite soit divisible par* 5, *ou soit un zéro; ce qui exige que le chiffre des unités soit un* 5 *ou un zéro.* Les seuls nombres divisibles par 5, sont donc, 10, 15, 20, 25, 30, etc.

3°. On prouvera d'une manière semblable que *le reste de la division d'un nombre par* 2^2 *ou par* 5^2 *est le même que le reste de la division par* 2^2 *ou par* 5^2, *du nombre formé par les deux premiers chiffres à droite du dividende;* que *le reste de la division d'un nombre par* 2^3 *ou par* 5^3 *est le même que le reste de la division par ce diviseur du nombre exprimé par les trois premiers chiffres à droite du dividende; et ainsi de suite pour les autres puissances des facteurs* 2, 5, *de* 10.

Par conséquent, *pour qu'un nombre soit divisible par* 2^2 *ou par* 5^2, *c'est-à-dire par* 4 *ou par* 25, *il faut et il suffit que le nombre formé par les deux premiers chiffres à droite soit divisible par* 4 *ou par* 25; *pour qu'un nombre soit divisible par* 2^3 *ou par* 5^3, *c'est-à-dire par* 8 *ou par* 125, *il faut et il suffit que le nombre formé par les trois premiers chiffres à droite soit divisible par* 8 *ou par* 125; *et ainsi de suite.*

57. *Pour trouver le reste que donnerait la division d'un nombre* N *par* 9, *sans effectuer cette division, on fait la somme des chiffres du nombre* N. *Quand cette somme est moindre que*

9, elle exprime le reste cherché ; lorsqu'elle est égale à 9, le reste est zéro ; quand cette somme surpasse 9, on opère sur elle comme sur le nombre donné N, *en additionnant les chiffres de la somme ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une somme qui n'excède pas 9 ; lorsque cette dernière somme est moindre que 9, elle exprime le reste cherché ; quand elle est égale à 9, le reste est zéro, de sorte que le nombre donné est exactement divisible par 9.*

Pour démontrer ces propriétés, nous observerons d'abord que l'unité suivie de plusieurs zéro, est un multiple de 9 augmenté de 1 ; car, d'après notre système de numération, on a

$$10=9+1,\ 100=99+1=11\times9+1,\ 1000=999+1=111\times9+1;\ \text{etc.}$$

On en déduit que *tout chiffre significatif suivi de plusieurs zéro, exprime un multiple de 9 augmenté de ce chiffre.*

Par exemple, 1000 étant un multiple de 9 augmenté de 1, le produit 7000 de 1000 par 7, sera composé de 7 fois ce multiple de 9 augmenté de 7 fois 1, c'est-à-dire d'un multiple de 9 augmenté de 7.

Un nombre quelconque étant égal à la somme des nombres exprimés par ses différens chiffres, et chaque chiffre significatif exprimant, par sa position, un multiple de 9 augmenté de ce chiffre, il en résulte que tout nombre est égal à la somme de plusieurs multiples de 9 augmentée de la somme des chiffres significatifs de ce nombre ; et comme la somme de plusieurs multiples de 9 est aussi un multiple de 9 (54, 3°), on voit qu'*un nombre quelconque est un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs.*

Par exemple, le nombre $357 = 300 + 50 + 7$.

Or, d'après ce qui vient d'être démontré, 300 est un multiple de 9 augmenté de 3, et 50 est un multiple de 9 augmenté de 5. Le nombre 357 est donc composé de deux multiples de 9 augmentés de $3 + 5 + 7$; c'est-à-dire que 357 est un multiple de 9 augmenté de la somme 15 des chiffres 3, 5 et 7.

Tout nombre N étant un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs, le reste de la division de N

par 9 est le même que celui de la somme des chiffres significatifs de N par 9 (n° 43).

Par conséquent : si cette somme est moindre que 9, elle exprime le reste de la division de N par 9 ; si elle est égale à 9, le nombre N est un multiple de 9, de sorte que le reste de la division de N par 9 est zéro ; et enfin, si elle surpasse 9, il suffit, pour trouver le reste cherché, d'opérer sur cette somme, comme on a opéré sur N.

La propriété énoncée se trouve ainsi démontrée.

Par exemple, 35 070 étant un multiple de 9 augmenté de la somme 15 des chiffres 3, 5, 7, le reste de la division de 35 070 par 9 est le même que celui de la division de 15 par 9 (n° 43). Mais, 15 est un multiple de 9 augmenté de la somme 6 des chiffres 1 et 5 ; 30 570 est donc un multiple de 9 augmenté de 6 ; le reste de la division de 35 070 par 9 est donc 6.

1^{re} Remarque. Dans la recherche du reste de la division d'un nombre N, par 9, on peut omettre tous les chiffres 9 qui se trouvent dans N ; car ces chiffres expriment des multiples de 9.

D'après ce qui précède : *Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de 9.*

58 *Pour obtenir le reste* R *que donnerait la division d'un nombre* N *par* 3, *sans effectuer la division, on forme la somme* S *des chiffres de* N ; *quand cette somme est moindre que* 3, *elle exprime* R ; *quand* S *est un des multiples* 3, 6, 9, *de* 3, *le reste* R *est nul ; quand la somme* S *est un des nombres* 4, 5, 7, 8, *on la diminue du plus grand multiple de* 3 *qui peut y être contenu ; le résultat de la soustraction exprime* R. *Enfin, lorsque* S *surpasse* 9, *on ramène ce cas à l'un des précédens en ajoutant les chiffres de* S ; *si la nouvelle somme surpasse* 9, *on additionne ses chiffres ; et on continue à ajouter les chiffres de chaque somme ainsi obtenue jusqu'à ce qu'on parvienne à une dernière somme qui n'excède pas* 9 ; *cette dernière somme diminuée du plus grand multiple de* 3 *qui peut y être contenu, exprime* R. *Dans l'addition des chiffres significatifs, on peut omettre les multiples* 3, 6, 9, *du diviseur* 3.

En effet, on a démontré (n° 57), que tout nombre est un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs; d'ailleurs, 3 divisant 9, tout multiple de 9 est un multiple de 3; un nombre quelconque est donc un multiple de 3 augmenté de la somme de ses chiffres significatifs; et par conséquent, le reste de la division d'un nombre par 3 est le même que celui de la somme de ses chiffres significatifs par 3 (n° 43). On en déduit la règle énoncée.

Ainsi, pour obtenir le reste de la division de 536 902 607 par 3, on forme la somme 14 des chiffres 5, 2, 7; la somme 5, des chiffres 1, 4, diminuée de 3, donne le reste 2 de la division de 536 902 607 par 3.

Remarque. *Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.*

59. *Pour obtenir le reste R de la division d'un nombre N par 11, sans effectuer la division, on calcule deux sommes : l'une des chiffres de rang impair à partir de la droite, l'autre des chiffres de rang pair. De la première somme, augmentée s'il est nécessaire d'un multiple de 11, on retranche la seconde somme. Quand le reste de cette soustraction est moindre que 11, il exprime R. Quand le reste de la soustraction n'est pas moindre que 11, on opère sur ce reste de la même manière qu'on l'avait fait sur N; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste moindre que 11; ce dernier reste exprime R. Quand le dernier reste est zéro, le nombre proposé est divisible par 11.* En effet,

1°. Les unités de rang impair, à partir du troisième ordre, ont pour valeurs, 100, 10000, 1000 000, etc., et on a

$100=99+1$, $10\,000=9999+1$, $1\,000\,000=999\,999+1$, etc.

Or, 99 étant divisible par 11, les nombres 9 999, 999 999, etc., composés d'un nombre pair de 9, sont nécessairement divisibles par 11; et comme, d'après la relation $1=0\times11+1$, chaque unité du premier ordre peut être considérée comme un multiple de 11 augmenté de 1, on voit que *toutes les unités de rang impair expriment des multiples de 11 augmentés de 1.*

2°. Les unités de rang pair, à partir du 4^e ordre, ont pour valeurs respectives 1000, 100 000, etc.; c'est-à-dire 100×10, $10\,000\times10$, etc.; on trouvera donc leurs valeurs sous une forme analogue à celle qui a été obtenue (1°) pour les unités de rang impair, en multipliant par 10 les égalités

$100=99+1$, $10\,000=9999+1$, etc.; ce qui donne

$1000=990+10$, $100\,000=99990+10$, etc., (n° 34, 1°).

Or, $10=11-1$. On a donc

$10=11-1$, $1\,000=990+11-1$, $100\,000=99990+11-1$, etc;

et comme, d'après ce qu'on a vu (1°), les nombres 990, 99990, etc., sont divisibles par 11, *toutes les unités de rang pair expriment des multiples de 11 diminués de 1.*

Cela posé : chacune des unités d'un chiffre de rang impair ayant pour valeur un multiple de 11 augmenté de 1, il en résulte que tout chiffre significatif de rang impair exprime, par sa position, un multiple de 11 augmenté de ce chiffre.

De même, chacune des unités d'un chiffre de rang pair ayant pour valeur un multiple de 11 diminué de 1, il en résulte que tout chiffre significatif de rang pair exprime, par sa position, un multiple de 11 diminué de ce chiffre.

On déduit de ces deux dernières propriétés, que tout nombre N est un multiple de 11 augmenté de la somme A des chiffres de rang impair, et diminué de la somme B des chiffres de rang pair. Car les nombres exprimés par les chiffres de rang impair étant des multiples de 11 augmentés respectivement de ces chiffres, le nombre exprimé par l'ensemble des chiffres de rang impair est composé de la somme de ces multiples de 11 augmentée de A; ce qui revient à un multiple de 11, augmenté de A. Par une raison semblable, le nombre exprimé par la totalité des chiffres de rang pair est un multiple de 11 diminué de la somme B de ces chiffres. Ajoutant ces deux parties du nombre N, on voit que la réunion des chiffres de rang impair et de rang pair de N compose un multiple de 11 augmenté de A et diminué de B.

Quand la somme A des chiffres de rang impair n'est pas moindre que la somme B des chiffres de rang pair, on peut retrancher la seconde somme de la première, et le nombre N est un multiple de 11 augmenté de la différence A—B entre ces deux sommes ; le reste de la division de cette différence par 11, est donc le même que celui de la division de N par 11, (nº 43).

Lorsque A est moindre que B, on ramène ce cas au précédent en augmentant A d'un multiple convenable de 11; car cela revient à ajouter ce multiple de 11 à N, ce qui ne change pas le reste de la division par 11 (nº 43).

La règle énoncée se déduit de ce qui précède.

D'après cette règle, le reste de la division de 62 410 par 11, est $0+4+6$ diminué de $1+2$, ou 7; celui de la division de 6241 par 11 est $1+2+11$ diminué de $4+6$, ou 4; le reste de la division de 827081 920 par 11 est $9+8+7+8$ diminué de $2+1+2$, ou $32-5$, ou 27, ou $7-2$, ou 5.

Pour qu'un nombre soit divisible par 11, il faut et il suffit que la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair soit un multiple de 11, ou soit zéro; car il suit de la règle précédente, que le reste de la division de ce nombre par 11 est zéro.

*** 60.** *Lorsqu'on divise deux nombres et leur produit par un même nombre, on obtient trois restes; le produit des deux premiers restes, s'il est moindre que le diviseur, est égal au troisième reste; et s'il n'est pas moindre que le diviseur, en le diminuant du plus grand multiple du diviseur qui y est contenu, le résultat est égal au troisième reste.*

Pour fixer les idées, considérons les nombres 31, 65, et le diviseur 9; les restes des divisions des nombres 31, 65, par 9, étant 4 et 2 (nº 57),

31 est un multiple de 9 augmenté de 4,

et 65 est un multiple de 9 augmenté de 2.

Or, d'après le principe du nº 54 (2º), le produit de 31 par 65 est composé des quatre produits partiels de chacune des deux parties du multiplicande par chacune des deux parties du multiplicateur; c'est-à-dire du produit de deux multiples de 9, de deux fois un multiple de 9, de quatre fois un multiple de 9

et de 2 fois 4; la somme de ces quatre produits, qui exprime le produit de 31 par 65, est donc un multiple de 9 augmenté de 2 fois 4 (nº 54,3º); et en effet, le produit de 31 par 65 est 2015, et le reste de la division de 2015 par 9 est $2+1+5$, ou 8, ou 4×2.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à des nombres quelconques, le principe énoncé est démontré.

***61.** Les propriétés des nºˢ 57, 59 et 60, conduisent à une méthode fort simple pour faire la *preuve de la multiplication et de la division par* 9 *et par* 11.

Dans la *preuve de la multiplication par* 9, on cherche les restes des divisions du multiplicande, du multiplicateur et du produit par 9; le produit des deux premiers restes, diminué du plus grand multiple du diviseur qui peut y être contenu, doit être égal au troisième reste. Quand cette condition n'est pas remplie, on a commis des fautes de calcul.

La *preuve de la multiplication par* 11, s'exécute d'une manière semblable.

Exemple. *On propose de vérifier si* 472878 *est le produit de* 567 *par* 834.

Pour faire la *preuve par* 9, on cherche les restes des divisions par 9 des nombres 567, 834, 472 878; ces restes sont 0, 6 et 0; le produit 0 des deux premiers restes étant égal au troisième, la preuve n'indique aucune faute de calcul.

Pour faire la *preuve par* 11, on cherche les restes 6, 9, 10, des divisions par 11 des nombres 567, 834, 472 878; le produit 54 des deux premiers restes diminué de 11×4, étant égal au troisième reste 10, la preuve par 11 n'indique aucune faute de calcul.

Remarque. Le reste de la division d'un nombre par 9 ne changeant pas quand ce nombre augmente ou diminue d'un multiple de 9 (nº 43), il en résulte que lorsque des fautes de calcul sont telles que l'erreur totale commise dans le résultat d'une multiplication est un multiple de 9, la preuve par 9 n'indique pas cette erreur.

Par exemple, si, en multipliant 47 par 12, on trouvait

582 pour résultat, la preuve par 9 n'indiquerait aucune erreur, et cependant ce résultat est trop fort de 9×2.

Par une raison semblable, la preuve par 11 n'est en défaut, que quand les erreurs commises sont telles que le produit obtenu est trop fort ou trop faible d'un multiple de 11.

Le dividende diminué du dernier reste devant être égal au produit du diviseur par le quotient, la méthode précédente donne le moyen de faire la *preuve de la division par* 9 *et par* 11.

Quand les preuves par 9 *et par* 11 *s'accordent à n'indiquer aucune faute de calcul, il est probable que le résultat obtenu est exact;* car s'il existait une erreur, elle serait nécessairement un multiple de 9 et de 11; elle serait donc un multiple de 9×11 (nº **73**) ou de 99.

§ IV. *Des nombres* PREMIERS. *Du plus grand commun diviseur. Propriétés des diviseurs des nombres.*

62. On dit qu'*un nombre est* PREMIER, *lorsqu'il n'est divisible par aucun autre nombre;* ce qui revient à dire qu'un nombre est *premier* quand il n'est divisible que par lui-même et par l'unité. Les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, etc. Nous verrons (nᵒˢ **79**, **80**, et **81**), comment on les détermine.

Deux nombres sont dits *premiers entre eux*, quand ils n'ont pas de facteur commun. Ainsi, 10 et 21, ou 2×5 et 3×7, sont *premiers entre eux;* on dit encore que 10 est *premier avec* 21.

Deux nombres entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux, car s'ils admettaient un facteur commun, ce facteur diviserait leur différence 1, (nº **54**, 2°); ce qui n'est pas possible.

Lorsqu'un nombre premier p ne divise pas un autre nombre, ces deux nombres sont nécessairement premiers entre eux; car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait le nombre premier p; ce qui est contraire à la définition des nombres premiers. Il suit de là que *deux nombres premiers sont toujours premiers entre eux.*

Les facteurs et les diviseurs qui sont des nombres premiers, prennent aussi les noms de *facteurs premiers* et de *diviseurs premiers*. Ainsi, 35 est le produit des facteurs premiers 5, 7; 5 et 7 sont les diviseurs premiers de 35.

63. Le plus grand nombre qui divise à la fois plusieurs nombres donnés étant le plus grand de tous leurs diviseurs communs, est ce qu'on nomme leur *plus grand commun diviseur.*

Par exemple, les *diviseurs* de 48 étant 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, et ceux de 18 étant 2, 3, 6, 9, on voit que les *diviseurs communs* à 48 et 18 sont 2, 3, 6; et que leur *plus grand commun diviseur* est 6.

64. Nous allons d'abord faire voir comment on peut *trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.*

Pour fixer les idées, considérons les nombres 117, 51; leur plus grand commun diviseur ne pouvant surpasser 51, on est conduit à diviser 117 par 51; car dans le cas où 51 diviserait 117, le nombre 51 serait évidemment le plus grand commun diviseur demandé. Cela n'arrive pas dans notre exemple, car 117 divisé par 51 donne le quotient 2 et le reste 15. On a donc

$$117 = 51 \times 2 + 15, \text{ (nº 27)}.$$

On voit ainsi que 117 est la *somme* des deux nombres 51×2, 15, et que 15 est la *différence* entre 117 et 51×2.

Il est facile d'en déduire que tout diviseur commun aux nombres donnés 117, 51, divise le reste 15 de leur division, et que le plus grand commun diviseur des nombres 117, 51, est le même que celui qui existe entre le plus petit de ces deux nombres et le reste 15 de leur division. En effet, d'après les propriétés du nº **54** (1°, 2° et 5°), tout diviseur commun à 117 et 51, divisant les deux nombres 117, 51×2, devra diviser leur différence 15, qui exprime le reste de la division de 117 par 51; de plus tout diviseur commun à 51 et 15, divisant les deux nombres 51×2, 15, divisera leur somme 117; les diviseurs communs de 117 et 51 sont donc les mêmes que ceux de 51 et 15; le plus grand commun diviseur de 117 et 51 est donc le même que celui de 51 et 15. Ce qui démontre les deux propriétés énoncées.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à des nombres quelconques, on voit : 1° que *tout diviseur commun à deux nombres divise le reste de leur division*, et 2° que *le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui qui existe entre le plus petit de ces deux nombres et le reste de la division du plus grand nombre par le plus petit.*

La question est ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur de 51 et 15 ; pour l'obtenir, on divise 51 par 15, ce qui fournit le quotient 3 et le reste 6. Or, on vient de voir que le plus grand commun diviseur de 117 et 51 est le même que celui de 51 et 15 ; et d'après le principe général énoncé (2°), le plus grand commun diviseur des nombres 51 et 15 est le même que celui qui existe entre 15 et le reste 6 de la division de 51 par 15 ; le plus grand commun diviseur des nombres donnés 117, 51, est donc le même que celui de 15 et 6.

La question se trouve ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre le reste 15 de la 1re division et le reste 6 de la 2e division. Pour trouver ce plus grand commun diviseur, on divise 15 par 6, ce qui fournit le quotient 2 et le reste 3. On vient de voir que le plus grand commun diviseur de 117 et 51 est le même que celui de 15 et 6, et d'après le principe général énoncé (2°), ce dernier plus grand commun diviseur est le même que celui qui existe entre 6 et le reste 3 de la division de 15 par 6 ; le plus grand commun diviseur des nombres donnés 117, 51, est donc le même que celui de 6 et 3.

La question est donc réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre les deux derniers restes 6, 3 ; à cet effet, on divise 6 par 3, ce qui donne le quotient exact 2 ; le reste 3 divisant 6 est le plus grand commun diviseur de 6 et 3 ; et par suite, le plus grand commun diviseur des nombres donnés 117, 51, est le reste 3 qui a divisé exactement le reste 6 précédent.

On dispose ordinairement le calcul de cette manière :

Quotiens	2	3	2	2	
Dividendes et diviseurs.	117	51	15	6	3
Restes	15	6	3	0	

Remarque. On déduit de ce qui précède que tout diviseur commun aux nombres 117, 51, divise les restes successifs 15, 6, 3, que l'on trouve en cherchant le plus grand commun diviseur de 117 et 51. En effet, d'après le principe général énoncé (1°), tout diviseur commun à 117 et 51 divisant le reste 15 de leur division, doit diviser 51 et 15 ; d'après le même principe, tout diviseur commun à 51 et 15, divisant le reste 6 de leur division, doit diviser 15 et 6 ; enfin, tout diviseur commun à 15 et 6 divisant le reste 3 de leur division, on voit que tout diviseur commun à 117 et 51, divise les restes successifs 15, 6, 3. Tout diviseur commun aux nombres 117 et 51, divise donc leur plus grand commun diviseur 3.

65. En général : *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, divisez le plus grand nombre par le plus petit ; si le reste est zéro, le plus petit nombre sera le plus grand commun diviseur cherché ; si le reste n'est pas nul, divisez le plus petit des nombres proposés par ce 1er reste ; si le reste de cette division est zéro, le 1er reste sera le diviseur cherché ; si ce 2e reste n'est pas nul, divisez le 1er reste par le 2e ; si le 3e reste est zéro, le 2e reste sera le diviseur cherché ; si ce 3e reste n'est pas zéro, divisez le 2e reste par le 3e. Continuez à diviser les restes successifs les uns par les autres, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient exact ; le reste qui divisera exactement le reste précédent sera le plus grand commun diviseur demandé.*

66. Les raisonnemens du n° 64 pouvant s'appliquer à des nombres quelconques, on en déduit les propriétés suivantes :

1°. *Tout diviseur commun à deux nombres, divise les restes successifs que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux nombres.*

2°. *Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de deux restes consécutifs quelconques.*

3°. *Tout diviseur commun à deux nombres* A, B, *divise leur plus grand commun diviseur.* Car d'après (1°), ce diviseur commun divise les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur de A et B; et le dernier de ces restes est le plus grand commun diviseur de *A* et *B*.

4°. *Quand on obtient un reste égal à l'unité, ou quand un reste est égal au diviseur diminué d'une unité, ou quand deux restes consécutifs ne diffèrent que d'une unité, ou quand on s'aperçoit que deux restes consécutifs sont premiers entre eux, ou quand on trouve pour reste un nombre premier qui ne divise pas le reste précédent, on ne continue pas les divisions successives*, parce qu'il est facile de déduire de (2°) que dans ces différens cas, *les deux nombres donnés sont premiers entre eux.*

5°. *Lorsque deux nombres* A, B, *sont premiers entre eux, la recherche de leur plus grand commun diviseur conduit nécessairement à un reste égal à l'unité;* car le reste qui divise exactement le reste précédent étant le plus grand commun diviseur de A et B, si ce reste n'était pas égal à l'unité, les nombres A, B, admettraient un diviseur commun autre que l'unité; ils ne seraient donc pas premiers entre eux; ce qui est contre l'hypothèse.

* 6°. *Lorsque les nombres* A, B, *dont on cherche le plus grand commun diviseur, ne sont pas premiers entre eux, les restes successifs diminuent au moins de deux unités à chaque division;* car, si la différence entre deux restes consécutifs pouvait être moindre que 2, elle serait nécessairement égale à l'unité; les nombres A, B, seraient donc premiers entre eux; ce qui est contre l'hypothèse.

* 7°. *Le nombre de divisions à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres ou pour reconnaître s'ils sont premiers entre eux, ne saurait surpasser la moitié du plus petit de ces deux nombres;* car dans la première division, le reste est moindre que le plus petit des deux nombres donnés, et les restes successifs (à l'exception des deux derniers) diffèrent au moins de deux unités à chaque division.

Remarque. Pour que cette propriété soit générale, il faut avoir soin d'arrêter les divisions successives dans les cas indiqués (4°).

Par exemple, si dans la recherche du plus grand commun diviseur entre 17 et 3, on continuait les divisions jusqu'à ce qu'on parvînt à un reste nul, on effectuerait trois divisions; si l'on s'arrêtait au reste 1, on ferait deux divisions; de sorte que le nombre des divisions surpasserait la moitié du plus petit des deux nombres donnés. Mais, en ayant égard à la remarque que nous venons de faire, la propriété énoncée n'est plus en défaut; car dès la 1re division de 17 par 3, le reste 2 ne différant que d'une unité avec le diviseur, on est certain que 17 est premier avec 3; de sorte qu'il suffit d'effectuer une seule division.

67. Le *plus grand commun diviseur de plusieurs nombres* se déduit facilement de ce qui précède.

Par exemple, pour trouver le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15, on observe que tout diviseur commun à 48, 18 et 15, devant diviser 48 et 18, divise nécessairement le plus grand commun diviseur de 48 et 18 (n° **66**, 3°) qui est 6; tout diviseur commun à 48, 18 et 15, divise donc 6 et 15. Mais, tout diviseur commun à 6 et 15, divisant le plus grand commun diviseur 6 de 48 et 18, divisera nécessairement 48 et 18 (n° **54**, 5°); tout diviseur commun à 6 et 15, divise donc 48, 18 et 15. Les diviseurs communs à 48, 18 et 15, sont donc les mêmes que ceux de 6 et 15; le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15, est donc le même que celui de 6 et 15. Le plus grand commun diviseur 3 de 6 et 15, est donc le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15. On voit que le plus grand commun diviseur de trois nombres est le même que celui qui existe entre le plus grand commun diviseur des deux premiers nombres et le troisième nombre.

Tout diviseur commun à 48, 18 et 15, divisant 6 et 15, divise le plus grand commun diviseur de 6 et 15 (n° **66**, 3°); et comme ce dernier plus grand commun diviseur est celui de 48, 18 et 15, on voit que tout diviseur commun à trois nombres, divise leur plus grand commun diviseur. Et ainsi de suite.

68. Les raisonnemens précédens conduisent à cette règle générale : *Pour trouver le plus grand commun diviseur de différens nombres, A, B, C, D, etc., déterminez d'abord le plus grand commun diviseur P entre A et B. Cherchez ensuite le plus grand commun diviseur P' entre P et C; P' sera le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C. Calculez le plus grand commun diviseur P'' entre P' et D ; P'' sera le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C, D. Continuez à opérer de la même manière, jusqu'au dernier des nombres donnés; le plus grand commun diviseur fourni par la dernière opération sera celui des nombres donnés.*

On trouve de cette manière que le plus grand commun diviseur des nombres 90, 126 et 540, est 18.

Remarque. On déduit des raisonnemens du n° **67** que *tout diviseur commun à plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur.* Il résulte du principe du n° **54** (5°), que *réciproquement, tout diviseur du plus grand commun diviseur de différens nombres, divise ces nombres.*

69. *Lorsqu'on connaît le plus grand commun diviseur P de différens nombres A, B, C, etc., pour en déduire le plus grand commun diviseur entre les produits AN, BN, CN, etc., de A, B, C, etc., par un nombre donné N, il suffit de multiplier P par N.*

Nous allons d'abord démontrer que cette propriété convient à deux nombres. Nous en déduirons qu'elle est générale.

1°. Soient les nombres 58, 26, dont le plus grand commun diviseur est 2; je dis que le plus grand commun diviseur entre 58×5 et 26×5 sera 2×5. En effet; pour trouver le plus grand commun diviseur entre 58 et 26, on divise 58 par 26, ce qui donne le quotient entier 2 et le reste 6; on divise 26 par 6, ce qui donne le quotient entier 4 et le reste 2; enfin, on divise 6 par 2, ce qui donne le quotient exact 3 et le reste o. Il suit de ces calculs que le plus grand commun diviseur de 58 et 26 est 2, et que

$$58 = 26 \times 2 + 6, \quad 26 = 6 \times 4 + 2, \quad 6 = 2 \times 3 + 0.$$

Si l'on veut trouver le plus grand commun diviseur entre 58×5 et 26×5, on divisera 58×5 par 26×5; or, la division de 58 par 26 ayant fourni le quotient entier 2 et le reste 6, il suit du principe du n° **44** que la division de 58×5 par 26×5, fournira le même quotient entier 2 et le reste 6×5. Le reste de la division de 58×5 par 26×5 étant 6×5, on divisera 26×5 par 6×5; or, la division de 26 par 6 ayant donné le quotient entier 4 et le reste 2, la division de 26×5 par 6×5 donnera le même quotient entier 4 et le reste 2×5 (n° **44**). Le reste de la division de 26×5 par 6×5 étant 2×5, on divisera 6×5 par 2×5; or, la division de 6 par 2 ayant donné le quotient entier 3 et le reste o, la division de 6×5 par 2×5 donnera le même quotient entier 3 et le reste 0×5 ou o (n° **44**). Or, le reste 2×5 qui divise exactement le reste précédent 6×5, exprime le plus grand commun diviseur entre 58×5 et 26×5 (n° **65**). On voit donc que le plus grand commun diviseur entre 58 et 26 étant 2, celui qui existe entre 58×5 et 26×5 est 2×5. Cela démontre que le principe énoncé convient à deux nombres.

2°. Soient les trois nombres 48, 18, 15, dont le plus grand commun diviseur est 3 (n° **67**). Je dis que le plus grand commun diviseur entre 48×7, 18×7 et 15×7 sera 3×7. En effet, d'après la règle du n° **68**, pour calculer le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15, on cherche d'abord le plus grand commun diviseur de 48 et 18 qui est 6; on cherche ensuite le plus grand commun diviseur de 6 et 15 qui est 3; ce dernier nombre est le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15. Supposons maintenant qu'on multiplie 48, 18 et 15 par 7; il suit de (1°) que le plus grand commun diviseur entre 48×7 et 18×7 sera 6×7, et que le plus grand commun diviseur entre 6×7 et 15×7 sera 3×7; le plus grand commun diviseur des trois nombres 48×7, 18×7 et 15×7 sera donc 3×7 (n° **68**); cela démontre que le principe énoncé convient à trois nombres.

On prouverait d'une manière semblable que ce principe convient à quatre nombres ; et ainsi de suite.

70. *Lorsqu'on divise des nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotiens ne peuvent plus admettre un même diviseur commun.*

Ainsi, lorsqu'on divise 48, 18 et 15 par leur plus grand commun diviseur 3, les quotiens 16, 6, 5, ne peuvent plus admettre un même diviseur; car s'ils avaient un plus grand commun diviseur, tel que 2 par exemple, en multipliant 16, 6 et 5 par 3, les produits 48, 18, 15, admettraient le plus grand commun diviseur 2×3 (nº **69**); ce qui est contre l'hypothèse.

Réciproquement. *Lorsqu'en divisant des nombres donnés par un même nombre, les quotiens n'admettent plus un même diviseur commun, le nombre qui a servi de diviseur est le plus grand commun diviseur de ces nombres donnés.*

Par exemple, les nombres 48, 18, 15, divisés par 3, donnant des quotiens 16, 6, 5, qui n'admettent plus un même diviseur commun, je dis que 3 est le plus grand commun diviseur de 48, 18 et 15. Car le plus grand commun diviseur des quotiens 16, 6, 5, étant 1, si on multiplie 16, 6, 5 par 3, les produits 48, 18, 15, auront pour plus grand commun diviseur 1×3 (nº **69**), ou 3.

71. *Lorsqu'un nombre divise le produit de deux facteurs, s'il est premier avec l'un de ces facteurs, il divise nécessairement l'autre facteur.*

Par exemple, supposons que le nombre 6 divise le produit 35×12 des facteurs 35, 12, et soit premier avec 35; je dis que 6 divise nécessairement 12. En effet, puisque 6 est premier avec 35, la recherche du plus grand commun diviseur entre 35 et 6 conduira nécessairement au reste 1 (nº **66**, 5º), qui sera le plus grand commun diviseur de 35 et 6; le plus grand commun diviseur de 35×12 et 6×12 sera donc 1×12 (nº **69**) ou 12; or on suppose que 6 divise 35×12, et 6 divise nécessairement 6×12; 6 doit donc diviser le plus grand commun diviseur de 35×12 et 6×12 (nº **66**, 3º); et comme ce

dernier plus grand commun diviseur est 12, on voit que 6 doit diviser 12; ce qui démontre le principe énoncé.

72. *Tout nombre premier qui divise un produit, divise nécessairement un des facteurs de ce produit.*

Par exemple, soit un nombre premier 7 qui divise le produit $9 \times 18 \times 35$; si 7 ne divise pas 9, les nombres 7 et 9 seront premiers entre eux (nº **62**). Or, on peut considérer $9 \times 18 \times 35$ comme le produit des deux nombres 9, 18×35 (nº **57**); d'ailleurs 7 divise ce produit, et 7 est premier avec 9; il faut donc que 7 divise 18×35 (nº **71**). Par une raison semblable, si 7 ne divise pas le facteur 18 du produit 18×35, les nombres 7 et 18 seront premiers entre eux (nº **62**); il faudra donc que 7 divise 35 (nº **71**).

Des raisonnemens analogues pouvant s'appliquer à un nombre quelconque de facteurs, le principe est démontré.

1re Remarque. *Tout diviseur premier d'une puissance d'un nombre, divise nécessairement ce nombre.*

2e Remarque. *Les puissances successives, 10, 100, 1000, etc., de 10, ne sauraient admettre d'autres diviseurs premiers que 2 et 5*; car tout diviseur premier de l'une quelconque de ces puissances de 10, devant diviser le produit 10 des nombres premiers 2 et 5, ne peut être que 2 ou 5.

73. *Quand un nombre est divisible par des nombres qui sont premiers entre eux, deux à deux, il est aussi divisible par leur produit.*

Par exemple, 360 étant divisible par chacun des nombres 4, 5, 9, qui sont deux à deux premiers entre eux, je dis que 360 est divisible par le produit $4 \times 5 \times 9$. En effet, 360 étant divisible par 4 et donnant le quotient 90, on a

$$360 = 90 \times 4.$$

Or, 5 divise le produit 360 de 90 par 4, et 5 est premier avec 4; 5 divise donc 90 (nº **71**); le quotient étant 18, on a

$$90 = 18 \times 5.$$

Mais, par hypothèse, 9 divise 90×4, et 9 est premier avec

4; 9 divise donc 90 (n° **71**); 9 divise donc 18×5; mais 9 est premier avec 5; 9 divise donc 18 (n° **71**); le quotient étant 2, on a $18 = 2 \times 9$.

L'égalité $90 = 18 \times 5$ devient $90 = 2 \times 9 \times 5$, et d'après cette dernière, l'égalité $360 = 90 \times 4$ devient

$$360 = 2 \times 9 \times 5 \times 4 = 2 \times (9 \times 5 \times 4), \text{ (n° 57)}.$$

Le nombre 360 étant le produit de 2 par $9 \times 5 \times 4$, est nécessairement divisible par $9 \times 5 \times 4$; ce qui démontre le principe énoncé.

74. Deux nombres premiers étant toujours premiers entre eux (n° **62**), le principe du n° **73** démontre que *quand des nombres premiers divisent un nombre N, tous les produits deux à deux, trois à trois, etc., de ces nombres premiers, sont aussi des diviseurs de N.*

* Remarque. En combinant ce principe avec ceux des n^os^ **56** (1°, 2°) et **58**, on reconnaît que *pour qu'un nombre soit divisible par 6 ou par 2×3, il faut et il suffit qu'il soit pair, et que la somme de ses chiffres soit divisible par 3; que pour qu'un nombre soit divisible par 15 ou par 3×5, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 3, et qu'il soit terminé par un zéro ou par un 5; et ainsi de suite.*

75. *Quand deux nombres sont premiers entre eux, toute puissance de l'un de ces nombres est première avec une puissance quelconque de l'autre nombre.*

Par exemple, soient les nombres 14, 33, qui sont premiers entre eux; je dis que 14^3 et 33^2 sont aussi premiers entre eux; car autrement, un même nombre premier diviserait 14^3 et 33^2; ce nombre premier diviserait donc 14 et 33 (n° **72**, 1^re^ rem.); ce qui est contre l'hypothèse.

76. *Lorsqu'un nombre est premier avec d'autres nombres, il est aussi premier avec leur produit.*

Par exemple, 91 étant premier avec chacun des nombres 6, 12, 15, je dis que 91 est premier avec $6 \times 12 \times 15$; car autrement, il existerait un nombre premier qui diviserait 91 et $6 \times 12 \times 15$; ce nombre premier diviserait donc un des

facteurs 6, 12, 15 (n° **72**); 91 aurait donc un facteur commun avec un des nombres 6, 12, 15; ce qui est contre l'hypothèse.

77. *Quand un nombre est premier avec un autre, il est aussi premier avec toutes les puissances de cet autre nombre.* Cela peut se déduire de chacun des deux principes précédens.

78. *Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers;* c'est-à-dire que de quelque manière qu'on parvienne à décomposer un nombre en facteurs premiers, on retrouvera toujours les mêmes facteurs premiers affectés des mêmes exposans; il n'y aura que l'ordre de ces facteurs qui pourra changer.

Par exemple, soit le nombre 360; supposons qu'en suivant une certaine méthode, on trouve que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Je dis qu'en suivant toute autre méthode, on retrouvera nécessairement les mêmes facteurs 2^3, 3^2, 5.

Il est d'abord évident, qu'on ne saurait trouver dans 360 d'autres facteurs premiers que 2, 3, 5; car d'après le principe du n° **72**, tout diviseur premier de 360 devant diviser un des facteurs premiers 2, 3, 5, de $2^3 \times 3^2 \times 5$, ne peut être qu'un des nombres 2, 3, 5. De plus, si en décomposant d'une autre manière 360 en facteurs premiers, un des facteurs 2, 3, 5, n'avait pas le même exposant que dans $2^3 \times 3^2 \times 5$, si l'on avait par exemple $360 = 2^7 \times 3 \times 5$, il en résulterait

$$2^7 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5;$$

et en divisant de part et d'autre par 2^3, il resterait

$$2^4 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5.$$

Or, $2^4 \times 3 \times 5$ est divisible par 2; le nombre $3^2 \times 5$ devrait donc admettre aussi le diviseur 2, ce qui est impossible (n° **72**) : le principe est donc démontré.

79. Nous allons voir comment on peut *déterminer successivement les nombres premiers.* Cela se réduit à trouver quels sont ceux des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et par l'unité (n° **62**). On reconnaîtrait à l'aide de divisions successives que ces nombres sont

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.

Mais, les caractères relatifs à la divisibilité des nombres (nos 54, 56, 58, 59), fournissent le moyen d'éviter beaucoup d'essais inutiles. En effet :

Un nombre n'admettant aucun diviseur plus grand que sa moitié (n° 54, 9°), les nombres 2, 3, ne sauraient admettre un diviseur plus grand que l'unité ; ils sont donc premiers.

Les nombres pairs étant divisibles par 2 (n° 56, 1°), on ne doit chercher les nombres premiers plus grands que 3 que parmi les *nombres impairs* 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, etc. ; et on est certain qu'aucun de ces derniers nombres n'est divisible par 2; il suffira donc d'essayer des diviseurs plus grands que 2.

Le nombre 5 est premier ; car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 2 (n° 54, 9°), et 2 ne pas divise 5.

Le nombre 7 est premier, car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 3 (n° 54, 9°), et 3 ne divise pas 7 (n° 58).

Le nombre 9 n'est pas premier, car il est divisible par 3.

Les nombres premiers moindres que 10, sont donc 2, 3, 5, 7.

Le nombre 11 est premier, car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 5 (n° 54, 9°) ; aucun des nombres 2, 3, 5, ne divise 11 (nos 56 et 58) ; et 2 ne divisant pas 11, le multiple 4 de 2 ne saurait diviser 11 (n° 54, 6°).

Les nombres premiers plus grands que 11, ne peuvent donc se trouver que parmi les nombres impairs

13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, etc.

Si l'on supprime parmi ces nombres impairs tous ceux qui admettent un des diviseurs premiers 3, 5, 11 (nos 56, 58, 59), on verra que les nombres premiers plus grands que 11, ne peuvent se trouver que parmi les nombres impairs

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, etc.,

et aucun de ces nombres ne sera divisible par un des nombres premiers 2, 3, 5, 11 ; ni à plus forte raison par aucun des multiples 4, 6, 10, 22, etc., de ces nombres premiers (n° 54, 6°).

Le nombre 13 est premier. Car, il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 6 (n° 54, 9°); et on sait d'avance qu'il n'admet aucun des diviseurs 2, 3, 4, 5, 6.

Le nombre 17 est premier. Car il ne saurait admettre un diviseur plus grand que 8 ; on sait d'avance qu'il n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 8; et on reconnaît, à l'aide de la division, que 7 ne divise pas 17.

On verra d'une manière semblable, en essayant seulement la division par 7, que 19 et 23 sont des nombres premiers.

On reconnaîtra de même, en essayant la division par 7 et par 13, que les nombres 29, 31 sont premiers. Et ainsi de suite.

*80. *Un nombre* N *est premier, lorsqu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers qui n'excèdent pas sa racine carrée.*

Pour démontrer ce principe, nous observerons d'abord que le nombre donné N ne saurait admettre un diviseur qui ne surpasserait pas la racine carrée de N, indiquée par $\sqrt{N}$; car si cela pouvait avoir lieu, les premiers facteurs de ce diviseur ne surpasseraient pas $\sqrt{N}$, et diviseraient N (n° 54, 5°) ; N admettrait donc des diviseurs premiers qui n'excéderaient pas sa racine carrée ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent, si le nombre N n'était pas premier, il admettrait nécessairement un diviseur plus grand que $\sqrt{N}$; le quotient de N par ce diviseur serait évidemment un nombre entier moindre que $\sqrt{N}$ (*) qui diviserait N; N admettrait donc un diviseur moindre que $\sqrt{N}$; et on vient de prouver que cela ne saurait avoir lieu. Le nombre N est donc premier.

Les caractères relatifs à la divisibilité par les nombres premiers 2, 3, 5, 11, fournissent le moyen d'éviter l'essai de la division de N par ces nombres premiers.

(*) Le dividende N pouvant être considéré comme le produit de $\sqrt{N}$ par $\sqrt{N}$, le quotient de N par un nombre plus grand que $\sqrt{N}$, est nécessairement moindre que $\sqrt{N}$; car il suit des propriétés du n° 42 (1°), que si le dividende ne changeant pas, le diviseur augmente, le quotient doit diminuer.

Par exemple, soit le nombre 31 ; ce nombre étant moindre que le carré 36 de 6, la racine carrée de 31 est moindre que 6 ; les seuls nombres premiers qui n'excèdent pas $\sqrt{36}$ sont donc 2, 3, 5 ; et comme il suit des propriétés des nos 56 et 58, qu'aucun de ces nombres premiers ne divise 31, on peut conclure immédiatement du principe qui vient d'être démontré, que 31 est un nombre premier.

Remarque. La division fournit le moyen de *reconnaître si le diviseur est plus petit ou plus grand que la racine carrée du dividende N, sans qu'il soit nécessaire de déterminer la racine carrée de N*. Car, lorsque le quotient est égal au diviseur, ce diviseur étant égal à $\sqrt{N}$, il suit du principe du n° 42 (1°), que selon que le quotient est plus petit ou plus grand que le diviseur, ce diviseur est au contraire plus grand ou plus petit que $\sqrt{N}$.

D'après cette remarque, *pour découvrir si un nombre N est premier, il suffit de le diviser successivement par les nombres premiers* 2, 3, 5, 7, ..., *jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact, ou à un quotient moindre que le diviseur ; dans le* 1er *cas, le nombre N n'est pas premier ; dans le* 2e *cas*, le diviseur étant plus grand que $\sqrt{N}$, *on est certain que N n'est divisible par aucun des nombres premiers qui n'excèdent pas* $\sqrt{N}$; *de sorte que N est un nombre premier.*

Par exemple, pour découvrir si 353 est un nombre premier, on observe d'abord que 353 ne saurait admettre aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, 11 (nos 56, 58, 59) ; il suffit donc d'essayer la division de 353 par les nombres premiers 7, 13, 17, 19, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact, ou à un quotient moindre que le diviseur ; en effectuant ces divisions, on obtient les quotiens entiers 50, 27, 20, 18, etc., et les restes 3, 2, 13, 11, etc. Le quotient de 353 par 19 étant moindre que le diviseur, on est certain que 19 surpasse $\sqrt{353}$, et que 353 n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, qui n'excèdent pas $\sqrt{353}$; 353 est donc un nombre premier.

* **81.** Les propriétés du n° 80 donnent le moyen de *simplifier les calculs relatifs à la recherche des nombres premiers.*

Nous observerons d'abord qu'il résulte du principe du n° 80, que *lorsqu'on connaît tous les nombres premiers moindres qu'un nombre N, on peut en déduire tous les nombres premiers compris entre N et N^2 ;* car la racine carrée de chacun des nombres compris entre N et N^2 étant moindre que N, il suffira d'essayer la division de ces nombres par les diviseurs premiers moindres que N ; tous ceux des nombres compris entre N et N^2, qui n'admettront aucun des diviseurs premiers moindres que N, seront des nombres premiers (n° 80). On profitera d'ailleurs des simplifications indiquées (n° 80).

Cela posé : pour *calculer une table des nombres premiers*, on détermine d'abord, par la méthode du n° 79, tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, moindres que 10.

Pour en déduire tous les *nombres premiers compris entre* 10 et 10^2 *ou* 100, on supprime dans la suite des nombres 11, 12, 13, ..., 98, 99, tous ceux qui admettent un des diviseurs 2, 3, 5 (nos 56 et 58) ; les nombres premiers demandés ne peuvent se trouver que parmi les nombres restans,

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97 ;

et ceux de ces nombres qui ne seront pas divisibles par 7, seront premiers. On trouve de cette manière que les nombres premiers compris entre 10 et 100 sont 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

1re Remarque. Il est inutile d'essayer la division des nombres 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, par 7. Car le carré de 7 étant 49, la racine carrée de l'un quelconque de ces nombres est moindre que 7 ; et comme on sait d'avance qu'ils n'admettent aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, on est certain que tous ces nombres sont premiers.

2e Remarque. Pour trouver dans la suite des nombres 1, 2, 3, ..., 99, tous les multiples des diviseurs premiers

2, 3, 5, 7, il suffit de prendre successivement dans cette suite, tous les nombres de 2 en 2 à partir de 2, tous les nombres de 3 en 3 à partir de 3, tous les nombres de 5 en 5 à partir de 5, et tous les nombres de 7 en 7 à partir de 7; en supprimant ces multiples, les nombres 11, 13, 17, ..., 89, 97, qui resteront ne pouvant admettre aucun des diviseurs premiers 2, 3, 5, 7, seront les nombres premiers compris entre 10 et 100. Cette dernière manière de déterminer les nombres premiers est connue sous le nom de *Crible* d'ÉRATOSTÈNE.

Connaissant tous les nombres premiers compris entre 1 et 100, on en déduirait tous les nombres premiers compris entre 100 et 100^2 ou 10000. Et ainsi de suite.

82. Pour *décomposer un nombre* A *en facteurs premiers*, on le divise successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., et on continue ces essais jusqu'à ce qu'on trouve un quotient entier moindre que le diviseur avec un reste qui ne soit pas nul, ou un quotient exact B. Dans le 1^er cas, A est un nombre *premier* (nº **80**, *remarque*). Dans le 2^e cas, A est le produit du dernier nombre premier qui a servi de diviseur, par le nombre entier B que l'on a obtenu pour quotient; et la question est ainsi réduite à décomposer B en facteurs premiers. On opère sur B comme on a opéré sur A, en observant que d'après le principe du nº **54** (5°), le quotient B ne saurait être divisible par des nombres premiers moindres que le diviseur premier qui a donné ce quotient exact. On divise donc B par le nombre premier qui a servi de diviseur; si le nouveau quotient est exact, on le divise par le même nombre premier; et on continue ces divisions jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient C qui ne soit plus divisible par le nombre premier qui a servi de diviseur. On opère ensuite sur C, comme sur B, en observant que C ne peut être divisible que par des nombres premiers plus grands que celui qui a servi de diviseur. On continue ces calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient qui soit un nombre premier. Le nombre donné A est égal au produit du dernier quotient obtenu par tous les nombres qui ont servi de diviseurs. On peut souvent éviter des divisions

inutiles à l'aide des caractères relatifs à la divisibilité par les nombres premiers 2, 3, 5, 11 (nºs **56**, **58** et **59**).

1^er EXEMPLE. *Décomposer* 1155 *en ses facteurs premiers.*

Ce nombre n'est pas divisible par 2 (nº **56**, 1°); il est divisible par 3 (nº **58**) et donne le quotient 385; de sorte que

$$1155 = 3 \times 385.$$

La question se réduit à déterminer les facteurs premiers de 385; ce nombre n'est pas divisible par 3 (nº **58**); mais il l'est par 5 (nº **56**, 2°) et fournit le quotient 77; donc

$$385 = 5 \times 77 \quad \text{et} \quad 1155 = 3 \times 5 \times 77.$$

Il ne s'agit plus que de décomposer 77 en facteurs premiers; or 77 n'est pas divisible par 5 (nº **56**, 2°); mais 7 divise 77 et donne pour quotient le nombre premier 11; 1155 est donc le produit des facteurs premiers 3, 5, 7, 11.

On dispose ordinairement le calcul de la manière suivante :

1155	3
385	5
77	7
11	11

2^e EXEMPLE. *Décomposer* 55286 *en facteurs premiers.*

On divise 55286 par 2, ce qui fournit le quotient exact 27643; on a donc $55286 = 2 \times 27643$.

Il ne reste plus qu'à décomposer 27643 en facteurs premiers. Ce nombre ne pouvant admettre aucun des diviseurs 2, 3, 5 (nºs **56** et **58**), on le divise par 7, ce qui donne le quotient exact 3949. On a donc

$$27643 = 7 \times 3949, \quad \text{et} \quad 55286 = 2 \times 7 \times 3949 \ (\text{nº } \mathbf{37}).$$

Il ne s'agit plus que de décomposer 3949 en facteurs premiers. Or, on a vu que 27643, n'admet aucun des facteurs premiers 2, 3, 5; le produit 7×3949 ne saurait donc admettre aucun de ces facteurs; 3949 ne peut donc être divisible par aucun nombre moindre que 7 (nº **54**, 5°). On essaie la division de 3949 par 7; ce qui donne le quotient entier 564 et le reste 1. Le nombre 3949 n'étant pas divisible par 7, on le divise par 11, ce qui fournit le quotient exact 359. On a donc $3949 = 11 \times 359$, et $55286 = 2 \times 7 \times 11 \times 359$ (n° 57).

La question se réduit donc à décomposer 359 en facteurs premiers. Or, on a vu que 3949 n'admet aucun des facteurs premiers 2, 3, 5, 7; le produit 11×359 ne saurait donc admettre aucun de ces facteurs; 359 ne peut donc être divisible que par les nombres premiers 11, 13, 17, 19, 23,... plus grands que 7. Ainsi, on divise successivement 359 par

chacun des nombres	11,	13,	17,	19,...
ce qui fournit les quotiens entiers	32,	27,	21,	18,...
et les restes	7,	8,	2,	17...

Le nombre 359 n'étant divisible par aucun des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, et le quotient de 359 par 19 étant moindre que le diviseur 19, on est certain que 359 est un nombre premier (n° 80). De sorte que 55286 est le produit des facteurs premiers 2, 7, 11, 359.

83. Pour *trouver tous les diviseurs d'un nombre*, on le décompose en facteurs premiers (n° 82); ces facteurs et leurs produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., sont les diviseurs demandés (n° 74).

1^er^ EXEMPLE. *Trouver tous les diviseurs de* 1155.

On décompose d'abord ce nombre en facteurs premiers; ce qui donne, $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

Les nombres 3, 5, 7, 11, ainsi que leurs produits deux à deux et trois à trois, seront les diviseurs demandés. On trouve ainsi que les diviseurs de 1155, sont

3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385.

On peut former ces diviseurs de la manière suivante :

3,
5, 15,
7, 21, 35, 105,
11, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155.

Après avoir placé les diviseurs premiers 3, 5, 7, 11, dans une colonne verticale, on multiplie le 2^e^ diviseur 5 par le 1^er^ diviseur 3, et on pose le produit 15 à côté de 5; on effectue la multiplication du 3^e^ diviseur 7 par chacun des diviseurs précédens, 3, 5, 15, et on écrit les produits 21, 35, 105, à la droite de 7. Enfin, la multiplication du dernier diviseur 11 par chacun des diviseurs précédens 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, donne les autres diviseurs 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155, de 1155.

On devra faire usage de ce procédé, quand le nombre donné ne contiendra que des facteurs inégaux. Lorsque le nombre proposé renfermera des facteurs égaux, on aura recours à la méthode que nous allons indiquer.

2^e^ EXEMPLE. *Déterminer tous les diviseurs de* 200.

La décomposition de 200 en facteurs premiers donne

$$200 = 2^3 \times 5^2.$$

Le nombre 200 admettant les facteurs 2^3, 5^2, est divisible par chacun des nombres, 1, 2, 2^2, 2^3, 1, 5, 5^2, (n° 54, 5°).

Les diviseurs 1, 2, 2^2, 2^3, étant premiers avec chacun des diviseurs 1, 5, 5^2, (n° 75), il résulte du principe du n° 73 que 200 est divisible par tous les produits

$1, 2, 2^2, 2^3, 5, 2.5, 2^2.5, 2^3.5, 5^2, 2.5^2, 2^2.5^2, 2^3.5^2.$

Si l'on effectue ces produits, on trouvera les diviseurs

1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200.

Le nombre 200 *n'admet que ces douze diviseurs*. En effet; il résulte du principe du n° 78 que, de quelque manière qu'on décompose 200 en facteurs premiers, on retrouvera toujours que $200 = 2^3 \times 5^2$; d'où il suit qu'aucun diviseur de 200 ne peut contenir d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Il faudrait donc, pour que 200 admît un diviseur autre que ceux que nous venons de former, que ce diviseur contînt un des facteurs 2, 5, avec un exposant plus grand que celui dont il est affecté dans $2^3 \times 5^2$.

Mais, un nombre tel que $2^4 \times 5$ ne peut diviser $2^3 \times 5^2$; car si cette division pouvait réussir, 2^4 diviserait $2^3 \times 5^2$, (n° 54, 5°); or, 2^4 est premier avec 5^2 (n° 75); 2^4 diviserait donc 2^3; ce qui est impossible. Le nombre 200 n'admet donc que les douze diviseurs indiqués ci-dessus.

Remarque. Les exposans des facteurs premiers de 200 étant 3, 2, il est facile de voir que le nombre des diviseurs de 200 est égal au produit 12 des nombres 4, 3, qu'on obtient en augmentant chaque exposant d'une unité. En effet; pour former tous les diviseurs de $2^3 \times 5^2$, on a multiplié chacun des 4 nombres 1, 2, 2^2, 2^3, par chacun des 3 nombres 1, 5, 5^2, ce qui a donné 4×3 ou 12 produits. Il suffit donc de prouver que les 12 produits ainsi obtenus sont différens; et cela est évident, car si deux de ces produits étaient égaux, ils contiendraient les mêmes facteurs premiers affectés des mêmes exposans (n° 78), ce qui ne peut avoir lieu, d'après la manière dont on a formé ces produits.

84. Les exemples du n° 83 conduisent à cette règle générale : *Pour former tous les diviseurs d'un nombre, décomposez-le en facteurs premiers* (n° 82) *; placez dans une première ligne, l'unité et les puissances successives de l'un quelconque de ces facteurs premiers, depuis la première puissance jusqu'à la plus élevée, de manière que le dernier nombre de cette ligne soit le nombre premier que l'on considère, affecté de son plus fort exposant dans le nombre donné. Mettez de même, dans une 2^e ligne, l'unité et les puissances successives d'un autre facteur premier du nombre donné, depuis la première jusqu'à la plus élevée ; et ainsi de suite pour chacun des facteurs premiers du nombre donné. Ce tableau étant formé : multipliez successivement tous les nombres de la 1^{re} ligne par ceux de la 2^e ; multipliez ensuite chacun de ces produits par chacun des nombres de la 3^e ligne ; et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne du tableau ; les derniers produits obtenus seront tous les diviseurs du nombre donné (en comprenant l'unité et le nombre donné parmi ces diviseurs). Pour trouver le nombre de ces diviseurs, ajoutez une unité au plus fort exposant de chacun des facteurs premiers du nombre donné ; le produit de ces exposans ainsi augmentés d'une unité, exprimera le nombre des diviseurs du nombre donné.*

Exemple. *Soit proposé de déterminer tous les diviseurs de 360, et de trouver le nombre de ces diviseurs.*

La décomposition de 360 en facteurs premiers donnant $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ (page 73), on forme le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \\ 1,\ 3,\ 3^2, \\ 1,\ 5, \end{array}$$

On multiplie chacun des nombres de la 1^{re} ligne, par chacun des nombres de la 2^e ligne, ce qui fournit les produits,

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

On multiplie ensuite chacun de ces produits, par chacun des nombres 1, 5, de la 3^e et dernière ligne ; les produits

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72,
5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360,

sont tous les diviseurs de 360. Le nombre de ces diviseurs est le produit $4 \times 3 \times 2$ ou 24, des exposans 3, 2, 1, augmentés d'une unité.

Remarque. Lorsque tous les facteurs premiers du nombre proposé sont inégaux, on doit préférer la méthode indiquée (page 80).

***85.** *Lorsque des nombres sont décomposés en facteurs premiers, on obtient directement leur plus grand commun diviseur en formant le produit de tous les facteurs premiers qui leur sont communs ; chacun de ces facteurs communs étant affecté du plus petit de ses exposans dans les nombres donnés.*

Par exemple, soient les deux nombres

$$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11, \quad 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

Je dis que leur plus grand commun diviseur est $2^2 \times 3$. En effet; les nombres donnés étant respectivement égaux à $2^2 \times 3 \times 7 \times 11$, $2^2 \times 3 \times (2^2 \times 3 \times 5)$, si on les divise par le produit $2^2 \times 3$ de tous leurs facteurs communs, les quotiens 7×11, $2^2 \times 3 \times 5$, seront nécessairement premiers entre eux ; le diviseur $2^2 \times 3$ ou 12 sera donc effectivement le plus grand commun diviseur des deux nombres donnés (nº 70). La règle du nº 65 conduirait au même résultat.

86. *Pour former tous les diviseurs communs à plusieurs nombres, il suffit de prendre tous les diviseurs du plus grand commun diviseur de ces nombres ;* car d'après la remarque du nº 68, tout diviseur commun à plusieurs nombres divise aussi leur plus grand commun diviseur, et tout diviseur du plus grand commun diviseur de différens nombres, est un diviseur commun de ces nombres.

EXEMPLE. *Soit proposé de trouver tous les diviseurs communs à* 924 *et* 720. Leur plus grand commun diviseur étant 12, tous les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12, de 12, sont les diviseurs communs aux nombres donnés.

87. *Pour trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, il suffit de décomposer les nombres donnés en facteurs premiers ; et de former ensuite le produit de tous les facteurs premiers contenus dans les nombres donnés, chacun de ces facteurs premiers étant affecté du plus grand de ses exposans dans les nombres donnés.*

EXEMPLE. *Trouver le plus petit nombre x (*) divisible par chacun des nombres* 200, 500, 147. On décompose ces nombres en facteurs premiers, et on trouve que,

$$200 = 2^3 \times 5^2, \quad 500 = 2^2 \times 5^3, \quad 147 = 3 \times 7^2.$$

Le nombre x demandé est $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2$ ou 147 000.

En effet; il résulte du principe du nº 52 que x est divisible par chacun des nombres donnés. D'ailleurs, x devant être divisible par 200, par 500 et par 147, on déduit du principe du nº 54 (5º) que x sera nécessairement divisible par le facteur 2^3 de 200, par le facteur 5^3 de 500, et par les facteurs 3, 7^2, de 147; et comme les diviseurs 2^3, 5^3, 3, 7^2, sont premiers entre eux deux à deux (nº 75), x sera nécessairement divisible par $2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7^2$ (nº 73); le nombre x demandé ne saurait donc être moindre que ce produit; ce qui démontre la propriété énoncée.

(*) Nous désignerons souvent par x le nombre inconnu, qu'il s'agit de calculer.

On trouvera d'une manière semblable que le plus petit nombre divisible par 60, 72 et 175 est 12600; et que le plus petit nombre divisible par 90, 126 et 275 est 34650.

* 88. Le procédé du plus grand commun diviseur fournit le moyen de *trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés, sans qu'il soit nécessaire de décomposer ces nombres en facteurs premiers.*

Nous chercherons d'abord à déterminer quel est le plus petit nombre N par lequel il faut multiplier un nombre donné A pour que le produit AN soit divisible par un nombre donné B. Nous en déduirons le moyen de calculer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés.

1º. Pour que AN soit divisible par B, il faut et il suffit que AN contienne tous les facteurs de B (nº 52). Or, on obtiendra le produit de tous les facteurs de B qui entrent dans A en cherchant le plus grand commun diviseur D de A et B ; et en divisant B par D, le quotient B' sera le produit de tous les facteurs de B qui n'entrent pas dans A. Le produit AB' sera donc le plus petit nombre qui renferme tous les facteurs de B ; ce produit sera donc le plus petit nombre divisible par B. La valeur cherchée du multiplicateur N est donc B'.

Pour mettre cette propriété en évidence, on désignera par A' le quotient qui résulterait de la division de A par D ; on aura, $A = DA'$, $B = DB'$, $AN = DA'N$.

Les quotients A', B', de A et B par D, seront premiers entre eux (nº 70). Mais AN doit être divisible par B ; $DA'N$ doit donc être divisible par DB'.

D'ailleurs, le quotient de $DA'N$ par DB' est le même que celui de $A'N$ par B' (nº 42, 3º) ; il faut donc que B' divise $A'N$; et comme B' est premier avec A', il suit du principe du nº 71 que B' doit diviser N ; la plus petite valeur du multiplicateur N demandé est donc le quotient B' de la division de B par le plus grand commun diviseur D de A et B.

On en déduit cette règle générale : *Pour déterminer quel est le plus petit nombre x par lequel il faut multiplier un nombre donné A pour que le produit Ax soit divisible par un* *nombre donné B : calculez le plus grand commun diviseur de A et B (nº* **65**)*; le quotient B' de B par ce commun diviseur, sera le multiplicateur demandé ; de sorte que AB' sera le plus petit nombre divisible par B.*

2°. La règle précédente fournit le moyen de *trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés A, B, C*, etc.

En effet, le plus petit nombre divisible par A étant A, on obtiendra le plus petit nombre divisible par A et par B en déterminant le plus petit nombre par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit divisible par B ; on vient de démontrer (1°) que ce plus petit nombre est le quotient B' de B par le plus grand commun diviseur de A et B. De sorte que AB' est le plus petit nombre divisible par A et B. Pour en déduire le plus petit nombre divisible par A, par B et par C, il suffit de chercher le plus petit nombre par lequel on doit multiplier AB' pour que le produit soit divisible par C ; on vient de voir (1°) que ce plus petit nombre est le quotient C' de C par le plus grand commun diviseur de AB' et C ; de sorte que $AB'C'$ sera le plus petit nombre divisible par A, par B et par C. Et ainsi de suite.

On en déduit cette règle générale : *Pour calculer le plus petit nombre divisible par des nombres donnés A, B, C, etc., cherchez le plus grand commun diviseur de A et B ; divisez B par ce commun diviseur : et multipliez A par le quotient B' de cette division ; le produit AB' sera le plus petit nombre divisible par A et B. Cherchez le plus grand commun diviseur entre AB' et C ; divisez C par ce commun diviseur, et multipliez AB' par le quotient C' de cette division ; le produit $AB'C'$ sera le plus petit nombre divisible par chacun des nombres A, B, C. Et ainsi de suite.*

Par exemple, pour trouver le plus petit nombre divisible par chacun des nombres 90, 126, 275, on cherche le plus grand commun diviseur de 90 et 126 qui est 18 ; on divise 126 par 18, ce qui fournit le quotient 7 ; le produit 630, de 90 par 7, est le plus petit nombre divisible par 90 et par 126. On cherche le plus grand commun diviseur entre 630 et 275 qui

est 5 ; on divise 275 par 5, ce qui donne le quotient 55 ; on multiplie 630 par 55, le produit 34 650 est le plus petit nombre divisible par chacun des nombres donnés 90, 126, 275. La règle du nº **87** a conduit au même résultat.

89. *Lorsque des nombres sont premiers entre eux deux à deux, le plus petit nombre divisible par chacun de ces nombres, est leur produit.* Car d'après le principe du nº **73**, tout nombre divisible par les nombres donnés étant divisible par leur produit, ne saurait être moindre que ce produit. Chacune des règles des nºs **87**, **88**, conduirait à la même propriété.

Remarque. Des nombres premiers étant toujours premiers entre eux, deux à deux, il suit du principe précédent que, *le plus petit nombre divisible par des nombres premiers est égal à leur produit.*

Nous terminerons ce 2e chapitre par la TABLE DES NOMBRES PREMIERS, depuis 1 jusqu'à 1009.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 997, 983, 991, 997, 1009.

CHAPITRE III.

Des fractions ordinaires et des fractions décimales.

§ Ier. *Des fractions ordinaires.*

90. D'après ce qu'on a vu (nos **25** et **28**), lorsque après avoir épuisé tous les chiffres du dividende, on a trouvé la *partie entière* du quotient, le *dernier reste* est moindre que le diviseur; le *quotient total*, qui est compris entre sa *partie entière* et cette partie entière augmentée d'une unité, se compose du nombre entier obtenu au quotient, plus d'une quantité moindre que l'unité égale au quotient du dernier reste par le diviseur. Cette quantité, moindre que l'unité, est ce qu'on nomme une *fraction*. Pour indiquer le quotient du dernier reste par le diviseur, on écrit le diviseur sous le reste et on place une *barre* entre ces deux nombres.

Par exemple, 25 étant compris entre 3 fois 7 et 4 fois 7, le quotient de 25 par 7 est composé d'une *partie entière* 3, plus d'une *fraction* $\frac{4}{7}$ (*moindre que l'unité*) qui exprime le quotient de 4 par 7; le quotient total de 25 par 7, composé de $3+\frac{4}{7}$, s'écrit ordinairement de cette manière abrégée $3\frac{4}{7}$.

Pour *évaluer* $\frac{4}{7}$ *en parties de l'unité*, on observe, que d'après le principe du n° **34** (3°), diviser 4 par 7, revient à prendre la septième partie de chacune des unités de 4; le septième de 4 est donc égal au septième de 1 répété 4 fois, ou à 4 fois un septième; le septième de 4 unités est donc équivalent à 4 fois le septième d'une unité.

En général : *Pour évaluer une fraction, on conçoit l'unité divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, et on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le dividende.*

On déduit de ce qui précède et des conventions établies (page 29), que suivant que le diviseur est 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc., ces parties égales de l'unité doivent se nommer des *demi*, ou des *tiers*, ou des *quarts*, ou des *cinquièmes*, etc.

Ainsi, $\frac{3}{4}$ s'énonce *trois quarts*, et $\frac{3}{5}$ s'énonce *trois cinquièmes*.

Comme dans une fraction, le nombre inférieur sert à *dénommer* l'espèce des parties d'unité qui entrent dans la fraction, et comme le nombre supérieur désigne le *nombre* de ces parties, le premier s'appelle *dénominateur*, et l'autre *numérateur*; le numérateur et le dénominateur sont les *deux termes* de la fraction. Ainsi, dans la fraction $\frac{3}{5}$, le *numérateur* est 3, le *dénominateur* est 5, les *deux termes* sont 3 et 5.

91. Pour *énoncer une fraction écrite*, on distingue deux cas : 1°. Si le dénominateur est moindre que 5, on fait suivre l'énoncé du numérateur, du mot *demi*, ou *tiers*, ou *quart*, selon que le dénominateur est 2, ou 3, ou 4; 2°. Si le dénominateur est plus grand que 4, on énonce successivement le numérateur et le dénominateur, en ayant soin de faire suivre le nom du dénominateur de la terminaison *ième*.

Réciproquement, pour *écrire une fraction énoncée*, on distingue deux cas; 1°. Si la fraction exprime des *demi* ou des *tiers* ou des *quarts*, on écrit au numérateur le nombre des parties égales indiqué dans l'énoncé donné; et on prend pour dénominateur 2, ou 3, ou 4, suivant qu'il s'agit de demi, ou de tiers ou de quarts; 2°. Si l'énoncé de la fraction finit par la terminaison *ième*, on écrit successivement au numérateur et au dénominateur les deux nombres indiqués dans l'énoncé de la fraction.

REMARQUE. Pour prévenir toute erreur, *il faut séparer avec soin l'énoncé du numérateur de celui du dénominateur;* car autrement, un même énoncé paraîtrait convenir à des fractions différentes.

Par exemple, l'énoncé *trois-cent dix-septièmes*, paraît convenir également aux fractions $\frac{3}{117}$, $\frac{300}{17}$, $\frac{310}{7}$.

Pour éviter cet inconvénient, on peut mettre une virgule entre l'énoncé du numérateur et celui du dénominateur; et lorsqu'on dicte une fraction, on fait une pause entre l'énoncé du numérateur et l'énoncé du dénominateur.

92. Les *fractions*, d'après leur origine, sont moindres que l'unité (n° 90); mais leur calcul conduit quelquefois à des expressions de même forme, plus grandes que l'unité; ces dernières sont des *nombres fractionnaires,* ou des *expressions fractionnaires.* Cependant nous comprendrons souvent ces deux classes de quantités sous le nom générique de *fractions;* mais lorsque nous parlerons d'un *nombre fractionnaire*, il s'agira toujours d'une fraction plus grande que l'unité.

93. Il résulte de ce qui précède qu'*une fraction peut être considérée, ou comme indiquant le quotient de la division du numérateur par le dénominateur ; ou comme exprimant que l'unité a été divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, et qu'on prend autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur.*

Nous considérerons ordinairement les fractions sous ce dernier point de vue, parce qu'il fait dépendre leur valeur des subdivisions de la même unité, et qu'il conduit plus facilement aux règles qui servent à les calculer.

94. *Une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand et que son dénominateur est plus petit ; une fraction est d'autant plus petite que son numérateur est plus petit et que son dénominateur est plus grand.* Cela résulte de la définition même des fractions; et cela n'est d'ailleurs qu'une conséquence des propriétés du n° 42 (1°).

*95. *Lorsque deux fractions sont égales, celle qui a le plus grand numérateur a nécessairement le plus grand dénominateur.*

Par exemple, les fractions $\frac{13}{17}$, $\frac{11}{40}$, ne sauraient avoir la même valeur; car d'après le principe du n° 94, $\frac{13}{17}$ est plus grand que $\frac{11}{17}$, et $\frac{11}{17}$ est plus grand que $\frac{11}{40}$; la fraction $\frac{13}{17}$ est donc à plus forte raison plus grande que $\frac{11}{40}$.

96. *Une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

En effet, soit la fraction $\frac{3}{7}$; si le dénominateur restant le même, on multiplie le numérateur par 5, elle deviendra $\frac{15}{7}$, et sera rendue 5 fois plus grande; car la 2^e fraction contient 5 fois plus de parties que la 1re, et ces parties sont de même grandeur dans les deux fractions. Si le numérateur 3 ne changeant pas, on multiplie le dénominateur par 5, la fraction $\frac{3}{7}$ deviendra $\frac{3}{35}$ et sera rendue 5 fois plus petite; car elle renfermera autant de parties que la fraction $\frac{3}{7}$; et chaque partie sera 5 fois plus petite, puisque l'unité sera divisée en 5 fois plus de parties égales.

Cela posé : puisqu'en multipliant le numérateur d'une fraction par 5, on la rend 5 fois plus grande, tandis qu'on la rend 5 fois plus petite en multipliant son dénominateur par 5, il en résulte qu'elle ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par 5.

On prouverait de même, qu'en divisant le numérateur d'une fraction par 5, on la rend 5 fois plus petite, et qu'en divisant le dénominateur par 5, on la rend 5 fois plus grande.

Une fraction ne change donc pas de valeur quand on divise ses deux termes par 5.

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer à tout autre nombre que 5, le principe est démontré.

97. Les raisonnemens du n° **96** démontrent que *pour* MULTIPLIER *une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur par ce nombre entier, ou de diviser le dénominateur par ce nombre entier; et que pour* DIVISER *une fraction par un nombre entier, il suffit de diviser le numérateur par ce nombre entier, ou de multiplier le dénominateur par ce nombre entier.*

Par exemple, pour multiplier la fraction $\frac{5}{12}$ par 4, il suffit de la rendre 4 fois plus grande; ce qui revient à multiplier son numérateur par 4, ou à diviser son dénominateur par 4; de sorte que le produit demandé est $\frac{20}{12}$ ou $\frac{5}{3}$.

Les propriétés précédentes pourraient aussi se déduire de celles du n° **42** (2°), en observant qu'une fraction est égale au quotient du numérateur par le dénominateur (n° **93**).

98. *Lorsqu'on aperçoit un facteur commun aux deux termes d'une fraction, on peut la simplifier, sans changer sa valeur, en divisant ses deux termes par ce facteur commun* (n° **96**).

Par exemple, la division des deux termes de la fraction $\frac{30}{42}$ par 2, fournit la fraction équivalente $\frac{15}{21}$; divisant 15 et 21 par 3, on obtient la fraction $\frac{5}{7}$ égale à $\frac{30}{42}$. La division des deux termes 30, 42, par leur plus grand commun diviseur 6, conduit plus directement au même résultat.

On verra de même que

$$\frac{7\times 3}{4\times 7}=\frac{3}{4},\quad \frac{2^5}{2^8}=\frac{1\times 2^5}{2^3\times 2^5}=\frac{1}{2^3},\quad \frac{2^5\times 7^8}{2^9\times 7^3}=\frac{7^5}{2^4}.$$

99. On dit qu'une fraction est *irréductible*, lorsqu'elle ne peut se réduire à une forme *plus simple*; c'est-à-dire quand

elle ne saurait être exprimée exactement par aucune fraction équivalente ayant des termes respectivement moindres.

* REMARQUE. Pour qu'une fraction soit irréductible il suffit qu'elle ne puisse être exprimée exactement par aucune fraction dont le numérateur serait moindre que le sien; car il suit du principe du n° **95**, que cette fraction ne saurait être égale à une fraction dont le dénominateur serait moindre que le sien.

100. *Les deux termes d'une fraction irréductible sont nécessairement premiers entre eux;* car s'ils avaient un facteur commun, en divisant le numérateur et le dénominateur par ce facteur commun, les quotiens seraient les deux termes d'une fraction équivalente à la fraction irréductible donnée, et dont les termes seraient respectivement moindres; cette fraction donnée serait donc réductible à une forme plus simple; ce qui est contre l'hypothèse.

101. *Lorsque les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est nécessairement irréductible.*

En effet; si une fraction $\frac{12}{35}$, dont *les termes sont premiers entre eux*, pouvait être égale à une fraction $\frac{8}{20}$, ayant des termes respectivement moindres, en multipliant ces deux fractions par 35×20, les résultats $\frac{12\times(35\times 20)}{35}$, $\frac{8\times(35\times 20)}{20}$ (n° **97**) seraient égaux. Or, d'après les propriétés des n^{os} **37** et **36**, on a

$$12\times(35\times 20)=12\times 35\times 20=12\times 20\times 35,$$

$$\text{et}\quad 8\times(35\times 20)=8\times 35\times 20.$$

On aurait donc, $\frac{12\times 20\times 35}{35}=\frac{8\times 35\times 20}{20}$.

En effectuant les divisions indiquées, les quotiens 12×20, 8×35, seraient égaux. Mais, 12×20 est divisible par 12; 8×35 serait donc aussi divisible par 12. Or, on suppose que 12 est premier avec 35; 12 devrait donc diviser 8 (n° **71**), ce qui est impossible, puisque le numérateur 12 est supposé plus grand que le numérateur 8; la fraction $\frac{12}{35}$ ne peut donc pas se réduire à une forme plus simple; elle est donc irréductible.

Les mêmes raisonnemens étant applicables à toutes les fractions dont les deux termes sont premiers entre eux, le principe énoncé est démontré.

* En général : Si une fraction $\frac{A}{B}$ dont les deux termes sont supposés premiers entre eux, pouvait être égale à une fraction $\frac{a}{b}$ ayant des termes a, b, respectivement moindres que A et B, en multipliant ces fractions par le produit Bb des dénominateurs, les résultats $\frac{A \times Bb}{B}$, $\frac{a \times Bb}{b}$ (n° **97**), seraient égaux. Or, d'après les propriétés des n^{os} **37** et **36**,

$$A \times Bb = A \times B \times b = A \times b \times B, \quad a \times Bb = a \times B \times b;$$

donc
$$\frac{A \times b \times B}{B} = \frac{a \times B \times b}{b}.$$

En effectuant les divisions indiquées, de $A \times b \times B$ par B, et de $a \times B \times b$ par b, les quotiens $A \times b$, $a \times B$, seraient égaux ; mais A divise exactement $A \times b$; A diviserait donc $a \times B$. Or, A est supposé premier avec B ; A diviserait donc a (n° **71**); ce qui ne saurait être, puisque a est supposé moindre que A. La fraction $\frac{A}{B}$ ne saurait donc être exprimée exactement par une fraction dont les termes seraient moindres que A et B; elle est donc irréductible. Ce qui démontre le principe énoncé.

Ce principe conduit aux propriétés suivantes :

1°. Pour qu'une fraction soit réductible à une forme plus simple, il faut et il suffit que ses deux termes admettent un facteur commun.

* 2°. Les deux termes de toute fraction équivalente à une fraction irréductible sont les produits des deux termes de cette fraction irréductible par un même nombre.

En effet; si la fraction $\frac{A}{B}$ n'est pas irréductible, il existera nécessairement un facteur commun entre ses deux termes (1°) ; soit d le plus grand diviseur commun à A et B, on aura

$$A = ad, \quad B = bd, \quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b},$$

et $\frac{a}{b}$ sera irréductible, puisque a et b, sont premiers entre eux (n° **70**). Ce qui démontre la propriété énoncée.

* 3°. Les seules transformations qui ne changent pas la valeur d'une fraction, sont celles qui reviennent à multiplier ou à diviser ses deux termes par un même nombre.

102. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.* Cela résulte du principe du n° 101.

Par exemple, s'il s'agit de la fraction $\frac{330}{462}$, on cherche le plus grand commun diviseur entre 330 et 462, qui est 66 (n° **65**); et on divise les deux termes 330, 462, par 66; ce qui fournit la fraction irréductible équivalente $\frac{5}{7}$.

* **103.** *Deux fractions irréductibles dont les termes sont différens, ne sauraient jamais avoir la même valeur.* Car si elles avaient la même valeur, celle qui aurait le plus grand numérateur, aurait aussi le plus grand dénominateur (n° **95**); une fraction irréductible serait donc égale à une fraction dont les termes seraient respectivement moindres ; ce qui est absurde (n° **99**). Le principe est donc démontré.

* **104.** *Lorsque des fractions sont équivalentes, si on les réduit à leur plus simple expression, on devra parvenir à la même fraction irréductible ;* car autrement, des fractions irréductibles dont les termes seraient différens, seraient égales entre elles, ce qui est impossible (n° **103**).

105. Une fraction ne changeant pas de valeur, lorsqu'on multiplie ses deux termes par un même nombre, on en déduit que *pour réduire plusieurs fractions au même dénomi-*

nateur, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres, les fractions qui en résultent sont égales aux proposées (nº 96); et on déduit des principes des nºs 36 et 37, que ces nouvelles fractions ont le même dénominateur.

EXEMPLE. *Soient les fractions*, $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$.

On multiplie les deux termes de la 1re par 5×7, ceux de la 2e par 3×7, et ceux de la 3e par 3×5; ce qui fournit les fractions équivalentes,

$$\frac{2\times5.7}{3\times5.7},\ \frac{4\times3.7}{5\times3.7},\ \frac{6\times3.5}{7\times3.5}.$$

Ces nouvelles fractions ont nécessairement le même dénominateur; car d'après le principe du nº 37, on a $3\times5.7=3\times5\times7$, $5\times3.7=5\times3\times7$, $7\times3.5=7\times3\times5$, et il suit du principe du nº 36 que les produits $3\times5\times7$, $5\times3\times7$, $7\times3\times5$, sont égaux.

En effectuant les multiplications indiquées dans les numérateurs, et en observant que chaque dénominateur est égal au produit 105 des dénominateurs 3, 5, 7, on obtiendra les fractions demandées $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{90}{105}$, qui sont équivalentes aux fractions données.

1re REMARQUE. On simplifie le calcul en observant que puisque les fractions cherchées auront pour dénominateur commun le produit 105 des dénominateurs 3, 5, 7, il suffit de calculer les numérateurs de ces nouvelles fractions; ce qui revient à multiplier le numérateur de chaque fraction donnée par le produit des dénominateurs des autres fractions données. Ainsi, on multiplie successivement 2 par 5×7, 4 par 3×7 et 6 par 3×5, les produits 70, 84, 90, sont les numérateurs demandés.

2e REMARQUE. Le dénominateur commun 105 étant divisible par chacun des dénominateurs 3, 5, 7, des fractions qu'il s'agit de réduire à ce dénominateur commun, on peut employer

une autre méthode pour calculer les nouveaux numérateurs 70, 84, 90; car il suffit de diviser successivement 105 par les dénominateurs 3, 5, 7, et de multiplier les quotiens 35, 21, 15, par les numérateurs 2, 4, 6; les produits 70, 84, 90, sont les numérateurs demandés. Cela est évident.

En général, pour transformer une fraction $\frac{A}{B}$, en une fraction équivalente dont le dénominateur soit un nombre donné D divisible par B, il suffit de multiplier A par le quotient de la division de D par B; le produit exprime le numérateur de la fraction cherchée.

106. Nous allons faire voir qu'*on peut souvent réduire des fractions à un dénominateur commun moindre que le produit des dénominateurs des fractions données.*

Nous observerons d'abord que *pour qu'un nombre* D *puisse servir de dénominateur commun à plusieurs fractions, il suffit que* D *soit divisible par tous leurs dénominateurs;* car en divisant successivement D par les dénominateurs des fractions données, et en multipliant les deux termes de chaque fraction par le quotient correspondant, on obtiendra des fractions équivalentes aux proposées, qui auront toutes le dénominateur commun D.

Pour former les numérateurs de fractions équivalentes à des fractions données, dont le dénominateur commun soit un nombre D *divisible par tous les dénominateurs des fractions données, il suffit de multiplier les numérateurs de ces dernières par les quotiens que l'on trouve en divisant successivement le dénominateur commun* D *par les dénominateurs des fractions données* (nº 105, 2e *Remarque*).

1er EXEMPLE. *Soient les fractions*,

$$\frac{9}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{11}{8},\ \frac{13}{6},\ \frac{7}{12}.$$

Si on les réduisait au même dénominateur par la méthode générale du nº 105, on obtiendrait des fractions équivalentes, dont le dénominateur commun serait 13824. Mais, 24 étant divisible par chacun des dénominateurs 2, 3, 4, 8, 6, 12, il est plus simple de réduire les fractions données au dénominateur commun 24. Pour obtenir les numérateurs des nouvelles fractions, on divise successivement 24 par les dénominateurs,

	2,	3,	4,	8,	6,	12,
les quotiens,	12,	8,	6,	3,	4,	2,
multipliés par les numérateurs correspondans,						
	9,	2,	5,	11,	13,	7,
donnent des produits,	108,	16,	30,	33,	52,	14,

qui sont les numérateurs demandés.

2ᵉ Exemple. *Soient les fractions* $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{10}{24}$.

Le dénominateur 24 étant divisible par tous les autres, on peut le prendre pour dénominateur commun. Les fractions données, réduites à ce dénominateur commun, sont

$$\frac{16}{24}, \frac{6}{24}, \frac{20}{24}, \frac{14}{24}, \frac{10}{24}.$$

107. Nous allons donner le moyen de *réduire des fractions à leur* PLUS PETIT DÉNOMINATEUR COMMUN, c'est-à-dire de les transformer en des fractions équivalentes dont le dénominateur commun soit le plus petit possible.

1°. *Lorsque les fractions données sont irréductibles, pour les transformer en des fractions équivalentes dont le dénominateur commun soit le plus petit possible,* on cherche le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs des fractions données, ce nombre est le *plus petit dénominateur commun demandé;* c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre plus petit qui puisse servir de dénominateur commun à des fractions équivalentes aux fractions données.

En effet, il suit du principe du n° **102** (2°) que lorsque les fractions données seront réduites à un dénominateur commun, D, ce dénominateur commun sera nécessairement divisible par chacun des dénominateurs des fractions irréductibles proposées; D ne saurait donc être moindre que le plus petit nombre divisible par les dénominateurs des fractions données.

Exemple. *Soient les fractions irréductibles* $\frac{7}{60}, \frac{11}{72}, \frac{3}{175}$.

Pour les réduire à leur plus petit dénominateur commun, on cherche le plus petit nombre divisible par chacun des dénominateurs 60, 72, 175; on trouve, par l'une quelconque des méthodes des nᵒˢ **87** et **88**, que ce nombre est 12600; il exprime le dénominateur commun demandé. Pour former les numérateurs des fractions équivalentes aux proposées, qui auront le dénominateur commun 12600, on divise 12600, par chacun des dénominateurs 60, 72, 175, ce qui donne les quotiens 210, 175, 72; on multiplie les numérateurs 11, 7, 3, par les quotiens 210, 175, 72; les produits 1470, 1925, 216, sont les numérateurs demandés.

Remarque. Quand les dénominateurs des fractions irréductibles proposées sont premiers entre eux deux à deux, ou sont des nombres premiers, on ne peut pas réduire ces fractions à un dénominateur commun moindre que le produit de tous leurs dénominateurs; car d'après le principe du n° **89**, le plus petit nombre divisible par ces dénominateurs est leur produit.

2°. *Quand les fractions données ne sont pas irréductibles, on ramène ce cas au précédent* en les réduisant d'abord à leur plus simple expression (n° **102**).

108. *Pour comparer entre elles les grandeurs de plusieurs fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur;* car de deux fractions de même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur (n° **94**).

* **109.** *Une fraction* $\frac{a}{b}$ *moindre que l'unité, augmente lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes.*

Il s'agit de faire voir que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \text{ (*), ou que } \frac{a(b+c)}{b(b+c)} < \frac{(a+c)b}{(b+c)b},$$

ou que $a(b+c) < (a+c)b$ (n° **108**).

(*) Le signe $<$ signifie *plus petit que;* et par suite, le signe $>$ signifie *plus grand que.* Ainsi, on a $5 < 7$ et $7 > 5$.

Or, d'après ce qui a été démontré (n° 34, 1°),

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (a+c)b=ab+cb.$$

Tout se réduit donc à prouver que l'on a

$$ac<cb,\quad \text{ou}\quad ac<bc;\quad \text{ou}\quad a<b;$$

et cette dernière condition résulte de ce que la fraction donnée $\frac{a}{b}$ est supposée moindre que l'unité.

On démontrerait d'une manière semblable, qu'*une fraction plus grande que l'unité diminue lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes.*

110. *Lorsque deux fractions sont égales, le produit du numérateur de la 1re par le dénominateur de la 2e, est égal au produit du numérateur de la 2e par le dénominateur de la 1re; et le quotient du numérateur de la 1re par celui de la 2e est égal au quotient du dénominateur de la 1re par celui de la 2e.*

Par exemple, les fractions $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$, étant égales, si on les réduit au dénominateur commun 12×9, les nouveaux numérateurs 8×9, 6×12, seront nécessairement égaux. Les fractions $\frac{8\times 9}{6\times 9}$, $\frac{6\times 12}{6\times 9}$, seront donc égales; supprimant le facteur 9 commun aux deux termes de la 1re fraction, et le facteur 6 commun aux deux termes de la 2e, les fractions résultantes $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{9}$, seront égales entre elles. La relation,

$$\frac{8}{12}=\frac{6}{9}\ \text{donne donc}\ 8\times 9=6\times 12\ \text{et}\ \frac{8}{6}=\frac{12}{9}.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées.

111. *Pour effectuer l'*ADDITION *de plusieurs fractions de même dénominateur, on forme la somme de leurs numérateurs, et on écrit sous cette somme le dénominateur commun. Si les fractions ont des dénominateurs différens, on ramène ce cas au précédent en les réduisant d'abord au même dénominateur.*

Par exemple, la somme des fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, est $\frac{2+3}{7}$ ou $\frac{5}{7}$; car 2 fois $\frac{1}{7}$ plus 3 fois $\frac{1}{7}$ valent 5 fois $\frac{1}{7}$, ou $\frac{5}{7}$.

Pour ajouter les fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, on les réduit d'abord au même dénominateur, ce qui donne les fractions équivalentes $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{15}$, dont la somme est $\frac{12+10}{15}$ ou $\frac{22}{15}$.

112. *Pour* SOUSTRAIRE *l'une de l'autre deux fractions de même dénominateur, on retranche le numérateur de la première de celui de la seconde, et sous la différence obtenue on écrit le dénominateur commun. Lorsque les fractions ont des dénominateurs différens, on ramène ce cas au précédent en les réduisant d'abord au même dénominateur.*

Ainsi, $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$, $\frac{22}{15}-\frac{4}{5}=\frac{22}{15}-\frac{12}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

113. Nous avons vu (n° 97) comment on effectue la *multiplication d'une fraction par un nombre entier.*

Lorsque le multiplicateur est une fraction, on ne peut plus considérer la MULTIPLICATION *comme une addition abrégée* (n° 18); *il faut généraliser le sens attaché au mot* MULTIPLIER; *et on regarde la multiplication comme ayant pour but de calculer un nombre nommé* PRODUIT, *qui soit composé avec un autre nombre nommé* MULTIPLICANDE, *de la même manière qu'un troisième nombre nommé* MULTIPLICATEUR, *est composé avec l'unité.*

On déduit de cette définition que *pour faire la* MULTIPLICATION *de plusieurs fractions, il suffit de former successivement le produit des numérateurs et celui des dénominateurs; ces produits sont le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime le produit des fractions proposées.*

En effet, soit à multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$. Il s'agit de former un nombre, nommé produit, qui soit composé avec $\frac{2}{3}$, de la même manière que $\frac{4}{5}$ est composé avec l'unité. Mais, $\frac{4}{5}$ est composé de 4 fois la cinquième partie de l'unité ; on obtiendra donc le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ en prenant 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$. Or, d'après ce qu'on a vu (n° **97**), la cinquième partie de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3\times 5}$; 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$ est donc égale à 4 fois $\frac{2}{3\times 5}$, ou à $\frac{2\times 4}{3\times 5}$ (n° **97**). Le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est donc $\frac{2\times 4}{3\times 5}$ ou $\frac{8}{15}$. Le principe est donc démontré pour deux fractions.

Pour former le produit des trois fractions $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{11}$, on observe que le produit des deux premières étant $\frac{2\times 4}{3\times 5}$, il suffit de multiplier cette dernière fraction par $\frac{7}{11}$; ce qui donne $\frac{2\times 4\times 7}{3\times 5\times 11}$, ou $\frac{56}{165}$.

Le principe est donc démontré pour trois fractions. On verra de même qu'il convient à quatre fractions ; et ainsi de suite.

1re Remarque. *Le produit de plusieurs fractions conserve sa valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications ;* car le produit des numérateurs reste le même, ainsi que celui des dénominateurs (n° **36**), et ces produits sont les deux termes de la fraction qui exprime le produit des fractions proposées.

Il est facile d'en déduire que *les principes des* nos **37** *et* **38** *conviennent à des fractions quelconques.*

* 2e Remarque. *Selon que le multiplicateur est plus grand ou est plus petit que l'unité, le produit est plus grand ou est plus petit que le multiplicande.* Car lorsque le multiplicateur est égal à l'unité, le produit est égal au multiplicande ; et le pro-

duit est composé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est composé avec l'unité.

* Par conséquent, *les puissances d'une fraction plus grande que l'unité ont des valeurs d'autant plus grandes que les exposans de ces puissances sont plus grands ; et les puissances d'une fraction moindre que l'unité ont des valeurs d'autant plus petites que les exposans de ces puissances sont plus grands.*

114. Multiplier plusieurs fractions entre elles, c'est ce qu'on nomme prendre des *fractions de fractions.*

Par exemple, pour former le produit des fractions $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{11}$, il faut d'abord multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; c'est-à-dire prendre les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, ce qui donne $\frac{8}{15}$; on doit ensuite multiplier ce dernier produit par $\frac{7}{11}$, c'est-à-dire en prendre les $\frac{7}{11}$, ce qui donne $\frac{56}{165}$; on a donc pris effectivement les $\frac{7}{11}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$.

* **115.** *Toutes les puissances d'une fraction irréductible sont des fractions irréductibles.*

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{6}{7}$; je dis que sa troisième puissance est une fraction irréductible. En effet, la troisième puissance de $\frac{6}{7}$ est $\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}$, ou $\frac{6\times 6\times 6}{7\times 7\times 7}$ ou $\frac{6^3}{7^3}$.

Si cette dernière fraction n'était pas irréductible, ses deux termes 6^3, 7^3, seraient divisibles par un même nombre premier (n° **101**, 1°) ; ce nombre premier diviserait donc 6 et 7 (n° **72**, 1re *remarque*) ; la fraction $\frac{6}{7}$ ne serait donc pas irréductible ; ce qui est contre l'hypothèse.

Des raisonnemens analogues pouvant s'appliquer à toutes les puissances d'une fraction irréductible quelconque, le principe est démontré.

116. *Pour effectuer la* DIVISION *d'une fraction par une frac-*

tion, il suffit de multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur RENVERSÉE (*).

Par exemple, soit à diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$. Le quotient cherché doit être tel que multiplié par $\frac{4}{5}$, il reproduise $\frac{2}{3}$. Or, multiplier le quotient par $\frac{4}{5}$, c'est en prendre les $\frac{4}{5}$; donc :

les $\frac{4}{5}$ du quotient, ou 4 fois $\frac{1}{5}$ du quotient, valent $\frac{2}{3}$;

$\frac{1}{5}$ du quotient vaut donc le quart de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3\times 4}$;

le quotient vaut donc 5 fois $\frac{2}{3\times 4}$, ou $\frac{2\times 5}{3\times 4}$, ou $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$.

Le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est donc $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$; ce qui démontre le principe énoncé.

* 1^{re} REMARQUE. *Lorsqu'on divise deux fractions l'une par l'autre, si les dénominateurs sont égaux, le quotient sera égal à une fraction dont le numérateur sera celui de la fraction dividende et dont le dénominateur sera le numérateur de la fraction diviseur; si les numérateurs sont égaux, la fraction qui exprime le quotient aura pour numérateur, le dénominateur de la fraction diviseur, et pour dénominateur, celui de la fraction dividende.*

Car le quotient de $\frac{3}{7}$ par $\frac{5}{7}$ est $\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}$ ou $\frac{3\times 7}{5\times 7}$ ou $\frac{3}{5}$, et celui de $\frac{7}{3}$ par $\frac{7}{5}$ est $\frac{7}{3}\times\frac{5}{7}$ ou $\frac{5\times 7}{3\times 7}$ ou $\frac{5}{3}$.

* 2^e REMARQUE. *Lorsqu'on divise l'unité par une fraction, le quotient est égal à cette fraction* RENVERSÉE, car le quotient de 1 par $\frac{5}{7}$ est $1\times\frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5}$.

(*) On dit qu'une fraction est *renversée*, lorsqu'on écrit le numérateur à la place du dénominateur, et le dénominateur à la place du numérateur. Ainsi, la fraction $\frac{4}{5}$ étant *renversée* devient $\frac{5}{4}$.

* 3^e REMARQUE. *Selon que le diviseur est plus grand ou plus petit que l'unité, le quotient est plus petit ou plus grand que le dividende.* Car lorsque le diviseur est égal à l'unité, le quotient est égal au dividende; et d'après les propriétés du n° **42**, suivant que le diviseur augmente ou diminue, le quotient diminue ou augmente.

117. Pour *convertir un nombre entier en une expression fractionnaire équivalente qui ait un dénominateur donné*, on multiplie le nombre entier par le dénominateur donné; le produit exprime le numérateur de l'expression fractionnaire demandée.

Par exemple, pour convertir 5 en septièmes, on observe que l'unité valant 7 septièmes, le nombre 5 vaut 5 fois 7 septièmes, ou 5×7 septièmes, ou $\frac{5\times 7}{7}$, ou $\frac{35}{7}$.

***118.** Pour *convertir une fraction $\frac{A}{B}$ en une fraction équivalente dont le dénominateur soit un nombre donné* N, on réduit d'abord $\frac{A}{B}$ à sa plus simple expression $\frac{a}{b}$ (n° **102**). Il ne s'agit plus que de transformer $\frac{a}{b}$ en une fraction équivalente dont le dénominateur soit N; pour que cette transformation soit possible, il faut et il suffit que N soit un multiple de b (n° **101**, 3°). Lorsque cela a lieu, on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$ par le quotient q de la division de N par b; ce qui fournit la fraction demandée $\frac{a\times q}{b\times q}$ ou $\frac{aq}{N}$, car... $b\times q=N$.

Ainsi, *pour qu'une fraction soit convertible en une fraction équivalente dont la dénominateur soit un nombre donné N, il faut et il suffit que N soit divisible par le dénominateur de la fraction irréductible que l'on obtient en réduisant la fraction donnée à sa plus simple expression.*

119. Pour *trouver le nombre entier contenu dans un nombre* *fractionnaire*, on prend la partie entière du quotient du numérateur par le dénominateur.

Ainsi, la division de 13 par 5 donnant le quotient entier 2 et le reste 3, on voit que $\frac{13}{5}$ est composé de l'*entier* 2, plus de $\frac{3}{5}$.

120. Pour *convertir en une seule expression fractionnaire un nombre entier joint à une fraction*, on multiplie l'entier par le dénominateur de la fraction, on ajoute au produit le numérateur de cette fraction, et on donne à la somme le dénominateur de la fraction.

Par exemple, $2\frac{3}{5}$ ou $2+\frac{3}{5}$ vaut $\frac{2\times5+3}{5}$ ou $\frac{13}{5}$; car l'entier 2 valant $\frac{10}{5}$, le nombre $2+\frac{3}{5}$ vaut $\frac{10}{5}+\frac{3}{5}$ ou $\frac{13}{5}$.

121. Le *calcul des fractions* ne pouvant plus offrir aucune difficulté, nous allons voir comment on doit *opérer sur les nombres composés d'entiers et de fractions*.

1°. Dans l'*addition*, on cherche d'abord la somme des fractions; on en extrait l'entier qu'elle peut contenir, et on ajoute cet entier aux entiers qui accompagnent les fractions.

Exemple. *Soit proposé d'ajouter* $7\frac{15}{9}$ à $3\frac{8}{9}$.

On dispose le calcul de la manière suivante, et on dit :

$3\ \frac{8}{9}$ $7\ \frac{15}{9}$ $12\ \frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$ plus $\frac{15}{9}$ valent $\frac{23}{9}$, ou $2\frac{5}{9}$; j'écris $\frac{5}{9}$ et je retiens 2; 2 de retenue et 7 font 9 et 3 font 12, que je pose; ce qui donne $12\frac{5}{9}$ pour la *somme* cherchée.

2°. Dans la *soustraction*, on retranche directement la fraction de la fraction et le nombre entier du nombre entier.

Quand la fraction à soustraire est plus grande, on emprunte sur la *partie entière* du nombre dont on doit soustraire.

En voici des exemples :

de	$8\frac{5}{7}$	*de*	$6\frac{2}{7}$
ôtez	$2\frac{3}{7}$	*ôtez*	$3\frac{4}{7}$
reste	$6\frac{2}{7}$	*reste*	$2\frac{5}{7}$

Pour ôter $2\frac{3}{7}$ de $8\frac{5}{7}$, on retranche $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$ et 2 de 8; la réunion des restes partiels $\frac{2}{7}$ et 6, compose le reste total $6\frac{2}{7}$.

Pour soustraire $3\frac{4}{7}$ de $6\frac{2}{7}$, on *emprunte* une des 6 unités du plus grand nombre; cette unité, qui vaut $\frac{7}{7}$ jointe aux $\frac{2}{7}$ qu'il y avait déjà, donne $\frac{9}{7}$, desquels ôtant $\frac{4}{7}$, il reste $\frac{5}{7}$; et comme on a emprunté 1 sur le 6, on ôte 3 de 5, ou ce qui revient au même, on ôte 3 + 1 de 6 (3e *Remarque* du n° **16**); cela fournit le reste 2; la réunion des restes partiels détermine le reste total $2\frac{5}{7}$.

3°. Dans la *multiplication* et dans la *division*, on transforme d'abord chaque nombre donné en une seule expression fractionnaire (n° **120**); et on applique ensuite à ces expressions fractionnaires, les principes des nos **115** et **116**.

S'il s'agit des nombres $2\frac{3}{5}$, $4\frac{2}{7}$, on opérera sur les fractions équivalentes $\frac{13}{5}$, $\frac{30}{7}$; leur produit sera $\frac{13\times30}{5\times7}$ ou $\frac{390}{35}$, et leur quotient sera $\frac{13}{5}\times\frac{7}{30}$ ou $\frac{91}{150}$.

Remarque. Pour *multiplier ou* pour *diviser un nombre entier par une fraction*, on le met d'abord sous une forme fractionnaire, en lui donnant l'unité pour dénominateur; et la question se trouve ainsi réduite à multiplier ou à diviser deux fractions l'une par l'autre; ce qui s'exécute d'après les règles des nos **115** et **116**.

122. Les *preuves des quatre règles* sur les fractions s'exécutent par les méthodes indiquées pour les nombres entiers.

§ II. *Des fractions décimales, et des nombres décimaux.*

123. Nous allons exposer maintenant les *simplifications dont le calcul des fractions est susceptible, quand on suppose que l'unité n'admet que des subdivisions de dix en dix fois plus petites ;* c'est-à-dire quand le dénominateur est constamment l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéro. Les fractions de cette espèce prennent le nom de *fractions décimales.*

L'unité suivie de plusieurs zéro étant une puissance de 10, marquée par le nombre de ces zéro (n° 33), on voit que *le dénominateur d'une fraction décimale exprime toujours une puissance de 10 marquée par le nombre des zéro contenus dans le dénominateur.*

Ainsi, $\frac{23547}{1000}$ est une *fraction décimale;* le dénominateur, qui contient *trois zéro,* exprime la *troisième puissance* de 10.

124. *Le système de numération adopté* (n° 5) *pour écrire les nombres entiers fournit le moyen de mettre les fractions décimales sous une forme* ENTIÈRE, *c'est-à-dire sous la forme de nombres entiers;* car, d'après ce système, les chiffres d'un nombre exprimant des unités de dix en dix fois plus petites à mesure qu'on avance d'un rang vers la droite (n° 8), il en résulte que si l'on place des chiffres à la droite du chiffre des unités, le 1er de ces chiffres représentera des *dixièmes* d'unité ou des *dixièmes*, le 2e des dixièmes de dixième ou des *centièmes*, le 3e des dixièmes de centième ou des *millièmes;* et ainsi de suite.

Pour distinguer le chiffre des unités, nous placerons à sa droite une *virgule décimale* de cette forme particulière ,.

Cela posé : pour mettre la *fraction décimale* $\frac{23547}{1000}$ sous une forme ENTIÈRE, on observe qu'elle se décompose en

$\frac{23000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{40}{1000}+\frac{7}{1000}$, ou en 23 unités $+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{7}{1000}$,

ou en 23 unités + 5 dixièmes + 4 centièmes + 7 millièmes.

On peut donc l'écrire de cette manière 23,547.

Le nombre 23,547 est ce qu'on nomme un *nombre décimal;* les chiffres 2, 3, placés à gauche de la *virgule*, forment sa *partie entière* 23; les chiffres 5, 4, 7, placés à droite de la virgule sont ses *chiffres décimaux* ou ses *décimales;* ils composent la *partie décimale* 0,547 du nombre donné.

On verra d'une manière semblable que les *fractions décimales*

$$\frac{403}{100},\quad \frac{23456}{1000},\quad \frac{720003}{10000},$$

sont exprimées par les *nombres décimaux*

$$4{,}03,\quad 23{,}456,\quad 72{,}0003.$$

125. En général, *pour convertir une fraction décimale en nombre décimal, on écrit le numérateur, et on sépare, à l'aide de la virgule, autant de décimales sur la droite de ce numérateur qu'il y a de zéro dans le dénominateur;* c'est-à-dire qu'on place la *virgule*, dans le numérateur, de manière que le nombre décimal qui en résulte contienne autant de chiffres décimaux qu'il y a de zéro dans le dénominateur de la fraction donnée.

REMARQUE. Quand le numérateur ne contient pas le nombre de chiffres nécessaires au placement de la *virgule*, on y supplée en mettant des zéro sur la gauche de ce numérateur.

Ainsi, pour convertir $\frac{207}{100000}$ en nombre décimal, on observe que la règle prescrivant de séparer cinq décimales à droite du numérateur 207, il est nécessaire de placer d'abord trois zéro sur la gauche de 207, ce qui donne 000 207; on sépare alors cinq décimales dans 000207, ce qui fournit le nombre 0,00207 équivalent à la fraction donnée.

Désormais, lorsqu'on dira qu'on sépare des décimales sur la droite d'un nombre, il faudra entendre qu'on place la *virgule décimale*, dans le nombre donné, de manière que le résultat contienne le nombre de chiffres décimaux demandé.

126. *Pour convertir un nombre décimal en fraction ordi-*

naire, on prend une fraction dont le numérateur est le nombre entier résultant de la suppression de la virgule dans le nombre décimal donné, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la virgule. Cette règle n'est qu'une conséquence de celle du n° **125**.

Par exemple, le nombre 23,547 est égal à $\frac{23547}{1000}$, car

$$23{,}547 = 23 \text{ unités} + 5 \text{ dixièmes} + 4 \text{ centièmes} + 7 \text{ millièmes}$$
$$= 23 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$$
$$= \frac{23000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{23547}{1000}.$$

127. *Un nombre décimal peut s'énoncer de deux manières.* Par exemple, soit le nombre 34,509.

1°. Si l'on veut énoncer séparément la *partie entière* 34 et la *partie décimale* 0,509, on observera que la partie décimale valant $\frac{5}{10} + \frac{9}{1000}$, ou $\frac{500}{1000} + \frac{9}{1000}$, ou $\frac{509}{1000}$, le nombre 34,509, dont le premier chiffre à droite exprime des millièmes, peut s'énoncer

Trente-quatre unités, cinq cent neuf millièmes.

2°. Le nombre 34,509 étant égal à la fraction décimale $\frac{34509}{1000}$ (n° **126**) peut s'énoncer

Trente-quatre mille cinq cent neuf millièmes (n° **91**).

128. En général : *Un nombre décimal peut s'énoncer de deux manières : 1°. On énonce d'abord la partie entière comme si elle était seule; puis on énonce la partie décimale comme s'il s'agissait d'un nombre entier, et on termine ce dernier énoncé par le nom des unités du dernier chiffre à droite; 2°. On énonce le nombre proposé en faisant abstraction de la virgule, et on termine cet énoncé par le nom des unités décimales représentées par le dernier chiffre décimal du nombre proposé.*

Ainsi, le nombre 207,039 peut s'énoncer

Deux cent sept unités, trente-neuf millièmes, ou

Deux cent sept mille trente-neuf millièmes.

129. *Pour écrire un nombre décimal énoncé, on pose successivement, à partir de la gauche, le nombre d'unités de chaque espèce indiqué dans l'énoncé du nombre proposé, et on a soin de mettre des zéro à la place des unités intermédiaires qui peuvent manquer; on pose ensuite la virgule à la droite du chiffre des unités simples, de manière que chaque chiffre occupe le rang qui convient à l'espèce de ses unités.* Cette règle se déduit de la précédente.

Ainsi, chacun des nombres,

Deux cent sept unités trente-neuf millièmes,

Deux cent sept mille trente-neuf millièmes,

s'écrit de cette manière, 207,039.

130. L'espèce des unités représentées par chaque chiffre d'un nombre décimal, ne dépendant que de la position de ce chiffre relativement à la *virgule*, on en déduit les propriétés suivantes :

1°. *Un nombre décimal ne change pas de valeur lorsqu'on ajoute ou qu'on supprime des zéro sur sa droite.*

Par exemple, $2{,}3 = 2{,}300$, car $\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}$.

2°. *Suivant qu'on avance la virgule d'un rang, ou de deux rangs, ou de trois rangs, etc., vers la droite d'un nombre décimal, on rend ce nombre 10 fois plus grand, ou 100 fois plus grand, ou 1000 fois plus grand, etc.; de sorte qu'on le multiplie par 10, ou par 100, ou par 1000, etc.*

Par exemple, soit le nombre 3,456; lorsqu'on avance la *virgule* de deux rangs vers la droite, on rend ce nombre 100 fois plus grand; car chacun des chiffres du résultat 345,6 exprime des unités 100 fois plus grandes qu'auparavant.

Cela est d'ailleurs évident, car les principes des n^{os} **126**, **125**, **97**, donnent

$$345,6 = \frac{3456}{10} = \frac{3456}{1000} \times 100 = 3,456 \times 100.$$

3°. *Suivant qu'on avance la virgule d'un rang, ou de deux rangs, ou de trois rangs, etc., vers la gauche d'un nombre décimal, on rend ce nombre* 10 *fois plus petit, ou* 100 *fois plus petit, ou* 1000 *fois plus petit, etc.; de sorte qu'on le divise par* 10, *ou par* 100, *ou par* 1000, *etc.* Cela résulte de (2°).

4°. *Pour diviser un nombre entier, par l'unité suivie de plusieurs zéro, il suffit de séparer sur la droite de ce nombre autant de décimales qu'il y a de zéro sur la droite de l'unité;* cela se déduit des principes des nos **93** et **123**.

Par exemple, le quotient de 34567 par 1000 est 34,567; car ce quotient équivaut à la fraction décimale $\frac{34567}{1000}$ (n° **93**), et cette dernière fraction est égale à 34,567 (n° **123**).

131. La manière d'opérer sur les nombres entiers étant fondée sur cette propriété que dix unités d'un certain ordre forment constamment une unité de l'ordre immédiatement supérieur (n° **4**), et les nombres décimaux étant soumis à la même loi, *le calcul des nombres décimaux doit être soumis à des règles analogues à celles qui ont été données pour les nombres entiers.*

132. *L'*ADDITION *et la* SOUSTRACTION *des nombres décimaux s'effectuent comme s'il s'agissait de nombres entiers*, en ayant soin de placer les unités de même grandeur les unes sous les autres.

Exemples d'addition.

	12,34	28000,909009	3705,12	9000,40070012
	42,53	99,101991	89,17501	8210,5673
Sommes	54,87	28100,011000	3794,19501	17210,96800012.

Exemples de soustraction.

	54,87	28100,011	3794,19501	17210,96800012
	12,34	28000,909009	89,17501	8210,5673
Restes,	42,53	99,101991	3705,12	9000,40070012.

REMARQUE. Quand le nombre à soustraire renferme plus de

décimales que le nombre dont on doit le soustraire, on facilite l'opération en mettant assez de zéro sur la droite de ce dernier nombre pour que le résultat contienne autant de décimales qu'il y en a dans le nombre à soustraire.

Ainsi, pour ôter 35,03476 de 1987,34, on place d'abord trois zéro sur la droite du dernier nombre, et on retranche ensuite 35,03476 de 1987,34000, ce qui donne le reste demandé 1952,30524.

133. *La* MULTIPLICATION *des nombres décimaux s'effectue comme s'il n'y avait pas de virgule; on sépare ensuite autant de décimales à la droite du produit obtenu qu'il y a de décimales dans tous les facteurs; le résultat exprime le produit demandé.*

Par exemple, on obtiendra le produit 15,768 de 6,57 par 2,4 en multipliant 657 par 24, et en séparant trois décimales sur la droite du produit 15768; car les principes des nos **126**, **113**, **123**,

donnent $6,57 \times 2,4 = \frac{657}{100} \times \frac{24}{10} = \frac{657 \times 24}{100 \times 10} = \frac{15768}{1000} = 15,768.$

* En général: chaque facteur étant égal à une fraction dont le numérateur est le nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans ce facteur, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de décimales dans ce facteur (n° **126**), le produit des facteurs donnés sera égal au produit des numérateurs de ces fractions divisé par le produit de leurs dénominateurs (n° **113**). Or, le produit des numérateurs exprime le produit des nombres décimaux qu'on veut multiplier, dans lesquels on a fait abstraction de la *virgule*; le produit des dénominateurs est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de décimales dans tous les facteurs; et pour diviser un nombre par l'unité suivie de plusieurs zéro, il suffit de séparer autant de décimales sur sa droite qu'il y a de zéro dans le diviseur (n° **130**, 4°); on en déduit la règle énoncée.

REMARQUE. Lorsque le produit qu'on obtient en multipliant les facteurs, abstraction faite de la *virgule*, ne contient pas le nombre de chiffres nécessaire au placement de la *virgule*, on y supplée (comme il a été dit dans la remarque du n° 125) en mettant des zéro à la gauche de ce produit.

Ainsi, pour multiplier 0,04 par 0,0012, on forme le produit 48 de 4 par 12; la règle prescrivant de séparer six décimales à la droite de ce produit, on remplace 48 par le nombre équivalent 0000048, et l'on sépare ensuite les six décimales; le résultat 0,000048 exprime le produit demandé.

134. Tout nombre décimal pouvant être remplacé par une fraction ordinaire équivalente (n° **126**), le principe établi (n° **113**, 1re remarque) fait voir que *le produit de plusieurs nombres décimaux conserve la même valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.*

135. La DIVISION *des nombres décimaux* présente deux cas :

1°. *Quand le dividende et le diviseur contiennent le même nombre de décimales, on obtient le quotient en effectuant la division comme s'il n'y avait pas de virgule.* Car la suppression de la *virgule* revient à multiplier le dividende et le diviseur par un même nombre (n° **130**, 2°); et il est bien évident, que cela ne change pas le quotient.

Les principes des nos **126** et **116**, conduisent à la même propriété.

Par exemple, pour obtenir le quotient de 4,86 par 2,43, il suffit de diviser 486 par 243; car la suppression de la virgule revient à multiplier le dividende et le diviseur donnés par 100, ce qui ne change pas le quotient.

Cela est d'ailleurs évident, car diviser 4,86 par 2,43, revient à diviser l'une par l'autre les fractions équivalentes $\frac{486}{100}, \frac{243}{100}$ (n° **126**); et d'après la 1re remarque du n° **116**, on obtient ce dernier quotient en divisant 486 par 243, ce qui donne 2 pour le quotient demandé.

2°. *Lorsque le dividende et le diviseur ne contiennent pas le même nombre de décimales, on peut ramener ce cas au précédent, en plaçant des zéro à la droite du nombre qui contient le moins de décimales* (n° **130**, 1°).

Ainsi, pour trouver le quotient de 4,86 par 0,00243, on

ramène d'abord la question à diviser 4,86000 par 0,00243; la division de 486000 par 000243, ou de 486000 par 243, donne 2000 pour le quotient demandé.

La division de deux nombres décimaux pourra donc toujours se ramener à diviser deux nombres entiers l'un par l'autre.

* REMARQUE. *Il n'est pas indispensable de préparer le calcul de manière que le dividende et le diviseur contiennent le même nombre de décimales.* Par exemple, pour déterminer le quotient x de 4,86 par 0,00243, on peut chercher d'abord le quotient de 486 par 243, qui est 2. On observe ensuite que par la suppression de la virgule, le dividende est multiplié par 100, tandis que le diviseur est multiplié par 100000 (n° **130**, 2°); il en résulte que le quotient x est multiplié par 100 et divisé par 100000 (n° **42**, 2°); le quotient 2 que l'on a trouvé, est donc égal à $\frac{x \times 100}{100000}$ ou à $\frac{x}{1000}$. On obtiendra donc x en multipliant 2 par 1000; ce qui donne $x = 2000$.

136. Lorsque le dividende n'est pas le produit du diviseur par un nombre entier, le quotient se compose d'une partie entière et d'une partie moindre que l'unité égale au quotient du dernier reste par le diviseur (n° **90**). *Pour évaluer le quotient en décimales, on calcule d'abord sa partie entière* (n° **28**); *on place ensuite la virgule, à la droite de cette partie entière. Pour trouver les chiffres décimaux du quotient, on convertit les restes successifs en dixièmes, en centièmes, en millièmes, etc.; ce qui s'effectue en mettant un zéro sur la droite de chaque reste; les chiffres qu'on trouve ainsi à la suite des unités du quotient, expriment les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc., du quotient demandé.*

1er EXEMPLE. *Soit proposé de diviser* 9,8 *par* 2,5.

Le quotient demandé étant le même que celui de 98 par 25 (n° **135**, 1°), on dispose et on exécute ainsi le calcul :

98	25
230	3,92
50	
0	

La division de 98 par 25, fournit trois unités au quotient, et le reste 23 unités; on place la *virgule* sur la droite de la *partie entière* 3 du quotient. Pour obtenir les dixièmes de ce quotient, on convertit le reste 23 unités en 230 dixièmes; on divise 230 dixièmes par 25, ce qui donne 9 dixièmes au quotient, avec le reste 5 dixièmes; on écrit 9 au rang des dixièmes du quotient. Pour trouver les centièmes du quotient, on convertit le reste 5 dixièmes en 50 centièmes. Enfin, la division de 50 centièmes par 25 donnant le quotient 2 centièmes et le reste 0, on voit que la division de 9,8 par 2,5 fournit le *quotient exact* 3,92.

REMARQUE. Lorsque nous dirons qu'une division donne un *quotient exact*, nous sous-entendrons toujours que ce quotient est composé d'un nombre limité de chiffres, et que le produit du diviseur par ce quotient est égal au dividende.

2e EXEMPLE. *Trouver le quotient de 4,7 par 1,1.*

Ce quotient étant le même que celui de 47 par 11, on dispose et on exécute le calcul de la manière suivante :

Dividende.	47		11 *Diviseur.*
1er *reste...*	30	*dixièmes.*	4,27 27 27. ... *Quotient.*
2e *reste...*	80	*centièmes.*	
3e *reste...*	30	*millièmes.*	
4e *reste...*	80	*dix-millièmes.*	
5e *reste...*	30	*cent-millièmes*, etc.	

La division de 47 par 11 donne le quotient entier 4 et le reste 3; on écrit 4 au rang des unités du quotient, et on place la *virgule* sur la droite de la partie entière 4 du quotient.

Pour *trouver les chiffres décimaux du quotient,* on doit diviser le reste 3 par 11; on convertit ce reste en 30 dixièmes; la division du 1er reste 30 dixièmes par 11, donne le quotient 2 dixièmes et le 2e reste 8 dixièmes ou 80 centièmes; on écrit 2 au rang des dixièmes du quotient; la division de 80 centièmes par 11, donne le quotient 7 centièmes, et le 3e reste 3 centièmes ou 30 millièmes; on écrit 7 au rang des centièmes du quotient. Cela posé: le 3e reste 30 millièmes ne différant du 1er reste 30 dixièmes que par l'ordre de ses unités, la division de ce 3e reste par 11, devra reproduire au quotient les mêmes chiffres 2, 7, que l'on a déjà trouvés en divisant le 1er reste par 11; et en effet, la division de 30 millièmes par 11

donne le quotient 2 millièmes et le 4e reste 8 millièmes ou 80 dix-millièmes; on écrit 2 au rang des millièmes du quotient; la division de 80 dix-millièmes par 11, donne le quotient 7 dix-millièmes et le 5e reste 3 dix-millièmes ou 30 cent-millièmes; on écrit 7 au rang des dix-millièmes du quotient. Le 5e reste contenant le même nombre d'unités que le 3e, en le divisant par 11, on retrouverait de nouveau les mêmes chiffres 2, 7, au quotient; et ainsi de suite à l'infini. On voit que la division de 47 par 11, conduit à un quotient indéfini 4,27 27 27 etc., dans lequel les chiffres 2, 7, du *groupe* 27, se reproduisent *indéfiniment* dans le même ordre.

3e EXEMPLE. *Calculer le quotient de 4,9019 par 1,1.*

Ce quotient étant le même que celui de 49019 par 11000, on divise 49019 par 11000; ce qui fournit le quotient indéfini 4,4562727 etc., dans lequel les chiffres 2, 7, se reproduisent constamment dans le même ordre et à l'infini.

137. En général, *la division de deux nombres entiers ou décimaux, l'un par l'autre, conduira toujours à un quotient décimal exact, ou à un quotient indéfini, dans lequel plusieurs chiffres, à partir d'un certain rang, se reproduiront constamment dans le même ordre et à l'infini.*

En effet; lorsque après avoir ramené la question à diviser deux nombres entiers l'un par l'autre, on aura trouvé la partie entière du quotient, on obtiendra les dividendes partiels qui fourniront les chiffres décimaux du quotient, en multipliant chaque reste par 10. Par conséquent, lorsqu'on aura trouvé au quotient, un nombre de chiffres décimaux tout au plus égal au diviseur diminué de 1, on parviendra nécessairement à un reste nul, ou à un reste R′ égal à un reste R déjà obtenu (*). Dans le 1er cas, le quotient obtenu sera *exact* (no **136**). Dans le 2e cas, la multiplication des deux restes égaux R, R′, par 10 fournira deux dividendes partiels égaux

(*) On fait abstraction de l'espèce des unités représentées par les restes. Ainsi, lorsqu'on dit que deux restes ou que deux dividendes partiels sont *égaux*, on entend qu'ils contiennent le même nombre d'unités décimales.

10R, 10R′, lesquels divisés par le diviseur, donneront au quotient les mêmes chiffres décimaux et les mêmes restes; de sorte qu'à partir d'un certain ordre décimal, les chiffres décimaux du quotient formeront des groupes qui se reproduiront continuellement dans le même ordre et à l'infini. Ce qui démontre les propriétés énoncées.

1re Remarque. Le groupe de chiffres décimaux qui se reproduit continuellement dans le même ordre et à l'infini, forme la *période;* les chiffres qui précèdent la première période forment la *partie non périodique;* et les chiffres décimaux placés entre la virgule et la première période, composent la *partie décimale non périodique;* de sorte que la partie non périodique se compose de la partie entière et de la partie décimale non périodique. Lorsque la période commence immédiatement après la virgule, le nombre décimal est dit *périodique simple*, et quand la période ne commence qu'après un certain nombre de chiffres décimaux, le nombre décimal est *périodique mixte.* Ainsi, 4,272727 etc., est un *nombre décimal périodique simple* dont la période est 27 et dont la *partie entière* est 4; l'expression 4,4562727 etc., est un *nombre décimal périodique mixte*, la *partie entière* est 4, la *période* est 27, la *partie non périodique* est 4456, et la *partie décimale non périodique* est 456.

*2e Remarque. Il suit de ces définitions que *le dernier chiffre de la partie non périodique, n'est jamais le même que le dernier chiffre de la période;* car si cela arrivait, le dernier chiffre de la partie non périodique deviendrait le premier chiffre de la période, ce qui est absurde. Par exemple, si l'on représente par E la *partie entière* d'un nombre décimal périodique mixte *N*, dont la partie décimale non périodique contient deux chiffres *a*, *b*, et dont la période renferme trois chiffres *c*, *d*, *e*, le nombre *N* sera représenté par *E,ab cde cde* etc. Si le dernier chiffre *b* de la partie non périodique était le même que le dernier chiffre *e* de la période, le nombre *N* deviendrait *E,a bcd bcd* etc.; de sorte que le chiffre *b* que

l'on suppose ne pas faire partie de la période, deviendrait le 1er chiffre de la période *bcd*, ce qui est absurde.

3e Remarque. On déduit de ce qui précède que *la division conduit toujours à un quotient décimal exact ou à un quotient indéfini périodique*, et que *le nombre des chiffres de la période est toujours moindre que le diviseur.*

138. Toute fraction pouvant être considérée comme indiquant le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur, on déduit du principe du nº **137** que *la conversion d'une fraction en décimales fournit toujours un quotient décimal exact ou périodique.*

Par exemple, si l'on effectue la division du numérateur par le dénominateur, à l'aide de la règle du nº **137**, on trouvera

$$\frac{39}{800}=0{,}04875,\qquad \frac{3}{11}=0{,}272727 \text{ etc.},\qquad \frac{58}{11}=5{,}27\ 27\ 27 \text{ etc.},$$

$$\frac{49019}{1100000}=0{,}04456\ 27\ 27\ 27 \text{ etc.},\qquad \frac{49019}{11000}=4{,}456\ 27\ 27\ 27 \text{ etc.}$$

139. *Tout nombre décimal, composé d'un nombre limité de chiffres, ou périodique simple, ou périodique mixte, peut être exprimé par une fraction ordinaire équivalente.* En effet :

1°. Si *le nombre décimal a un nombre limité de chiffres*, la règle du nº **126** fournit sa valeur en fraction ordinaire.

2°. Si *le nombre décimal est périodique simple*, on en déduira une autre expression composée de la même partie périodique; en retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, la partie périodique disparaîtra, et il sera facile d'en tirer la valeur du nombre donné en fraction ordinaire.

1er Exemple. *Soit le nombre décimal périodique simple (moindre que l'unité)*, 0,27 27 27 etc., *dont la période est* 27.

Désignons par x la valeur de 0,27 27 27 27 etc., qu'il s'agit de trouver; pour en déduire une autre expression composée de la même partie périodique, on avance la virgule de deux rangs à droite, ce qui revient à multiplier 0,27 27 etc. par 100 (nº **130**, 2°); on a donc

$$100 \text{ fois } x = 27{,}272727 \text{ etc.}$$
$$\text{une fois } x = 0{,}272727 \text{ etc.}$$

On retranche une fois x de 100 fois x; le reste 99 fois x est égal à 27,272727 etc. — 0,272727 etc., ou à 27, car les parties décimales périodiques étant les mêmes, se détruisent. Donc,

$$99 \textit{ fois } x = 27\text{ ; d'où } x = \frac{27}{99}.$$

Des transformations analogues étant applicables à tous les nombres décimaux périodiques simples moindres que l'unité, on voit que *tout nombre décimal périodique simple, plus petit que l'unité, est équivalent à une fraction ordinaire qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

2[e] EXEMPLE. *Soit le nombre décimal périodique simple, plus grand que l'unité,* 4,27 27 27 etc., *dont la période est* 27.

En opérant comme dans le 1[er] exemple, on trouvera

$$100 \textit{ fois } x = 427{,}27\,27 \text{ etc.}$$
$$\textit{une fois } x = \quad 4{,}27\,27 \text{ etc.}$$

Et en retranchant une fois x de 100 fois x, il viendra,

$$99 \text{ fois } x = 427 - 4\text{; d'ou } x = \frac{427-4}{99}.$$

Les mêmes raisonnemens étant applicables à tous les nombres décimaux périodiques simples plus grands que l'unité, on voit que *tout nombre décimal périodique simple, plus grand que l'unité, est égal à une fraction ordinaire, qui a pour numérateur la différence entre la partie entière suivie de la première période et la partie entière, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

3°. S'il s'agit d'un *nombre décimal périodique mixte plus petit ou plus grand que l'unité,* on place successivement la virgule à droite et à gauche de la première période, ce qui donne deux nombres composés de la même partie périodique: la différence entre ces nombres ne contenant plus la partie périodique, on en déduit facilement la valeur en fraction ordinaire du nombre donné.

1[er] EXEMPLE. *Soit le nombre décimal périodique mixte, moindre que l'unité,* 0,013 67 67 67 etc., *dont la période est* 67.

Si l'on désigne par x la valeur de 0,013 67 67 etc., qu'il s'agit de calculer, on aura $x = 0{,}013\,67\,67\,67$ etc. ; d'où

$$100000 \textit{ fois } x = 1367{,}67\,67 \text{ etc.,}$$
$$1000 \textit{ fois } x = \quad 13{,}67\,67 \text{ etc.}$$

On retranche 1 000 fois x de 100 000 fois x; les parties périodiques étant les mêmes se détruisent, et on trouve

$$99000 \textit{ fois } x = 1367 - 13\text{; d'où } x = \frac{1367-13}{99000}.$$

2[e] EXEMPLE. *Soit le nombre décimal périodique mixte plus grand que l'unité,* 8,013 67 67 67 etc., *dont la période est* 67.

On fait $x = 8{,}013\,67\,67\,67$ etc.; et en opérant comme dans le premier exemple, on trouve

$$100000 \textit{ fois } x = 801367{,}67\,67 \text{ etc.,}$$
$$1000 \textit{ fois } x = \quad 8013{,}67\,67 \text{ etc.}$$

$$99000 \textit{ fois } x = 801367 - 8013\text{; d'où } x = \frac{801367-8013}{99000}.$$

La comparaison des nombres 0,013 67 67 67 etc., 8,013 67 67 67 etc.
avec les fractions équivalentes $\frac{1367-13}{99000}$, $\frac{801367-8013}{99000}$,

fait voir que *tout nombre décimal périodique mixte (plus petit ou plus grand que l'unité) est équivalent à une fraction ordinaire dont le numérateur est la différence entre la partie non périodique suivie de la première période et cette partie non périodique; pour former le dénominateur on écrit autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, et on met autant de zéro sur la droite de ces 9 qu'il y a de chiffres dans la partie décimale non périodique.*

4°. *Lorsque la période est* 9, *la partie décimale périodique, prolongée à l'infini, vaut une unité décimale de l'ordre immédiatement supérieur à celui où la période commence;* car la règle démontrée (2°) donnant $0,999$ etc. $= \frac{9}{9} = 1$, on en déduit, en divisant successivement par 10,

$$0,0999 \text{ etc.} = 0,1, \quad 0,00999 \text{ etc.} = 0,01; \text{ etc.}$$

Il suit de là que *tout nombre décimal périodique mixte dont la période est 9, est équivalent à la partie non périodique augmentée d'une unité décimale de l'ordre du dernier chiffre de cette partie non périodique.* Ainsi :

$$6,347999 \text{ etc.} = 6,348, \quad 0,037999 \text{ etc.} = 0,038.$$

Remarque. Il est facile de déduire de cette dernière propriété, que *si l'on désigne par* A *le nombre entier résultant de la suppression de la virgule dans la partie non périodique d'un nombre décimal* N *dont la période est* 9 *et dont la partie décimale non périodique contient n chiffres, le nombre* N *sera égal à la fraction ordinaire* $\frac{A+1}{10^n}$.

Par exemple $6,347999$ etc. $= 6,348 = \frac{6348}{10^3}$.

Lorsque nous parlerons désormais d'un nombre décimal périodique, nous supposerons toujours qu'il ne peut être exprimé par un nombre décimal composé d'un nombre limité de chiffres; de sorte que *la période ne sera pas égale à* 9.

140. On déduit de la règle du n° **139** (4°), que *lorsqu'un nombre n'est pas terminé par une infinité de* 9, *si l'on supprime des chiffres sur sa droite, la totalité des chiffres supprimés a une valeur moindre qu'une unité du dernier ordre conservé.*

Par exemple, soit le nombre 37,46785 etc. ; en supprimant tous les chiffres placés à la droite du chiffre 6 des centièmes, la partie supprimée 0,00785 etc., est moindre que 0,0099999 etc., ou que 0,01, ou qu'un centième (n° **139**, 4°).

Par conséquent : *pour obtenir la valeur d'un nombre à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, il suffit de supprimer tous les chiffres qui expriment des unités inférieures à cet ordre.*

141. Pour *trouver la valeur du quotient d'une division, ou d'une fraction ordinaire, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné,* il suffit d'effectuer la division d'après la méthode du n° **136**, et de continuer le calcul jusqu'au chiffre du quotient qui exprime des unités décimales de l'ordre donné. Cela résulte du principe du n° **140**.

142. Pour *approcher le plus possible de la valeur d'un nombre décimal, en supprimant plusieurs chiffres à sa droite,* distinguez trois cas : si le premier chiffre à supprimer est moindre que 5, supprimez-le avec ceux qui le suivent; s'il est plus grand que 5, ou si, étant 5, il est suivi d'autres chiffres significatifs, augmentez d'une unité le dernier chiffre à conserver; enfin, si le premier chiffre à supprimer est égal à 5 et n'est pas suivi d'autres chiffres significatifs, vous pourrez laisser le dernier chiffre à conserver tel qu'il est, ou l'augmenter d'une unité. Dans ces trois cas, l'erreur ne saurait excéder une demi-unité du dernier ordre conservé.

Par exemple, lorsqu'on ne veut conserver que deux décimales, la valeur la plus approchée de 5,67498 etc. est 5,67, et celle de 5,476 etc. est 5,48; l'erreur est moindre qu'un demi-centième ou que 0,005. Car dans le 1er cas, la partie supprimée 0,00498 etc. est moindre que 0,004999 etc., ou que 0,005 (n° **139**, 4°) ; et dans le 2e cas, la quantité qu'il faut ajouter à 5,476 etc., pour obtenir 5,48 est moindre que 0,005.

***143.** Les deux termes de la fraction ordinaire $\frac{A}{B}$ équivalente à un nombre décimal périodique mixte, formés d'après la règle du n° **139** (3°), jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Le dénominateur* B *est toujours divisible par* 10; car la partie décimale non périodique ayant au moins un chiffre, le chiffre des unités du dénominateur est nécessairement un zéro.

2°. *Le numérateur* A *n'est jamais divisible par* 10. Car, d'après la 2me remarque du n° **137**, le dernier chiffre de la partie non périodique n'étant jamais le même que le dernier chiffre de la période, le numérateur A ne sera jamais terminé par un zéro.

Par exemple, la règle indiquée donne

$$3{,}47\,568\,568 \text{ etc.} = \frac{347568 - 347}{99900} = \frac{347\,221}{99900}.$$

* **144.** Nous allons faire voir qu'*il est toujours possible de reconnaître d'avance si la division du numérateur d'une fraction* $\frac{A}{B}$ *par son dénominateur, conduira à un quotient décimal exact, ou à un quotient décimal périodique simple, ou à un quotient décimal périodique mixte ; et de déterminer dans ce dernier cas, le nombre des chiffres de la partie décimale non périodique du quotient.*

1°. *Lorsque le dénominateur* B *ne contient que les facteurs premiers* 2, 5 *de* 10, *la division du numérateur par le dénominateur fournit toujours un quotient décimal exact.*

En effet, soit la fraction $\frac{A}{2^{m+n} \times 5^m}$. Pour la transformer en une fraction équivalente dont le dénominateur soit une puissance de 10, il suffit de multiplier ses deux termes par 5^n; car les principes des nos **96**, **31**, donnent

$$\frac{A}{2^{m+n}\times 5^m} = \frac{A\times 5^n}{2^{m+n}\times 5^m \times 5^n} = \frac{A\times 5^n}{2^{m+n}\times 5^{m+n}} = \frac{A\times 5^n}{(2\times 5)^{m+n}} = \frac{A\times 5^n}{10^{m+n}}$$

et il suit de la règle du n° **125** que la dernière fraction est équivalente à un nombre décimal composé d'un nombre limité de chiffres. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Lorsque la fraction donnée* $\frac{A}{B}$ *étant irréductible, le dénominateur* B *est de la forme* $2^{m+n}\times 5^m$, *le quotient de* A *par* B *contient* $m+n$ *décimales.* En effet, dans ce cas, A ne contient pas le facteur 2 ; $A\times 5^n$ ne peut donc pas renfermer le facteur 10 ; le nouveau numérateur $A\times 5^n$ n'est donc pas divisible par 10 ; on ne peut donc pas transformer la fraction donnée en une fraction décimale équivalente dont le dénominateur soit moindre que 10^{m+n} ; le nombre décimal équivalent à la fraction donnée contiendra donc $m+n$ décimales (n° **125**).

On raisonnerait d'une manière semblable si dans le dénominateur de la fraction donnée le facteur affecté du plus fort exposant était 5.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{9}{5000}$, dont le dénominateur $5\,000 = 2^3\times 5^4$. La division de 9 par 5 000 fournira un quotient décimal exact qui contiendra 4 chiffres décimaux. Et en effet, si l'on effectue cette division, on obtiendra le quotient 0,0018.

On pouvait prévoir ce résultat, car

$$\frac{9}{2^3\times 5^4} = \frac{9\times 2}{2^4\times 5^4} = \frac{18}{10^4} = \frac{18}{10000} = 0{,}0018 \text{ (n° 125)}.$$

2°. *Lorsque le dénominateur* B *de la fraction* $\frac{A}{B}$ *contient un facteur premier* P, *autre que* 2 *et* 5, *qui ne divise pas le numérateur* A, *la division de* A *par* B *donne un quotient qui se prolonge indéfiniment ; et ce quotient est périodique.*

En effet ; si la division de A par B donnait un quotient décimal exact, ce quotient serait égal à une fraction ordinaire de la forme $\frac{N}{10^m}$ (n° **126**) ; on aurait

$$\frac{A}{B} = \frac{N}{10^m}; \quad \text{d'où} \quad A\times 10^m = N\times B \text{ (n° 110)}.$$

Or, P divise B; P divise donc $N\times B$ (n° **34**, 5°); P diviserait donc $A\times 10^m$. Or, P ne divise pas A ; P diviserait donc 10^m (n° **72**); P diviserait donc 10 (n° **72**); ce qui est impossible puisque P n'est égal à aucun des facteurs premiers 2, 5, de 10. Le quotient de A par B ne peut donc pas se terminer ; ce quotient sera donc périodique (n° **137**).

3°. *Lorsque le dénominateur* B *de la fraction* $\frac{A}{B}$ *ne contient aucun des facteurs* 2, 5, *la division de* A *par* B *fournit toujours un quotient décimal périodique simple.*

En effet ; B ne contenant aucun des facteurs 2, 5, si l'on réduit $\frac{A}{B}$ à sa plus simple expression $\frac{a}{b}$, b ne contiendra aucun des facteurs 2, 5; b admettra donc un facteur premier autre que 2 et 5, qui ne divisera pas a; le quotient de a par b, qui est le même que celui de A par B, sera donc périodique (2°). Cela posé : si ce quotient était périodique mixte, il serait équivalent à une fraction ordinaire $\frac{A'}{B'}$ dont le dénominateur B' serait divisible par 10, et dont le numérateur A' n'admettrait pas ce diviseur (n° **145**). On aurait,

$$\frac{a}{b}=\frac{A'}{B'}\,; \quad \text{d'où} \quad aB'=bA', \ (\text{n° } \mathbf{110}).$$

Or, 10 divise B'; 10 diviserait donc aB' (n° **54**, 5°); 10 diviserait donc bA'. D'ailleurs, b ne contenant aucun des facteurs premiers 2, 5, de 10, on est certain que 10 est premier avec b (n° **76**); 10 diviserait donc A' (n° **71**); ce qui est impossible. Le quotient périodique résultant de la division de a par b, ne peut donc être périodique mixte; il est donc périodique simple. Ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. *Lorsque la fraction* $\frac{A}{B}$ *est irréductible, si le numérateur A n'est pas terminé par un zéro, le premier chiffre à droite de la partie entière du quotient périodique simple Q, résultant de la division de A par B, ne sera jamais le même que le premier chiffre à droite de la période.* Car si ces deux chiffres étaient les mêmes, il résulte de la règle du n° **139** (2°) que le numérateur de la fraction $\frac{A'}{B'}$ équivalente à Q serait terminé par un zéro, et que tous les chiffres du dénominateur B' seraient des 9; ainsi, A' admettrait les facteurs 2, 5 de 10 (n° **55**, 1°), tandis que B' ne contiendrait aucun de ces facteurs. Par conséquent, en réduisant la fraction $\frac{A'}{B'}$ à sa plus simple expression, la fraction irréductible résultante, qui se-

rait nécessairement $\frac{A}{B}$ (n° **104**), serait telle que le numérateur A contiendrait encore les facteurs 2, 5, qui entraient dans A'; A contiendrait donc le facteur 10; le 1er chiffre à droite de A serait donc un zéro; ce qui est contre l'hypothèse. Le principe est donc démontré.

Par exemple, si l'on pouvait avoir $\frac{A}{B}=23{,}543\,543$ etc., la règle du n° **139** (2°) donnerait

$$23{,}543\,543 \text{ etc.}=\frac{23543-23}{999}=\frac{23520}{999}.$$

En réduisant cette dernière fraction à sa plus simple expression, le résultat $\frac{7840}{333}$ devrait être $\frac{A}{B}$; on aurait $A=7840$. Le 1er chiffre à droite de A serait donc un zéro; ce qui est contre l'hypothèse.

4°. *Quand le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{A}{B}$ *contient des facteurs* 2, 5, *combinés avec d'autres facteurs premiers, la division de* A *par* B *conduit toujours à un quotient décimal périodique mixte.*

En effet; la fraction donnée étant irréductible, les facteurs premiers, autres que 2 et 5, contenus dans B ne sauraient diviser A; la division de A par B fournira donc un quotient décimal indéfini qui sera nécessairement périodique (2°). Ce quotient sera donc périodique simple ou périodique mixte.

Si le quotient de A par B était périodique simple, il serait équivalent à une fraction ordinaire $\frac{A'}{B'}$ dont le dénominateur B' ne serait composé que de chiffres égaux à 9 (n° **139**, 2°); B' n'admettrait donc aucun des facteurs 2, 5 (n° **56**, 1° et 2°). On aurait $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$; d'où $AB'=A'B$ (n° **110**).

Or, on suppose que B contient au moins un des facteurs 2, 5; le facteur 2, par exemple; 2 diviserait donc $A'B$

(nº 54, 5º) ; 2 diviserait donc AB'. Mais, 2 ne divise pas B' ; 2 diviserait donc A (nº 72) ; d'ailleurs, 2 divise B ; 2 diviserait donc A et B ; la fraction donnée $\frac{A}{B}$ ne serait donc pas irréductible ; ce qui est contre l'hypothèse. La division de A par B conduira donc toujours à un quotient décimal périodique mixte.

1^{re} REMARQUE. *Lorsque les exposans des facteurs 2, 5, dans le dénominateur* B *de la fraction irréductible* $\frac{A}{B}$ *sont inégaux, le nombre des chiffres de la partie décimale non périodique est égal au plus grand de ces exposans.*

En effet, supposons que l'exposant du facteur 2 dans B soit plus grand que celui du facteur 5 ; le dénominateur B sera de la forme $2^{m+n} \times 5^m \times N$; N ne contiendra aucun des facteurs 2, 5 ; N sera premier avec A et avec 5 ; il s'agit de faire voir que le quotient périodique mixte, qui résultera de la division de A par B, contiendra $m+n$ chiffres décimaux entre la virgule et la première période.

Pour déduire cette propriété de (3º), on fait d'abord disparaître tous les facteurs 2, 5, contenus dans le dénominateur de la fraction donnée $\frac{A}{2^{m+n} \times 5^m \times N}$; à cet effet, on multiplie le numérateur A par 10^{m+n} ou par $2^{m+n} \times 5^{m+n}$; ce qui donne

$$\frac{A \times 2^{m+n} \times 5^{m+n}}{2^{m+n} \times 5^m \times N} = \frac{A \times 5^n}{N}, \text{ (nº 93).}$$

Or, en multipliant le numérateur A par 10^{m+n}, on a multiplié la fraction $\frac{A}{B}$ par 10^{m+n} (nº 97). On obtiendra donc la valeur de $\frac{A}{B}$ en divisant $\frac{A \times 5^n}{N}$ par 10^{m+n}. Mais, la fraction $\frac{A \times 5^n}{N}$ est irréductible ; car le dénominateur N étant premier avec A et avec 5, est aussi premier avec le numérateur $A \times 5^n$ (nºs 77 et 76) ; de plus, A ne contenant pas le facteur 2, le

numérateur $A \times 5^n$ ne contient pas le facteur 10 ; le 1^{er} chiffre à droite de $A \times 5^n$ n'est donc pas un zéro ; d'ailleurs le dénominateur N ne renferme aucun des facteurs 2, 5. Par conséquent, d'après (3º), la division de $A \times 5^n$ par N donnera un quotient décimal Q qui sera périodique simple, et le 1^{er} chiffre à droite de la partie entière ne sera pas le même que le 1^{er} chiffre à droite de la période. D'ailleurs, pour obtenir la valeur en décimales de $\frac{A}{B}$, il suffit de diviser Q par 10^{m+n}, ce qui revient à avancer la virgule de $m+n$ rangs à gauche dans le quotient périodique simple Q. Il suit de là, que la valeur décimale de $\frac{A}{B}$, contiendra $m+n$ chiffres entre la virgule et la première période (*), ce qui démontre le principe énoncé.

On prouverait de la même manière, que si le plus fort exposant m du facteur 5 dans B était plus grand que celui du facteur 2, la division de A par B donnerait un quotient décimal périodique mixte dont la partie décimale non périodique contiendrait m décimales.

Le principe énoncé dans la 1^{re} remarque est donc démontré.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{7}{2750}$ dont le dénominateur $2750 = 2 \times 5^3 \times 11$. Le plus fort exposant des facteurs 2, 5, dans le dénominateur étant 3, la division de 7 par 2750 donnera un quotient périodique mixte dont la partie décimale non périodique contiendra nécessairement trois chiffres. Et en effet, si l'on effectue cette division, on trouvera le quotient 0,002 54 54 54 etc., dont la partie décimale non périodique contient les trois chiffres 0, 0, 2.

(*) Par exemple, si Q = 4125,67 67 etc., en avançant la virgule de *trois* rangs à gauche, le résultat 4,125 67 67 etc., contiendra nécessairement *trois* chiffres entre la virgule et la première période. Mais cela n'aurait plus lieu, si le chiffre des unités de Q était le même que le dernier chiffre de la période ; car si l'on avait Q = 4127,67 67 etc., en avançant la virgule de *trois* rangs à gauche, le résultat 4,127 67 67 etc., ne renfermerait plus que *deux* chiffres entre la virgule et la première période 76.

2e Remarque. *Lorsque les facteurs 2, 5, sont affectés d'un même exposant m dans B, la partie décimale non périodique du quotient contient m chiffres.* En effet, dans ce cas, la fraction donnée est de la forme $\frac{A}{10^m \times N}$; on prouvera, comme dans la 1re *remarque*, que la fraction $\frac{A}{N}$ est irréductible; d'ailleurs le 1er chiffre à droite de *A* n'est pas zéro, puisque A ne contient aucun des facteurs 2, 5; la fraction $\frac{A}{N}$ sera donc exprimée par un quotient décimal périodique simple *Q* dans lequel le dernier chiffre de la partie entière ne sera jamais le même que le dernier chiffre de la période (3°); et par conséquent, lorsque pour obtenir la valeur décimale de $\frac{A}{10^m \times N}$, on avancera la virgule de *m* rangs vers la gauche dans la valeur *Q* de $\frac{A}{N}$, le nombre décimal périodique mixte que l'on obtiendra renfermera *m* décimales entre la virgule et la 1re période. Ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{21}{11000}$; on a

$$\frac{21}{11000}=\frac{21}{11\times 10^3},\quad \frac{21}{11}=1{,}90\,90 \text{ etc.},$$

$$\frac{21}{11\times 10^3}=0{,}001\,90\,90 \text{ etc.}$$

Les exposans des facteurs 2, 5, de 10, dans le dénominateur 11000, sont égaux à 3, et on voit que la partie décimale non périodique contient *trois* chiffres.

5°. *La division du numérateur d'une fraction par son dénominateur ne peut jamais donner un quotient décimal périodique indéfini Q dont la période soit égale à* 9. En effet, si la période était 9, le quotient *Q* serait égal à une fraction de la forme $\frac{a}{10^n}$ (page 121); la division de *a* par 10^n devrait reproduire le quotient indéfini *Q*, ce qui n'est pas possible (no **125**).

CHAPITRE IV.

Des carrés et de la racine carrée; des cubes et de la racine cubique; des puissances et des racines.

§ Ier. *Des carrés et de la racine carrée.*

145. *Le produit d'un nombre par lui-même est la deuxième puissance ou le* CARRÉ *de ce nombre; et le nombre qui multiplié par lui-même, fournit un nombre donné est la* RACINE DEUXIÈME, *ou la* RACINE CARRÉE *du nombre donné* (no **50**). Ainsi, le *carré* de 7, représenté par 7^2, est le produit 49 de 7 par 7; et la *racine carrée* de 49, indiquée par $\sqrt{49}$, est égale à 7, car $7\times 7=49$.

En général, pour qu'un nombre α soit la racine carrée d'un nombre *A*, il faut et il suffit que le carré α^2 de α soit égal à *A*. Le carré de $\sqrt{A}$ est donc *A*, quel que soit *A*.

Lorsqu'on veut indiquer le carré d'une quantité, on met cette quantité entre parenthèses, et on place le chiffre 2 à droite de la parenthèse et un peu au-dessus.

Ainsi, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ représente le carré de $\frac{4}{5}$; chacune des expressions $\left(3\frac{5}{7}\right)^2$, $\left(3+\frac{5}{7}\right)^2$, indique le carré de la somme $\frac{26}{7}$ des nombres 3, $\frac{5}{7}$.

Le signe $\sqrt{}$ a reçu le nom de *radical*; on dit que $\sqrt{7}$ est une *expression radicale*, ou un *radical carré*.

146. *Lorsque la racine carrée d'un nombre entier α tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine existe nécessairement; mais elle ne saurait être exprimée exacte-*

2^e REMARQUE. *Lorsque les facteurs 2, 5, sont affectés d'un même exposant m dans B, la partie décimale non périodique du quotient contient m chiffres.* En effet, dans ce cas, la fraction donnée est de la forme $\frac{A}{10^m \times N}$; on prouvera, comme dans la 1^re *remarque*, que la fraction $\frac{A}{N}$ est irréductible; d'ailleurs le 1^er chiffre à droite de A n'est pas zéro, puisque A ne contient aucun des facteurs 2, 5; la fraction $\frac{A}{N}$ sera donc exprimée par un quotient décimal périodique simple Q dans lequel le dernier chiffre de la partie entière ne sera jamais le même que le dernier chiffre de la période (3°); et par conséquent, lorsque pour obtenir la valeur décimale de $\frac{A}{10^m \times N}$, on avancera la virgule de m rangs vers la gauche dans la valeur Q de $\frac{A}{N}$, le nombre décimal périodique mixte que l'on obtiendra renfermera m décimales entre la virgule et la 1^re période. Ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, soit la fraction irréductible $\frac{21}{11000}$; on a

$$\frac{21}{11000} = \frac{21}{11 \times 10^3}, \quad \frac{21}{11} = 1{,}90\ 90 \text{ etc.},$$

$$\frac{21}{11 \times 10^3} = 0{,}001\ 90\ 90 \text{ etc.}$$

Les exposans des facteurs 2, 5, de 10, dans le dénominateur 11000, sont égaux à 3, et on voit que la partie décimale non périodique contient *trois* chiffres.

5°. *La division du numérateur d'une fraction par son dénominateur ne peut jamais donner un quotient décimal périodique indéfini Q dont la période soit égale à* 9. En effet, si la période était 9, le quotient Q serait égal à une fraction de la forme $\frac{a}{10^n}$ (page 121); la division de a par 10^n devrait reproduire le quotient indéfini Q, ce qui n'est pas possible (n° **125**).

CHAPITRE IV.

Des carrés et de la racine carrée; des cubes et de la racine cubique; des puissances et des racines.

§ I^er. *Des carrés et de la racine carrée.*

145. *Le produit d'un nombre par lui-même est la deuxième puissance ou le* CARRÉ *de ce nombre; et le nombre qui multiplié par lui-même, fournit un nombre donné est la* RACINE DEUXIÈME, *ou la* RACINE CARRÉE *du nombre donné* (n° **50**). Ainsi, le *carré* de 7, représenté par 7^2, est le produit 49 de 7 par 7; et la *racine carrée* de 49, indiquée par $\sqrt{49}$, est égale à 7, car $7 \times 7 = 49$.

En général, pour qu'un nombre α soit la racine carrée d'un nombre A, il faut et il suffit que le carré α^2 de α soit égal à A. Le carré de $\sqrt{A}$ est donc A, quel que soit A.

Lorsqu'on veut indiquer le carré d'une quantité, on met cette quantité entre parenthèses, et on place le chiffre 2 à droite de la parenthèse et un peu au-dessus.

Ainsi, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ représente le carré de $\frac{4}{5}$; chacune des expressions $\left(3\frac{5}{7}\right)^2$, $\left(3+\frac{5}{7}\right)^2$, indique le carré de la somme $\frac{26}{7}$ des nombres $3, \frac{5}{7}$.

Le signe $\sqrt{}$ a reçu le nom de *radical*; on dit que $\sqrt{7}$ est une *expression radicale*, ou un *radical carré*.

146. *Lorsque la racine carrée d'un nombre entier α tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine existe nécessairement; mais elle ne saurait être exprimée exacte-*

ment par aucun nombre. En effet; si un nombre pouvait exprimer cette racine, il serait décimal ou fractionnaire, et en le convertissant en fraction irréductible, le carré de cette fraction devrait être égal au nombre entier a; ce qui n'est pas possible (n° **115**). Le principe est donc démontré.

Remarque. Il est facile de concevoir pourquoi *certaines quantités ne sont pas susceptibles d'être exprimées exactement en nombres;* car une quantité peut croître d'une manière continue, tandis que les nombres ne jouissent pas de cette propriété.

Les nombres entiers et décimaux, et les fractions ordinaires ayant une *commune mesure* avec l'unité, on dit que ces quantités sont *commensurables;* et par opposition, les quantités qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité sont dites *incommensurables.*

Par exemple, $\frac{7}{5}$ est *commensurable*, car $\frac{1}{5}$ est contenu exactement 7 fois dans $\frac{7}{5}$ et 5 fois dans l'unité; la racine carrée de 5 est *incommensurable*, parce que ne pouvant être exprimée exactement par aucun nombre entier, ou décimal ou fractionnaire, il en résulte que si l'on conçoit l'unité divisée en un aussi grand nombre de parties égales qu'on voudra, l'une de ces parties ne sera jamais assez petite pour être contenue un nombre exact de fois dans la racine carrée de 5 et dans l'unité.

Il suit des définitions précédentes que *toute quantité commensurable est nécessairement un nombre entier, ou une fraction, ou un nombre décimal.* On en déduit qu'*une quantité commensurable peut toujours être remplacée par une fraction ordinaire équivalente.*

* **147.** Nous allons indiquer quelques *propriétés des quantités commensurables et incommensurables*, qui seront utiles par la suite.

1°. *Le produit de plusieurs facteurs commensurables ne change pas de valeur lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs;* car chaque facteur commensurable peut être remplacé par une fraction ordinaire équivalente (n° **146**), et le principe énoncé a été démontré (n° **115**, 1^{re} *remarque*) pour des fractions.

2°. *Le produit de plusieurs facteurs incommensurables ne change pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications.* En effet; considérons des facteurs incommensurables quelconques a, b, c, d, e,.....; tout se réduit à démontrer qu'on peut changer l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, de c et d par exemple. Or, on peut toujours concevoir des quantités commensurables *variables*, a', b', c', d', e',..., respectivement moindre que les facteurs donnés a, b, c, d, e,..., et susceptibles d'en approcher *indéfiniment* (*); de telle sorte que les différences $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$, $d-d'$, $e-e'$,..., deviennent aussi petites que l'on voudra. Soient,

$$A=abcde\ldots,\ B=abdce\ldots,\ A'=a'b'c'd'e'\ldots,\ B'=a'b'd'c'e'\ldots;$$

Il suit de (1°) que les produits A′, B′, seront constamment égaux. Les facteurs de A′ et B′ étant respectivement moindres que ceux de A et B, il est bien évident que les produits, A′, B′, seront respectivement moindres que A et B, et que les différences A—A′, B—B′, seront susceptibles de devenir aussi petites que l'on voudra. Cela posé: si *A* était plus grand que B, la différence A—B serait une quantité donnée et constante; le produit A′ pouvant approcher indéfiniment de A, la différence variable A—A′ finirait par devenir moindre que la constante A—B; de sorte que A′ finirait par dépasser B. Mais A′=B′; B′ deviendrait donc plus grand que B; ce qui est impossible; A ne saurait donc surpasser B.

On prouverait de même que B ne peut surpasser A.

Les produits A, B, sont donc égaux.

Les mêmes raisonnemens s'appliquent évidemment à un produit composé de facteurs commensurables et incommensurables. Ainsi, $5\times\sqrt{2}\times 3 = 3\times 5\times\sqrt{2}$.

(*) Toutes les fois qu'on dira qu'une quantité variable approche *indéfiniment* d'une quantité constante, on entendra que la différence entre ces deux quantités est susceptible de devenir moindre que toute grandeur donnée.

3°. *Pour multiplier un nombre A par le produit P de plusieurs facteurs, a, b, $c\ldots$, il suffit de multiplier successivement par les facteurs, a, b, $c\ldots$, de P.* Car, il suit de (1°) et (2°), que

$$A\times P=P\times A=abc\ldots\times A=A\times a\times b\times c\ldots$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

4°. *Pour élever le produit de plusieurs facteurs au carré, il suffit d'élever chaque facteur au carré;* c'est-à-dire que le carré du produit de facteurs (commensurables ou incommensurables) est égal au produit des carrés de ces facteurs. Cette propriété se déduit des principes établis (1°, 2° et 3°).

Par exemple, d'après ces principes,

$$(abc)^2=abc\times abc=abc\times a\times b\times c$$
$$=abcabc=aabbcc=a^2b^2c^2.$$

5°. *Le produit de plusieurs radicaux carrés est égal à la racine carrée du produit des quantités placées sous ces radicaux.* Car d'après (4°), le carré de $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots$, étant, $(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\times(\sqrt{c})^2\ldots$, ou $a\times b\times c\ldots$, il suit de la définition de la racine carrée, que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots$ exprime la racine carrée de $abc\ldots\ldots$

Ainsi, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots=\sqrt{a\times b\times c\ldots}$

Par exemple, $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{18\times 2}=\sqrt{36}=6.$

Remarque. *Pour obtenir la racine carrée du produit de plusieurs facteurs, il suffit d'extraire la racine carrée de chaque facteur;* c'est-à-dire que la racine carrée du produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines carrées de ces facteurs. Car, $\sqrt{abc\ldots}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots$

6°. *Le quotient de la racine carrée d'un nombre par la racine carrée d'un autre nombre est égal à la racine carrée du quotient du 1er nombre par le 2e.* Car d'après (5°), le produit de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ par $\sqrt{b}$ étant $\sqrt{a}$, le quotient de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$ est $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Ainsi, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Par exemple, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3.$

7°. En général, toute quantité incommensurable pouvant être considérée comme une *limite*, dont on conçoit qu'on peut approcher autant qu'on veut avec une grandeur commensurable, des raisonnemens analogues à ceux dont on a fait usage (2°) serviront à faire voir que *les propriétés démontrées pour les nombres, entiers et fractionnaires, conviennent aux quantités incommensurables.*

8°. Une quantité commensurable ne pouvant être qu'un nombre entier ou décimal, ou une fraction, il en résulte que *la somme, la différence, le produit et le quotient de deux quantités commensurables sont toujours commensurables.*

9°. *Lorsque dans le produit de deux facteurs, un des facteur* A *étant commensurable, l'autre facteur* B *est incommensurable, le produit AB est nécessairement incommensurable.* En effet; si le produit était commensurable, en le divisant par A, le quotient B serait commensurable (8°); ce qui est contre l'hypothèse.

On démontrera d'une manière semblable les propriétés suivantes:

10°. *Le produit de deux facteurs incommensurables peut être commensurable ou incommensurable.*

Ainsi, $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$, $\sqrt{3}\times\sqrt{7}=\sqrt{21}$, et $\sqrt{21}$ est incommensurable (n° 146).

11°. *Le quotient d'une quantité incommensurable par une quantité commensurable, est incommensurable.*

12°. *Le quotient d'une quantité commensurable, par une quantité incommensurable, est toujours incommensurable.*

13°. *Le quotient de deux quantités incommensurables l'une par l'autre, peut être commensurable ou incommensurable.*

Ainsi, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$.

148. La *formation du carré d'un nombre* ne saurait offrir aucune difficulté, car elle se réduit à calculer le produit de deux facteurs égaux. Nous allons voir comment on peut *calculer la racine carrée d'un nombre quelconque.*

De la racine carrée des nombres entiers.

149. Les carrés des nombres, 1, 10, 100, 1000, etc., étant 1, 100, 10000, 1000000, etc., *les nombres compris entre* 1 *et* 100, *entre* 100 *et* 10000, *entre* 10000 *et* 1000000, *etc., ont leurs racines carrées comprises entre* 1 *et* 10, *entre* 10 *et* 100, *entre* 100 *et* 1000, *etc.*

Par conséquent, *lorsqu'un nombre entier n'a pas plus de deux chiffres, la partie entière de sa racine carrée n'a qu'un seul chiffre; lorsqu'un nombre a trois ou quatre chiffres, la partie entière de sa racine carrée a deux chiffres; lorsqu'un nombre a cinq ou six chiffres, la partie entière de sa racine carrée a trois chiffres; et ainsi de suite.*

150. Les carrés des nombres d'un seul chiffre étant moindres que 10^2 ou que 100, on revient de ces carrés à leurs racines carrées, en faisant usage du *tableau* suivant :

Racines,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
Carrés,	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Ce *tableau* peut aussi servir à *déterminer la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre moindre que* 100.

Par exemple, pour trouver la racine carrée du plus grand carré contenu dans 38, on cherche, dans la seconde ligne du *tableau*, les deux carrés consécutifs qui comprennent 38; on voit que 38 est compris entre les carrés 36, 49, des nombres 6 et 7; la racine carrée de 38 tombe donc entre 6 et 7; on dit par cette raison, que *le plus grand carré* contenu dans 38 est 36, et que la racine carrée du plus grand carré contenu dans 38 est 6. La *partie entière* ou *la plus petite valeur entière approchée* de $\sqrt{38}$ est 6.

151. Pour découvrir le procédé qui servira à *extraire la ra-*

cine carrée d'une nombre entier N *plus grand que* 100, nous chercherons d'abord comment les parties de la racine entrent dans la composition du carré.

Quelle que soit la racine carrée R de N, on peut la concevoir décomposée en deux parties a, b, telles que $R = a + b$. On obtiendra le carré N de $a + b$ ou $(a+b)^2$ en multipliant $a + b$ par $a + b$. Si l'on forme ce produit au moyen du principe du n° **34** (2°), on trouvera qu'il est égal à

$$a \times a + b \times a + a \times b + b \times b, \quad \text{ou à} \quad a^2 + ba + ab + b^2.$$

Or, on a démontré (n° **147**) que les produits ab, ba, sont égaux quels que soient a et b. On a donc

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Cela démontre que *le carré d'une somme formée de deux parties est composé du carré de la* 1^re^ *partie, du double de la* 1^re^ *partie multiplié par la* 2^e^, *et du carré de la* 2^e^ *partie.*

Remarque. D'après la règle précédente, le carré de $a + 1$ étant $a^2 + 2a + 1$, l'excès du carré de $a + 1$ sur le carré de a est $2a + 1$. Par conséquent, *lorsqu'un nombre augmente de* 1, *son carré augmente du double de ce nombre, plus* 1.

152. On déduit du principe du n° **151**, que *le carré d'un nombre entier, composé de dixaines et d'unités, contient trois parties, savoir : le carré des dixaines, le double des dixaines multiplié par les unités, et le carré des unités.* Ces trois produits expriment respectivement des *centaines*, des *dixaines* et des *unités;* car le carré d'une dixaine étant une centaine, le carré de a dixaines est a^2 centaines; et des dixaines multipliées par des unités donnent nécessairement des dixaines.

Par exemple, le nombre 64 étant formé de 6 dixaines plus 4 unités, le carré de 64 est composé : du carré de 6 dixaines, qui est 6^2 centaines ou 36 centaines; du double de 6 dixaines multiplié par 4 unités, ou de 12 dixaines multiplié par 4, ou de 48 dixaines, et du carré de 4 unités qui est 16 unités. La somme des trois produits partiels 36 centaines, 48 dixaines, 16 unités, donne le carré 4096 de 64. La multiplication de 64 par 64 conduit au même résultat.

De même, 649 étant égal à 64 dixaines plus 9 unités, on a
$$649^2 = 64^2 \text{ centaines} + 2 \text{ fois } 64 \text{ dixaines} \times 9 + 9^2$$
$$= 409600 + 11520 + 81 = 421201.$$

153. Nous allons faire voir que les principes précédens fournissent le moyen de *calculer la racine carrée R d'un nombre entier quelconque N.*

1er Exemple. *Extraire la racine carrée de 4096.*

On dispose le calcul de la manière suivante :

carré........	40.96	64 *Racine.*
	36	*Essai*
1er *reste*. .	49.6	*du chiffre* 4.
	496	124
		4
2e *reste*...	0	496.

Le nombre 4096 ayant quatre chiffres, il résulte du principe du n° **149** que la partie entière de $\sqrt{4096}$ aura deux chiffres a, b, qui représenteront respectivement des dixaines et des unités.

Pour déterminer le chiffre, a, des dixaines de $\sqrt{4096}$, concevons que la racine cherchée R de 4096 soit décomposée en a dixaines plus en une quantité r moindre que 10. Il suit du principe du n° **151** que le carré 4096 de cette racine sera formé du carré de a dixaines, du double produit de a dixaines par r, et du carré r^2 de r. Or, le carré de a dixaines exprimant des centaines, ne saurait se trouver que dans les 40 centaines de 4096; on sépare ces centaines à l'aide d'un *point* placé sur leur droite; de sorte que 4096 est partagé en deux *tranches* 40 et 96.

Nous allons démontrer que la racine carrée du plus grand carré contenu dans la 1re tranche à gauche 40 (cette tranche représente des centaines), exprime le 1er chiffre a des dixaines de R. En effet, on voit à l'aide du *tableau* (page 136), que la 1re tranche 40 tombe entre les carrés 36, 49, des nombres 6 et 7; 40 centaines ou 4000 est donc nécessairement compris

entre 6^2 et 7^2 centaines. Or, 4000 étant plus grand que 6^2 centaines, 4096 est à plus forte raison plus grand que 6^2 centaines. D'ailleurs, comme 40 centaines et 7^2 centaines diffèrent au moins d'une centaine, le nombre 4096 (composé de 40 centaines plus 96 unités) est nécessairement moindre que 7^2 centaines. Le nombre 4096 est donc compris entre 6^2 et 7^2 centaines, c'est-à-dire entre les carrés de 6 et 7 dixaines; la racine carrée de 4096 est donc comprise entre 6 et 7 dixaines; elle est donc composée de 6 dixaines, plus de la quantité r moindre que 10. On obtiendra donc le chiffre des dixaines de $\sqrt{4096}$ en prenant la racine carrée du plus grand carré 36 contenu dans le nombre 40 des centaines de 4096.

Connaissant le chiffre 6 des dixaines de R, pour trouver le chiffre b des unités de R, on observe que R étant égal à 6 dixaines $+ r$, il suit du principe du n° **151** que le carré 4096 de R sera composé : du carré des 6 dixaines qui vaut 36 centaines, du double des 6 dixaines multiplié par r, et du carré r^2 de r. Par conséquent, si l'on ôte 36 centaines de 4096, le reste 496 ne contiendra plus que le double des 6 dixaines de R multiplié par r, et le carré r^2 de r. De sorte que
$$496 = 2 \text{ fois } 6 \text{ dixaines} \times r + r^2.$$

Le mécanisme du calcul qui a conduit au reste 496 se réduit à ôter 36 de la 1re tranche 40, et à placer la 2e tranche 96 sur la droite du résultat 4 de cette soustraction.

Cela posé : la 2e partie r de R ne saurait être moindre que le chiffre b des unités de R; les 49 dixaines de 496 ne sont donc jamais moindres que 2 fois 6 dixaines multipliées par b. Ainsi, en divisant le nombre 49 des dixaines de 496, par le double 12 du nombre 6 des dixaines de R, les 4 unités du quotient ne seront jamais moindres que b; ces quatre unités du quotient exprimeront donc le chiffre b des unités de R, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible.

Pour essayer le chiffre 4, on pourrait ôter 64^2 de 4096; le reste zéro indiquerait que 4096 est le carré de 64.

Il existe une manière plus simple d'essayer le chiffre 4. En effet, d'après le principe du n° **152**, le carré de 64 ou de 6 dixaines plus 4 unités, est composé : du carré 36 centaines des 6 dixaines de 64, du double des 6 dixaines de 64 multiplié par les 4 unités de 64, et du carré 16 de ces 4 unités. Or, on a trouvé le 1[er] reste 496 en ôtant 36 centaines de 4096; on obtiendra donc l'excès de 4096 sur 64^2, en ôtant de 496 la *somme* des deux dernières parties du carré de 64. Pour former cette *somme*, il suffit de placer le chiffre 4 des unités de 64 sur la droite du double 12 du nombre 6 des dixaines de la racine, et de multiplier le résultat 124 par 4, car le produit 124×4 est formé du double 12 dixaines des 6 dixaines de 64, multiplié par les 4 unités de 64, et du carré 4×4 des 4 unités de 64. Par conséquent, au lieu de retrancher le carré de 64 de 4096, ce qui a donné zéro pour dernier reste, il revient au même, de placer le chiffre 4 des unités de 64 sur la droite du double 12 du chiffre 6 des dixaines de 64, ce qui donne 124, et d'ôter du 1[er] reste 496, le produit de 124 par le chiffre 4 des unités de R.

Ainsi, pour calculer la racine carrée R du nombre 4096, on le divise en tranches de deux chiffres à partir de la droite, en plaçant un *point* entre les tranches. La racine 6 du plus grand carré 36 contenu dans la 1[re] tranche 40 détermine le 1[er] chiffre 6 de la racine R (ce chiffre exprime des dixaines); on ôte de la 1[re] tranche 40 le carré 36 du 1[er] chiffre 6 de R, et sur la droite du résultat 4 de cette soustraction on abaisse la 2[e] tranche 96, ce qui donne le 1[er] reste 496; on place un *point* sur la droite des 49 dixaines de 496, et on divise 49 par le double 12 du 1[er] chiffre 6 obtenu à la racine; les 4 unités du quotient expriment le 2[e] chiffre de R, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer le chiffre 4, on le place à droite du double 12 du 1[er] chiffre 6 de R, et on multiplie le résultat 124 par 4; on retranche ce produit de 496; le reste étant zéro, le 2[e] chiffre de R est 4, et le nombre 64 obtenu à la racine est la racine carrée exacte de 4096.

154. Le raisonnement dont on a fait usage (n° **153**) pour trouver le chiffre des dixaines de $\sqrt{4096}$ fait voir que *la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre des*

centaines d'un nombre entier N, *détermine le nombre des dixaines de* $\sqrt{N}$.

* Pour démontrer généralement cette propriété, nous désignerons : par C le nombre des centaines de N, et par A la racine carrée du plus grand carré contenu dans C. Le nombre C tombant entre A^2 et $(A+1)^2$, C centaines sera compris entre A^2 et $(A+1)^2$ centaines. Puisque C centaines surpasse A^2 centaines, N qui est plus grand que C centaines, sera à plus forte raison plus grand que A^2 centaines. D'ailleurs, C centaines et $(A+1)^2$ centaines diffèrent au moins d'une centaine, et C centaines est moindre que $(A+1)^2$ centaines; le nombre N, composé de C centaines plus d'une quantité moindre que 100, sera donc nécessairement moindre que $(A+1)^2$ centaines; N est donc compris entre A^2 et $(A+1)^2$ centaines; c'est-à-dire que N est compris entre les carrés de A et $A+1$ dixaines; $\sqrt{N}$ est donc comprise entre A et $A+1$ dixaines; $\sqrt{N}$ est donc composée de A dixaines plus d'une quantité moindre que 10. On obtiendra donc le nombre des dixaines de la racine carrée d'un nombre entier quelconque N, en prenant la racine carrée A du plus grand carré A^2 contenu dans le nombre C des centaines de N.

155. 2[e] Exemple. *Extraire la racine carrée de* 4123.

Les raisonnemens employés dans le 1[er] exemple (page 138) conduisent aux calculs suivants :

	41.2 3	64
	36	*Essai du chiffre* 4.
1[er] *reste*....	5 2.3	124
	4 9 6	4
2[e] *reste*....	2 7	496

On trouve que la partie entière de $\sqrt{4123}$ est 64. Le 2[e] et *dernier reste* 27 exprime l'excès de 4 123 sur le carré de 64, car on est parvenu à ce reste après avoir diminué 4 123 des parties qui composent le carré de $60+4$ ou de 64.

Remarque. Le principe du n° **151** fait voir que *le nombre* 64 *obtenu à la racine exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre donné* 4123 ; c'est-à-dire que 4123 tombe entre 64^2 et 65^2. En effet :

1°. Le dernier reste 27 étant égal à $4123 - 64^2$, on est certain que 4123 est plus grand que 64^2.

2°. Pour s'assurer que 4123 est moindre que 65^2, on observe que la remarque du n° **151** donne

$$(64 + 1)^2 = 64^2 + 64 \times 2 + 1.$$

Or, 27 ou $4123 - 64^2$, est moindre que $64 \times 2 + 1$; 4123 est donc moindre que $64^2 + 64 \times 2 + 1$ ou que 65^2.

Si le dernier reste 27 n'était pas moindre que le double du nombre 64 obtenu à la racine augmenté de 1, on en conclurait que 4123 ne serait pas moindre que 65^2 ; ce qui ferait voir que le nombre obtenu à la racine serait trop faible au moins d'une unité.

En général : *Pour que le nombre entier obtenu à la racine soit la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre donné, il faut et il suffit que le dernier reste soit moindre que le double du nombre entier obtenu à la racine augmenté d'une unité.*

3e Exemple. *Extraire la racine carrée de* 412164.

On effectue le calcul de la manière suivante :

Carré...	41.21.64	642.	*Racine.*
	36	*Essai du chiffre* 4.	*Essai du chiffre* 2.
1er reste....	52.1	124	1282
	496	4	2
2e reste....	256.4	496	2564.
	2564		
3e et dernier reste.	0		

Le nombre 412164 ayant six chiffres, la partie entière de la racine carrée R de 412164 aura trois chiffres a, b, c, (n° **145**) qui représenteront respectivement des centaines, des dixaines et des unités. On peut donc concevoir que cette partie entière soit décomposée en un nombre D de dixaines exprimé

par les deux premiers chiffres a, b, de R, plus en un nombre c d'unités moindre que 10.

Pour calculer D, on observe que le carré de D dixaines étant D^2 centaines, ne peut se trouver que dans les 4121 centaines de 412164 (on sépare ces centaines en mettant un point sur leur droite) ; et d'après le principe du n° **154**, la racine carrée du plus grand carré contenu dans 4121 exprimera D. On obtiendra donc le nombre D des dixaines de $\sqrt{412164}$, en calculant la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre 4121 qui contient deux chiffres de moins que le nombre 412164 proposé.

Si l'on opère comme dans le 2e *exemple*, en regardant 4121 comme des unités simples, le carré du chiffre a des dixaines de $\sqrt{4121}$ se trouvera dans les 41 centaines de 4121 (on séparera ces 41 centaines en plaçant un point sur leur droite) ; de sorte que le nombre donné 412164 sera décomposé en trois tranches 41, 21, 64. La racine carrée 6 du plus grand carré contenu dans 41 sera le chiffre a des dixaines de D.

Pour trouver le chiffre b des unités de $\sqrt{4121}$, on ôte 6^2 ou 36 de la 1re tranche 41, et sur la droite du reste 5, on abaisse la 2e tranche 21 ; le résultat 521 exprime le reste que l'on obtiendrait en ôtant 60^2 du nombre 4121 formé par les deux premières tranches 41, 21. On sépare les 52 dixaines du 1er reste 521 en plaçant un point sur leur droite ; on divise 52 par le double 12 du 1er chiffre 6 obtenu à la racine ; les 4 unités du quotient expriment le 2e chiffre de D ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer le chiffre 4, on le place à droite du double 12 du 1er chiffre 6 de R, et l'on multiplie le résultat 124 par 4, ce qui donne 496 ; ce dernier nombre (qui exprime la somme des deux dernières parties du carré de $60 + 4$ ou de 64) étant moindre que le 1er reste 521, on est certain que le 2e chiffre b de D est 4. De sorte que $D = 64$.

La remarque du n° **151** fait voir que 64 est la racine carrée du plus grand carré contenu dans 4121, c'est-à-dire que 4121 tombe entre 64^2 et 65^2. En effet; le 1[er] reste 521 étant égal à 4121 diminué du carré des 6 dixaines du nombre 64 obtenu à la racine, si l'on ôte de 521 le produit 496 de 124 par 4 (qui exprime la somme des deux autres parties du carré de 64), le reste 25 sera égal à $4121 - 64^2$. Ainsi, 4121 est plus grand que 64^2. Mais, 25 est moindre que $64 \times 2 + 1$; $4121 - 64^2$ est donc moindre que $64 \times 2 + 1$; 4121 est donc moindre que $64^2 + 64 \times 2 + 1$, ou que $(64+1)^2$, ou que 65^2. Le nombre 4121 tombe donc entre 64^2 et 65^2.

La racine carrée R de 412164 est donc composée de 64 dixaines, plus d'une quantité r moindre que 10.

Connaissant le nombre 64 des dixaines de R, pour trouver le chiffre c des unités de R, on observe que R étant égal à 64 dixaines $+ r$, il suit du principe du nº **151** que le carré 412164 de R est composé : du carré des 64 dixaines de R, du double de ces 64 dixaines multiplié par r, et du carré r^2 de r.

Par conséquent, si l'on ôtait de 412 164 le carré de 64 dixaines, le reste 2 564 ne contiendrait plus que les deux autres parties du carré de 64 dixaines $+ r$.

Mais, on est parvenu plus simplement au 2[e] reste 2 564, en observant que d'après le calcul qui a fourni les 64 dixaines de R, on a $4\,121 - 64^2 = 25$. Donc

$$4\,121 \textit{ centaines} - 64^2 \textit{ centaines} = 25 \textit{ centaines}.$$

Or, 64^2 centaines est le carré de 64 dixaines ou de 640. On a donc, $412\,100 - 640^2 = 2\,500$.

Si l'on ajoute de part et d'autre la 3[e] et dernière tranche 64, on aura $412\,164 - 640^2 = 2\,564$.

Ainsi, pour obtenir l'excès de 412 164 sur 640^2, il suffit d'abaisser la 3[e] tranche 64 sur la droite du reste 25 que l'on a trouvé en calculant les 64 dixaines de R.

Il résulte du calcul précédent que le 2[e] reste 2 564 est composé du double des 64 dixaines de R multiplié par r, plus du carré r^2 de r; de sorte que

$$2654 = 2 \text{ fois } 64 \text{ dixaines} \times r + r^2.$$

Or, la 2[e] partie r de R ne saurait être moindre que le chiffre cherché c des unités de R; les 256 dixaines du 2[e] reste 2 564 ne sont donc pas moindres que le produit de 2 fois 64 dixaines par c. Par conséquent, si l'on divise le nombre 256 des dixaines du 2[e] reste 2564, par le double 128 du nombre 64 des dixaines obtenues à la racine, les 2 unités du quotient exprimeront le chiffre c des unités de R ou un chiffre plus grand, mais jamais un chiffre plus faible.

On pourrait essayer le chiffre 2 en retranchant 642^2 de 412 164; le reste zéro indiquerait que 412 164 est égal à 642^2; de sorte que 642 est la racine demandée.

Mais, d'après ce que nous avons fait remarquer (page 139), il existe une manière plus simple d'essayer le chiffre 2. En effet, il résulte du principe du nº **152**, que le carré de 642 est composé : du carré des 64 dixaines de 642, du double de ces 64 dixaines multiplié par les 2 unités de 642, et du carré de ces 2 unités. Or, on a vu que le 2[e] reste 2 564 est égal à 412164 diminué du carré des 64 dixaines de 642. On obtiendra donc l'excès de 412164 sur 642^2, en ôtant de 2564, la somme des deux dernières parties du carré de 642. Pour former cette somme, il suffit de placer le chiffre 2 des unités de 642 sur la droite du double 128 du nombre 64 des dixaines de R, et de multiplier le résultat 1 282 par 2; car le produit est composé du double des 64 dixaines de R multiplié par les 2 unités de R, et du carré des 2 unités.

Par conséquent, au lieu d'ôter de 412 164, le carré de 642, il revient au même de placer le chiffre 2 que l'on essaie, sur la droite du double 128 du nombre 64 des dixaines de R, ce qui donne 1282; et d'ôter du 2[e] reste 2564, le produit de 1282 par 2; le reste de cette dernière soustraction exprime l'excès de 412 164 sur le carré du nombre 642 obtenu à la racine. Ce reste étant nul, le nombre donné 412 164 est le carré de 642; de sorte que 642 est la racine carrée exacte de 412 164.

Ainsi, pour calculer la racine carrée R du nombre 412 164, on le divise en *tranches* de deux chiffres à partir de la droite, en plaçant un *point* entre deux tranches consécutives; le nombre 3 de ces tranches indique que la partie entière de R aura trois chiffres, c'est-à-dire qu'elle contiendra des centaines, des dixaines et des unités.

Pour *déterminer le* 1^{er} *chiffre à gauche de* R, on cherche la racine carrée du plus grand carré 36 contenu dans la 1^{re} tranche à gauche 41; cette racine est 6; elle exprime le 1^{er} chiffre à gauche de R.

Pour *trouver le* 2^e *chiffre de* R, on ôte de la 1^{re} tranche 41, le carré 36 du 1^{er} chiffre 6 de R; sur la droite du résultat 5, on abaisse la 2^e tranche 21 du nombre 412164 proposé, ce qui donne le 1^{er} reste 521; on sépare les 52 dixaines de 521, en mettant un point sur leur droite; on divise le nombre 52 des dixaines de 521 par le double 12 du 1^{er} chiffre de R; les quatre unités du quotient expriment le 2^e chiffre de R, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible.

Pour essayer le chiffre 4, on écrit 4 sur la droite du double 12 du 1^{er} chiffre 6 de R, et on multiplie le résultat 124 par 4; le produit 496 étant moindre que 521, on est certain que le 2^e chiffre de R est 4.

Enfin, pour *trouver le* 3^e *chiffre de* R, on ôte 124×4 ou 496 de 521; sur la droite du résultat 25, on abaisse la 3^e et dernière tranche 64, ce qui donne le 2^e reste 2 564; on sépare les 256 dixaines de 2564, en mettant un point sur leur droite; on divise 256 par le double 128 du nombre 64 obtenu à la racine; les 2 unités du quotient expriment le 3^e chiffre de R ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible.

Pour essayer le chiffre 2, on le place sur la droite de 128, et on multiplie le résultat 1282 par 2. On retranche le produit du 2^e reste 2564; le 3^e et dernier reste, fourni par cette soustraction, exprime l'excès de 412164 sur le carré du nombre 642 obtenu à la racine; ce 3^e reste étant nul, le 3^e chiffre de R est 2, et le nombre 642 ainsi obtenu à la racine, est la racine carrée exacte de 412164.

REMARQUE. D'après le raisonnement précédent, le 1^{er} chiffre

6 de $\sqrt{412164}$, exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans la première tranche 41 de 412164; le 1^{er} reste 521 exprime l'excès de 4121 sur 60^2. Le nombre 64 formé par les deux premiers chiffres de R exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre 4121 formé par les deux premières tranches 41,21; le 2^e reste 2564 exprime l'excès de 412 164 sur 640^2. Enfin, le nombre 642 formé par les trois premiers chiffres de R, exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre 412164 formé par les trois tranches 41,21,64. Le *dernier reste* exprime l'excès de 412164 sur 642^2; ce reste étant nul, le nombre 642 obtenu à la racine est la racine carrée de 412 164.

4^e EXEMPLE. *Extraire la racine carrée de* 413256.

Des raisonnemens semblables à ceux dont on vient de faire usage dans le 3^e *exemple*, conduisent aux calculs suivans :

	41.3 2.5 6	642	
	36	*Essai du chiffre* 4	*Essai du chiffre* 2
1^{er} *reste*. .	5 3.2	124	1282
	4 9 6	4	2
2^e *reste*. .	3 6 5.6	496	2564.
	2 5 6 4		
3^e *reste*. .	1 0 9 2		

On trouve que la partie entière de la racine cherchée R de 413 256 est 642, et que l'excès de 413 256 sur le carré de 642 est 1092.

Le principe du nº **151** fait voir que 642 exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans 413 256; car le dernier reste 1092 étant égal à $413\,256-642^2$, on est certain que 413 256 surpasse 642^2; et comme 1092 est moindre que $642\times2+1$, on voit que le nombre 413 256 est moindre que $642^2+642\times2+1$, ou que $(642+1)^2$, ou que 643^2.

Remarque. D'après les calculs qui ont conduit au 3^e et *dernier reste* 1092, le 1^{er} chiffre 6 à gauche de R, exprime la racine carrée du plus grand carré 36 contenu dans la 1^{re} tranche à gauche 41; le nombre 64, formé par les deux premiers chiffres de R, exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre 4132 formé des deux premières tranches 41,32; et enfin le nombre 642, formé par les trois premiers chiffres de R, exprime la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre 413 256 formé par les trois tranches 41,32,56, de 413 256.

Pour *faire la preuve*, on ajoute au dernier reste 1092, le carré des 642 unités obtenues à la racine, la somme étant égale au nombre 413 256 dont on a cherché la racine carrée, il est très probable qu'on n'a pas commis des fautes de calcul.

156. En général : *Pour calculer la racine carrée R d'un nombre entier quelconque N, on dispose et on exécute les calculs comme il a été indiqué dans les exemples précédens. On divise* N *en tranches de deux chiffres à partir de la droite, en plaçant un point entre deux tranches consécutives quelconques (la* 1re *tranche à gauche peut ne contenir qu'un seul chiffre); le nombre des tranches indique combien il y aura de chiffres dans la partie entière de* R (n° **149**).

Pour déterminer le 1er *chiffre à gauche de R, on cherche la racine carrée du plus grand carré contenu dans la* 1re *tranche à gauche* (n° **150**); *cette racine exprime le* 1er *chiffre demandé.*

Pour trouver le 2e *chiffre de R, on ôte de la* 1re *tranche le carré du* 1er *chiffre obtenu à la racine, et sur la droite du résultat on abaisse la* 2e *tranche; ce qui donne le* 1er *reste, dont on sépare les dixaines en plaçant un point sur leur droite. On divise le nombre des dixaines du* 1er *reste par le double du* 1er *chiffre de R; la partie entière du quotient exprime le* 2e *chiffre de* R, *ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer ce* 2e *chiffre, on le place sur la droite du double du* 1er *chiffre de R, et on multiplie le résultat par ce même chiffre. Quand le produit n'est pas plus grand que le* 1er *reste, le chiffre qui vient d'être essayé est le* 2e *chiffre de R. Quand ce produit surpasse le* 1er *reste, on diminue successivement le chiffre que l'on essaie d'une unité, jusqu'à ce que le chiffre que l'on essaie étant placé à la droite du double du nombre obtenu à la racine, le nombre qui en résulte multiplié par ce chiffre donne un produit qui ne soit pas plus grand que le* 1er *reste; le chiffre qui satisfait à cette condition est le* 2e *chiffre de R; on écrit ce* 2e *chiffre de R à la droite du* 1er *chiffre déjà obtenu.*

Pour trouver le 3e *chiffre de R, on retranche du* 1er *reste le dernier produit que l'on vient de former en plaçant le* 2e *chiffre de R sur la droite du double du* 1er *chiffre, et en multipliant le résultat par ce* 2e *chiffre; sur la droite du résultat de cette soustraction, on abaisse la* 3e *tranche de N; ce qui fournit le* 2e *reste, dont on sépare les dixaines en plaçant un point sur leur droite. On divise le nombre des dixaines de ce* 2e *reste par le double du nombre formé par les deux premiers chiffres de R; la partie entière du quotient exprime le* 3e *chiffre de R ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer ce chiffre, on le place sur la droite du double du nombre formé par les deux premiers chiffres de R, et on multiplie le résultat par le chiffre que l'on essaie; quand le produit n'est pas plus grand que le* 2e *reste, le chiffre essayé est le* 3e *chiffre de R; quand ce produit surpasse le* 2e *reste, on diminue successivement d'une unité le chiffre que l'on essaie, jusqu'à ce qu'en le plaçant à la droite du double du nombre obtenu à la racine, le nombre qui en résulte multiplié par ce chiffre donne un produit qui ne soit pas plus grand que le* 2e *reste; le chiffre qui satisfait à cette condition est le* 3e *chiffre de R; on écrit ce* 3e *chiffre sur la droite des deux premiers.*

En continuant à opérer de cette manière, on obtiendra successivement les différens chiffres de la partie entière E de la racine R demandée.

1re Remarque. Lorsque le nombre des dixaines de l'un des restes est moindre que le double du nombre obtenu à la racine, la partie entière du quotient du 1er nombre par le 2e étant zéro, le chiffre correspondant de la racine est un zéro; car on a vu (nos **153** et **155**) que cette partie entière du quotient n'est jamais moindre que le chiffre correspondant de la racine. Lorsque cette partie entière du quotient surpasse 9, on ne doit cependant essayer que le chiffre 9, qui peut même être trop fort.

2^e Remarque. Lorsque, après avoir abaissé la dernière des tranches du nombre donné N, on aura trouvé le chiffre des unités de $\sqrt{N}$, le *dernier reste* que l'on obtiendra exprimera l'excès de N sur le carré du nombre entier E obtenu à la racine. Par conséquent, lorsque le dernier reste est nul, le nombre E obtenu à la racine est la racine carrée *exacte* du nombre donné N. Quand le dernier reste n'est pas nul, le nombre E obtenu à la racine est la partie entière de la racine demandée; cette racine est incommensurable (n° **146**); nous verrons dans les n^{os} **167** et **168**, que l'emploi des décimales fournit le moyen d'approcher autant qu'on veut de la valeur de cette racine incommensurable.

3^e Remarque. Pour *faire la preuve*, on ajoute au dernier reste, le carré du nombre E obtenu à la racine, la somme doit être égale au nombre dont on a cherché la racine carrée.

De plus, pour que le nombre entier E obtenu à la racine soit la racine carrée du plus grand carré contenu dans le nombre donné N, il faut et il suffit que le dernier reste soit moindre que $2E+1$.

En appliquant la règle précédente, on trouvera

$$\sqrt{7817616}=2796,\ \sqrt{492804}=702,\ \sqrt{49112064}=7008;$$

on verra que la partie entière de $\sqrt{78\ 17963}$ est 2796, et que celle de $\sqrt{49115076}$ est 7008.

157. Lorsqu'en appliquant la règle du n° **156**, on reconnaît que le chiffre que l'on essaie est trop fort, si on le diminue d'une seule unité à chaque essai, on parviendra nécessairement à trouver le véritable chiffre de la racine.

Mais, si l'on diminuait le chiffre qui est trop fort, de plusieurs unités à la fois, on risquerait de trouver un chiffre trop faible. Dans ce cas, la *remarque* du n° **151** peut servir à *reconnaître si le chiffre mis à la racine est trop faible.*

Du carré et de la racine carrée des fractions ordinaires et des nombres décimaux.

158. *Le carré d'une fraction peut s'obtenir en élevant séparément le numérateur et le dénominateur au carré.* Car la règle du n° **115** donne,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}.$$

159. *Pour trouver la racine carrée d'une fraction, on peut extraire séparément la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur.* Car on a vu (n° **147**, 6°) que

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.\ \text{Ainsi},\ \sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5},\quad \sqrt{\frac{48}{25}}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{48}}{5}.$$

La racine carrée de 48 étant incommensurable (n° **146**), il suit de la propriété du n° **147** (11°) que la racine carrée de $\frac{48}{25}$ est incommensurable.

160. Il est facile de réduire la recherche de la racine carrée d'une fraction, à calculer la racine carrée d'un seul nombre entier. Car,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b},\quad (\text{n° } \mathbf{159}).$$

La racine carrée d'une fraction est donc égale à la racine carrée du produit de ses deux termes divisée par son dénominateur. Ainsi,

$$\sqrt{\frac{23}{7}}=\frac{\sqrt{23\times 7}}{7}=\frac{\sqrt{161}}{7}.$$

La valeur de $\sqrt{161}$ étant comprise entre 12 et 13, la racine carrée de $\frac{23}{7}$ est incommensurable, et tombe entre $\frac{12}{7}$ et $\frac{13}{7}$;

chacune de ces deux dernières fractions exprime donc la racine carrée de $\frac{23}{7}$ à moins de $\frac{1}{7}$ d'unité.

Remarque. Si l'on multipliait les deux termes de la fraction donnée par son numérateur, on verrait que la racine carrée d'une fraction peut encore s'obtenir en divisant son numérateur par la racine carrée du produit de ses deux termes. Mais, la recherche du quotient d'un nombre entier par une quantité incommensurable, ayant le double inconvénient de conduire à des calculs compliqués, et de ne pas faire connaître le degré d'approximation que l'on obtient, on devra préférer la méthode ci-dessus indiquée.

*161. La racine carrée d'une fraction étant égale à la racine carrée du produit de ses deux termes divisée par son dénominateur (n° **160**), on déduit du principe du n° **147** (11°), que *selon que le produit des deux termes d'une fraction est un carré ou n'est pas un carré, la racine carrée de cette fraction est commensurable, ou est incommensurable.*

162. Pour *calculer la racine carrée d'un nombre composé d'un entier et d'une fraction*, on ajoute d'abord l'entier à la fraction (n° **120**), et on extrait ensuite la racine carrée du nombre fractionnaire qui en résulte.

163. *Pour obtenir le carré d'un nombre décimal* N, *il suffit de former le carré du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans* N, *et de séparer ensuite sur la droite de ce carré le double du nombre de décimales contenu dans* N. Cette propriété n'est qu'une conséquence immédiate de la règle du n° **133**. On en déduit que *le carré d'un nombre décimal contient toujours un nombre pair de décimales.*

On trouve de cette manière, que les carrés des nombres 6,49 et 0,0649 sont 42,1201 et 0,00421201.

164. *Pour revenir du carré* N *d'un nombre décimal à sa racine, il suffit de calculer la racine carrée du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre donné* N, *et de séparer ensuite sur la droite de cette dernière racine la moitié du nombre des décimales du nombre donné.*

Cette règle se déduit du principe du n° **195**, en transformant d'abord le nombre décimal donné en une fraction ordinaire équivalente (n° **126**), et en prenant la racine carrée de cette fraction par la méthode du n° **159**.

En effet, on suppose que N est le carré d'un nombre décimal; N contient donc un nombre pair $2n$ de décimales (n° **163**); et en désignant par a le nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans N, on a

$$\sqrt{N} = \sqrt{\frac{a}{10^{2n}}}\ (\text{n}^\circ\ \mathbf{126}) = \frac{\sqrt{a}}{10^n}\ (\text{n}^\circ\ \mathbf{159}).$$

Or, $\sqrt{N}$ est supposé commensurable; $\sqrt{a}$ est donc aussi commensurable; mais la racine carrée du nombre entier a ne saurait être une fraction (n° **115**); $\sqrt{a}$ sera donc un nombre entier. On obtiendra donc la racine carrée de N en divisant $\sqrt{a}$ par 10^n, ce qui revient à séparer n décimales sur la droite de $\sqrt{a}$. Cela démontre le principe énoncé.

1er Exemple. *Calculer la racine carrée de* 42,1201.

On cherche d'abord la racine carrée du nombre entier 421201, que l'on obtient en supprimant la virgule dans le nombre donné; cette racine est 649. Le carré donné 42,1201 ayant quatre décimales, sa racine doit en avoir deux; on sépare donc deux décimales sur la droite de 649; le résultat 6,49 est la racine carrée exacte de 42,1201.

On est conduit au même résultat, en transformant 42,1201 en fraction ordinaire; car on a

$$\sqrt{42,1201} = \sqrt{\frac{421201}{10000}} = \frac{\sqrt{421201}}{100} = \frac{649}{100} = 6,49.$$

2e Exemple. *Calculer la racine carrée de* 0,00421201.

On trouve que cette racine est 0,0649.

Remarque. Quand le nombre donné N ne contiendra pas un nombre pair de décimales, ou lorsqu'en faisant abstraction de la virgule dans N, le nombre entier que l'on trouvera n'aura pas de racine carrée exacte, on sera certain que la racine carrée de N est incommensurable.

165. Nous allons donner le moyen de *calculer la racine carrée d'un nombre (entier ou décimal ou fractionnaire) avec une approximation donnée.*

166. Pour *déterminer la plus petite valeur entière approchée de la racine carrée d'un nombre* N *(décimal ou fractionnaire) plus grand que l'unité*, il suffit de calculer la plus petite valeur entière approchée de la racine carrée de la partie entière contenue dans le nombre donné N.

Ainsi, pour obtenir la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{45{,}236}$, il suffit de prendre la partie entière 6 de $\sqrt{45}$. En effet; puisque 6 est la partie entière de $\sqrt{45}$, on est certain que 45 tombe entre 6^2 et 7^2; or 45 et 7^2 diffèrent au moins d'une unité; $45+0{,}236$ ou $45{,}236$ est donc aussi compris entre 6^2 et 7^2; $\sqrt{45{,}236}$ tombe donc entre 6 et 7; la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{45{,}236}$ est donc 6.

Par une raison semblable, pour trouver la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{\frac{4655}{11}}$, on cherche la partie entière 423 du quotient de 4655 par 11; la partie entière de $\sqrt{423}$, qui est 20, exprime la plus petite valeur entière approchée de la racine cherchée.

*En général, N étant composé d'un nombre entier E plus d'une quantité f moindre que l'unité, si l'on détermine la plus petite valeur entière approchée e de $\sqrt{E}$, on sera certain que $E+f$ est plus grand que e^2, et que E est moindre que $(e+1)^2$. Or, les deux nombres entiers E, $(e+1)^2$, diffèrent au moins d'une unité; $E+f$ est donc moindre que $(e+1)^2$; $E+f$ ou N est donc compris entre e^2 et $(e+1)^2$; $\sqrt{N}$ est donc compris entre e et $e+1$; la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{N}$ est donc e. Ce qui démontre le principe énoncé.

On voit que *la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{E+f}$ est la même que celle de $\sqrt{E}$.*

167. *Pour obtenir la racine carrée d'un nombre quelconque* N *à moins de $\frac{1}{p}$, il suffit de calculer la plus petite valeur entière approchée A de $\sqrt{Np^2}$* (n° **166**), *et de diviser ensuite A par p.*

En effet; il s'agit de trouver deux nombres dont la différence soit $\frac{1}{p}$ et qui comprennent $\sqrt{N}$. Or, d'après le principe du n° **160**, $\sqrt{N}$ est égal à $\frac{\sqrt{Np^2}}{p}$; d'ailleurs, la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{Np^2}$ étant A, on est certain que $\sqrt{Np^2}$ tombe entre A et $A+1$; $\frac{\sqrt{Np^2}}{p}$ ou $\sqrt{N}$ est donc compris entre les deux nombres $\frac{A}{p}$, $\frac{A+1}{p}$, dont la différence est $\frac{1}{p}$; $\frac{A}{p}$ exprime donc $\sqrt{N}$ à moins de $\frac{1}{p}$. Ce qui démontre le principe énoncé.

1er Exemple. *Calculer la racine carrée de 57 à moins d'un millième d'unité.*

Dans ce cas, $p=1000$, $Np^2=57\times1000^2=57000000$.

On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{57000000}$ qui est 7549; la racine demandée est $\frac{7549}{1000}$ ou 7,549.

On voit que pour *calculer la racine carrée d'un nombre entier avec n décimales, c'est-à-dire à moins d'une unité décimale du $n^{ième}$ ordre*, il suffit de mettre $2n$ zéro à la droite de ce nombre; de calculer la plus petite valeur entière approchée de la racine carrée du nombre ainsi préparé; et de séparer ensuite n décimales sur la droite de cette plus petite valeur entière approchée.

2e Exemple. *Déterminer la racine carrée de 2,5 à moins d'un centième d'unité.*

On a, $p=100$, $Np^2=2{,}5\times10000=25000$.

On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{25000}$ qui est 158; la racine cherchée est $\frac{158}{100}$ ou 1,58.

3ᵉ Exemple. *Calculer la racine carrée de* 0,004285378 *à moins d'un millième d'unité.*

On a, $p=1000$, $Np^2=0{,}004285378\times1000000=4285{,}378$.

On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{4285{,}378}$ qui est la même que celle de $\sqrt{4285}$ (n° **166**); cette dernière étant 65, la racine demandée est $\frac{65}{1000}$ ou 0,065.

En général, pour *calculer la racine carrée d'un nombre décimal à moins d'une unité décimale du* $n^{ième}$ *ordre, c'est-à-dire à moins de* $\frac{1}{10^n}$, le mécanisme du calcul se réduit à multiplier d'abord ce nombre par le carré de 10^n ou par 10^{2n}; on prend la plus petite valeur entière approchée A du produit (n° **166**), et on sépare n décimales sur la droite de A.

4ᵉ Exemple. *Calculer la racine carrée de* $\frac{180}{11}$ *à moins d'un millième d'unité.*

Dans ce cas, $p=1000$, $Np^2=\frac{180}{11}\times1000000=\frac{180000000}{11}$.

Pour calculer la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{\frac{180000000}{11}}$, on détermine la partie entière du quotient de 180000000 par 11 qui est 16363636; on cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{16363636}$, qui est 4045; la racine cherchée est $\frac{4045}{1000}$ ou 4,045.

En général, pour *calculer la racine carrée d'une fraction* $\frac{a}{b}$ *à moins d'une unité décimale du* $n^{ième}$ *ordre, c'est-à-dire à moins de* $\frac{1}{10^n}$, on multiplie d'abord le numérateur a par le

carré de 10^n ou par 10^{2n}, ce qui revient à mettre $2n$ zéro sur la droite de a; on cherche la partie entière e du quotient de $a\times10^{2n}$ par le dénominateur b; on calcule la plus petite valeur entière approchée A de $\sqrt{e}$; et en séparant n décimales sur la droite de A, le résultat exprime la racine carrée de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{10^n}$.

5ᵉ Exemple. *Calculer la racine carrée de* $\frac{160}{7}$ *à moins de* $\frac{3}{11}$.

La fraction $\frac{3}{11}$ pouvant être considérée comme le quotient de la division de 1 par $\frac{11}{3}$ (n° **116**), on a

$$p=\frac{11}{3},\quad Np^2=\frac{160}{7}\times\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{19360}{63}.$$

Ainsi, d'après la règle générale, on cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt{\frac{19360}{63}}$, qui est 17; on divise 17 par $\frac{11}{3}$, ce qui revient à multiplier 17 par $\frac{3}{11}$; le résultat $\frac{51}{11}$ exprime la racine carrée de $\frac{160}{7}$ à moins de $\frac{3}{11}$.

En général, pour *déterminer la racine carrée d'un nombre quelconque N à moins de* $\frac{a}{b}$, il suffit de multiplier N par le carré $\frac{b^2}{a^2}$ de la fraction $\frac{a}{b}$ *renversée*, et de chercher la plus petite valeur entière approchée r du produit $\frac{Nb^2}{a^2}$; le produit de r par $\frac{a}{b}$ sera la racine carrée de N à moins de $\frac{a}{b}$.

168. Pour *approcher le plus possible de la racine carrée d'un nombre* (*entier, ou fractionnaire, ou décimal*) *en ne conservant qu'un nombre déterminé de décimales*, on calcule une décimale de plus à la racine (nº **167**), et on supprime ensuite cette décimale, d'après la règle du nº **142**.

Ainsi, pour approcher le plus possible de $\sqrt{0,421387}$, en ne conservant que deux décimales, on calcule cette racine avec trois décimales, ce qui donne 0,649; et en supprimant la dernière décimale, d'après la règle du nº **142**, on voit que la racine cherchée est 0,65 à moins d'un demi-centième d'unité.

* **169**. Nous allons indiquer quelques *propriétés des carrés des nombres.*

1°. Le carré d'un nombre entier composé de dixaines et d'unités étant formé : du carré des dixaines (qui exprime des centaines), du double des dixaines multiplié par les unités (qui exprime des dixaines), et du carré du chiffre des unités (nº **152**), il en résulte que *le premier chiffre à droite du carré d'un nombre entier ne peut être qu'un des chiffres* 0, 1, 4, 5, 6, 9, qui terminent les carrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Les nombres terminés sur la droite par un des chiffres 2, 3, 7, 8, *ne sont donc jamais des carrés.*

2°. *Quand le chiffre des unités d'un nombre entier* N *est* 5, *les deux premiers chiffres à droite du carré de* N *valent* 25.

Car N étant formé de a dixaines + 5 unités, on a $N = 10a + 5$; et le principe du nº **152**, donne

$$N^2 = 100\,a^2 + 100\,a + 25 = (a^2 + a) \text{ centaines} + 25.$$

3°. Quand un nombre est terminé vers la droite par un certain nombre de zéro ou de décimales, son carré est terminé par le double de ce nombre de zéro ou de décimales. Par conséquent, *un nombre terminé par un nombre impair de zéro ou de décimales, n'est jamais un carré.*

Ainsi, quoique 25 soit un carré, les nombres 250, 25000, 2,5 et 0,025, ne sont pas des carrés.

§. II. *Des cubes et de la racine cubique.*

170. *Le produit de trois facteurs égaux à un nombre donné, est la troisième puissance ou le* CUBE *de ce nombre donné ; et*

le nombre qui, pris trois fois comme facteur, détermine un nombre donné, est la RACINE TROISIÈME, *ou la* RACINE CUBIQUE *du nombre donné.*

Ainsi, le cube de 7, représenté par 7^3, est le produit 343 de trois facteurs égaux à 7, et la racine cubique de 343 est 7.

Pour indiquer la racine cubique d'un nombre, on met ce nombre sous le signe $\sqrt[3]{}$. Ainsi, $\sqrt[3]{8}$ indique la racine cubique de 8.

En général, pour qu'un nombre α soit la racine cubique d'un nombre A, il faut et il suffit que le cube α^3 de α soit égal à A. Le cube de $\sqrt[3]{A}$ est donc A, quel que soit A.

171. Lorsqu'on connaît le carré a^2 d'un nombre quelconque a, pour en déduire le cube de a, il suffit de multiplier a^2 par a.

Ainsi, le carré de 7 étant 49, le cube de 7 est 49×7 ou 343.

172. La *formation du cube d'un nombre* ne saurait offrir aucune difficulté, car elle se réduit à calculer le produit de trois facteurs égaux. Nous allons voir comment on peut *trouver la racine cubique d'un nombre quelconque.*

De la racine cubique des nombres entiers.

173. *Lorsque la racine cubique d'un nombre entier tombe entre deux nombres entiers consécutifs, cette racine est incommensurable.* On démontre ce principe par des raisonnemens semblables à ceux du nº **146**.

174. Les cubes des nombres 1, 10, 100, 1000, etc., étant 1, 1000, 1000000, 1000000000, etc., *les nombres compris entre* 1 *et* 1000, *entre* 1000 *et* 1000000, *entre* 1000000 et 1000000000, etc., *ont leurs racines cubiques comprises entre* 1 *et* 10, *entre* 10 *et* 100, *entre* 100 *et* 1000, *etc.*

Par conséquent : *lorsqu'un nombre entier n'a pas plus de trois chiffres, la partie entière de sa racine cubique n'a qu'un seul chiffre ; lorsqu'un nombre a* 4, 5 *ou* 6 *chiffres, la partie entière de sa racine cubique a deux chiffres ; lorsqu'un nombre a* 7, 8 *ou* 9 *chiffres, la partie entière de sa racine cubique a trois chiffres ; et ainsi de suite.*

175. Les cubes des nombres d'un seul chiffre étant moindres que 10^3 ou que 1000, on revient de ces cubes à leurs racines cubiques en faisant usage du *tableau* suivant :

Racines cubiques,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubes,	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Ce *tableau* peut aussi servir à *déterminer la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre moindre que* 100.

Par exemple, pour trouver la racine cubique du plus grand cube contenu dans 239, on cherche dans la seconde ligne du *tableau* les deux cubes consécutifs qui comprennent 239; on voit que 239 tombe entre les cubes 216, 343, des nombres 6 et 7; la racine cubique de 239 tombe donc entre 6 et 7; on dit par cette raison que *le plus grand cube* contenu dans 239 est 216, et que la racine cubique du plus grand cube contenu dans 239 est 6. La *partie entière*, ou la *plus petite valeur entière approchée* de la racine cubique de 239, est 6.

176. Pour découvrir le procédé qui servira à *extraire la racine cubique d'un nombre entier* N *plus grand que* 1000, nous chercherons d'abord comment les parties de la racine entrent dans la composition du cube.

Quelle que soit la racine cubique R de N, on peut la concevoir décomposée en deux parties a,b, telles que $R=a+b$. On obtiendra le cube N de $a+b$, en multipliant le carré de $a+b$, qui est $a^2+2ab+b^2$ (nº **151**), par $a+b$. Si l'on effectue ce produit, au moyen du principe du nº **34** (2º), en multipliant successivement les parties $a^2, 2ab, b^2$, du multiplicande, par les parties a,b, du multiplicateur, on trouvera que le cube de $a+b$ est $a^3+2ab\times a+b^2a+a^2b+2ab\times b+b^3$.

Or, a et b représentant des quantités commensurables ou incommensurables, les principes du nº **147** (1º, 2º et 3º) donnent, $2ab\times a=2aab=2a^2b$, $b^2a=ab^2$, $2ab\times b=2ab^2$.

D'ailleurs, $2a^2b+a^2b=3a^2b$, $ab^2+2ab^2=3ab^2$.

On en déduit que le cube de $a+b$ se réduit à

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Le cube d'une somme formée de deux parties est donc com-

posé : du cube de la 1re partie, de trois fois le carré de la 1re partie multiplié par la 2e, de trois fois la 1re partie multipliée par le carré de la 2e partie, et du cube de la 2e partie.

177. Ce dernier principe fait voir que *le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient quatre parties, savoir : le cube des dixaines, le produit de trois fois le carré des dixaines par les unités, le produit de trois fois les dixaines par le carré des unités, et le cube des unités.* Ces quatre parties expriment respectivement des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Ainsi, le cube de 64 est composé : du cube 216 mille des 6 dixaines de 64, de trois fois le carré 36 centaines des 6 dixaines multiplié par les 4 unités ou de 432 centaines, de trois fois les 6 dixaines multipliées par le carré des 4 unités ou de 288 dixaines, et enfin du cube 64 des 4 unités. La somme 262144 de ces quatre parties exprime le cube de 64.

178. Nous allons faire voir que les principes précédens fournissent le moyen de *calculer la racine cubique* R *d'un nombre entier quelconque N.*

1er Exemple. *Extraire la racine cubique de* 262144.

On dispose le calcul de la manière suivante :

Cube......	2 6 2.1 4 4	64 *Racine cubique.*
	2 1 6	$6^2\times3=108$
1er reste...	4 6 1.4 4	43200
	4 6 1 4 4	2880
		64
2e reste....	0	46144.

Le nombre 262144 ayant six chiffres, il résulte du principe du nº **174** que la partie entière de $\sqrt[3]{262144}$ aura deux chiffres a,b, qui représenteront respectivement des dixaines et des unités.

Pour *déterminer le chiffre*, a, *des dixaines de* $\sqrt[3]{262144}$, concevons que la racine cubique R de 262144 soit décomposée en a dixaines plus en une quantité r moindre que 10. Il suit du principe du nº **176**, que le cube 262144 de R sera formé :

du cube de a dixaines, de trois fois le carré de a dixaines multiplié par r, de trois fois a dixaines multipliées par r^2, et du cube r^3 de r. Or, le cube des a dixaines étant a^3 mille, ne saurait se trouver que dans les 262 mille de 262144; on sépare ces mille à l'aide d'un *point* placé sur leur droite; de sorte que 262144 se trouve partagé en deux *tranches* 262 et 144.

Nous allons démontrer, par des raisonnemens analogues à ceux du n° **153**, que la racine cubique du plus grand cube contenu dans la 1re tranche 262 (des mille), exprime le chiffre a des dixaines de R. En effet, on voit, à l'aide du *tableau* (page 160), que la 1re tranche 262 tombe entre les cubes 216, 343, de 6 et de 7; 262 mille ou 262 000 est donc nécessairement compris entre 6^3 mille et 7^3 mille. Or, 262 mille et 7^3 mille diffèrent au moins d'un mille; 262144 est donc compris entre 6^3 mille et 7^3 mille, c'est-à-dire entre les cubes de 6 dixaines et de 7 dixaines; $\sqrt[3]{262144}$ ou R est donc compris entre 6 dixaines et 7 dixaines; R est donc composé de 6 dixaines, plus de la quantité r moindre que 10. On obtiendra donc le chiffre 6 des dixaines de $\sqrt[3]{262144}$ en prenant la racine cubique du plus grand cube 216 contenu dans le nombre 262 des mille de 262144.

Connaissant le chiffre 6 des dixaines de R, pour trouver le chiffre b des unités de R, on observe que R étant égale à 6 dixaines $+ r$, il suit du principe du n° **176** que le cube 262144 de R sera composé : du cube des 6 dixaines de R qui vaut 216 mille, de trois fois le carré de 6 dixaines multiplié par r, de trois fois 6 dixaines multipliées par r^2, et du cube r^3 de r. Par conséquent, si l'on ôtait 216 mille de 262144, le *reste* 46144 ne renfermerait plus, que trois fois le carré des 6 dixaines de R multiplié par r, trois fois les 6 dixaines multipliées par r^2 et le cube r^3 de r.

On est parvenu plus simplement au même reste 46144 en ôtant 6^3 ou 216 de la 1re *tranche* 262, et en plaçant la 2e tranche 144 sur la droite du résultat 46.

Or, trois fois le carré de 6 dixaines vaut 108 centaines. Le

reste 46144 est donc égal à

$$108 \text{ centaines} \times r + \text{trois fois } 6 \text{ dixaines} \times r^2 + r^3.$$

Mais, la 2e partie r de R ne saurait être moindre que le chiffre b des unités de R; les 461 centaines du reste 46144 ne sont donc jamais moindres que le produit de 108 centaines par b. Ainsi, en divisant le nombre 461 des centaines du reste 46144 par 108, c'est-à-dire par le triple carré 108 du chiffre 6 des dixaines de R, les 4 unités du quotient exprimeront le chiffre b des unités de R, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible.

Pour essayer 4, on pourrait ôter 64^3 de 262144; le reste zéro ferait voir que 64 est la racine cubique exacte de 262144.

Mais, le reste 46144 étant égal à $262144 - 60^3$, on est parvenu au même résultat en retranchant de 46144, la somme des trois dernières parties (432 centaines, 288 dixaines, 64 unités) du cube de $60 + 4$, (n° **177**).

Ainsi, pour calculer la racine cubique R du nombre 262144, on le divise en tranches de trois chiffres à partir de la droite, en plaçant un *point* entre les tranches; la racine cubique 6 du plus grand cube 216 contenu dans la 1re tranche 262 des mille, détermine le chiffre 6 des dixaines de R. Pour trouver le chiffre des unités de R, on pourrait ôter de 262144 le cube 216 mille des 6 dixaines obtenues à la racine, ce qui donnerait le reste 46144; mais on est parvenu au même résultat, en retranchant de la 1re tranche 262, le cube 216 du chiffre 6 des dixaines de R, ce qui a donné le reste 46, et en écrivant la 2e tranche 144 à la droite du reste 46. On divise les 461 centaines du reste 46144, par trois fois le carré du chiffre 6 des dixaines de R, ou par 108; les 4 unités du quotient expriment le chiffre des unités de R, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer le chiffre 4, on pourrait ôter 64^3 de 262144, le reste zéro indiquerait que 64 est la racine cubique exacte de 262144. On est parvenu au même résultat en retranchant du 1er reste 46144, la somme des trois dernières parties, 432 centaines, 288 dixaines, 64 unités, du cube de 64 (n° **177**); le reste étant zéro, le chiffre des unités de R est 4, et le nombre 64 obtenu à la racine est la racine cubique exacte de 262 144.

179. On démontrera comme dans le n° **154** que le raisonnement qui vient de servir à déterminer les dixaines de la racine cubique de 262 144, est applicable à tout autre nombre; de sorte que *la racine cubique du plus grand cube contenu dans les mille d'un nombre N, détermine toujours les dixaines de la racine cubique de N.*

180. 2ᵉ Exemple. *Extraire la racine cubique de* 273359.

Les raisonnemens employés dans le 1ᵉʳ exemple (n° **178**) conduisent aux calculs suivans :

		64	
	2 7 3.3 5 9	*Essai du chiffre* 5.	*Essai du chiffre* 4.
	2 1 6		
1ᵉʳ *reste*...	5 7 3.5 9	54000	43200
	4 6 1 4 4	4500	2880
2ᵉ *reste*...	1 1 2 1 5	125	64
		58625	46144.

On trouve que la partie entière de $\sqrt[3]{273359}$ est 64 et que le 2ᵉ reste est 11215. Ce dernier reste exprime l'excès de 273359 sur le cube du nombre 64 obtenu à la racine; car les calculs qui ont conduit à ce reste, reviennent à retrancher de 273359 la somme des quatre parties qui composent le cube de 64 (n° **177**).

La racine cubique R de 273359 est donc comprise entre 64 et 65; le nombre 64 obtenu à la racine exprime donc la racine cubique du plus grand cube contenu dans 273359.

Remarque. Le principe du n° **176** fournit aussi le moyen de s'assurer que 273359 est compris entre 64^3 et 65^3. En effet; le dernier reste 11215 étant égal à $273359 - 64^3$, on est certain que 273359 est plus grand que 64^3.

Pour s'assurer que 273359 est moindre que 65^3, on observe que le principe du n° **176** donnant

$$(a+1)^3 = a^3 + a^2 \times 3 + a \times 3 + 1, \text{ on a}$$
$$(64+1)^3 = 64^3 + 64^2 \times 3 + 64 \times 3 + 1.$$

Or, le nombre 11215, ou $273359 - 64^3$, est moindre que $64^2 \times 3 + 64 \times 3 + 1$; 273359 est donc moindre que $64^3 + 64^2 \times 3 + 64 \times 3 + 1$, ou que $(64+1)^3$, ou que 65^3.

3ᵉ Exemple. *Extraire la racine cubique de* 273359449.

On effectue le calcul de la manière suivante :

		649 *Racine cubique.*		
		$6^2 \times 3 = 108$		$64^2 \times 3 = 12288$
Cube	2 7 3.3 5 9.4 4 9	*Essai du chiffre* 5.	*Essai du chiffre* 4.	*Essai du chiffre* 9.
	2 1 6			
1ᵉʳ *reste.*	5 7 3.5 9			
	4 6 1 4 4			
2ᵉ *reste.*	1 1 2 1 5 4.4 9	54000	43200	11059200
	1 1 2 1 5 4 4 9	4500	2880	155520
3ᵉ *reste.*	0	125	64	729
		58625	46144	11215449.

Le nombre 273359449 ayant 9 chiffres, la partie entière de la racine cubique *R* de 273359449 aura trois chiffres *a*, *b*, *c*, (n° **174**), qui représenteront respectivement des centaines, des dixaines et des unités. On peut donc concevoir que cette partie entière soit décomposée en un nombre *D* de dixaines exprimé par les deux premiers chiffres *a*, *b*, de *R*, plus en un nombre *c* d'unités moindre que 10.

Pour calculer *D*, on observe que le cube de *D* dixaines étant D^3 mille, ne saurait se trouver que dans les 273359 mille de 273359449 (on sépare ces mille à l'aide d'un point placé sur leur droite); et d'après le principe du n° **179**, la racine cubique du plus grand cube contenu dans 273359 exprimera *D*. On obtiendra donc le nombre *D* des dixaines de $\sqrt[3]{273359449}$, en calculant la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre 273359 qui contient trois chiffres de moins que le nombre 273359449 proposé.

Si l'on opère comme dans le 2ᵉ exemple, en regardant 273359 comme des unités simples, on trouvera, après avoir essayé les chiffres 5 et 4, que la racine cubique *D* du plus grand cube contenu dans 273359 est 64, et que l'excès de

273359 sur 64^3 est 11215; la racine R est donc composée de 64 dixaines plus d'une quantité r moindre que 10.

Connaissant le nombre 64 des dixaines de R, pour trouver le chiffre c des unités, on observe que R étant égale à 64 dixaines $+ r$, il suit du principe du n° **176** que le cube 273359449 de R est composé : du cube des 64 dixaines de R, de 3 fois le carré de 64 dixaines multiplié par r, de 3 fois 64 dixaines multipliées par r^2, et du cube r^3 de r.

Par conséquent, si l'on ôtait 640^3 de 273359449, le reste 11215449 contiendrait les trois autres parties du cube de 64 dixaines $+ r$.

Mais on a trouvé plus facilement ce reste en observant que, d'après le calcul qui a fourni les 64 dixaines de R, l'excès de 273359 sur 64^3 étant 11215, l'excès de 273359449 sur 640^3 peut s'obtenir en abaissant la *tranche* 449 à la droite de 11215.

Le 2e reste 11215449, étant égal à $273359449 - 640^3$, contient les trois dernières parties du cube de 64 dixaines $+ r$, savoir : 3 fois le carré des 64 dixaines de R multiplié par r, 3 fois les 64 dixaines multipliées par r^2, et le cube r^3.

Or, 3 fois le carré de 64 dixaines vaut 12288 centaines. Le 2e reste 11215449 contient donc le produit de 12288 centaines par r, plus les deux dernières parties du cube de 64 dixaines $+ r$; et comme r ne saurait être moindre que le chiffre cherché c des unités de R, le nombre 112154 des centaines du 2e reste n'est jamais moindre que $12288 \times c$. Par conséquent, si l'on divise 112154 par 12288, c'est-à-dire par 3 fois le carré du nombre 64 des dixaines obtenues à la racine R, les 9 unités du quotient exprimeront le chiffre c des unités de R, ou un chiffre plus grand, mais jamais un chiffre plus faible.

Pour essayer 9, on pourrait ôter 649^3 de 273359449; le reste zéro ferait voir que 649 est la racine cubique exacte de 273359449.

Mais, on est parvenu plus simplement au même résultat en observant que, puisque le 2e reste 11215449 est égal à 273359449 diminué du cube des 64 dixaines de 649, si l'on ôte de 11215449, la somme des trois dernières parties, 110592 centaines, 15552 dixaines, 729 unités, du cube de $640 + 9$, le reste exprimera l'excès de 273359449 sur 649^3. Ce dernier reste étant zéro, 273359449 est le cube de 649.

Ainsi, pour calculer la racine cubique R du nombre 273359449, on le divise en tranches de trois chiffres à partir de la droite, en plaçant un *point* entre deux *tranches* consécutives; le nombre 3 des tranches indique que la partie entière de R aura trois chiffres. Pour trouver le 1er chiffre à gauche de R, c'est-à-dire le chiffre des centaines, on cherche la racine cubique du plus grand cube contenu dans la 1re tranche 273, ce qui donne le chiffre 6 demandé. Pour calculer le 2e chiffre de R, on ôte de la 1re tranche 273, le cube 216 du 1er chiffre 6 de R; sur la droite du reste 57 on abaisse la 2e tranche 359, ce qui donne le 1er reste 57359; on sépare les 573 centaines de 57359 en mettant un point sur leur droite; on divise le nombre 573 par 3 fois 6^2 ou par 108; les 5 unités du quotient expriment le 2e chiffre cherché, ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer 5, on forme les trois dernières parties du cube de 65 qui sont 54000, 4500 et 125; leur somme 58625 étant plus grande que le 1er reste 57359, le chiffre 5 est trop fort. Pour essayer 4, on forme les trois dernières parties 43200, 2880, 64, du cube de $60 + 4$, leur somme 46144 étant moindre que le 2e reste, le 2e chiffre de R est 4. Pour trouver le 3e chiffre de R, on ôte 46144 du 1er reste 57359, et sur la droite du résultat 11215 on abaisse la 3e tranche 449, ce qui donne le 2e reste 11215449, dont on sépare les 112154 centaines en plaçant un point sur leur droite. On divise 112154 par 3 fois le carré des 64 dixaines obtenues à la racine, ou par 12288; les 9 unités du quotient expriment le chiffre cherché ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer 9, on forme les trois dernières parties du cube de $640+9$, qui sont 11059200, 155520, 729; on retranche leur somme du 2e reste; le résultat 0 de cette soustraction exprimant l'excès de 273359449 sur 649^3, on voit que 273359449 est égal à 649^3; de sorte que 649 est la racine cubique exacte de 273359449.

4e Exemple. *Extraire la racine cubique de* 273367873.

En opérant comme dans le 3e exemple, on trouvera que la *partie entière* de la racine demandée est 649, et que l'excès de 273367873 sur le cube de 649 est 8424. La racine demandée tombant entre 649 et 650, on est certain que cette racine est incommensurable (no **175**).

Pour *faire la preuve*, on ajoute le dernier reste 8424 au cube du nombre 649 obtenu à la racine, la somme doit être égale au nombre 273367873 dont on a cherché la racine cubique.

181. En général, *pour calculer la racine cubique* R *d'un nombre entier quelconque* N, *on dispose et on exécute les calculs comme il a été indiqué dans les exemples précédens. On divise* N *en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, en séparant deux tranches consécutives quelconques à l'aide d'un point* (*la* 1re *tranche à gauche peut contenir moins de trois chiffres*) ; *le nombre des tranches indique combien il y aura de chiffres dans la partie entière de* R.

Pour déterminer le 1er *chiffre à gauche de* R, *on cherche* (*par la méthode du* no **175**) *la racine cubique du plus grand cube contenu dans la* 1re *tranche à gauche; cette racine exprime le chiffre cherché.*

Pour trouver le 2e *chiffre de* R, *on ôte de la* 1re *tranche le cube du* 1er *chiffre obtenu à la racine; et sur la droite du résultat on abaisse la* 2e *tranche, ce qui fournit le* 1er *reste. On sépare les centaines de ce* 1er *reste, à l'aide d'un point placé sur leur droite, et on divise le nombre de ces centaines par* 3 *fois le carré du* 1er *chiffre de* R ; *les unités du quotient expriment le* 2e *chiffre de* R *ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer ce* 2e *chiffre, on retranche du* 1er *reste la somme des trois dernières parties du cube d'un nombre de deux chiffres, dont le chiffre des dixaines est le* 1er *chiffre obtenu à la racine, et dont le chiffre des unités est le chiffre que l'on essaie; quand cette somme* (*formée d'après le principe du* no **177**) *n'est pas plus grande que le* 1er *reste, le chiffre que l'on a essayé est le* 2e *chiffre de* R; *quand cette somme ne peut être retranchée du* 1er *reste, le chiffre que l'on a essayé est trop fort, au moins d'une unité, et on le diminue successivement d'une unité, jusqu'à ce que l'on puisse retrancher du* 1er *reste la somme des trois dernières parties du cube d'un nombre de deux chiffres, dont le chiffre des dixaines est le* 1er *chiffre de la racine, et dont le chiffre des unités est celui que l'on essaie. Le chiffre des unités qui satisfait à cette condition est le* 2e *chiffre de* R.

Pour trouver le 3e *chiffre de* R, *on ôte du* 1er *reste la somme des trois dernières parties du cube du nombre de deux chiffres obtenu à la racine; sur la droite du résultat de cette soustraction on abaisse la* 3e *tranche du nombre donné, ce qui fournit le* 2e *reste. On sépare les centaines de ce* 2e *reste en plaçant un point sur leur droite, et on divise le nombre de ces centaines par trois fois le carré du nombre de deux chiffres obtenu à la racine; les unités du quotient expriment le* 3e *chiffre de* R *ou un chiffre trop fort, mais jamais un chiffre trop faible. Pour essayer ce* 3e *chiffre, on forme la somme des trois dernières parties du cube d'un nombre de trois chiffres dont les dixaines sont exprimées par le nombre de deux chiffres obtenu à la racine, et dont le chiffre des unités est celui qu'on essaie; quand cette somme n'est pas plus grande que le* 2e *reste, le chiffre qui a été essayé est le* 3e *chiffre de* R; *quand cette même somme surpasse le* 2e *reste, le chiffre que l'on vient d'essayer est trop fort, et on le diminue successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'on puisse retrancher du* 2e *reste la somme des trois dernières parties du cube d'un nombre de trois chiffres, dont les dixaines sont exprimées par les deux premiers chiffres obtenus à la racine, et dont le chiffre des unités est celui qu'on veut essayer; le chiffre des unités qui satisfait à cette condition est le* 3e *chiffre de* R.

En continuant à opérer d'une manière semblable, on obtiendra successivement les différens chiffres de R. *Lorsque après avoir abaissé la dernière des tranches du nombre donné* N, *on aura obtenu le chiffre des unités de* R, *on retranchera du reste correspondant la somme des trois dernières parties du cube du nombre entier* E *obtenu à la racine; cela fournira un* *dernier reste r qui exprimera l'excès de* N *sur le cube de* E. *Si r est nul,* E *sera la racine cubique exacte de* N. *Si r n'est pas nul,* R *sera incommensurable, et* E *sera la partie entière de R; nous verrons* (n° **190**) *comment on peut approcher autant qu'on veut de* R.

Remarque. On déduit de cette règle générale, que *lorsque le nombre des centaines d'un reste est moindre que le triple carré du nombre obtenu à la racine, le chiffre correspondant de la racine est un zéro.*

Pour *faire la preuve,* on ajoute au dernier reste le cube du nombre E obtenu à la racine; la somme doit être égale au nombre N dont on a cherché la racine cubique. De plus, pour que E soit la racine cubique du plus grand cube contenu dans N, il faut et il suffit que le dernier reste soit moindre que $3E^2+3E+1$.

Formation du cube et extraction de la racine cubique des fractions et des nombres décimaux.

182. *Le cube d'une fraction peut s'obtenir en élevant séparément le numérateur et le dénominateur au cube.* Car le principe du n° **113** donne

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a\times a}{b\times b\times b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

183. *Pour trouver la racine cubique d'une fraction* $\frac{a}{b}$, *on peut extraire séparément la racine cubique du numérateur et du dénominateur.*

Lorsque a et b sont les cubes de deux nombres entiers, le principe énoncé n'est qu'une conséquence de celui du n° **182**.

*2°. Lorsque a et b ne sont pas des cubes, on ne saurait plus conclure le principe du n° **183** de celui du n° **182**. Pour démontrer que le principe énoncé est vrai, quels que soient a et b, on prouvera d'abord, par des raisonnemens analogues à ceux du

n° **147** (4° et 5°), que le cube de $A\times B$ est $A^3\times B^3$, et que $\sqrt[3]{A}\times\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{AB}$, quels que soient A et B. On a donc,

$$\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{b\times\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{a};\quad\text{donc}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}};\ \text{donc,}\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

La dernière égalité démontre le principe du n° **183**. Ce principe donne

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{5},\quad\sqrt[3]{\frac{7}{125}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{5}.$$

184. Il est facile de réduire la recherche de la racine cubique d'une fraction, à calculer la racine cubique d'un seul nombre entier. Car,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b},\ \text{(n° 183).}$$

On peut donc obtenir la racine cubique d'une fraction en extrayant la racine cubique du produit du numérateur par le carré du dénominateur, et en divisant le résultat par le dénominateur.

Ainsi, $$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt[3]{5\times7^2}}{7}=\frac{\sqrt[3]{245}}{7}.$$

185. Pour *calculer la racine cubique d'un nombre composé d'un entier et d'une fraction,* on ajoute d'abord l'entier à la fraction (n° **120**); et on extrait ensuite la racine cubique du nombre fractionnaire qui en résulte.

186. *Le cube d'un nombre décimal* N, *qui contient n décimales, s'obtient en formant le cube du nombre entier qui résulte* *de la suppression de la virgule dans* N, *et en séparant 3n décimales à la droite de ce dernier cube.* Cela se déduit de la règle du n° **133**. *Le nombre des chiffres décimaux d'un cube est donc toujours un multiple de* 3.

On trouve de cette manière que les cubes des nombres 6,49 et 0,0649, sont 273,359449 et 0,000273359449.

187. *Pour revenir du cube* N *d'un nombre décimal à sa racine cubique, il suffit de calculer la racine cubique du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans* N, *et de séparer ensuite autant de décimales à la droite de cette racine, qu'il y a d'unités dans le tiers du nombre des décimales de* N. On démontrera cette règle générale par des raisonnemens analogues à ceux du n° **164**.

1^er^ Exemple. *Calculer la racine cubique de* 273,359449.

On cherche la racine cubique de 273359449; cette racine est 649. Le cube donné 273,359449 ayant six décimales, sa racine cubique doit en avoir deux; on sépare donc deux décimales sur la droite de 649; le résultat 6,49 est la racine demandée.

2^e^ Exemple. *Soit proposé de calculer la racine cubique de* 0,000273359449.

On trouve que cette racine est 0,0649.

Remarque. Lorsque le nombre des décimales de *N* ne sera pas un multiple de 3, ou lorsqu'en faisant abstraction de la virgule dans *N*, le nombre entier qu'on obtiendra n'aura pas de racine cubique exacte, la racine cubique de *N* sera nécessairement incommensurable.

188. Pour *déterminer la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique d'un nombre* N (*décimal ou fractionnaire*) *plus grand que l'unité*, il suffit de calculer la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique de la partie entière contenue dans le nombre donné *N*. On démontrera ce principe à l'aide de raisonnemens analogues à ceux du n° **166**.

Ainsi : la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{218,35}$ est la même que celle de $\sqrt[3]{218}$, qui est 6.

189. *Pour obtenir la racine cubique d'un nombre quelconque* N *à moins de* $\frac{1}{p}$, *il suffit de calculer la plus petite valeur entière approchée A de la racine cubique de Np^3* (n° **188**), *et de diviser ensuite A par p.* On démontrera ce principe à l'aide de raisonnemens analogues à ceux du n° **167**; et on en déduira des règles particulières analogues à celles qui ont été données dans ce n°. En voici des exemples :

1^er^ Exemple. *Calculer la racine cubique de* 8755, *à moins d'un centième d'unité,* c'est-à-dire avec deux décimales.

Dans ce cas, $p = 100$, $Np^3 = 8755000000$.

On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{8755000000}$ qui est 2061; la racine cubique demandée est $\frac{2061}{100}$ ou 20,61.

On voit que pour *calculer la racine cubique d'un nombre entier* N, *à moins d'une unité décimale du* $n^{ième}$ *ordre,* c'est-à-dire avec *n* décimales, il suffit de mettre 3*n* zéro à la droite de *N*; de calculer la plus petite valeur entière approchée de la racine cubique du nombre ainsi préparé; et de séparer *n* décimales à la droite de cette plus petite valeur entière approchée.

2^e^ Exemple. *Déterminer la racine cubique de* 12,5 *à moins d'un centième d'unité.*

On a, $Np^3 = 12500000$. On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{12500000}$ qui est 232; la racine demandée est $\frac{232}{100}$ ou 2,32.

3^e^ Exemple. *Soit proposé de calculer la racine cubique du nombre* 0,000012755427 etc., *à moins d'un millième d'unité.*

On trouve que la racine demandée est $\frac{23}{1000}$ ou 0,023.

4^e^ Exemple. *Calculer la racine cubique de* $\frac{71}{22}$, *à moins d'un centième d'unité, c'est-à-dire avec deux décimales.*

On a, $Np^3 = \frac{71}{22} \times 100^3 = \frac{71000000}{22} = 3227272$, etc.

On cherche la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{3227272}$, qui est 147; on divise 147 par 100; le quotient 1,47 exprime la racine demandée.

5e Exemple. *Calculer la racine cubique de* $\frac{2003}{4}$ *à moins de* $\frac{7}{10}$.

On a, $p = \frac{10}{7}$, $Np^3 = \frac{2003000}{1372} = 1459$, etc.

On détermine la plus petite valeur entière approchée de $\sqrt[3]{1459}$ qui est 11. On divise 11 par $\frac{10}{7}$, le quotient $\frac{77}{10}$ exprime la racine demandée. Il est facile de s'assurer que $\sqrt[3]{\frac{2003}{4}}$ est effectivement compris entre les fractions $\frac{77}{10}$, $\frac{84}{10}$, qui diffèrent entre elles de $\frac{7}{10}$.

190. Pour *approcher le plus possible de la racine cubique d'un nombre (entier, ou fractionnaire, ou décimal) en ne conservant qu'un nombre déterminé de décimales*, on calcule une décimale de plus à la racine, et on supprime ensuite cette décimale, d'après la règle du n° **142**.

Par exemple, pour approcher le plus possible de la racine cubique de 0,000273359449, en ne conservant que trois décimales, on calcule cette racine avec quatre décimales, ce qui donne 0,0649; et en supprimant la dernière décimale, d'après la règle du n° **142**, on voit que la racine cherchée est 0,065 à moins d'un demi-millième d'unité.

§ III. *Des puissances et des racines de tous les degrés.*

Des puissances.

191. La $m^{ième}$ puissance d'un nombre quelconque A, indiquée par A^m, étant le produit de m facteurs égaux à A (n° **50**), la formation des puissances des nombres ne peut offrir aucune difficulté.

192. 1°. *Pour former la* $m^{ième}$ *puissance d'un produit, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.*

Par exemple, les principes du n° **147** (1°, 2° et 3°) donnent

$$(abc)^m = abc \times abc \times abc \ldots\ldots = abcabcabc \ldots\ldots$$
$$= aaa \ldots bbb \;..ccc \ldots\ldots = a^m\, b^m\, c^m.$$

2°. *La* $m^{ième}$ *puissance d'une fraction peut s'obtenir en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance.* Cette propriété se déduit de la règle du n° **115**.

De l'extraction des racines de tous les degrés.

193. *La racine* $m^{ième}$ *d'un nombre quelconque* A, *indiquée par* $\sqrt[m]{A}$, *est la quantité dont la* $m^{ième}$ *puissance reproduit* A; de sorte qu'en désignant cette racine par a, on doit avoir

$a^m = A$, $(\sqrt[m]{A})^m = A$.

194. *La racine* $m^{ième}$ *de la racine* $n^{ième}$ *d'un nombre quelconque* A *est égale à la racine* $mn^{ième}$ *de ce nombre,* quels que soient d'ailleurs les nombres entiers m, n. En effet; si l'on désigne par b la racine $m^{ième}$ de $\sqrt[n]{A}$, on aura $b^m = \sqrt[n]{A}$, (n° **193**). D'ailleurs, b^m étant la racine $n^{ième}$ de A, la $n^{ième}$ puissance de b^m, qui est b^{mn} (n° **51**), doit reproduire A. On a donc, $b^{mn} = A$; et par suite, $b = \sqrt[mn]{A}$.

Ce qui démontre le principe énoncé.

Pour indiquer la racine $m^{ième}$ de $\sqrt[n]{A}$, on écrit

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}. \text{ De sorte que } \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}.$$

On déduit de ce principe que *lorsque l'indice de la racine à extraire, ne renferme pas d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 3, *on obtient cette racine en extrayant successivement des racines carrées et des racines cubiques.*

Par exemple, 6 étant le produit de 2 par 3, pour obtenir la racine sixième de 64, on prend d'abord la racine carrée de 64 qui est 8, et la racine cubique de 8, qui est 2; ce dernier nombre est la racine demandée.

De même, 12 étant le produit de 2 par 6, pour obtenir $\sqrt[12]{4096}$, on prend d'abord la racine carrée de 4096 qui est 64; la racine sixième de 64 sera la racine demandée. On trouvera, comme dans le 1er exemple, que

$$\sqrt[6]{64}=2. \text{ De sorte que } \sqrt[12]{4096}=2.$$

Lorsque *l'indice m de la racine à extraire renferme d'autres facteurs premiers que 2 et 3*, la démonstration arithmétique de la règle à suivre, pour obtenir la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier, devenant très compliquée, nous ne traiterons cette question que dans l'*Algèbre*. On verra d'ailleurs, dans le cinquième chapitre, comment on calcule, à l'aide des *logarithmes,* des valeurs approchées des racines de tous les degrés.

195. 1°. *Le produit de plusieurs radicaux du $m^{ième}$ degré est égal à la racine $m^{ième}$ du produit des quantités placées sous ces radicaux.*

Par exemple, $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{a\times b\times c}$,

Car, d'après le principe du n° **192** (1°), la $m^{ième}$ puissance de $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$ étant $(\sqrt[m]{a})^m\times(\sqrt[m]{b})^m\times(\sqrt[m]{c})^m$, ou $a\times b\times c$, il suit de la définition de la racine $m^{ième}$ (n° **193**) que $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$ exprime la racine $m^{ième}$ de $a\times b\times c$.

Remarque. On voit que *la racine $m^{ième}$ du produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines $m^{ièmes}$ de ces facteurs.*

2°. *La racine $m^{ième}$ d'un quotient est égale à la racine $m^{ième}$ du dividende divisée par la racine $m^{ième}$ du diviseur.*

Il s'agit de prouver que $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$.

Le principe établi (1°) démontre cette propriété; car d'après ce principe, le produit du diviseur $\sqrt[m]{b}$ par $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$ étant $\sqrt[m]{b\times\dfrac{a}{b}}$ ou $\sqrt[m]{a}$, il suit de là que le quotient de $\sqrt[m]{a}$ par $\sqrt[m]{b}$ est égal à $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$.

Remarque. On voit que *la racine $m^{ième}$ d'une fraction est égale à la racine $m^{ième}$ du numérateur divisée par la racine $m^{ième}$ du dénominateur.*

196. *Pour former la $m^{ième}$ puissance d'un radical, il suffit d'élever la quantité placée sous le radical à cette puissance;* c'est-à-dire que la $m^{ième}$ puissance de $\sqrt[n]{a}$, indiquée par $(\sqrt[n]{a})^m$, est $\sqrt[n]{a^m}$. Ce principe se déduit de celui du n° **195** (1°).

Par exemple,

$$(\sqrt[n]{a})^3=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\times a\times a}=\sqrt[n]{a^3}.$$

Les théories exposées dans ce chapitre conduisent aux résultats suivants:

$$\sqrt[2]{10}=3{,}16227766 \text{ etc.},\quad \sqrt[4]{10}=1{,}77827941 \text{ etc.},$$

$$\sqrt[3]{1061520150601}=10201,\quad \sqrt[6]{1061520150601}=\sqrt{10201}=101.$$

$$\sqrt[8]{10828567056280801}=\sqrt[4]{104060401}=\sqrt{10201}=101.$$

CHAPITRE V.

Rapports, Proportions, Progressions et Logarithmes.

§ I^{er}. *Des rapports arithmétiques et géométriques.*

197. La différence entre deux quantités est leur *rapport arithmétique* ou par *différence;* le quotient de la division de deux quantités l'une par l'autre, est leur *rapport géométrique* ou par *quotient*.

Ainsi, le rapport arithmétique de 18 à 6 est 12, et le rapport géométrique de 18 à 6 est 3.

Les deux nombres 18, 6, dont on prend le rapport, se nomment les *termes* du rapport; le 1er terme 18 est l'*antécédent* du rapport, et le 2^e terme 6 est le *conséquent.*

Pour indiquer le rapport géométrique de deux quantités, on écrit ces quantités l'une à côté de l'autre, en les séparant par deux points. Ainsi, l'expression $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$, indique le rapport géométrique de $\frac{2}{3}$ à $\frac{4}{5}$, ou le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

198. *Un rapport arithmétique ne change pas, quand on augmente ou quand on diminue ses deux termes d'un même nombre;* car lorsque deux nombres augmentent ou diminuent d'une même quantité, leur différence reste la même.

199. *Un rapport géométrique ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par une même quantité.* Car le rapport géométrique de deux quantités est égal au quotient de la 1re quantité par la 2^e (n° **197**); et on a démontré (n° **42**, 3°) que le quotient ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre.

*Remarque. Cette démonstration suppose que les termes du rapport sont des nombres entiers. La même propriété subsiste, quels que soient les termes d'un rapport.

En effet, si q désigne le rapport géométrique de a à b, c'est-à-dire le quotient de a par b (n° **197**), on aura

$$a = bq \text{ (n° 23)}; \quad \text{d'où} \quad a \times n = bq \times n.$$

Or, $bq\times n = b\times q\times n = b\times n\times q$ (n° **147**, 1° et 2°) $= bn\times q$.

Donc $an = bn\times q$. Puisque le produit de bn par q est an, le quotient de an par bn sera égal à q (n° **23**); mais, le quotient de a par b est aussi égal à q; ces deux quotiens sont donc égaux. Ce qui démontre le principe énoncé.

§ II. *Des proportions arithmétiques et géométriques.*

200. *La réunion de deux rapports égaux forme ce qu'on nomme une* PROPORTION.

Par exemple, le rapport arithmétique de 7 à 5 étant égal à celui de 11 à 9, les nombres 7, 5, 11, 9, forment une *proportion arithmétique ou par différence* que l'on écrit de cette manière, 7.5 : 11.9,

et que l'on énonce, 7 *est à* 5 *comme* 11 *est à* 9.

Le rapport géométrique de 7 à 3 étant égal à celui de 28 à 12, les nombres 7, 3, 28, 12, forment une *proportion géométrique ou par quotient* que l'on écrit de cette manière, 7 : 3 :: 28 : 12,

et que l'on énonce, 7 *est à* 3 *comme* 28 *est à* 12.

On appelle 1er antécédent et 1er conséquent, les deux termes du 1er rapport; et 2^e antécédent, 2^e conséquent, ceux du 2^e rapport. Le 1er terme et le 4^e sont les *extrêmes*, le 2^e terme et le 3^e sont les *moyens*.

Ainsi, dans la proportion géométrique $7 : 3 :: 28 : 12$, les deux termes 7, 3, du 1^{er} rapport sont le 1^{er} antécédent et le 1^{er} conséquent de la proportion; les deux termes 28, 12, du 2^{e} rapport sont le 2^{e} antécédent et le 2^{e} conséquent de la proportion; 7 et 12 sont les *extrêmes*, 3 et 28 sont les *moyens*.

Le quatrième terme d'une proportion est ce qu'on nomme une *quatrième proportionnelle* aux trois autres termes. Quand les *moyens* sont égaux, la proportion est dite *continue*.

Dans la *proportion continue* $5 . 7 : 7 . 9$, le terme *moyen* 7 est une *moyenne arithmétique* entre 5 et 9; cette proportion s'écrit ordinairement de cette autre manière, $\div 5 . 7 . 9$, et 9 est une *troisième proportionnelle arithmétique* à 5 et 7.

De même, $4 : 12 :: 12 : 36$ est une proportion géométrique continue qu'on écrit de cette manière $\div\div 4 : 12 : 36$; et 12 est une *moyenne géométrique* entre 4 et 36; 36 est une *troisième proportionnelle géométrique* à 4 et 12.

Des proportions arithmétiques.

201. Nous allons faire connaître les principales propriétés des proportions arithmétiques.

1°. *Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

En effet; soit la proportion arithmétique $7 . 5 : 11 . 9$; elle exprime que les rapports $7 - 5$, $11 - 9$, sont égaux. Par conséquent, si l'on augmente ces rapports de la somme $5 + 9$ des conséquens, les résultats $7 - 5 + 5 + 9$, $11 - 9 + 5 + 9$, seront égaux. Or, il est bien évident que $7 - 5 + 5 + 9$ se réduit à $7 + 9$, et que $11 - 9 + 5 + 9$ se réduit à $11 + 5$; la proportion

$$7 . 5 : 11 . 9 \text{ donne donc, } 7 + 9 = 11 + 5.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

2°. *Quand la somme de deux nombres est égale à la somme de deux autres nombres, ces quatre nombres forment une proportion arithmétique, dans laquelle les deux nombres qui composent une des sommes sont les extrêmes, et les deux autres nombres sont les moyens.*

En effet, soit l'égalité $7 + 9 = 11 + 5$.

Si des deux quantités égales $7 + 9$, $11 + 5$, on retranche le même nombre $5 + 9$, les restes seront nécessairement égaux. Or, pour ôter $5 + 9$ de $7 + 9$, il suffit de diminuer d'abord $7 + 9$ de 9, ce qui donne 7, et d'ôter ensuite 5 de 7, ce qui s'indique en écrivant, $7 - 5$. De même, ôter $5 + 9$ de $11 + 5$, revient à diminuer d'abord $11 + 5$ de 5, ce qui donne 11, et à ôter ensuite 9 de 11, ce qu'on indique en écrivant $11 - 9$.

L'égalité $7 + 9 = 11 + 5$, donne donc $7 - 5 = 11 - 9$; les rapports arithmétiques $7 - 5$, $11 - 9$, sont donc égaux; on a donc la proportion arithmétique, $7 . 5 : 11 . 9$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

On déduit de (1°) et (2°) que : 3° *si quatre nombres ne sont pas en proportion arithmétique, la somme des extrêmes n'est pas égale à la somme des moyens;* et que : 4° *si la somme des extrêmes n'est pas égale à celle des moyens, les quatre nombres donnés ne forment pas une proportion arithmétique.*

5°. *Le quatrième terme d'une proportion arithmétique est égal à la somme des moyens diminuée du premier terme*, car la proportion $7 . 5 : 11 . 9$, donnant $7 + 9 = 5 + 11$, si des deux quantités égales $7 + 9$, $5 + 11$, on ôte 7, les restes 9 et $5 + 11 - 7$, seront égaux.

6°. *La moyenne arithmétique entre deux nombres est égale à la moitié de leur somme;* car d'après (1°), la somme des deux nombres est égale au double de la moyenne arithmétique demandée.

Ainsi, la *moyenne arithmétique* entre 5 et 9 est la moitié de $5 + 9$, ou 7; et en effet, $5 . 7 : 7 . 9$.

Des proportions géométriques.

202. Les *proportions géométriques* ont reçu ce nom parce qu'elles sont d'un grand usage dans la Géométrie. Désormais, lorsque nous parlerons d'un *rapport* ou d'une *proportion*, sans en désigner l'espèce, on devra entendre qu'il s'agit d'un *rapport géométrique* ou d'une *proportion géométrique*.

Quand nous dirons qu'une proportion est *exacte*, nous entendrons que le rapport des deux premiers termes est égal au rapport des deux autres termes; c'est-à-dire que le quotient du 1er terme par le 2e est égal au quotient du 3e terme par le 4e; et quand nous dirons qu'une proportion n'est pas *exacte*, nous entendrons que ces quotiens sont inégaux.

Lorsque tous les termes d'une proportion sont des nombres entiers, chaque rapport est équivalent à une fraction qui a pour numérateur l'antécédent du rapport, et pour dénominateur le conséquent du même rapport; car une fraction exprime le quotient du numérateur par le dénominateur (n° 93). Mais, une proportion pouvant contenir des termes fractionnaires et des termes incommensurables, *on ne saurait établir rigoureusement la théorie des proportions qu'en considérant chaque rapport comme exprimant le quotient de l'antécédent par le conséquent*. Nous considérerons toujours les rapports sous ce point de vue général. Nous prendrons souvent des proportions dont les termes seront des nombres entiers ; mais comme nous supposerons dans tous les raisonnemens que chaque rapport exprime le quotient de l'antécédent par le conséquent, nos démonstrations conviendront à des quantités quelconques.

203. Pour *démontrer généralement les propriétés fondamentales des proportions*, nous considérerons deux rapports quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dont les termes a, b, c, d, soient commensurables ou incommensurables; il suit de la définition d'une proportion (n° **200**), que suivant que ces rapports seront égaux ou inégaux, la proportion $a : b :: c : d$, sera exacte ou ne sera pas exacte. Cela posé :

1°. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* En effet; si l'on a $a : b :: c : d$, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, seront égaux. Multipliant les deux termes

a, b, du 1er rapport par d, et ceux du second par b, ce qui ne change pas ces rapports (n° **199**), on aura

$\frac{ad}{bd}=\frac{cb}{db}$. Or, $bd = db$ (n° **147**, 1° et 2°); donc $ad = cb$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

Remarque. On voit que l'égalité $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, donne $a\times d=b\times c$.

2°. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion est exacte.* C'est-à-dire que si le produit ad de deux quantités est égal au produit bc de deux autres quantités, ces quatre quantités formeront une proportion $a:b::c:d$, dans laquelle, les deux facteurs a, d, du 1er produit seront les extrêmes, et les deux facteurs b, c, du 2e produit seront les moyens. En effet, les produits ad, bc, étant supposés égaux, si on les divise par bd, les quotiens $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, seront nécessairement égaux. Or, d'après le principe du n° **199**, on ne change pas les rapports $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, en divisant les deux termes ad, bd, du 1er rapport par d, et les deux termes bc, bd, du 2e rapport par b; les résultats $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, seront donc égaux. On aura donc, $a:b::c:d$.

Remarque. On voit que l'égalité $ad=bc$ donne $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

3°. *Lorsqu'une proportion n'est pas exacte, le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens;* car, il résulte de (2°) que si ces deux produits étaient égaux, la proportion serait exacte, ce qui est contre l'hypothèse.

4°. *Lorsque le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens, la proportion n'est pas exacte ;* car il résulte de (1°) que si la proportion était exacte, le produit des extrêmes serait égal à celui des moyens; ce qui est contre l'hypothèse.

* **204.** Les propriétés du n° **203**, servant de base à la théorie

des proportions, nous allons en donner une seconde démonstration. Considérons une proportion quelconque,

1^{er} *antécédent* : 1^{er} *conséquent* :: 2^e *antécédent* : 2^e *conséquent.*

Un rapport exprimant toujours le quotient de la division de l'antécédent par son conséquent (nº **197**), l'antécédent est égal au produit du conséquent par le rapport. On a donc,

1^{er} *antécédent* $=$ 1^{er} *conséquent* $\times$ 1^{er} *rapport*,
2^e *antécédent* $=$ 2^e *conséquent* $\times$ 2^e *rapport.*

Si l'on substitue ces expressions des antécédens, la proportion ci-dessus deviendra

1^{er} *conség.* $\times$ 1^{er} *rapport* : 1^{er} *conség.* :: 2^e *conség.* $\times$ 2^e *rapp.* : 2^e *conség.*

On voit dans cette dernière proportion, que les trois facteurs qui entrent dans le produit des extrêmes sont les deux conséquens et le 1^{er} rapport, tandis que les trois facteurs qui entrent dans le produit des moyens sont les deux mêmes conséquens et le 2^e rapport; et comme le produit de trois facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications (nº **147**; 1º et 2º), il suit de là que

(1)... *le produit des extrêmes* $=$ *le produit des conséquens* $\times$ 1^{er} *rapport*,
(2)... *le produit des moyens* $=$ *le produit des conséquens* $\times$ 2^e *rapport.*

Ces deux égalités conduisent aux propriétés suivantes :

1º. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

En effet, puisqu'il y a proportion, le 1^{er} rapport est égal au 2^e (nº **200**); les trois facteurs qui entrent dans l'expression (1) du produit des extrêmes sont donc respectivement égaux aux trois facteurs qui entrent dans l'expression (2) du produit des moyens; ces deux produits sont donc égaux (nº **147**, 1º et 2º).

2º. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion est exacte;* car, dans ce cas, l'expression (1) du produit des extrêmes devant être égale à l'expression (2) du produit des moyens, le produit des deux conséquens multiplié par le 1^{er} rapport doit être égal au produit des deux mêmes conséquens multiplié par le 2^e rapport; le 1^{er} rapport est donc nécessairement égal au 2^e; ces deux rapports forment donc une proportion (nº **200**).

3º. *Lorsqu'une proportion n'est pas exacte, le produit des extrêmes n'est pas égal à celui des moyens;* car, dans ce cas, le 1^{er} rapport n'étant pas égal au 2^e, le produit des deux conséquens multiplié par le 1^{er} rapport, n'est pas égal au produit des deux mêmes conséquens multiplié par le 2^e rapport; l'expression (1) du produit des extrêmes n'est donc pas égale à l'expression (2) du produit des moyens; ces produits ne sont donc pas égaux.

4º. *Quand le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens, la proportion n'est pas exacte;* car, dans ce cas, l'expression (1) du produit des extrêmes ne devant pas être égale à l'expression (2) du produit des moyens, le produit des deux conséquens multiplié par le 1^{er} rapport, n'est pas égal au produit des mêmes conséquens multiplié par le 2^e rapport; le 1^{er} rapport n'est donc pas égal au 2^e; ces rapports ne forment donc pas une proportion.

205. Nous allons faire voir que toutes les autres propriétés des proportions peuvent se déduire des quatre principes fondamentaux que nous venons de démontrer (nºs **203** et **204**).

1º. *Le quatrième terme d'une proportion est égal au produit des moyens divisé par le premier terme.* Car la proportion $a : b :: c : d$ donnant $ad = bc$ (nº **203**, 1º), si l'on divise les deux produits égaux ad, bc, par a, les quotiens d, $\frac{b \times c}{a}$, seront nécessairement égaux.

On prouverait de même que *le 1^{er} terme est égal au produit des moyens divisé par le 4^e terme, et que chaque moyen est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.*

Par conséquent, *lorsqu'on connaît trois termes d'une proportion, on peut toujours en déduire le quatrième terme.*

Exemple. *Calculer le quatrième terme x de la proportion dont les trois premiers termes sont* 6, 2 *et* 24.

On a $\quad 6 : 2 :: 24 : x$; d'où $x = \frac{2 \times 24}{6} = 8$.

2°. *La moyenne géométrique entre deux nombres est égale à la racine carrée du produit de ces deux nombres.* Car la moyenne géométrique x entre a et b est déterminée par la proportion $a : x :: x : b$, qui donne $x^2 = ab$; d'où $x = \sqrt{ab}$.

Par exemple, pour trouver une moyenne géométrique x, entre 4 et 36, on pose la proportion $4 : x :: x : 36$; d'où

$$x^2 = 36 \times 4, \quad x = \sqrt{36 \times 4} = \sqrt{144} = 12.$$

3°. *Si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on transposera les moyens ou les extrêmes;* car le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens (n° **205**, 1°), les quatre nombres seront encore en proportion (n° **205**, 2°).

Par exemple, la proportion $7 : 3 :: 28 : 12$, étant exacte, chacune des proportions

$$7 : 28 :: 3 : 12, \quad 12 : 3 :: 28 : 7, \quad 12 : 28 :: 3 : 7,$$

est nécessairement exacte; car la 1^re donne $7 \times 12 = 3 \times 28$; et il résulte de cette égalité que dans chacune des trois autres proportions, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, de sorte que ces proportions sont exactes (n° **205**, 2°).

4°. *Si quatre nombres sont en proportion, ils le seront encore lorsqu'on mettra les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens;* car le produit des extrêmes restera égal à celui des moyens.

Par exemple, la proportion $7 : 3 :: 28 : 12$, fournit les quatre autres proportions,

$$3 : 7 :: 12 : 28, \quad 3 : 12 :: 7 : 28, \quad 28 : 7 :: 12 : 3, \quad 28 : 12 :: 7 : 3.$$

Remarque. La proportion $7 : 3 :: 28 : 12$ donnant $3 : 7 :: 12 : 28$, on voit qu'*une proportion ne cesse pas d'être exacte, lorsqu'on transpose les deux termes de chaque rapport.*

5°. *Dans toute proportion, le rapport des conséquens est égal au rapport des antécédens;* car on vient de voir (4°) que la proportion $7 : 3 :: 28 : 12$ donne $3 : 12 :: 7 : 28$.

206. *On peut multiplier ou diviser un extrême et un moyen par un même nombre, sans que la proportion cesse d'être exacte.* En effet :

1°. Quand les deux termes qu'on multiplie ou qu'on divise appartiennent à un même rapport, ce rapport ne change pas (n° **199**); la proportion ne cesse donc pas d'être exacte.

2°. Lorsque les deux termes que l'on veut multiplier ou diviser par un même nombre n'appartiennent pas à un même rapport, on transpose d'abord les moyens (n° **205**, 3°); on applique ensuite à la nouvelle proportion le principe démontré (1°); et en transposant les moyens dans la dernière proportion, on obtient la proportion demandée.

Par exemple, pour démontrer que la proportion

$$7 : 3 :: 28 : 12 \text{ donne } 7 \times 5 : 3 :: 28 \times 5 : 12,$$

on effectue successivement les transformations qui viennent d'être indiquées, ce qui donne

$$7 : 28 :: 3 : 12 \,(\text{n}^\circ\, 205, 3^\circ), \; 7 \times 5 : 28 \times 5 :: 3 : 12 \,(1^\circ), \; 7 \times 5 : 3 :: 28 \times 5 : 12 \,(\text{n}^\circ\, 205, 3^\circ).$$

207. Le principe du n° **206** fournit le moyen de *faire disparaître les termes fractionnaires qui peuvent entrer dans une proportion*, et de *simplifier les termes d'une proportion lorsqu'on aperçoit un facteur commun entre un extrême et un moyen.*

Exemple. *Soit la proportion* $\frac{70}{6} : \frac{5}{4} :: \frac{30}{8} : \frac{45}{112}$.

On réduit les deux premières fractions à leur plus petit dénominateur commun 12, et les deux autres à leur plus petit dénominateur commun 112; la proportion devient

$$\frac{140}{12} : \frac{15}{12} :: \frac{420}{112} : \frac{45}{112}.$$

On multiplie les deux termes du 1^er rapport par 12, et ceux du 2^e rapport par 112, ce qui revient à supprimer les dénominateurs 12, 144; on obtient de cette manière la proportion, $140 : 15 :: 420 : 45$, qui se réduit à $14 : 15 :: 42 : 45$, en divisant les antécédens par leur facteur commun 10.

208. *Quand deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment une proportion;* car ces deux autres rapports étant égaux au rapport commun, sont égaux entre eux.

Ainsi, les proportions $5:7::15:21$, $5:7::10:14$, donnent $15:21::10:14$.

REMARQUE. Pour indiquer que les trois rapports $5:7$, $15:21$, $10:14$, sont égaux, on écrit souvent

$5:7::15:21::10:14$, ce qui signifie que

5 est à 7 comme 15 est à 21, comme 10 est à 14.

209. *Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédens ou les mêmes conséquens, les quatre autres termes forment une proportion.* Cette propriété se démontre, en transposant d'abord les moyens (nº **205**, 3º), et en appliquant ensuite le principe du nº **208** à la nouvelle proportion.

Ainsi, les proportions. $5:15::7:21$, $5:10::7:14$, donnent $15:21::10:14$;

car en transposant les moyens (nº **205**, 3º), elles deviennent,

$$5:7::15:21,\quad 5:7::10:14;$$

et ces deux dernières ayant un rapport commun, le principe du nº **208** donne $15:21::10:14$.

210. *Toute proportion jouit encore des propriétés suivantes :*

1º. *La somme des deux premiers termes est au 2e terme, comme la somme des deux autres termes est au 4e terme.*

En effet; le rapport d'un antécédent à son conséquent exprimant le quotient de l'antécédent par son conséquent, si l'on augmente chaque antécédent de son conséquent, chaque rapport augmentera d'une unité (nº **45**); or les deux premiers rapports étaient égaux; les deux nouveaux rapports seront donc égaux; ce qui démontre le principe énoncé.

Par exemple, la proportion $18:6::12:4$, donne

$$18+6:6::12+4:4,\quad \text{ou}\quad 24:6::16:4.$$

2º. *La différence entre les deux premiers termes est au 2e terme, comme la différence entre les deux autres termes est au quatrième terme.* Chaque antécédent pouvant être plus grand ou plus petit que son conséquent, nous allons considérer successivement ces deux cas :

Lorsque les antécédens sont plus grands que leurs conséquens, en diminuant chaque antécédent de son conséquent, chaque rapport diminue d'une unité; et comme les deux premiers rapports étaient égaux, les deux nouveaux rapports seront encore égaux.

Ainsi, la proportion $18:6::12:4$ donne

$$18-6:6::12-4:4,\quad \text{ou}\quad 12:6::8:4.$$

Lorsque les antécédens sont moindres que leurs conséquens, on ramène ce cas au précédent en transposant d'abord les deux termes de chaque rapport (nº **205**, 4º).

3º. *La somme des deux premiers termes est à la somme des deux autres, comme le 2e terme est au 4e, et comme le 1er terme est au 3e.*

Par exemple, la proportion (1)... $18:6::12:4$, donne

(2)... $18+6:12+4::6:4$ et (3)... $18+6:12+4::18:12$.

En effet; d'après (1º), la proportion (1) donne

$$18+6:6::12+4:4;$$

en changeant l'ordre des moyens dans cette dernière (nº **205**, 3º), on obtient la proportion (2). D'ailleurs, d'après le principe du nº **205** (5º), la proportion (1) donne (4)... $6:4::18:12$; et les proportions (2), (4), ayant un rapport commun, si on leur applique le principe du nº **208**, on en déduira la proportion (3).

4º. *La différence entre les deux premiers termes est à la différence entre les deux autres, comme le 2e terme est au 4e, et comme le 1er terme est au 3e.* Cette propriété se démontre comme (3º).

5º. *La somme des deux premiers termes est à la somme des deux autres, comme la différence entre les deux premiers* *termes est à la différence entre les deux autres.* Cette propriété se déduit de (3°), (4°), et du principe du n° **208**.

Ainsi, la proportion (1)... $18 : 6 :: 12 : 4$, donne successivement

$$18+6 : 12+4 :: 6 : 4\ (3°),\quad 18-6 : 12-4 :: 6 : 4\ (4°);$$

et d'après le principe du n° **208**, ces deux dernières donnent

$$18+6 : 12+4 :: 18-6 : 12-4.$$

Ce qui démontre la propriété énoncée.

6°. *La somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit de changer l'ordre des moyens dans la proportion donnée, et d'appliquer ensuite à cette nouvelle proportion le principe énoncé (3°).

Par exemple, la proportion $18 : 6 :: 12 : 4$, donne

$$18+12 : 6+4 :: 12 : 4,\quad 18+12 : 6+4 :: 18 : 6;$$

7°. *La différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

Cette propriété se démontre comme (6°), en changeant d'abord l'ordre des moyens dans la proportion donnée, et en appliquant à la nouvelle proportion le principe énoncé (4°).

Ainsi, la proportion $18 : 6 :: 12 : 4$ donne

$$18-12 : 6-4 :: 12 : 4,\quad 18-12 : 6-4 :: 18 : 6.$$

8°. *La somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens.* Cette propriété se déduit de (6°), (7°), et du principe du n° **208**.

Par exemple, d'après (6°) et (7°), la proportion $18 : 6 :: 12 : 4$ donne $18+12 : 6+4 :: 12 : 4$, $18-12 : 6-4 :: 12 : 4$, et d'après le principe du n° **208**, ces deux dernières proportions donnent $\quad 18+12 : 6+4 :: 18-12 : 6-4.$

9°. *Les puissances semblables de quatre nombres qui sont en proportion, forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soit la proportion $18 : 6 :: 12 : 4$,
je dis qu'on aura, $\quad 18^5 : 6^5 :: 12^5 : 4^5$.

Car, la 1re proportion donnant $18\times4=6\times12$, on a

$$(18\times4)^5=(6\times12)^5,\ \text{ou}\ 18^5\times4^5=6^5\times12^5\ (\text{n° } \mathbf{147}, 4°);$$

d'où, $\quad 18^5 : 6^5 :: 12^5 : 4^5$, (n° **205**, 2°).

10°. *Les racines semblables de quatre nombres qui sont en proportion, forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soit la proportion $2 : 3 :: 4 : 6$;

je dis qu'on aura $\quad \sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{3} :: \sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{6}$.

Car, la 1re proportion donnant $2\times6=3\times4$ (n° **205**, 1°) on a $\sqrt[5]{2\times6}=\sqrt[5]{3\times4}$; ce qui revient à

$$\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{6}=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{4},\ (\text{n° } \mathbf{147}, 5°);\quad \text{d'où}$$

$$\sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{3} :: \sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{6},\ (\text{n° } \mathbf{205}, 2°).$$

211. *Lorsqu'on multiplie les termes de plusieurs proportions les uns par les autres et par ordre, les quatre produits forment une nouvelle proportion.*

Par exemple, soient les proportions

$$3 : 6 :: 4 : 8,\quad 5 : 7 :: 20 : 28,\quad 2 : 11 :: 12 : 66.$$

Je dis qu'on aura

$$3\times5\times2 : 6\times7\times11 :: 4\times20\times12 : 8\times28\times66.$$

Car, d'après le principe du n° **205** (1°), les trois premières proportions donnant

$$3\times8=6\times4,\quad 5\times28=7\times20,\quad 2\times66=11\times12,$$

le produit des facteurs 3×8, 5×28, 2×66, sera égal au produit des facteurs 6×4, 7×20, 11×12; et d'après les principes du n° **147** (1°, 2° et 3°), on aura

$$3\times8\times5\times28\times2\times66=6\times4\times7\times20\times11\times12,$$

ou $3.5.2 \times 8.28.66 = 6.7.11 \times 4.20.12$; d'où

$3 \times 5 \times 2 : 6 \times 7 \times 11 :: 4 \times 20 \times 12 : 8 \times 28 \times 66$, (nº **203**, 2°).

212. *Dans une suite de rapports égaux, la somme d'un nombre quelconque d'antécédens est à la somme de leurs conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent.*

En effet, soient les rapports égaux

$3 : 6 :: 4 : 8 :: 5 : 10$; on en déduit

$3 : 6 :: 4 : 8,\quad 4 : 8 :: 5 : 10.$

Cela posé, il résulte du principe du nº **210** (6°), que la proportion $3 : 6 :: 4 : 8$ donne $3 + 4 : 6 + 8 :: 4 : 8$.

Or, $4 : 8 :: 5 : 10$; ces deux dernières proportions donnent

$3 + 4 : 6 + 8 :: 5 : 10$, (nº **208**).

Enfin, si l'on applique le principe du nº **210** (6°) à la dernière proportion, on aura

$$3 + 4 + 5 : 6 + 8 + 10 :: 5 : 10.$$

Ces relations démontrent le principe énoncé.

213. Les proportions jouissent de plusieurs autres propriétés qui seraient trop longues à énoncer, mais que l'on peut facilement déduire de ce qui précède. D'ailleurs, les principes du nº **203** (2° et 4°) fournissent le moyen de *reconnaître si une proportion jouit d'une propriété indiquée;* à cet effet, on pose d'abord la proportion qui résulte de la propriété indiquée; on forme ensuite le produit des extrêmes et celui des moyens; lorsque ces produits sont égaux, la propriété énoncée est vraie (nº **203**, 2°); quand ces produits ne sont pas égaux, la propriété indiquée est fausse (nº **203**, 4°).

§ III. *Des progressions.*

Des progressions arithmétiques, ou par différence.

214. *La progression arithmétique ou par différence est formée d'une suite de termes, croissans ou décroissans, tels que*

la différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante; cette différence est la *raison* de la progression.

Par exemple, les nombres 4, 7, 10, 13, 16, forment une *progression arithmétique croissante* dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi $\div$ 4 . 7 . 10 . 13 . 16; on l'énonce

4 *est à* 7, *comme* 7 *est à* 10, *comme* 10 *est à* 13, *comme* 13 *est à* 16.

Les mêmes nombres écrits dans l'ordre inverse donnent la *progression arithmétique décroissante* $\div$ 16 . 13 . 10 . 7 . 4.

215. *Dans toute progression arithmétique croissante,* le 2ᵉ terme est égal au 1ᵉʳ plus la raison; le 3ᵉ est égal au 2ᵉ plus la raison, c'est-à-dire au 1ᵉʳ terme augmenté de 2 fois la raison; et en général, *un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

On verra d'une manière semblable que *dans toute progression arithmétique décroissante, un terme d'un rang quelconque est égal au premier terme diminué d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

216. Problème. *Insérer n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés A, B;* c'est-à-dire *placer n termes* entre A et B, de manière que l'ensemble de ces $n + 2$ termes forme une progression arithmétique. Supposons que A soit moindre que B.

Pour être en état de trouver les n moyens arithmétiques demandés, il suffit de déterminer la *raison* x d'une progression arithmétique croissante, dont le 1ᵉʳ terme est A, dont le dernier terme est B, et dont le nombre des termes est $n + 2$. Le terme B étant précédé de $n + 1$ termes, il suit du principe du nº **215** que B sera égal au 1ᵉʳ terme A augmenté de $n + 1$ fois la raison x. La différence $B - A$ est donc égale au produit de x par $n + 1$. *On obtiendra donc la raison x demandée, en divisant la différence* $B - A$ *par* $n + 1$.

Les n moyens arithmétiques demandés seront

$$A + x,\quad A + 2x,\quad A + 3x, \ldots,\quad A + nx.$$

Exemple. *Insérer six moyens arithmétiques entre 2 et 23.*

On divise $23-2$ par $6+1$, c'est-à-dire 21 par 7, le quotient 3 exprimant la raison de la progression cherchée, cette progression est ÷ 2.5.8.11.14.17.20.23.

Les *moyens* demandés sont donc 5, 8, 11, 14, 17 et 20.

217. Dans toute progression arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs quelconques étant une constante d (n° **214**), il est facile de déduire de la règle du n° **216** que *si l'on insère successivement un même nombre n de moyens arithmétiques entre le 1er terme et le 2e terme d'une progression arithmétique, entre le 2e terme et le 3e, etc., l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression arithmétique.* Car ces termes croissent ou décroissent d'une quantité constante égale au quotient de la raison d par $n+1$.

Par exemple, soit la progression ÷ 2.14.26, dont la raison est 12; si l'on insère trois moyens arithmétiques entre 2 et 14, et trois autres moyens arithmétiques entre 14 et 26, on obtiendra la nouvelle progression ÷ 2.5.8.11.14.17.20.23.26, dont la raison 3 est égale au quotient de 12 par $3+1$.

218. *Pour obtenir la somme des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme, le nombre des termes et le dernier terme, il suffit d'ajouter le premier terme au dernier, et de multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes.* En effet, soit la progression arithmétique

÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

En écrivant ses termes dans un ordre inverse, on forme la progression ÷ 15. 13. 11. 9. 7. 5. 3.

Si l'on ajoute les termes correspondans de ces deux progressions, on obtiendra les sommes partielles

$$3+15,\ 5+13,\ 7+11,\ 9+9,\ 11+7,\ 13+5,\ 15+3.$$

Je dis que chacune de ces sommes partielles est égale à la première, c'est-à-dire au premier terme plus le dernier terme de la progression primitive. En effet, d'après les propriétés du n° **215** : dans la 2e somme partielle, 5 est égal au 1er terme 3 plus la raison, et 13 est égal au dernier terme 15 moins la raison; la somme de ces deux nombres se réduit donc au 1er terme plus le dernier; de même, dans la 3e somme partielle, 7 se compose du 1er terme 3 plus 2 fois la raison, et 11 se compose du dernier terme 15 moins 2 fois la raison; ce qui, en ajoutant, donne encore le 1er terme plus le dernier; et ainsi de suite. La somme des termes de ces deux progressions, c'est-à-dire le double de la somme des termes de l'une d'elles, est donc égale à la somme $3+15$ du 1er terme et du dernier, répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression. On en déduit la règle énoncée.

Exemple. *Calculer la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 1, dont le nombre des termes est 14, et dont le dernier terme est 27.*

On obtiendra la somme demandée en multipliant $27+1$ par $\frac{14}{2}$, ou 28 par 7; ce qui donnera 196. Et en effet, les termes de la progression sont les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, dont la somme est 196.

***219**. Pour *déterminer la somme des termes d'une progression arithmétique croissante, connaissant le premier terme, le nombre n des termes et la raison,* on calcule d'abord le dernier terme, en observant que d'après le principe du n° **215**, ce terme est égal au 1er terme augmenté de $n-1$ fois la raison. On connaît alors le 1er terme, le nombre des termes et le dernier terme; la règle du n° **218** donne le moyen de trouver la somme demandée.

***220**. Problème. *Calculer la somme x des n premiers nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, etc.*

Ces n nombres forment un progression arithmétique dont le 1er terme est 1, dont le nombre des termes est n, et dont la raison est 2. On déduira d'abord du principe du n° **215** que le $n^{ième}$ et dernier terme est $2n-1$. Connaissant : le 1er terme 1, le nombre n des termes, et le dernier terme $2n-1$, de la progression, on déduira de la règle du n° **218** que la somme x

de ces n termes est égale au produit de $1+2n-1$ par $\frac{n}{2}$, ou à $2n \times \frac{n}{2}$, ou à n^2.

Ainsi, *la somme des n premiers nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, ..., $2n-1$, *est égale au carré n^2 de n*. Et en effet,

$$1+3=4=2^2,\ 1+3+5=4+5=9=3^2;\ \text{etc.}$$

Des progressions géométriques, ou par quotient.

221. *La progression géométrique ou par quotient est formée d'une suite de termes tels, qu'en divisant chaque terme par celui qui le précède, le quotient reste constant;* ce quotient est la *raison* de la progression.

Par exemple, chacun des nombres 2, 6, 18, 54, 162, divisé par celui qui le précède, donnant le même quotient 3, ces nombres forment une *progression géométrique croissante* dont la *raison* est 3, et que l'on écrit ainsi,

$$\div\, 2 : 6 : 18 : 54 : 162; \quad \text{on l'énonce,}$$

2 *est à* 6, *comme* 6 *est à* 18, *comme* 18 *est à* 54, *comme* 54 *est à* 162.

Les mêmes nombres écrits dans un ordre inverse donnent la *progression géométrique décroissante*,

$$\div\, 162 : 54 : 18 : 6 : 2, \quad \text{dont la raison est } \frac{1}{3}.$$

En général, *selon qu'une progression géométrique est croissante ou décroissante, la* RAISON *de cette progression est plus grande ou plus petite que l'unité.*

222. D'après cette définition de la progression géométrique: le 2^e terme est égal au 1^{er} multiplié par la raison; le 3^e est égal au 2^e multiplié par la raison, ce qui revient au produit du 1^{er} terme par la 2^e puissance de la raison; et en général: *Un terme d'un rang quelconque est égal au produit du premier terme par la raison élevée à une puissance indiquée par le nombre des termes qui le précèdent.*

223. PROBLÈME. *Insérer n moyens géométriques entre deux nombres donnés A, B;* c'est-à-dire, placer n termes entre A et B, de manière que l'ensemble de ces $n+2$ termes forme une progression géométrique.

Pour être en état de trouver les n moyens géométriques demandés, il suffit de déterminer la *raison* x d'une progression géométrique dont le 1^{er} terme est A, dont le dernier terme est B, et dont le nombre des termes est $n+2$. Le terme B étant précédé de $n+1$ termes, il suit du principe du n° **222**, que B sera égal à $A \times x^{n+1}$; le quotient de B par A sera donc égal à x^{n+1}. *On obtiendra donc la raison x demandée en extrayant la racine $n+1^{ième}$ du quotient de B par A.*

Les n moyens géométriques demandés sont,

$$A\times x,\quad A\times x^2,\quad A\times x^3, \ldots,\ A\times x^n.$$

EXEMPLE. *Insérer deux moyens géométriques entre* 5 *et* 320.

On divise 320 par 5, et on extrait la racine 3^e du quotient 64; le résultat 4 exprimant la raison de la progression, cette progression est $\div\, 5 : 20 : 80 : 320$. De sorte que les moyens géométriques demandés sont 20 et 80.

224. Dans toute progression géométrique, la division de chaque terme par celui qui le précède donnant toujours un même quotient q (n° **221**), il est facile de déduire de la règle du n° **223**, que *si l'on insère successivement un même nombre n de moyens géométriques entre le 1^{er} terme et le 2^e terme d'une progression géométrique, entre le 2^e terme et le 3^e*, etc., *l'ensemble de tous ces termes forme une nouvelle progression géométrique.* Car en divisant chacun de ces termes par celui qui le précède, on obtient un quotient constant égal à la racine $n+1^{ième}$ de la raison q de la progression primitive.

Par exemple, soit la progression $\div\, 2 : 128 : 8192$, dont la raison est 64; si l'on insère deux moyens géométriques entre 2 et 128, et deux autres moyens entre 128 et 8192, on trouvera la nouvelle progression,

$$\div 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048 : 8192,$$

dont la raison 4 est égale à $\sqrt[3]{64}$.

*225. Lorsque dans la résolution du problème du n° 225, on ne veut faire usage que de l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique, le nombre n des moyens géométriques qu'on insère entre les deux nombres donnés, doit être tel que l'*indice* $n+1$ de la racine qu'il faut extraire pour obtenir la *raison* cherchée, ne renferme que les facteurs premiers 2 et 3 (n° 194); c'est-à-dire que $n+1$ doit être de la forme $2^a \times 3^b$, a et b désignant des nombres entiers quelconques.

* 226. *Pour obtenir la somme x des termes d'une progression géométrique croissante, connaissant le premier terme a, la raison q et le dernier terme d, on multiplie le dernier terme par la raison; on retranche du produit le premier terme de la progression, et on divise le reste par la raison diminuée d'une unité; le quotient exprime la somme demandée.*

En effet; il suit des propriétés des n^{os} 221 et 222, que q est plus grand que 1, et que les termes de la progression sont, $a, aq, aq^2, \ldots, \frac{d}{q^2}, \frac{d}{q}, d$. De sorte que,

$$x = a + aq + aq^2 + \ldots + \frac{d}{q^2} + \frac{d}{q} + d.$$

Si l'on multiplie la somme x et toutes ses parties, par q, on aura $\quad x \times q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + \frac{d}{q} + d + dq.$

Si l'on retranche une fois x de q fois x, les termes aq, $aq^2, \ldots, d$, disparaîtront, car ils se trouvent en même temps dans x et dans $x \times q$; il restera,

$$q \textit{ fois } x \textit{ moins une fois } x = dq - a.$$

Or, x pris q fois moins une fois, revient à $q-1$ fois x, ou au produit de x par $q-1$. Le nombre $dq-a$ étant le pro-

duit de x par $q-1$, on obtiendra x en divisant $dq-a$ par $q-1$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Exemple. *Soit la progression*

$$\div 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048.$$

La règle indiquée donnera

$$x = \frac{2048 \times 4 - 2}{4-1} = \frac{8192-2}{3} = \frac{8190}{3} = 2730.$$

Et en effet, si l'on effectue l'addition des nombres 2, 8, 32, 128, 512, 2048, on trouvera que leur somme est 2730.

* 227. Pour *déterminer la somme des termes d'une progression géométrique, connaissant le premier terme, la raison et le nombre des termes*, on calcule d'abord le dernier terme, en observant que d'après le principe du n° 222, ce terme est égal au produit du 1er terme par une puissance de la raison indiquée par le nombre des termes diminué de 1. On connaît alors le 1er terme, la raison et le dernier terme; la règle du n° 226 fournit la somme demandée.

§ IV. *Théorie des logarithmes.*

Des logarithmes dans un système quelconque.

228. Quand on compare deux progressions indéfinies, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro, chaque terme de la seconde progression est le *logarithme* du terme correspondant de la première progression; l'ensemble des termes de ces deux progressions, forme un *système de logarithmes*. Il suit de cette définition que *le logarithme de l'unité est égal à zéro.*

Pour indiquer le logarithme d'un nombre, on place devant ce nombre le signe *log*, ou simplement la lettre initiale *l*. Ainsi, chacune des expressions *log* 64, *l* 64, désigne le logarithme de 64; $l\,(a+b)$ représente le logarithme de la somme des nombres a, b; la^n indique le logarithme de a^n; $l\,\frac{a}{b}$ représente le logarithme du quotient de a par b, ou le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$; chacune des expressions $log\,\sqrt[m]{a^n}$, $l\,\sqrt[m]{a^n}$, indique le logarithme de la racine $m^{ième}$ de a^n.

229. Nous supposerons que les deux progressions sont croissantes, que le premier terme de la progression géométrique est l'unité, que le terme correspondant de la progression arithmétique est zéro, et nous représenterons les *raisons* de ces progressions par R et r. De sorte que ces progressions seront

$$\div\!\div\ 1 : R : R^2 : R^3 : R^4 : R^5 : \ldots$$
$$\div\ 0\,.\,r\,.\,2r\,.\,3r\,.\,4r\,.\,5r\ldots$$

On déduit des propriétés des n^os **222** et **215** que dans des progressions de cette espèce, *chaque terme de la progression géométrique est égal à la raison élevée à une puissance indiquée par le nombre des termes qui le précèdent, et chaque terme de la progression arithmétique est égal à la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui.*

Ainsi, le $n+1^{ième}$ terme de la progression géométrique est R^n, et le terme correspondant de la progression arithmétique est n fois r ou nr.

230. *Lorsqu'on forme le produit de plusieurs termes de la progression géométrique, et lorsqu'on ajoute les termes correspondans de la progression arithmétique, le* PRODUIT *et la* SOMME *sont des termes qui se correspondent dans les deux progressions.*

Par exemple; soient deux termes R^m, R^n, de la progression géométrique; leur produit R^{m+n} (n° **51**) est le $m+n+1^{ième}$ terme de cette progression (n° **229**). Les termes correspondans de la progression arithmétique sont mr et nr; leur *somme* $mr+nr$ ou $(m+n)$ fois r, est le $m+n+1^{ième}$ terme de la progression arithmétique. Le *produit* et la *somme* sont donc deux termes qui se correspondent dans les deux progressions.

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer, quel que soit le nombre des termes qu'on multiplie et qu'on ajoute dans les deux progressions, le principe énoncé est démontré.

On en déduit que *pour trouver le produit de plusieurs termes de la progression géométrique, il suffit d'ajouter les termes correspondans de la progression arithmétique; la* SOMME *correspond au* PRODUIT *demandé.*

EXEMPLE. Soient les deux progressions

$$\div\!\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,12\,.\,14\,.\,16\,.\,18\,.\text{etc.}$$

Pour en déduire le produit des termes 3, 27, 81, de la progression géométrique, il suffit d'ajouter les termes correspondans 2, 6, 8, de la progression arithmétique; la *somme* 16 est un terme de cette progression, et le terme correspondant 6561 de la progression géométrique est le *produit* cherché.

231. Les termes de la progression arithmétique étant les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique, il résulte du principe du n° **230** que *le logarithme du produit de plusieurs termes de la progression géométrique, est égal à la somme des logarithmes de ces termes.*

Ainsi, dans l'exemple précédent, le logarithme 16 du produit 6561 des termes 3, 27, 81, de la progression géométrique, est égal à la somme des logarithmes 2, 6, 8, de ces termes.

232. Cette propriété fondamentale des logarithmes, d'après laquelle *le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs, ne paraît applicable qu'aux nombres qui font partie de la progression géométrique.* Pour démontrer que *la même propriété convient à tous les nombres compris entre les termes de la progression géométrique*, nous concevrons qu'on insère successivement m moyens géométriques entre deux termes consécutifs quelconques de la progression géométrique, et m moyens arithmétiques entre les termes correspondans de la progression arithmétique. On obtiendra ainsi deux nouvelles progressions (n^os **224** et **217**) qui jouiront encore de la propriété énoncée;

car pour que deux progressions jouissent de cette propriété, il suffit que le premier terme de la progression géométrique étant l'unité, le terme correspondant de la progression arithmétique soit zéro; et les deux nouvelles progressions satisfont à cette condition, puisque le premier terme de chacune d'elles est le même que celui des progressions primitives. Les *raisons* des progressions primitives étant R et r, on déduit des propriétés des nos **224** et **217**, que les *raisons* des nouvelles progressions seront $\sqrt[m+1]{R}$ et $\frac{r}{m+1}$. On pourra donc toujours concevoir que m soit assez grand pour que la différence entre deux termes consécutifs quelconques de chaque progression devienne aussi petite que l'on voudra; de sorte que tous les nombres plus grands que l'unité peuvent être considérés comme faisant partie d'une certaine progression géométrique commençant par l'unité, à laquelle correspond une progression arithmétique commençant par zéro. Par conséquent, *tous les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes; et ces nombres jouissent de cette propriété fondamentale que le logarithme du produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

233. 1°. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs étant égal à la somme des logarithmes de ces facteurs,* on en déduit que *tous les nombres plus grands que l'unité jouissent en outre des propriétés suivantes :*

2°. *Le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur;* car le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, il résulte de (1°) que le logarithme du dividende est égal à la somme des logarithmes du diviseur et du quotient.

3°. *Le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur.* Cela résulte de (2°).

Ainsi, $$l\frac{a}{b} = la - lb.$$

4°. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par le degré de la puissance;* cela se déduit de (1°) en supposant tous les facteurs égaux entre eux.

Par exemple, $\quad log\,4^3 = (log\,4) \times 3;\quad$ car

$$log\,4^3 = l(4\times4\times4) = l4 + l4 + l4 = 3 \text{ fois } l4 = 3l4.$$

En général, $\quad log\,A^m = m \text{ fois } log\,A = mlA.$

5°. *Le logarithme de la racine d'un certain degré d'un nombre s'obtient en divisant le logarithme de ce nombre, par le degré de la racine qu'on veut extraire.*

On peut déduire ce principe de (1°).

Par exemple, la racine troisième de 6, étant la quantité qui, prise trois fois comme facteur, donne 6 (n° **170**), on a

$$6 = \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6};\ \text{d'où, d'après (1°)},$$

$$l6 = l\sqrt[3]{6} + l\sqrt[3]{6} + l\sqrt[3]{6} = 3 \text{ fois } l\sqrt[3]{6} = 3l\sqrt[3]{6}.$$

On obtiendra donc le logarithme de $\sqrt[3]{6}$ en divisant le logarithme de 6 par 3.

En général, $\quad log\sqrt[m]{a} = \frac{log\,a}{m}.$

6°. *Pour obtenir le logarithme de la racine mième d'une puissance d'un nombre, il suffit de multiplier le logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance à laquelle le nombre est élevé, et de diviser le produit par l'indice m de la racine à extraire.* Car d'après (5°) et (4°), on a

$$l\sqrt[m]{a^n} = \frac{la^n}{m} = \frac{nla}{m}.$$

Remarque. Les propriétés établies (6°) et (3°) donnent

$$log\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{n(la - lb)}{m}.$$

7°. *Le logarithme du quatrième terme d'une proportion est* *égal à la somme des logarithmes des moyens diminuée du logarithme du premier terme.* Car la proportion,

$a : b :: c : d$ donnant $d = \frac{bc}{a}$, il suit de (2°) et (1°) que

$$ld = lbc - la = lb + lc - la.$$

Des logarithmes dans le système dont la base est 10.

234. Nous ne considérerons désormais que le système de logarithmes dont on fait ordinairement usage dans les calculs numériques; ce système se déduit des progressions

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : \text{etc.},$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \quad .\text{etc.},$$

en insérant des moyens géométriques et arithmétiques entre les termes de ces progressions, comme il a été indiqué (n° **232**).

235. *Le nombre qui, dans un système de logarithmes, a pour logarithme l'unité, se nomme* BASE *de ce système;* de sorte que 10 est la *base* du système actuel. Dans ce système :

1°. les logarithmes des nombres, 1, 10, 100, 1000, etc., étant respectivement, 0, 1, 2, 3, etc.,

on voit que suivant qu'un nombre est compris entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., son logarithme tombe entre zéro et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc.

Par conséquent, *si l'on évalue les logarithmes en décimales, la partie entière du logarithme d'un nombre entier ou décimal plus grand que l'unité, contiendra autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre dont on cherche le logarithme.* Cette partie entière du logarithme s'appelle sa *caractéristique*.

2°. *Quand on connaît le logarithme d'un nombre, pour en déduire le logarithme du produit ou du quotient de ce nombre par l'unité suivie de n zéro, il suffit d'augmenter ou de diminuer le logarithme donné de n unités; et réciproquement, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue le logarithme d'un nombre de n unités, le résultat est le logarithme du produit ou du quotient de ce nombre par l'unité suivie de n zéro.*

En effet; l'unité suivie de n zéro étant égale à 10^n (n° **53**), il s'agit de faire voir que l'on a

$$l(A \times 10^n) = lA + n, \quad l\frac{A}{10^n} = lA - n.$$

Or, $l10$ étant égal à l'unité (n° **234**), les propriétés du n° **233** (1°, 2°, 4°) donnent

$$l(A \times 10^n) = lA + l10^n = lA + nl10 = lA + n,$$
$$l\left(\frac{A}{10^n}\right) = lA - l10^n = lA - nl10 = lA - n.$$

Ce qui démontre les propriétés énoncées (2°).

***236.** Le système de logarithmes que l'on a déduit des progressions primitives,

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots.$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \quad \ldots.,$$

par la méthode du n° **232**, ne peut conduire qu'aux logarithmes des nombres plus grands que le premier terme 1, de la progression géométrique. Cependant *les nombres positifs moindres que l'unité ont aussi des logarithmes.* Pour concevoir comment les logarithmes des nombres plus grands et plus petits que l'unité peuvent faire partie d'un même système, on prolonge les deux progressions indéfiniment de part et d'autre des termes correspondans 1 et 0. On observe à cet effet, que dans la progression géométrique ci-dessus, chaque terme divisé par la *raison* 10 donnant le terme précédent, on peut faire précéder le terme 1, des termes $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc.; de sorte que la progression géométrique indéfiniment prolongée de part et d'autre du terme 1, devient

$$\div\!\div \ldots : \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots.$$

Les nombres 10, 100, 1000, 10000, etc., étant les puissances successives de 10 (n° 53), on peut mettre cette progression, sous la forme

$$\div\!\div \ldots \frac{1}{10^5} : \frac{1}{10^4} : \frac{1}{10^3} : \frac{1}{10^2} : \frac{1}{10^1} : 1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 \ldots$$

Pour trouver les logarithmes des nombres $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc., il faut établir des conventions à l'aide desquelles on puisse former les termes qui précèdent zéro dans la nouvelle progression arithmétique. Or, chaque terme de la progression arithmétique diminué de la *raison* 1, donne le terme précédent. Le terme qui précède zéro, s'obtiendra donc en ôtant l'unité de zéro. Cette soustraction, désignée par $0-1$, ne pouvant s'effectuer, on est convenu de l'indiquer en écrivant -1; de sorte que -1 indique qu'il reste à soustraire une unité. De même, le terme qui doit précéder -1, s'obtiendra en ôtant l'unité de -1, ou, ce qui revient au même, en ôtant 2 unités de zéro; on indique cette soustraction en écrivant $0-2$, ou simplement -2. Par une raison semblable, le terme qui précède $0-2$ est $0-3$ ou -3; et ainsi de suite.

On obtient de cette manière la progression arithmétique,

$$\div \ldots -5.-4.-3.-2.-1.0.+1.+2.+3.+4.+5\ldots,$$

qui est indéfinie dans les deux sens, et dans laquelle le terme zéro correspond au terme 1 de la progression géométrique. Dans le système de logarithmes déterminé par l'ensemble de ces nouvelles progressions, les nombres

$$\ldots, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, 10000, \ldots$$

ont pour logarithmes

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Suivant qu'un nombre est précédé du signe + ou du signe −, on dit que ce nombre est *positif* ou qu'il est *négatif*. Les nombres qui ne sont précédés d'aucun signe sont censés affectés du signe + et sont par conséquent *positifs*.

Remarque. Pour *former les logarithmes des nombres moindres que l'unité*, par la méthode du n° 232, il faut insérer des moyens géométriques entre les termes, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc., de la progression géométrique, et des moyens arithmétiques entre les termes correspondans $0, -1, -2$, etc., de la progression arithmétique. La recherche des moyens géométriques n'offre aucune difficulté (n° 225); mais le calcul des moyens arithmétiques, exigeant qu'on sache opérer sur des nombres *négatifs*, nous allons commencer par faire voir comment on peut *exécuter les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres positifs et négatifs.*

Des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres positifs et négatifs.

237. Lorsqu'on veut *additionner des nombres positifs et négatifs*, il faut généraliser le sens qui avait été attaché jusqu'ici à l'addition; car les signes + et − placés devant des nombres, indiquent réellement des additions et des soustractions partielles. *Nous considérerons donc l'addition de plusieurs nombres positifs et négatifs comme ayant pour but de trouver un seul nombre, positif ou négatif, qui exprime le résultat des additions et des soustractions partielles indiquées par les signes + et − qui affectent les nombres sur lesquels on opère.* Ce résultat sera la *somme* des nombres proposés.

D'après cette définition de l'*addition* ainsi généralisée :

1°. *Pour obtenir la* somme *de plusieurs nombres de mêmes signes, on ajoute ces nombres en faisant abstraction de leurs signes, et on affecte la somme du signe qui les précède.*

Cela est évident pour des nombres positifs.

Considérons des nombres négatifs, −3 et −5 par exemple; ces nombres indiquant qu'on doit soustraire successivement 3 et 5, ce qui revient à soustraire la somme 8 des nombres 3 et 5, la *somme* des nombres négatifs −3, −5, doit indiquer une soustraction totale de 8 unités; cette *somme* est donc *représentée* par — 8.

2°. *Pour obtenir la* SOMME *de deux nombres de signes contraires, on prend la différence entre ces nombres, en faisant abstraction de leurs signes, et on affecte cette différence du signe du plus grand de ces nombres.*

Par exemple, soit proposé d'additionner + 7 et — 4; cela signifie qu'on doit ajouter 7 et retrancher 4; ce qui se réduit à ajouter la différence 3 entre 7 et 4; de sorte que la *somme* des nombres + 7 et — 4 est + 3.

De même, pour additionner les nombres + 4, — 7, il faut ajouter 4 et soustraire 7; ce qui se réduit à retrancher la différence 3 entre 4 et 7; la *somme* des nombres + 4, — 7, est donc représentée par — 3.

3°. *Pour obtenir la* SOMME *de plusieurs nombres positifs et négatifs, on calcule séparément la somme des nombres précédés du signe + et celle des nombres précédés du signe —; on retranche la plus petite somme de la plus grande; le reste, affecté du signe des nombres qui ont fourni la plus grande somme, est le résultat demandé.*

En effet, soit proposé d'*additionner* les nombres + 8, — 3, + 7, — 2; cela signifie qu'on doit ajouter 8, retrancher 3, ajouter 7, et retrancher 2; l'ordre dans lequel on effectue ces opérations étant indifférent, elles reviennent à ajouter 8 + 7 ou 15, et à soustraire 3 + 2 ou 5; ces deux dernières opérations se réduisent à ajouter la différence 10 entre 15 et 5, c'est-à-dire à affecter cette différence du signe + placé devant les nombres qui ont donné la plus grande somme. La *somme* des nombres proposés est donc + 10.

Pour obtenir cette *somme*, il suffit de faire la somme 15 des nombres 8, 7, précédés du signe +, et la somme 5 des nombres 3, 2, précédés du signe —; de retrancher ensuite 5 de 15, et d'affecter le reste 10, du signe + placé devant les nombres qui ont donné la plus grande somme.

De même, l'*addition* des nombres — 8, + 3, — 7, + 2, revient à soustraire 8 + 7 ou 15, et à ajouter 3 + 2 ou 5; ce

qui se réduit à soustraire la différence 10 entre 15 et 5; c'est-à-dire à affecter cette différence du signe — placé devant les nombres 8, 7, qui ont donné la plus grande somme.

La *somme* des nombres proposés est donc — 10.

Pour obtenir cette *somme*, il suffit de faire la somme 15 des nombres 8, 7, précédés du signe —, et la somme 5 des nombres 3, 2, précédés du signe +; de retrancher ensuite 5 de 15, et d'affecter le reste 10, du signe — placé devant les nombres qui ont donné la plus grande somme.

Des raisonnemens analogues pouvant se faire sur des nombres positifs et négatifs quelconques, on en déduit la règle énoncée (3°).

238. Lorsqu'on a une expression composée d'une suite de nombres liés entre eux par les signes + et —, si on effectue successivement les opérations indiquées, on parviendra à un dernier résultat qui sera l'expression *réduite* à sa forme la plus simple.

1°. Considérons d'abord des *nombres de mêmes signes*.

Soit l'expression + 3 + 5; elle indique qu'on doit ajouter successivement 3 et 5, ce qui revient à ajouter la somme 8 des nombres 3 et 5; l'expression + 3 + 5 se réduit donc à + 8.

De même, soit l'expression — 3 — 5; elle indique qu'on doit soustraire successivement 3 et 5, ce qui se réduit à soustraire la somme 8 des nombres 3 et 5; l'expression — 3 — 5 se réduit donc à — 8.

2°. Considérons deux *nombres de signes contraires*.

Soit l'expression + 7 — 4; elle indique qu'on doit ajouter 7 et retrancher ensuite 4, ce qui revient évidemment à ajouter la différence 3 entre 7 et 4; l'expression + 7 — 4 se réduit donc à + 3.

De même, soit l'expression + 4 — 7; elle indique qu'on doit ajouter 4 et retrancher 7, ce qui revient évidemment à retrancher la différence 3 entre 7 et 4; l'expression + 4 — 7 se réduit donc à — 3.

3°. Considérons enfin une suite de *nombres quelconques affectés de signes différens.*

Soit l'expression + 8 — 3 + 7 — 2. La partie + 8 — 3 de cette expression indique qu'on doit ajouter 8 et retrancher 3, ce qui revient à ajouter la différence 5 entre 8 et 3; de sorte que $+8-3$ se réduit à $+5$. L'expression $+8-3+7-2$ se réduit donc à $+5+7-2$. Or, ajouter successivement 5 et 7 revient à ajouter la somme 12 des nombres 5 et 7; l'expression $+5+7$ se réduit donc à $+12$; et par conséquent, l'expression $+5+7-2$ se réduit à $+12-2$. Enfin, ajouter 12 pour retrancher ensuite 2, revenant à ajouter la différence 10 entre 12 et 2, on voit que $+12-2$ se réduit à $+10$. L'expression primitive $+8-3+7-2$ se réduit donc à $+10$.

REMARQUE. Le résultat devant être le même, dans quelque ordre qu'on effectue les additions et les soustractions partielles indiquées par les signes $+$ et $-$, l'ensemble des opérations indiquées par $+8-3+7-2$, revient à ajouter les nombres 8, 7, affectés du signe $+$, et à retrancher les nombres 3, 2, affectés du signe $-$; ce qui se réduit à ajouter $8+7$ ou 15, et à retrancher $3+2$ ou 5; or, ajouter 15 et retrancher 5 revient évidemment à ajouter la différence 10 entre 15 et 5. L'expression $+8-3+7-2$ se réduit donc à $+10$.

Soit l'expression $-8+3-7+2$. La partie $-8+3$ indique qu'on doit retrancher 8 et ajouter 3; ce qui revient à retrancher la différence 5 entre 8 et 3; de sorte que $-8+3$ se réduit à -5. L'expression $-8+3-7+2$ se réduit donc à $-5-7+2$. Or, retrancher successivement 5 et 7 revient à retrancher la somme 12 des nombres 5 et 7; l'expression $-5-7$ se réduit donc à -12; et par suite, $-5-7+2$ se réduit à $-12+2$. Enfin, retrancher 12 et ajouter 2, revenant à retrancher la différence 10 entre 12 et 2, on voit que $-12+2$ se réduit à -10. L'expression primitive $-8+3-7+2$ se réduit donc à -10.

REMARQUE. Le résultat devant être le même dans quelque ordre qu'on effectue les calculs, l'ensemble des opérations partielles indiquées par $-8+3-7+2$ revient à soustraire les nombres 8, 7, affectés du signe $-$, et à ajouter les nombres 3, 2, affectés du signe $+$; ce qui se réduit à soustraire $8+7$ ou 15, et à ajouter $3+2$ ou 5. Or, retrancher 15 et ajouter 5 revient évidemment à retrancher la différence 10 entre 15 et 5. L'expression $-8+3-7+2$ se réduit donc à -10.

239. La comparaison des exemples des nos **237** et **238** fait voir que la réduction à sa plus simple expression, d'une suite de nombres liés entre eux par les signes $+$ et $-$, conduit aux mêmes calculs que si l'on cherchait la somme de ces nombres affectés des signes qui les précèdent. Par conséquent, *lorsqu'on veut se borner à indiquer l'addition de plusieurs nombres positifs et négatifs, il suffit d'écrire ces nombres les uns à la suite des autres et avec leurs signes.*

240. *La* SOUSTRACTION *a pour but, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de déterminer l'autre nombre qui est le reste* (n° **14**).

Pour trouver le reste d'une soustraction, il suffit de placer à la suite du nombre dont on soustrait, le nombre à soustraire pris avec un signe contraire à celui dont il est affecté; le résultat est le reste demandé. On réduit ensuite ce reste à sa plus simple expression (n° **238**).

Par exemple, pour soustraire -5 de -8, on observe que $+5-5$ étant égal à zéro, on peut remplacer -8 par l'expression équivalente $-8+5-5$; on voit alors que pour ôter -5 de -8, il suffit de supprimer -5 dans $-8+5-5$, ce qui fournit le reste $-8+5$ demandé. Ainsi, pour soustraire -5 de -8, il suffit d'écrire $+5$ à la suite de -8; le reste $-8+5$ se réduit à -3. Pour faire la *preuve*, on ajoute au nombre -5 à soustraire, le reste -3; la somme $-5-3$ se réduisant au nombre -8 dont on a soustrait -5, le reste -3 est exact (n° **17**).

De même, pour retrancher $+5$ de -8, on observe que -8 étant équivalent à $-8-5+5$, on obtiendra le reste en ôtant $+5$ de $-8-5+5$, ce qui revient à supprimer $+5$ dans $-8-5+5$; le résultat $-8-5$ est le reste demandé. Ainsi, pour soustraire $+5$ de -8, il suffit d'écrire -5 à la suite de -8; le reste $-8-5$ se réduit à -13. Le reste -13 est exact; car en l'ajoutant au nombre $+5$ à soustraire, la somme $+5-13$ se réduit au nombre -8 dont on a soustrait $+5$.

Ces exemples démontrent la règle énoncée.

241. *La* MULTIPLICATION *a pour but de calculer un nombre nommé* PRODUIT, *qui soit composé avec un nombre nommé* MULTIPLICANDE, *de la même manière qu'un nombre nommé* MULTIPLICATEUR, *est composé avec l'unité* (n° **113**).

Le signe du produit ne pouvant dépendre que des signes des facteurs, et nullement de leurs valeurs numériques, *il suffit de déterminer le signe du produit dans le cas où le multiplicateur est un nombre entier.* Cela posé :

1°. *Lorsque le multiplicateur a le signe* $+$, *le produit a le signe du multiplicande ;* car le multiplicateur étant composé de l'addition de plusieurs unités, le produit doit être composé de l'addition de plusieurs nombres égaux au multiplicande, et on a vu (n° **237**) que la somme de plusieurs nombres de mêmes signes est affectée du signe de ces nombres.

Par exemple, le produit de $+3$ par $+2$ est $+6$; car le multiplicateur $+2$ indiquant l'addition de 2 unités, on obtiendra le produit de $+3$ par $+2$, en formant la *somme* de deux nombres égaux à $+3$; ce qui donne $+3+3$ ou $+6$.

De même, le produit de -3 par $+2$ est -6 ; car pour l'obtenir, il faut former la *somme* de deux nombres égaux à -3, ce qui donne -6 (n° **237**, 1°).

2°. *Lorsque le multiplicateur a le signe* $-$, *le produit a un signe contraire à celui du multiplicande ;* car le multiplicateur étant composé de la soustraction de plusieurs unités, on formera le produit en retranchant plusieurs fois le multiplicande ; ce qui revient, comme on l'a vu (n° **240**), à faire la *somme* de plusieurs nombres égaux au multiplicande et affectés d'un signe contraire à celui du multiplicande ; cette somme, qui exprime le produit demandé, sera donc affectée d'un signe contraire à celui du multiplicande.

Par exemple, le produit de $+3$ par -2 est -6 ; car le multiplicateur -2 indiquant la soustraction de 2 unités, on obtiendra le produit de $+3$ par -2, en retranchant 2 fois le multiplicande $+3$; or, pour soustraire $+3$, il suffit d'écrire

-3 ; le produit demandé est donc la *somme* de deux nombres égaux à -3, c'est-à-dire $-3-3$ ou -6.

De même, le produit de -3 par -2 est $+6$; car le multiplicateur indiquant la soustraction de 2 unités, on formera le produit de -3 par -2, en retranchant 2 fois le multiplicande -3 ; ce qui donne $+3+3$ ou $+6$.

On voit, par ce qui précède, que *le produit de deux nombres de même signe a le signe* $+$, *et que le produit de deux nombres de signes différens a le signe* $-$.

242. *La* DIVISION *a pour but, connaissant le produit de deux nombres nommé* DIVIDENDE, *et l'un de ces nombres nommé* DIVISEUR, *de trouver l'autre nombre nommé* QUOTIENT, (n° **23**).

On déduit de cette définition et de la *règle des signes* dans la multiplication, que *le quotient de la division de deux nombres de même signe a le signe* $+$, *et que le quotient de la division de deux nombres de signes différens a le signe* $-$.

Ainsi, $\frac{+6}{+2}=+3$, $\frac{-6}{-2}=+3$, $\frac{+6}{-2}=-3$, $\frac{-6}{+2}=-3$;

car, dans chacune de ces divisions, la multiplication du diviseur par le quotient doit donner le dividende.

Des logarithmes négatifs.

* **243.** Il est actuellement facile de s'assurer qu'en effectuant les opérations d'après les règles des n^{os} **237**, **240**, **241** et **242**, *les termes des progressions indéfinies*

$$\div\!\div \ldots : \frac{1}{10^5} : \frac{1}{10^4} : \frac{1}{10^3} : \frac{1}{10^2} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 \ldots$$

$$\div \ldots -5 . -4 . -3 . -2 . -1 . 0 . +1 . +2 . +3 . +4 \; +5 \ldots$$

jouissent des propriétés du n° **233**.

Par exemple, le produit de 10^3 par $\frac{1}{10^5}$ étant $\frac{1 \times 10^3}{10^5}$ ou $\frac{1 \times 10^3}{10^2 \times 10^3}$, ou $\frac{1}{10^2}$, on voit que le logarithme -2 de ce produit est égal à la *somme* des logarithmes $+3, -5$, des deux facteurs du produit.

De même, le quotient de 10^2 par $\frac{1}{10^3}$ étant $10^2 \times 10^3$ (n° **116**), ou 10^5 (n° **51**), on voit que le logarithme $+5$ de ce quotient est égal au reste qu'on obtient en ôtant du logarithme $+2$ du dividende, le logarithme -3 du diviseur.

***244.** Pour démontrer que *les propriétés du n°* **233** *conviennent aux nombres qui ne font pas partie des progressions primitives du n°* **243**, il suffit de concevoir, comme dans le n° **232**, qu'on insère successivement assez de moyens géométriques et arithmétiques entre les termes de ces progressions, pour que dans les progressions qui en résultent, tous les nombres plus grands et plus petits que l'unité puissent être considérés comme faisant partie de la nouvelle progression géométrique à laquelle correspondra la nouvelle progression arithmétique.

On voit que *dans le système de logarithmes déterminé par ces deux dernières progressions, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs qui sont d'autant plus grands que ces nombres sont plus grands, tandis que les nombres positifs moindres que l'unité ont des logarithmes négatifs qui sont d'autant plus grands que ces nombres sont plus petits.*

REMARQUE. *Dans ce système, les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes;* car tous les termes de la progression géométrique primitive étant positifs, en insérant des moyens géométriques entre ces termes, on ne saurait obtenir que des nombres positifs dans la nouvelle progression géométrique.

245. Pour *calculer les logarithmes des nombres entiers*, on considère les progressions primitives

$$\because\because 1 : 10 : 100 : 1\,000 : 10\,000 : 100\,000 : 1\,000\,000 : \text{etc.},$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . \text{etc.},$$

dans lesquelles, les termes 0, 1, 2, 3, ..., de la progression arithmétique, sont les logarithmes des termes correspondans 1, 10, 100, 1000, ..., de la progression géométrique. Pour *trouver les logarithmes des autres nombres entiers à moins d'une unité décimale du $n^{ième}$ ordre, c'est-à-dire à*

moins de $\frac{1}{10^n}$, on conçoit (comme dans le n° **232**) qu'on insère successivement m moyens géométriques entre deux termes consécutifs quelconques de la progression géométrique, et m moyens arithmétiques entre les termes correspondans de la progression arithmétique; l'ensemble de tous ces termes formera deux nouvelles progressions (n^{os} **224** et **217**) dans lesquelles, les termes de la progression arithmétique seront les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique.

On déduit des principes des n^{os} **224** et **217**, que la *raison* R de la nouvelle progression géométrique sera $\sqrt[m+1]{10}$, et que la *raison* r de la nouvelle progression arithmétique sera $\frac{1}{m+1}$. De sorte que les termes des nouvelles progressions seront

$$1, R, R^2, R^3, \ldots, R^{m+1} = 10, R^{m+2}, R^{m+3}, \ldots$$
$$0, r, 2r, 3r, \ldots, (m+1)r = 1, (m+2)r, (m+3)r, \ldots$$

Or, R étant égal à $\sqrt[m+1]{10}$, le principe du n° **196** donne

$$R^2 = \sqrt[m+1]{10^2} = \sqrt[m+1]{100},\ R^3 = \sqrt[m+1]{1000},\ R^4 = \sqrt[m+1]{10000}, \ldots$$

Les nouvelles progressions seront donc

$$\because 1 : \sqrt[m+1]{10} : \sqrt[m+1]{100} : \sqrt[m+1]{1000} : \sqrt[m+1]{10000} : \ldots : 10 : \ldots$$
$$\div 0 . \frac{1}{m+1} . \frac{2}{m+1} . \frac{3}{m+1} . \frac{4}{m+1} \ldots\ldots\ldots 1 \ldots.$$

Le nombre entier m étant arbitraire, on pourra toujours lui donner une valeur telle que $m+1=10^n$; car cela revient à prendre $m=10^n-1$.

La valeur de m étant ainsi déterminée, *les deux dernières progressions fourniront le moyen de calculer les logarithmes des nombres entiers avec l'approximation demandée.*

En effet; soit proposé de *trouver le logarithme d'un nombre* *entier N à moins de* $\frac{1}{10^n}$; on cherche d'abord, les deux termes consécutifs de la progression géométrique qui comprennent N; pour trouver ces termes, on forme la $(m+1)^{ième}$ puissance de N, et on cherche parmi les nombres 10, 100, 1000, etc., ceux qui comprennent N^{m+1}. Supposons qu'on reconnaisse ainsi que N^{m+1} tombe entre 1000 et 10000; on sera certain que N tombe entre $\sqrt[m+1]{1000}$ et $\sqrt[m+1]{10000}$; *log* N sera donc compris entre les logarithmes, $\frac{3}{m+1}$, $\frac{4}{m+1}$, des nombres $\sqrt[m+1]{1000}$, $\sqrt[m+1]{10000}$; la différence entre ces deux derniers logarithmes étant $\frac{1}{m+1}$ ou $\frac{1}{10^n}$, l'erreur E que l'on commettra en prenant $\frac{3}{m+1}$ ou $\frac{4}{m+1}$ pour le logarithme de N sera nécessairement moindre que $\frac{1}{m+1}$ ou que $\frac{1}{10^n}$.

EXEMPLE. *Soit proposé de calculer le logarithme de 2 à moins de* $\frac{1}{10}$ *d'unité.*

Dans ce cas, $n=1$; et par suite $m=9$. Les progressions générales (page 215) deviennent

$$\div\div\, 1 : \sqrt[10]{10} : \sqrt[10]{100} : \sqrt[10]{1000} : \sqrt[10]{10000} : \ldots : 10\ldots$$

$$\div\, 0 \,.\, \frac{1}{10} \,.\, \frac{2}{10} \,.\, \frac{3}{10} \,.\, \frac{4}{10} \ldots 1\ldots$$

Or, $2^{10} = 1024$; 2^{10} tombe donc entre 1000 et 10000; 2 est donc compris entre $\sqrt[10]{1000}$ et $\sqrt[10]{10000}$; *log* 2 est donc compris entre les logarithmes $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, des nombres $\sqrt[10]{1000}$, $\sqrt[10]{10000}$, c'est-à-dire entre 0,3 et 0,4; chacun de ces deux derniers nombres exprime donc *log* 2 à moins de 0,1. Et en

effet, si l'on calculait *log* 2 avec une plus grande approximation, on trouverait *log* 2 = 0,301 etc.

Cet exemple suffit pour faire concevoir la possibilité de *calculer les logarithmes des nombres entiers avec une approximation donnée*. Les procédés algébriques fourniront le moyen de simplifier ces calculs.

Nous ferons voir (n° **248**), que *lorsque les valeurs approchées des logarithmes des nombres entiers* 1, 2, 3, ..., 9999, *seront ainsi déterminées, on pourra en déduire les logarithmes de tous les autres nombres positifs plus grands et plus petits que l'unité.*

246. Si l'on pouvait réunir, dans une *table*, les valeurs exactes des logarithmes de tous les nombres, les propriétés du n° **233** fourniraient le moyen, à l'aide de cette *table*, de réduire les multiplications, les divisions, les formations des puissances et les extractions des racines, à des additions, à des soustractions, à des multiplications et à des divisions très simples, qui fourniraient les valeurs exactes des résultats cherchés. Mais, comme il est impossible de former une *table* aussi étendue, on s'est borné (dans la *table* placée à la fin de cette arithmétique) à mettre les valeurs, à moins d'un demi-cent-millième d'unité, des logarithmes des nombres entiers compris entre zéro et 10000 (*). Nous verrons (n° **248**) que cette *table* fournit le moyen de calculer la valeur (à moins d'un cent-millième d'unité), du logarithme d'un nombre quelconque, non compris dans la *table*. En opérant avec cette *table*, on n'obtient que des valeurs approchées des résultats cherchés. Lorsqu'on voudra obtenir un plus grand degré d'approximation, on pourra faire usage de la *table de logarithmes de* LALANDE, étendue à sept décimales, par F.-C.-M. *Marie*.

247. *Nous allons faire connaître la disposition et les usages de la table de logarithmes, placée à la fin de cette Arithmé-*

(*) Pour obtenir ce degré d'approximation, on a calculé les logarithmes avec six décimales, c'est-à-dire à moins d'un millionnième d'unité; et on a supprimé ensuite la dernière décimale d'après la règle du n° **142**.

tique. Les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..., 9999, sont dans les colonnes intitulées N ; les parties décimales de leurs logarithmes sont à droite dans les colonnes intitulées Log.; de sorte que le premier chiffre à droite de ces parties décimales exprime des cent-millièmes d'unité. On n'a pas mis les caractéristiques des logarithmes; mais il est facile d'y suppléer, en se rappelant que *la caractéristique du logarithme d'un nombre entier contient autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans ce nombre* (n° **235**, 1°).

La différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, compris entre 1000 et 10000, se trouve à droite dans la colonne intitulée D, au milieu de l'espace qui sépare ces logarithmes; le premier chiffre à droite de cette différence exprime des cent-millièmes d'unité.

On trouve ainsi que les valeurs, à moins d'un demi-cent-millième d'unité, des logarithmes des nombres 3284, 3285, sont 3,51640 et 3,51654; la différence entre ces logarithmes *tabulaires* est 14 cent-millièmes, ou 0,00014.

Les différences entre les logarithmes des nombres entiers moindres que 1000 ne sont pas dans la *table*, parce que, comme nous le verrons, on peut se dispenser d'en faire usage.

248. Pour être en état d'*opérer avec une* TABLE *de logarithmes*, il suffit de savoir résoudre les deux problèmes suivans :

1er Problème. *Calculer le logarithme d'un nombre donné.*

Le nombre donné N pouvant être plus grand ou plus petit que l'unité, nous allons considérer successivement ces deux cas.

1er cas. Lorsque *le nombre donné* N *est plus grand que l'unité*, son logarithme est positif.

Quand N est un nombre, entier ou décimal, la caractéristique de lN étant connue d'avance (n° **235**, 1°), on pourrait se borner à déterminer la partie décimale de lN. Mais, afin de rendre les démonstrations plus claires, nous conserverons les caractéristiques dans tout le cours des raisonnemens; *il est d'ailleurs indispensable de conserver les caractéristiques lorsqu'on cherche le logarithme d'une fraction ordinaire*,

parce que la caractéristique du logarithme d'une fraction n'est pas connue d'avance. Cela posé :

1°. *Supposons d'abord que* N *soit un nombre entier de* n *chiffres*; la caractéristique de lN sera $n-1$.

Si N *est moindre que* 10000, la partie décimale de lN sera dans la *table*. On voit ainsi que,

$$l\,2159 = 3,33425,\ l\,3478 = 3,54133,\ l\,9 = 0,95424.$$

Si N *est plus grand que* 10000, on divise d'abord N par une *puissance* 10^m de 10 telle que le quotient A soit compris entre 1000 et 10000; ce qui revient à placer la *virgule* sur la droite des quatre premiers chiffres à gauche de N; la partie décimale de lN est la même que celle de lA, car $lN = lA + m$ (n° **235**, 2°). Pour calculer lA, on prend d'abord dans la *table* le logarithme de la partie entière de A. Pour trouver ce qu'il faut ajouter à ce dernier logarithme pour obtenir lA, on suppose que *les différences entre les nombres sont proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres*; l'erreur qui résulte de cette hypothèse est d'autant moindre que les nombres sont plus grands (*).

Exemple. *Calculer le logarithme de* 21598.

On divise d'abord 21598 par 10, ce qui donne 2159,8. On a, $l\,21598 = l\,2159,8 + 1$.

Pour calculer $l\,2159,8$, on prend dans la *table* le logarithme de 2159 qui est 3,33425. On détermine ensuite ce qu'il faut ajouter à ce dernier logarithme pour obtenir celui de 2159,8; à cet effet, on observe que la différence entre les logarithmes des nombres, 2159 et 2160, étant 20 cent-millièmes ou 0,00020, on peut dire,

Si pour une unité ajoutée au nombre 2159, il faut ajouter 0,00020 au logarithme 3,33425 de 2159; combien pour 0,8 ajoutés à 2159, doit-on ajouter au logarithme 3,33425 de 2159.

Désignant cette inconnue par x, on pose la proportion

$$(1)\ldots\quad 1 : 0,00020 :: 0,8 : x;\ \text{d'où } x = 0,00016.$$

(*) On n'est pas encore parvenu à démontrer cette propriété sans le secours de l'*Algèbre*.

On ajoute 0,00016 à 3,33425, la somme 3,33441 est le logarithme de 2159,8, à moins d'un cent-millième d'unité. On en déduit $l21598 = 4,33441$.

1re Remarque. La proportion (1) fait voir qu'*on obtient ce qu'il faut ajouter au logarithme de la partie entière du nombre décimal* A, *en multipliant la partie décimale de* A *par la différence tabulaire entre les logarithmes des deux nombres entiers consécutifs qui comprennent* A.

2e Remarque. Lorsque le quotient A de N par 10^m est un nombre entier, la partie décimale de lA se trouve immédiatement dans la *table*.

Exemple. *Calculer le logarithme de* 2560000.

On divise 2560000 par 10^3; le quotient 2560 étant un nombre entier, on trouve immédiatement dans la *table* que $l2560 = 3,40824$.

Or, $l2560000 = l2560 + 3$; donc $l2560000 = 6,40824$.

3e Remarque. Nous avons fait dépendre la recherche des logarithmes des nombres entiers plus grands que 10000, de celle des logarithmes des nombres compris entre 1000 et 10000, parce que ces derniers nombres sont les plus grands qui soient dans la *table*, et parce que *l'erreur due à la proportion dont on a fait usage* (*page* **219**) *est d'autant moindre que les nombres sont plus grands*. En opérant de cette manière, la proportion indiquée conduira à la valeur du logarithme cherché à moins d'un cent-millième d'unité. De sorte que *dans le calcul du quatrième terme de la proportion indiquée* (*page* **219**) *on devra négliger les unités inférieures aux cent-millièmes*.

La recherche du logarithme d'un nombre entier ne pouvant plus offrir de difficulté, nous allons faire voir comment on peut en déduire les logarithmes des autres nombres.

2°. *Lorsque* N *est un nombre décimal*, dont la partie entière renferme m chiffres, et qui contient n décimales, la caractéristique de lN est $m - 1$. Pour obtenir la partie décimale de lN, on cherche le logarithme du nombre entier A résultant de la suppression de la virgule dans N; on diminue lA de n

unités, le reste exprime lN; car d'après les propriétés démontrées dans les nos **126** et **235** (1°), on a,

$$N = \frac{A}{10^n},\quad lN = lA - l10^n = lA - n.$$

Exemple. *Calculer le logarithme de* 21,598.

On supprime la virgule dans 21,598, ce qui revient à multiplier ce nombre par 10^3. On cherche le logarithme de 21598 par la méthode indiquée (page **219**); on trouve $l21598 = 4,33441$. On diminue ce dernier logarithme de 3 unités; le reste 1,33441 exprime le logarithme de 21,598, car

$$l21,598 = l\frac{21598}{10^3} = l21598 - l10^3 = l21598 - 3.$$

On trouvera de même que les logarithmes des nombres

	2,1598,	215,98,	878,5,	8,785,
sont	0,33441,	2,33441,	2,94374,	0,94374.

3°. *Lorsque* N *est un nombre fractionnaire plus grand que l'unité*, on obtient lN en retranchant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur; le reste (qui est positif) exprime lN (n° **233**, 3°).

Exemple. *Déterminer le logarithme de* $\frac{3478}{9}$.

On a, $l\frac{3478}{9} = l3478 - l9 = 3,54133 - 0,95424 = 2,58709$.

2e Cas. Lorsque *le nombre donné* N *est moindre que l'unité*, son logarithme est négatif (n° **244**). Pour calculer lN, on pourrait ramener la question au 1er *cas*, en multipliant d'abord N par une puissance 10^m de 10, telle que $N \times 10^m$ soit plus grand que l'unité; on obtiendrait $lN \times 10^m$ par une des méthodes indiquées dans le 1er *cas*; ce dernier logarithme diminué de m unités donnerait un reste *négatif* (n° **240**) qui exprimerait lN (n° **233**, 2°).

Mais, il est plus simple d'opérer directement sur le nombre donné, à l'aide des méthodes que nous allons indiquer.

1°. Pour *calculer le logarithme d'un nombre décimal* N, *moindre que l'unité*, qui renferme n décimales, on peut opérer comme il a été indiqué dans le 1er *cas* (2°); on cherche le logarithme du nombre entier A qui résulte de la suppression de la virgule dans N; on diminue lA de n unités; le reste $lA - n$ (qui est nécessairement négatif), calculé d'après la règle du n° **240**, exprime lA.

1er Exemple. *Calculer* $l0{,}000\,21598$.

On supprime d'abord la virgule décimale, ce qui revient à multiplier $0{,}00021598$ par 10^8. On cherche le logarithme du résultat 21598, par la méthode indiquée dans le 1er *cas* (1°). On trouve

$l21598 = 4{,}33441$ (page **220**). On a, $l0{,}00021598 = 4{,}33441 - 8$.

D'après la règle du n° **240**, pour obtenir le reste de cette dernière soustraction, il suffit d'ôter $4{,}33441$ de 8, et de donner le signe — au reste $3{,}66559$. On a donc

$$l0{,}00021598 = -3{,}66559.$$

1re Remarque. *On peut donner une autre forme au logarithme de* $0{,}00021598$, en observant que

$$4{,}33441 - 8 = 4 - 8 + 0{,}33441 = -4 + 0{,}33441 = \bar{4}{,}33441.$$

Le signe — placé au-dessus de la caractéristique 4, *indique qu'elle est seule négative;* de sorte que dans l'expression $\bar{4}{,}33441$ de $l0{,}00021598$, la partie décimale $0{,}33441$ doit être ajoutée à -4.

Ainsi, $l0{,}00021598 = -3{,}66559 = \bar{4}{,}33441$.

2e Exemple. *Calculer le logarithme de* $0{,}000267$.

On cherche le logarithme de 267. On trouve dans la *table* que $l267 = 2{,}42651$.

Or, $l0{,}000267 = l\,267 - 6$. Donc

$$l\,0{,}000267 = 2{,}42651 - 6 = -3{,}57349.$$

On peut mettre le logarithme de $0{,}000267$ sous une autre forme, car

$$2{,}42651 - 6 = 2 - 6 + 0{,}42651 = \bar{4}{,}42651.$$

En général, *le logarithme d'un nombre décimal moindre que l'unité est susceptible de deux formes:*

Quand on demande que le logarithme soit entièrement négatif, le calcul se réduit à chercher la partie décimale du logarithme du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule dans le nombre proposé, et à soustraire cette partie décimale de 100000 (ce qui revient à ôter de 10 le premier chiffre à droite de cette partie décimale, et à retrancher de 9 tous les autres chiffres décimaux); le reste est la partie décimale du logarithme cherché; la caractéristique de ce logarithme contient autant d'unités qu'il y a de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif du nombre donné.

Quand on veut que la caractéristique soit seule négative, le calcul se réduit à chercher la partie décimale du logarithme du nombre entier résultant de la suppression de la virgule dans le nombre décimal proposé, et à affecter cette partie décimale d'une caractéristique négative qui contienne autant d'unités plus une qu'il y a de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif du nombre donné.

On trouve de cette manière,

$$l0{,}21598 = -0{,}66559 = \bar{1}{,}33441,$$
$$l0{,}021598 = -1{,}66559 = \bar{2}{,}33441.$$

2e Remarque. L'emploi des logarithmes dont la caractéristique seule est négative offre cet avantage, que quelles que soient les puissances de 10 par lesquelles on multiplie ou on divise un nombre, les nombres qui en résultent, ont des logarithmes dont la partie décimale reste constamment la même; ce qui n'aurait pas lieu, pour les nombres moindres que l'unité, si l'on faisait usage des logarithmes entièrement négatifs.

D'après cette observation, *lorsque des nombres entiers ne diffèrent que par le nombre des zéro placés sur leur droite, et quand des nombres décimaux ne diffèrent que par la position de la virgule, les logarithmes de ces nombres ont la même partie décimale.* Ainsi, le logarithme de 2159 étant $3{,}33425$, les logarithmes des nombres

21590000, 21,59, 0,02159 et 0,000002159,
sont $7{,}33425$, $1{,}33425$, $\bar{2}{,}33425$ et $\bar{6}{,}33425$.

2°. Pour *calculer le logarithme d'une fraction, moindre que l'unité*, on retranche le logarithme du dénominateur de celui du numérateur ; le reste, qui est entièrement négatif (n° **240**), exprime le logarithme demandé (n° **233**, 3°).

Exemple. *Calculer le logarithme de* $\frac{9}{3478}$.

On a, $l\frac{9}{3478} = l9 - l3478 = 0{,}95424 - 3{,}54133 = -2{,}58709$.

1re Remarque. On voit que *le calcul se réduit à retrancher le logarithme du numérateur de celui du dénominateur, et à placer le signe — devant le reste.*

* 2e Remarque. Si l'on veut que la caractéristique du logarithme cherché soit seule négative, on observera que

$$l\frac{9}{3478} = l\frac{9000}{3478} - 3 = -3 + l9000 - l3478$$
$$= -3 + 3{,}95424 - 3{,}54133 = -3 + 0{,}41291 = \bar{3}{,}41291.$$

249. 2e Problème. *Trouver à quel nombre x appartient un logarithme donné.*

1er Cas. Lorsque *le logarithme donné est positif*, il appartient à un nombre x plus grand que l'unité ; et d'après ce qu'on a vu (n° **233**, 1°), la caractéristique augmentée d'une unité, indique combien il y a de chiffres dans la partie entière du nombre inconnu x. Cela posé :

1°. Si *la caractéristique du logarithme proposé est égale à* 3, le nombre x est compris entre 1000 et 10000. Pour trouver x, on cherche la partie décimale du logarithme donné, dans les colonnes intitulées Log., parmi les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres.

Quand la partie décimale du logarithme donné se trouve dans la table, le nombre cherché est placé à gauche de cette partie décimale dans la colonne intitulée N.

On trouve ainsi, que les logarithmes

3,00043, 3,94374, 3,33425 et 3,99939,

appartiennent aux nombres

1001, 8785, 2159 et 9986.

Quand la partie décimale du logarithme donné ne se trouve pas dans la table, elle tombe entre les parties décimales des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs de quatre chiffres ; le plus petit de ces deux derniers nombres exprime la partie entière du nombre décimal x auquel appartient le logarithme donné.

Pour obtenir la partie décimale du nombre x cherché, on opère d'une manière analogue à celle qui a été indiquée (page 219) en supposant toujours que *les différences entre les nombres sont proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres.* L'erreur qui résulte de cette hypothèse est telle, que *dans le calcul du quatrième terme de la proportion, on doit se borner à chercher le chiffre des dixièmes ; il arrive même quelquefois que ce chiffre n'est pas exact.*

Exemple. *Déterminer à quel nombre x appartient le logarithme* 3,33441.

La partie décimale 33441 ne se trouve pas dans les colonnes intitulées Log., parmi les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres ; mais elle tombe entre les parties décimales 33425, 33445, des logarithmes des nombres 2159 et 2160 ; le logarithme 3,33441 appartiendra donc au nombre 2159 augmenté d'une quantité inconnue z moindre que l'unité.

Pour calculer z, on prend dans la colonne intitulée D, la différence 20 cent-millièmes, ou 0,00020, entre $l2159$ et $l2160$; on cherche la différence 0,00016, entre le logarithme donné et le logarithme tabulaire immédiatement plus petit, et on dit :

Si pour 0,00020 de plus au logarithme de 2159, il faut ajouter 1 à 2159, combien pour 0,00016 de plus au logarithme de 2159, doit-on ajouter à 2159?

La proportion (2)... $0{,}00020 : 1 :: 0{,}00016 : z$

se réduit à $20 : 1 :: 16 : z$, (n° **207**) ; d'où $z = 0{,}8$.

Le logarithme 3,33441 appartient donc au nombre 2159,8.

Remarque. La proportion (2) démontre qu'*on obtiendra la partie décimale du nombre cherché en prenant la différence entre le logarithme donné et le plus petit des logarithmes tabu-*

laires qui le comprennent, et en divisant cette différence par la différence tabulaire entre les deux logarithmes qui comprennent le logarithme donné.

2°. Lorsque *la caractéristique du logarithme donné n'est pas* 3, on ramène ce cas au précédent en augmentant ou en diminuant la caractéristique d'assez d'unités pour qu'elle devienne égale à 3, afin de trouver, au moyen de la *Table*, le plus de chiffres possible du nombre x demandé ; on cherche le nombre A auquel appartient le nouveau logarithme ; ce nombre étant égal à x multiplié ou divisé par une puissance 10^n de 10 indiquée par le nombre n d'unités dont on a augmenté ou diminué la caractéristique (n° **235**, 2°), on obtient x en divisant ou en multipliant A par 10^n, ce qui s'effectue en avançant la virgule de n rangs vers la gauche ou vers la droite dans A.

1^er^ Exemple. *Trouver à quel nombre x appartient le logarithme* 1,33425.

On ajoute deux unités à la caractéristique 1 ; on trouve que le logarithme 3,33425 qui en résulte, appartient au nombre 2159. On divise ce dernier nombre par 10^2 ou par 100, à cause des deux unités ajoutées à la caractéristique ; le quotient 21,59 exprime x.

Remarque. En supposant la caractéristique égale à 3, la partie décimale 33425 du logarithme donné s'est trouvée dans les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de quatre chiffres ; mais si l'on eût conservé la caractéristique 1, cette partie décimale ne se serait pas trouvée dans les parties décimales des logarithmes des nombres entiers de deux chiffres.

2^e^ Exemple. *Trouver à quel nombre x appartient le logarithme* 7,33441.

On diminue la caractéristique 7 de 4 unités ; on trouve que le logarithme 3,33441 qui en résulte appartient au nombre 2159,8 (page 225) ; on multiplie 2159,8 par 10^4 ou par 10000, à cause des 4 unités qui ont été ôtées de la caractéristique 7 ; le produit 21598000 exprime x.

Remarque. Les calculs précédens se réduisent à supposer que la caractéristique du logarithme donné est 3 ; à chercher le

nombre auquel appartient ce nouveau logarithme ; et à séparer ensuite par la virgule autant de chiffres plus un, à partir de la gauche de ce nombre, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme donné. Quand le nombre des chiffres nécessaires au placement de la *virgule* n'est pas assez grand, on y supplée par des zéro, et on fait abstraction de la *virgule* quand elle n'est pas suivie de chiffres décimaux.

2^e^ Cas. Lorsque *le logarithme donné est négatif*, il appartient à un nombre x moindre que l'unité.

1°. Si *le logarithme donné est entièrement négatif*, et si n désigne sa caractéristique, on ajoute assez d'unités à ce logarithme pour que le résultat soit entièrement positif et affecté de la caractéristique 3 (cela revient à ajouter $n+4$ au logarithme donné) ; on cherche le nombre N auquel appartient ce nouveau logarithme ; et on divise N par 10^{n+4} (ce qui revient à avancer la virgule de $n+4$ rangs vers la gauche dans N) ; le résultat exprime le nombre x auquel appartient le logarithme donné, car d'après le principe du n° **235** (2°), en ajoutant $n+4$ unités au logarithme donné, on obtient un nouveau logarithme qui appartient à x multiplié par 10^{n+4}.

Exemple. *Déterminer à quel nombre appartient le logarithme entièrement négatif* — 3,66559.

On ajoute $3+4$ ou 7 unités à — 3,66559, ce qui donne 3,33441 ; on trouve, par la méthode indiquée (1°), que le logarithme 3,33441 appartient au nombre 2159,8 ; ce dernier nombre étant égal au produit de x par 10^7 (n° **235**, 2°), on obtiendra x en divisant 2159,8 par 10^7 ; ce qui revient à avancer la virgule de 7 rangs à gauche dans 2159,8 ; de sorte que le logarithme — 3,66559 appartient au nombre 0,00021598.

Remarque. Le calcul précédent consiste à retrancher de 100000, la partie décimale du logarithme proposé (ce qui s'exécute en retranchant de 10 le premier chiffre à droite de cette partie décimale, et en ôtant de 9 tous les autres chiffres décimaux) ; à considérer le reste comme la partie décimale d'un logarithme dont la caractéristique est 3 ; à chercher le nombre décimal auquel appartient ce nouveau logarithme ; et à avancer la virgule d'assez de rangs vers la gauche de ce nombre décimal, pour que le résultat contienne autant de zéro entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du logarithme donné.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes $-0,66559$, $-1,66559$ et $-3,66559$, on retranche 66559 de 100000, le reste est 33441; et 3,33441 étant le logarithme de 2159,8, les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598 \text{ et } \quad 0,00021598.$$

2°. Si *la caractéristique seule est négative*, en la désignant par $-n$, on ajoute $n+3$ unités au logarithme donné, afin d'obtenir un logarithme positif affecté de la caractéristique 3 (ce qui revient à supposer que la partie décimale du logarithme donné est affectée d'une caractéristique positive égale à 3); on cherche à quel nombre N appartient ce nouveau logarithme, et on divise ce nombre par 10^{n+3} (ce qui revient à avancer la *virgule* décimale de $n+3$ rangs vers la gauche de N); le résultat exprime le nombre x auquel appartient le logarithme donné, car en ajoutant $n+3$ unités à la caractéristique du logarithme donné, on obtient un nouveau logarithme qui appartient au nombre x cherché multiplié par 10^{n+3} (n° **235**, 2°).

Exemple. *On propose de trouver à quel nombre x appartient le logarithme $\bar{4},33441$.*

Il suit de la convention établie (page 222) que

$$\bar{4},33441 = -4 + 0,33441.$$

Si donc on ajoute 7 à $\bar{4},33441$, le résultat sera

$$7-4+0,33441, \text{ ou } 3+0,33441, \text{ ou enfin } 3,33441;$$

et le nouveau logarithme 3,33441 appartiendra au nombre x demandé multiplié par 10^7. On cherchera donc le nombre 2159,8 auquel correspond le logarithme 3,33441, et on divisera ensuite 2159,8 par 10^7; le résultat 0,00021598 exprimera x.

Remarque. Le mécanisme du calcul précédent se réduit à supposer que la partie décimale du logarithme donné est af-

fectée de la caractéristique 3; à chercher le nombre auquel appartient ce nouveau logarithme; et à avancer la virgule d'assez de rangs vers la gauche de ce nombre, pour que le résultat renferme autant de zéro moins un, entre la virgule et le premier chiffre décimal significatif, qu'il y a d'unités dans la caractéristique négative du logarithme donné.

Ainsi, pour trouver à quels nombres appartiennent les logarithmes $\bar{1},33441$, $\bar{2},33441$, $\bar{3},33441$ et $\bar{4},33441$, on cherche le nombre 2159,8 auquel correspond le logarithme 3,33441; on en déduit que les nombres demandés sont

$$0,21598, \quad 0,021598, \quad 0,0021598 \text{ et } \quad 0,00021598.$$

250. *Les raisonnemens et les exemples des nos* **248** *et* **249**, *suffisent pour mettre en état de calculer le logarithme d'un nombre donné, et de trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.* Nous avons toujours ramené la question à opérer sur les logarithmes de nombres compris entre 1000 et 10000, parce que cette méthode a l'avantage de fournir le plus grand degré d'exactitude dont notre *Table* de logarithmes est susceptible. En opérant ainsi :

1°. *Quand on veut trouver le logarithme d'un nombre, la proportion indiquée* (page 219), *ne fournit que les cent-millièmes d'unité du logarithme demandé; c'est-à-dire qu'on obtient le logarithme cherché à moins d'un cent-millième d'unité.*

2°. Nos logarithmes *tabulaires* n'ayant que cinq décimales, on ne connaît leurs valeurs qu'à moins d'un demi-cent-millième d'unité (n° **246**); les erreurs qui résultent des décimales négligées dans les logarithmes, et de la proportion indiquée (page 225), sont telles que *lorsqu'on veut trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné* A *dont la caractéristique est* 3, *la Table ne fournit quelquefois que les quatre premiers chiffres à gauche de x; c'est-à-dire que, dans certains cas, la proportion indiquée* (page 225), *ne fournit aucun des chiffres décimaux de x.*

Lorsqu'on veut *trouver le nombre x auquel appartient un logarithme donné dont la caractéristique n'est pas* 3, on augmente ou on diminue ce logarithme de n unités, de manière que le nouveau logarithme soit positif et affecté de la caractéristique 3 ; on cherche le nombre N auquel appartient ce nouveau logarithme (on vient de voir qu'on ne peut compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à gauche de N) ; ensuite on divise ou on multiplie N par 10^n ; le résultat est une valeur approchée du nombre x auquel appartient le logarithme donné ; et *l'approximation est telle qu'on ne doit généralement compter que sur l'exactitude des quatre premiers chiffres à partir du premier chiffre significatif à gauche du résultat ;* ou, pour parler d'une manière plus exacte, *l'erreur est toujours moindre qu'une unité de l'ordre indiqué par le dernier de ces quatre chiffres.*

Quand ce degré d'approximation ne sera pas suffisant, il faudra renoncer à l'emploi de nos tables de logarithmes.

251. *Lorsque, pour obtenir le logarithme d'une fraction, on prend la différence entre les logarithmes tabulaires du numérateur et du dénominateur ; l'erreur commise, sur le logarithme de la fraction, ne saurait surpasser un cent millième d'unité.* Cette propriété se déduit de ce que dans nos *tables* à cinq décimales, la plus forte erreur qui puisse affecter chaque logarithme tabulaire est égale à une demi-unité du cinquième ordre décimal, c'est-à-dire à 0,000005 (n° **246**).

Par exemple, lorsque le logarithme du numérateur étant trop fort de 0,000005, le logarithme du dénominateur est trop faible de 0,000005, il suit du principe du n° **35**, que la différence entre ces deux logarithmes, est trop forte de deux fois 0,000005, c'est-à-dire d'un cent-millième ; l'erreur totale qui affecte le logarithme d'une fraction ne saurait jamais être plus grande.

En général, *lorsqu'on combinera* N *logarithmes tabulaires par voie d'addition et de soustraction, l'erreur totale qui en résultera ne pourra jamais surpasser N fois un demi-cent-millième d'unité.*

Lorsque dans les *tables* dont on fait usage, les logarithmes renferment un plus grand nombre de décimales, l'erreur ne

saurait surpasser le produit d'une demi-unité décimale du dernier ordre conservé, par le nombre total des logarithmes employés dans les additions et les soustractions.

Des complémens arithmétiques.

252. *Le reste que l'on obtient en retranchant un logarithme de 10, est ce qu'on nomme le* COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE *de ce logarithme.*

Ainsi, le logarithme de 2 étant 0,30103, le complément arithmétique de ce logarithme est 10 — 0,30103 ou 9,69897.

On voit que *pour obtenir le complément arithmétique d'un logarithme, il suffit d'ôter de 10 le premier chiffre significatif à droite du logarithme donné, et de retrancher de 9 tous les autres chiffres.*

Pour indiquer le *complément arithmétique* d'un logarithme, nous ferons précéder ce logarithme du signe C^t. Ainsi, $C^t l2$ désignera le complément arithmétique du logarithme de 2.

Le but qu'on se propose en faisant usage des complémens arithmétiques, est de remplacer des soustractions par des additions, et d'éviter l'emploi des logarithmes négatifs.

253. *Lorsqu'on veut soustraire d'un nombre donné un logarithme, et qu'au lieu d'effectuer cette soustraction, on ajoute au nombre donné, le complément arithmétique du logarithme, la somme est égale au reste cherché augmenté de 10 unités.* Car cette somme est trop forte, non-seulement du logarithme qu'on devait soustraire, mais encore du *complément* qu'on a ajouté ; et d'après la définition du complément, la somme de ces deux derniers nombres est égale à 10.

Cela est d'ailleurs évident ; car lorsqu'au lieu de retrancher lB de lA pour obtenir le reste $lA - lB$, on ajoute à lA le complément arithmétique $10 - lB$ de lB, la somme $lA + 10 - lB$ est égale au reste $lA - lB$ augmenté de 10.

Par exemple, soit proposé d'ôter 0,95424 de 3,54133 ; si au lieu d'effectuer cette soustraction, on ajoute à 3,54133, le *complément* de 0,95424, qui est 9,04576, le résultat 12,58709, sera trop fort de 10 unités; car

$$3{,}54133 - 0{,}95424 = 3{,}54133 + 10 - 0{,}95424 - 10$$
$$= 3{,}54133 + C^t\, 0{,}95424 - 10.$$

234. Le principe du n° **233** conduit aux propriétés suivantes :

1°. *En ajoutant au logarithme du numérateur d'une fraction, le complément arithmétique du logarithme du dénominateur, la somme exprime le logarithme de cette fraction augmenté de 10 unités.*

2°. *Le logarithme du quatrième terme d'une proportion peut s'obtenir en ajoutant à la somme des logarithmes des moyens, le complément arithmétique du logarithme du premier terme, et en diminuant le résultat de dix unités.* Cela se déduit des principes des n^os^ **233** (7°) et **233**.

3°. *Lorsqu'un calcul conduit à combiner plusieurs logarithmes positifs, par voie d'addition et de soustraction, on simplifie l'opération en ajoutant aux logarithmes qui doivent être additionnés, les complémens des logarithmes à soustraire; la somme étant trop forte d'autant de fois 10, qu'on a pris de complémens* (n° **233**), *il suffit, pour en déduire le résultat demandé, de diminuer cette somme d'autant de dixaines qu'on a ajouté de complémens.*

Par exemple, pour *calculer le quotient x de* 9724×3849 *par* 5676×998, on observe que

$$lx = l9724 + l3849 - l5676 - l998 \text{ (n° 233)}.$$

Ainsi, on prend les logarithmes des nombres 9724, 3849, on leur ajoute les *complémens* des logarithmes des nombres 5676, 998; la somme 20,82002 exprimant lx augmenté de 2 dixaines ou de 20, on a $lx = 0{,}82002$; d'où $x = 6{,}60728$ etc. La valeur exacte de x est 6,60720 etc.

235. Il suit des propriétés du n° **233** que *lorsqu'on n'a besoin que d'une valeur approchée du résultat* d'une opération, l'emploi des logarithmes tabulaires peut souvent simplifier les calculs en réduisant les *multiplications*, les *divisions*, la *formation des puissances* et l'*extraction des racines*, à des *additions*,

à des *soustractions*, à des *multiplications* et à des *divisions* très simples. En voici des exemples.

1^er^ Exemple. *Soit proposé de calculer le produit x de* 3,4567892 *par* 1,23456789.

Les logarithmes des deux facteurs sont 0,53867 et 0,09152 ; leur somme est 0,63019. Le nombre 4,2677, auquel appartient le logarithme 0,63019, est une valeur approchée de x.

La valeur exacte de x étant 4,26764094881878 8, on voit que l'emploi des logarithmes n'a fourni que les quatre premiers chiffres à gauche du produit demandé.

2^e^ Exemple. *Déterminer le quotient x de la division de* 4,267640948818788 *par* 3,4567892.

1^re^ Méthode. On cherche les logarithmes du dividende et du diviseur, qui sont 0,63018 et 0,53867 ; on retranche le second logarithme du premier, le reste 0,09151 exprime lx. Le nombre 1,2345 auquel appartient ce logarithme est une valeur approchée de x. Le quotient exact est 1,23456789.

2^e^ Méthode. On ajoute au logarithme 0,63018 du dividende, le complément arithmétique 9,46133 du logarithme du diviseur; la somme 10,09151 étant égale à lx augmenté de 10 (n° **233**), on a $lx = 0{,}09151$; d'où $x = 1{,}2345$.

3^e^ Exemple. *Calculer la valeur x de* $\sqrt[7]{128}$.

$$\text{On a} \quad lx = \frac{l128}{7} = \frac{2{,}10721}{7} = 0{,}30103.$$

On en déduit $x = 2$. Cette valeur de x est exacte, car il est facile de s'assurer que $2^7 = 128$.

4^e^ Exemple. *Calculer la racine cubique x de* $\frac{2}{7899}$.

$$\text{On a, } x = \sqrt[3]{\frac{2}{7899}}; \text{ d'où } lx = \frac{l2 - l7899}{3} \text{ (n° 233)}.$$

On retranche $l7899$ de $l2$, le reste est $-3{,}59654$; on divise ce reste par 3, le quotient $-1{,}19884$ exprime lx. On en déduit $x = 0{,}06326$ etc.

5^e^ EXEMPLE. *Calculer la racine cubique x de la quatrième puissance de $\frac{2}{25}$.*

On a, $x=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{25}\right)^4}$; d'où $lx=\frac{(l2-l25)\times 4}{3}$ (n° 233).

1^re^ MÉTHODE. On ôte $l25$ de $l2$; on multiplie le reste $-1{,}09691$ par 4, et on divise le produit $-4{,}38764$ par 3; le quotient $-1{,}462546$ etc., exprime lx. On en déduit, $x=0{,}03447$ etc.

2^e^ MÉTHODE. On ajoute à $l2$ le complément de $l25$; la somme étant le logarithme de $\frac{2}{25}$, augmenté de 10, son quadruple 35,61236 exprime le logarithme de $\left(\frac{2}{25}\right)^4$, augmenté de 40. Pour en déduire un logarithme trop grand d'un multiple 6 de l'indice 3 de la racine à extraire, on ôte 34 unités de 35,61236; le reste 1,61236 étant le logarithme de $\left(\frac{2}{25}\right)^4$, augmenté de 6, le tiers 0,53745 de ce reste est le logarithme de x, augmenté de 2, ou $l(x\times 100)$; le logarithme 0,53745 appartenant au nombre 3,447 etc., on voit que $x=0{,}03447$ etc.

*En général, *lorsqu'on fait usage des complémens arithmétiques pour extraire la racine $m^{ième}$ de la $n^{ième}$ puissance d'une fraction, le logarithme qui doit être divisé par l'indice m de la racine est trop fort de n fois 10; avant de diviser ce logarithme par m, on l'augmente ou on le diminue d'assez d'unités pour que le nouveau logarithme soit trop fort d'un multiple $m\times p$ de m. De cette manière, en divisant le nouveau logarithme par m, on obtient un logarithme qui est trop fort de p; on cherche le nombre correspondant à ce dernier logarithme, et on avance la virgule de p rangs vers la gauche de ce nombre; le résultat est une valeur approchée de la racine demandée.*

DEUXIÈME PARTIE.

DES NOMBRES CONCRETS.

CHAPITRE VI.

Des Mesures de France anciennes et nouvelles.

§ I^er^. *Notions préliminaires.*

256. Lorsqu'on veut comparer entre elles les grandeurs de plusieurs quantités de même nature, on choisit pour terme de comparaison une quantité de leur espèce qui sert d'*unité de mesure;* et *mesurer* ces quantités, c'est chercher combien elles contiennent d'unités de mesure.

257. Pour mesurer des *lignes*, ou des *surfaces* (*), ou des *volumes*, on choisit une longueur arbitraire pour *unité de ligne;* l'*unité de surface* est le *carré* dont chaque côté est égal à cette unité de ligne; l'unité de surface se nomme aussi *unité carrée;* l'*unité de volume ou de solidité* est le *cube* dont chaque *face* est égale au carré pris pour unité de surface; tous les côtés de ce cube sont égaux à l'unité de ligne. L'unité de volume se nomme aussi *unité cubique*. De cette manière, l'unité de surface et l'unité de volume dépendent le plus simplement possible de l'unité de longueur.

(*) Les définitions exactes des *surfaces*, des *volumes* ou *solides*, du *carré* et du *cube*, dépendant de la *Géométrie*, nous nous bornerons ici à donner une idée de ces quantités en observant que chacune des six faces d'un *dé* à jouer est une *surface* nommée *carré*, et que ce *dé* est un *solide* nommé *cube*.

5ᵉ EXEMPLE. *Calculer la racine cubique x de la quatrième puissance de* $\frac{2}{25}$.

On a, $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{25}\right)^4}$; d'où $lx = \frac{(l2-l25)\times 4}{3}$ (nº 233).

1ʳᵉ MÉTHODE. On ôte $l25$ de $l2$; on multiplie le reste $-1,09691$ par 4, et on divise le produit $-4,38764$ par 3; le quotient $-1,462546$ etc., exprime lx. On en déduit, $x=0,03447$ etc.

2ᵉ MÉTHODE. On ajoute à $l2$ le complément de $l25$; la somme étant le logarithme de $\frac{2}{25}$, augmenté de 10, son quadruple 35,61236 exprime le logarithme de $\left(\frac{2}{25}\right)^4$, augmenté de 40. Pour en déduire un logarithme trop grand d'un multiple 6 de l'indice 3 de la racine à extraire, on ôte 34 unités de 35,61236; le reste 1,61236 étant le logarithme de $\left(\frac{2}{25}\right)^4$, augmenté de 6, le tiers 0,53745 de ce reste est le logarithme de x, augmenté de 2, ou $l(x\times 100)$; le logarithme 0,53745 appartenant au nombre 3,447 etc., on voit que $x=0,03447$ etc.

*En général, *lorsqu'on fait usage des complémens arithmétiques pour extraire la racine* $m^{ième}$ *de la* $n^{ième}$ *puissance d'une fraction, le logarithme qui doit être divisé par l'indice m de la racine est trop fort de n fois* 10; *avant de diviser ce logarithme par m, on l'augmente ou on le diminue d'assez d'unités pour que le nouveau logarithme soit trop fort d'un multiple* $m\times p$ *de m. De cette manière, en divisant le nouveau logarithme par m, on obtient un logarithme qui est trop fort de p; on cherche le nombre correspondant à ce dernier logarithme, et on avance la virgule de p rangs vers la gauche de ce nombre; le résultat est une valeur approchée de la racine demandée.*

DEUXIÈME PARTIE.

DES NOMBRES CONCRETS.

CHAPITRE VI.

Des Mesures de France anciennes et nouvelles.

§ Iᵉʳ. *Notions préliminaires.*

256. Lorsqu'on veut comparer entre elles les grandeurs de plusieurs quantités de même nature, on choisit pour terme de comparaison une quantité de leur espèce qui sert d'*unité de mesure;* et *mesurer* ces quantités, c'est chercher combien elles contiennent d'unités de mesure.

257. Pour mesurer des *lignes*, ou des *surfaces* (*), ou des *volumes*, on choisit une longueur arbitraire pour *unité de ligne;* l'*unité de surface* est le *carré* dont chaque côté est égal à cette unité de ligne; l'unité de surface se nomme aussi *unité carrée;* l'*unité de volume ou de solidité* est le *cube* dont chaque *face* est égale au carré pris pour unité de surface; tous les côtés de ce cube sont égaux à l'unité de ligne. L'unité de volume se nomme aussi *unité cubique*. De cette manière, l'unité de surface et l'unité de volume dépendent le plus simplement possible de l'unité de longueur.

(*) Les définitions exactes des *surfaces*, des *volumes* ou *solides*, du *carré* et du *cube*, dépendant de la *Géométrie*, nous nous bornerons ici à donner une idée de ces quantités en observant que chacune des six faces d'un *dé* à jouer est une *surface* nommée *carré*, et que ce *dé* est un *solide* nommé *cube*.

258. *Les nombres qui expriment les grandeurs des quantités sont toujours des nombres concrets.*

Par exemple, pour *mesurer la longueur d'une ligne droite*, on prend pour unité une droite d'une longueur connue, telle que la *toise;* si cette unité concrète est contenue 7 fois juste dans la droite donnée, la longueur cherchée sera exprimée par le *nombre concret* 7 toises.

259. Pour mesurer les surfaces et les volumes, on fait usage de deux principes que l'on démontre dans la Géométrie et dont voici les énoncés :

1°. *Le nombre des unités de surface contenues dans un carré s'obtient en formant le produit de deux facteurs égaux au nombre des unités de ligne contenues dans le côté du carré;*

2°. *Le nombre des unités de volume contenues dans un cube s'obtient en formant le produit de trois facteurs égaux au nombre des unités de ligne contenues dans le côté du cube proposé.*

§ II. *Des mesures anciennes, et du calcul des nombres concrets.*

260. Les *mesures anciennes* n'étant que rarement employées, nous nous bornerons à exposer leur *nomenclature,* et à donner une idée de leur calcul.

Les *longueurs* s'évaluent en *toises*, en *pieds*, en *pouces*, en *lignes*, en *points*, en *aunes*, en *lieues*, en *milles*, etc.

La *toise* se divise en six parties égales que l'on nomme des *pieds;* le pied se divise en douze *pouces ;* le pouce en douze *lignes*, et la ligne en douze *points*.

L'*aune* sert à mesurer les draps, les toiles, etc. Sa longueur est de 3 pieds 7 pouces 10 lignes 10 points.

La *circonférence* se divise en 360 parties égales que l'on nomme *degrés*. Le degré se divise en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes ;* etc.

La longueur du quart de la circonférence de la Terre, est d'environ 5130740 toises. Les degrés mesurés sur la terre se nomment des *degrés terrestres*. Le degré terrestre vaut 25

lieues terrestres, ou 20 *lieues marines*. La *lieue de poste* est de 2000 toises, ou de 2 *milles*.

Les *surfaces* de peu d'étendue se mesurent avec des *toises carrées*, des pieds carrés, des pouces carrés, etc.

Une toise valant 6 pieds, la toise carrée vaut 6×6 pieds carrés (n° 259), ou 36 pieds carrés, ou 36 fois un pied carré, ou 36 carrés d'un pied de côté. Un pied valant 12 pouces, le pied carré vaut 12×12 ou 144 pouces carrés. Un pouce carré vaut 144 lignes carrées ; etc.

Les surfaces des terrains s'évaluent en *perches* et en *arpens*. L'arpent vaut 100 perches. La *perche de Paris* est un carré dont chaque côté a 18 pieds; cette surface vaut 18×18 ou 324 pieds carrés. La *perche eaux-et-forêts* est un carré de 22 pieds de côté; elle vaut 22×22 ou 484 pieds carrés.

L'*aune carrée* est une surface qui a une aune de long sur une aune de large ; sa largeur se divise en *demies*, en *tiers*, en *quarts*, en *huitièmes*, etc. Une aune à $\frac{3}{4}$ est une surface qui a une aune de long sur $\frac{3}{4}$ d'aune de large. L'*aune carrée* vaut une aune à $\frac{4}{4}$, ou 4 aunes à $\frac{1}{4}$; etc.

Les volumes s'évaluent en toises cubes, en pieds cubes, en pouces cubes, etc. Une toise valant 6 pieds, une toise cube vaut $6 \times 6 \times 6$ ou 216 pieds cubes (n° 259), ou 216 fois un pied cube, ou 216 cubes d'un pied de côté. Un pied valant 12 pouces, un pied cube vaut $12 \times 12 \times 12$ ou 1728 pouces cubes. Un pouce cube vaut 1728 lignes cubes ; etc.

Dans la *mesure des bois de construction*, on divise la toise cube en 72 *solives*.

Pour *mesurer le bois à brûler*, on fait usage à Paris de la *corde* (*eaux-et-forêts*) et de la *voie*. La voie équivaut à 56 pieds cubes ; la corde vaut deux voies.

Le *muid* et la *pinte* servent à mesurer les *liquides*. Le muid de Paris vaut 288 pintes. On mesure les matières sèches, telles que le *blé*, l'*avoine*, etc., avec le *setier*, le *boisseau* et le *li-*

tron. Le setier vaut 12 boisseaux, et le boisseau vaut 16 litrons. Il existe des pintes et des litrons de diverses grandeurs. On fait usage à Paris, d'une pinte qui vaut 48 pouces cubes, et d'un litron qui vaut 36 pouces cubes.

L'unité de *poids* est la *livre-poids* qui vaut 2 *marcs;* le marc vaut 8 *onces*, l'once vaut 8 *gros*, le gros vaut 3 *deniers*, et le denier vaut 24 *grains*. Cent livres poids forment un *quintal*.

L'unité monétaire est la *livre tournois* qui se décompose en 20 *sous;* un sou vaut 4 *liards* ou 12 *deniers*.

Les *monnaies de cuivre* ou de *billon* sont les *liards*, les pièces de 6 liards, les petits *sous* de 4 liards, les gros *sous* de 8 liards. Les *monnaies d'argent* sont les pièces de 6 sous, de 12 sous, de 24 sous, de 30 sous, le petit *écu* de 3 livres, et l'*écu* de 6 livres. Les *monnaies d'or* sont le *louis* de 24 livres, le *demi-louis* et le *double louis*.

261. Le résultat de la fonte de plusieurs métaux forme un *alliage;* et tout morceau de métal ou d'alliage s'appelle un *lingot*. Lorsqu'un *alliage* renferme les $\frac{11}{12}$ de son poids en or pur, on dit que cet or est au *titre* de $\frac{11}{12}$ ou à $\frac{11}{12}$ de *fin*. Ainsi, un lingot d'or, au titre de $\frac{11}{12}$, pesant 96 grammes, est un alliage d'or et d'autres métaux qui contient en or pur les $\frac{11}{12}$ de 96 grammes, ou 88 grammes.

Réciproquement, pour trouver le titre, par rapport à l'or, d'un lingot pesant 96 grammes, qui contient 88 grammes d'or fin, il suffit de diviser 88 par 96; le quotient $\frac{88}{96}$, ou $\frac{11}{12}$, est le titre demandé.

262. En général : *Pour trouver la quantité de métal pur contenue dans un alliage dont le titre est donné par rapport à ce métal, il suffit de multiplier le poids total de l'alliage par son titre; et pour obtenir le titre d'un alliage par rapport à l'un des métaux qui le composent, il suffit de diviser le poids de la quantité de ce métal contenue dans l'alliage, par le poids total de l'alliage.*

Les anciennes monnaies d'argent contiennent les $\frac{11}{12}$ de leur poids en argent pur, et $\frac{1}{12}$ de cuivre. Les pièces d'or contiennent $\frac{11}{12}$ de leur poids en or pur, $\frac{1}{24}$ en argent et $\frac{1}{24}$ en cuivre. Ainsi, les anciennes monnaies d'or et d'argent sont au *titre* de $\frac{11}{12}$, ou à $\frac{11}{12}$ de *fin*.

***263.** Pour *mesurer les différens degrés de chaleur*, on fait usage du THERMOMÈTRE. Cet instrument est un tube de verre terminé par une boule, dans lequel on a introduit une certaine quantité de *mercure* ou d'*alcool*. Selon que la chaleur augmente ou diminue, la surface supérieure du liquide monte ou descend dans le tube, et on dit que la température augmente ou diminue. On a marqué sur le tube les deux points fixes où s'élève la surface supérieure du liquide, quand on plonge successivement le thermomètre dans la glace fondante, et dans l'eau distillée qui commence à bouillir. La distance entre ces deux points fixes a été divisée en 80 parties égales dans le *thermomètre de Réaumur*, et en 100 parties égales dans le *thermomètre centigrade ;* ces parties se nomment des *degrés de température*. Le point de la glace fondante correspond à zéro degré dans les deux systèmes; et pour indiquer les différens degrés de température au-dessous de la glace fondante, on a continué les mêmes subdivisions au-dessous de zéro degré. Les divisions au-dessus de zéro, indiquent des *degrés de chaleur*, et celles qui sont au-dessous de zéro marquent des *degrés de froid*.

***264.** Les *mesures temporaires* ou de *durée*, sont déterminées par les mouvemens périodiques de la *terre* et de la *lune*. La terre, qui est à peu près sphérique, a un double mouvement : l'un de *rotation* autour d'un de ses diamètres, qu'on nomme *axe de la terre*, et dont les extrémités sont les *pôles* *terrestres;* l'autre de translation autour du soleil. Le temps employé par la terre pour faire une *révolution* complète autour de son *axe,* est ce qu'on nomme un *jour.*

Le temps employé par le centre de la terre pour faire une révolution complète autour du soleil, est ce qu'on nomme une *année solaire;* ce temps est composé de 365 jours plus d'environ le quart d'un jour. L'*année ordinaire* ou *civile* est de 365 jours. On voit que quatre années solaires valent environ un jour de plus que quatre années civiles. Pour faire concorder ces deux sortes d'années, on est convenu d'ajouter un jour à chaque quatrième année civile, qui est dite *bissextile.* Ainsi, trois années civiles consécutives étant de 365 jours, la quatrième est de 366 jours. La collection de cent années forme un *siècle.* Nous comptons les années à partir de la naissance de *Jésus-Christ.* Les années dont le rang est divisible par 100 sont dites *séculaires;* ainsi les années 1800 et 1900 *sont séculaires.*

Si l'année solaire était exactement de 365 jours plus un quart de jour, en composant chaque quatrième année de 366 jours, le centre de la terre se retrouverait tous les quatre ans dans la même position par rapport au soleil; mais l'année solaire étant un peu moindre que 365 jours plus un quart de jour, il en résulte une erreur en plus d'environ 3 jours en 400 ans. Pour corriger cette dernière erreur, on réduit à 365 jours, trois des années bissextiles qui se trouvent en quatre siècles. Ainsi, toutes les années (non séculaires) dont le rang est divisible par 4, sont de 366 jours; il en est de même des années séculaires dans lesquelles le nombre des siècles est divisible par 4; mais les autres années séculaires ne sont que de 365 jours.

Pendant que le centre de la terre fait une révolution autour du soleil en une année, la lune suit la terre dans ce mouvement, et fait à peu près douze révolutions autour d'elle; c'est ce qui a conduit à diviser l'année en douze *mois.*

L'unité de temps, nommée *jour,* se divise en 24 *heures;* l'heure se divise en 60 *minutes,* la minute en 60 *secondes;* etc.

Le *calendrier* actuel, réglé d'après ces conventions, s'appelle *Calendrier grégorien,* parce qu'il est dû au pape *Grégoire XIII.* Ce calendrier suffira, malgré une légère erreur, pour maintenir l'accord entre l'année civile et l'année solaire; car l'erreur totale ne sera que d'un jour environ en 4400 ans.

265. On a adopté des signes particuliers pour *abréger l'écriture des diverses mesures.* Ainsi, pour désigner 2 toises 3 pieds 4 pouces 5 lignes, on écrit $2^{T}\ 3^{pi}\ 4^{po}\ 5^{li}$; l'expression $12^{\#}\ 3^{s}\ 5^{d}$ représente 12 livres 3 sous 5 deniers; pour indiquer 15 livres 7 onces 4 gros 2 deniers 9 grains, on écrit 15℔ $7^{o}\ 4^{G}\ 2^{d}\ 9^{g}$; pour désigner 3 heures 5 minutes 7 secondes, on écrit $3^{h}\ 5'\ 7''$. On indique les mesures carrées par la lettre ~~initiale~~ *q*, et les mesures cubiques par un *c*. Ainsi,

$3^{T.q.}$ désigne 3 toises carrées, ou trois fois une toise carrée,
$0^{T.q.},27$ indique les 27 centièmes d'une toise carrée,
$5^{T.c.}$ représente 5 toises cubes, ou 5 fois une toise cube.

Calcul des nombres concrets.

266. Le *calcul des nombres concrets* repose sur quelques principes fondamentaux que nous allons faire connaître :

1°. *Dans l'*ADDITION *et dans la* SOUSTRACTION, *les nombres sur lesquels on opère doivent être de même nature, et les unités du résultat sont de même nature que celles des nombres sur lesquels on a opéré.* Cela est évident.

2°. *Dans la* MULTIPLICATION, *le multiplicateur est essentiellement abstrait, et les unités du produit sont toujours de même nature que celles du multiplicande;* car le multiplicateur indique combien de fois on doit prendre le multiplicande pour composer le produit, et le produit est la somme de plusieurs nombres égaux au multiplicande.

3°. Dans la DIVISION, le dividende étant un produit dont le diviseur et le quotient sont les deux facteurs (n° 23), on peut en conclure les propriétés suivantes :

Lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'unités de même nature, le quotient est un nombre abstrait qui exprime combien de fois le dividende contient le diviseur; ce quotient *est le même que si l'on faisait abstraction de la nature des unités du dividende et du diviseur.*

Quand le dividende est concret et le diviseur abstrait, le quotient est de la nature du dividende; la division sert alors à partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur; et le quotient exprime l'une de ces parties. Pour obtenir le nombre des unités du quotient, il suffit d'effectuer la division comme si le dividende était abstrait.

Par exemple, le produit de 7 toises par 3 étant 21 toises, si l'on divise 21 toises par 7 toises, le quotient sera le nombre abstrait 3 qui exprime que 7 toises est contenu 3 fois dans 21 toises; on obtiendrait le même quotient en divisant 21 par 7. Si l'on divise 21 toises par 3, le quotient sera le nombre concret 7 toises qui exprime que lorsqu'on partage le dividende 21 toises en 3 parties égales, chacune de ces parties est égale au quotient 7 toises; pour trouver le nombre 7 des toises du quotient, il suffit de diviser 21 par 3.

D'après ces considérations, *lorsqu'on doit opérer sur des nombres concrets, la nature des unités du résultat est connue d'avance; et pour obtenir le nombre des unités du résultat, il suffit toujours d'opérer sur des nombres abstraits.*

267. Les nombres concrets composés d'unités de diverses grandeurs sont dits *complexes*; et, par opposition, ceux qui ne renferment que des unités de même grandeur, sont des nombres *incomplexes*. Ainsi, 7 toises 2 pieds est un nombre *complexe*, et 7 toises est un nombre *incomplexe*.

Du calcul des nombres concrets incomplexes.

268. Lorsque les nombres concrets sur lesquels on doit opérer sont incomplexes, on obtient le nombre abstrait des unités du résultat à l'aide des méthodes qui ont été données dans la 1re partie de l'Arithmétique pour opérer sur les nombres abstraits. Car les principes établis dans le n° 266 faisant connaître la nature des unités du résultat cherché, il ne reste plus qu'à déterminer le nombre abstrait de ces unités, ce qui

se réduit à opérer sur les nombres donnés, abstraction faite de la nature de leurs unités.

On trouve ainsi, que la *somme* des nombres $453^{T},612$, $79^{T},039$ est $532^{T},651$ et que leur *différence* est $374^{T},573$; que le *produit* de $2^{T},4$ par $3,57$ est $8^{T},568$; que le quotient de $8^{T},568$ par $2^{T},4$ est $3,57$, que le quotient de $8^{T},568$ par $3,57$ est $2^{T},4$, et que le quotient de 47^{T} par 11 est $4^{T},272727$ etc.

269. *Lorsqu'un nombre incomplexe est rapporté à une certaine unité, pour le convertir en unités plus petites ou plus grandes, il suffit de multiplier ou de diviser le nombre de ces unités données, par le nombre qui exprime combien l'unité de la plus grande espèce vaut d'unités de la plus petite espèce.*

Par exemple, une toise valant 6 pieds, pour convertir 9 toises en pieds, il suffit de multiplier 9 par 6; le produit 54 fait voir que 9 toises valent 54 pieds.

Pour convertir 54 pieds en toises, on divise 54 par 6, le quotient 9 exprime que 54 pieds valent 9 toises.

De même, pour convertir 57^{pi} en toises, on divise 57 par 6; le quotient exprimant des toises, on a

$$57^{pi} = \frac{57^{T}}{6} = 9^{T} + \frac{3^{T}}{6} = 9^{T}\,\frac{3}{6} = 9^{T}\ 3^{pi},\ \text{car}\ \frac{1^{T}}{6} = 1^{pi}.$$

On trouvera d'une manière semblable que les relations

$1^{T} = 6^{pi}$, $1^{pi} = 12^{po}$, $1^{po} = 12^{lig}$, $1^{lig} = 12^{points}$, donnent

$1^{T} = 72^{po} = 864^{lig} = 10368^{points}$,

$0^{T},513074 = 3^{pi},078444 = 36^{po},941328$
$= 443^{li},295936 = 5319^{points},551232$;

et que les relations

$$1\ \text{℔} = 16^{onces},\ 1^{once} = 8^{gros},\ 1^{gros} = 72^{grains},$$

donnent, $1\ \text{℔} = 16^{onces} = 128^{gros} = 9216^{grains}$.

Remarque. La règle ci-dessus fournit le moyen de *convertir un nombre décimal concret en nombre complexe.*

Par exemple, soit le nombre $0^{T},513074$.

Pour trouver combien il contient de pieds, on multiplie $0,513074$ par 6, le produit étant $3,078444$, on voit que

$0^{T},513074$ vaut $3^{pi},078444$. Pour évaluer la partie décimale $0^{pi},078444$ en pouces et en lignes, on multiplie successivement par 12 et par 12; on trouve ainsi que $0^{pi},078444$ vaut $0^{pou},941328$ ou $11^{lig},295936$. Le nombre $0^{T},513074$ vaut donc $3^{pi}\ 11^{lig},295936$ ou $3^{pi}\ 11^{lig},296$ à moins d'un millième de ligne.

Calcul des nombres concrets complexes.

270. La règle du n° **269** fournit le moyen de *convertir un nombre concret complexe en fraction de l'une quelconque de ses unités.*

1er Exemple. *Convertir* $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{pouces}$ *en pouces.*

On évalue les 3^{T} en pieds, en multipliant 3 par 6, ce qui donne 18; les 3^{T} valent donc 18^{pi}. On ajoute 4^{pi} aux 18^{pi}, ce qui donne 22^{pi}; de sorte que les $3^{T}\ 4^{pi}$ valent 22^{pi}. On convertit ces 22^{pi} en pouces, en multipliant 22 par 12; ce qui donne 264. Les $3^{T}\ 4^{pi}$ valent donc 264^{po}. Les $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ valent donc 264^{po} plus 6^{po}, ou 270 pouces.

2e Exemple. *Convertir* $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ *en toises.*

On réduit d'abord les $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ en pouces; ce qui donne 270 pouces. Une toise valant 72 pouces, on convertit ces 270 pouces en toises, en divisant 270 par 72; ce qui donne

$$3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po} = 270^{po} = \frac{270^{T}}{72} = \frac{15^{T}}{4} = 3^{T},75.$$

3e Exemple. *Convertir* $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ *en pieds.*

On réduit d'abord $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ en pouces; ce qui donne 270 pouces. On exprime 270^{po} en pieds, en divisant par 12; ce qui donne

$$3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po} = 270^{po} = \frac{270^{pi}}{12} = \frac{45^{pi}}{2} = 22^{pi},5.$$

4e Exemple. *Convertir* $3^{pi}\ 7^{po}\ 10^{lig}\ 10^{points}$ *en points.*

On trouve que $3^{pi}\ 7^{po}\ 10^{lig}\ 10^{points}$ valent 6322 points.

271. Les méthodes exposées dans le n° **270**, donnant le moyen de *convertir les nombres complexes en nombres incomplexes*, on pourrait faire dépendre le calcul des nombres

complexes de celui des nombres incomplexes. Mais, nous allons indiquer comment on peut *opérer directement sur les nombres donnés.*

272. Pour *additionner des nombres complexes*, on écrit les unités de même grandeur les unes sous les autres; et on ajoute successivement ces unités, en commençant par les plus petites, afin de pouvoir joindre les retenues aux colonnes suivantes. En voici des exemples :

Nombres à ajouter.......	7^{T}	5^{pi}	11^{po}	$\frac{3}{4}$	18#	12ſ	10₰	$\frac{2}{3}$
	9^{T}	4^{pi}	10^{po}	$\frac{4}{5}$	18#	7ſ	4₰	$\frac{2}{3}$
Sommes..................	17^{T}	4^{pi}	10^{po}	$\frac{11}{20}$	37#	0ſ	3₰	$\frac{1}{3}$.

273. Pour *soustraire deux nombres complexes l'un de l'autre*, on retranche successivement les diverses unités qui composent le plus petit nombre, de celles du plus grand, en commençant par les plus petites, afin de rendre les *emprunts* possibles. En voici des exemples :

De........	17^{T}	4^{pi}	10^{po}	$\frac{11}{20}$	*De*.........	37#	0ſ	3₰	$\frac{1}{3}$
ôtez........	9^{T}	4^{pi}	10^{o}	$\frac{4}{5}$	*ôtez*.........	18#	7ſ	4₰	$\frac{2}{3}$
Reste......	7^{T}	5^{pi}	11^{po}	$\frac{3}{4}$	*Reste*......	18#	12ſ	10₰	$\frac{2}{3}$

Dans le premier exemple, comme on ne peut ôter $\frac{4}{5}$ ou $\frac{16}{20}$ de $\frac{11}{20}$, on emprunte 1^{po} sur les 10^{po}; cet emprunt joint à $\frac{11^{po}}{20}$ donne $\frac{31^{po}}{20}$; on ôte $\frac{16}{20}$ de $\frac{31}{20}$, ce qui fournit le reste $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$, que l'on écrit au rang des fractions de pouce du résultat. Le nombre dont on soustrait ne contenant plus que 9 pouces on emprunte 1^{pi} sur les 4^{pi}, et l'on retranche les 10^{po} de $1^{pi}\ 9^{po}$ ou de 21^{po}; on écrit le reste 11 pouces. Passant à la colonne des pieds, on emprunte 1^{T} ou 6^{pi}, et l'on retranche 4^{pi} de $1^{T}\ 3^{pi}$ ou de 9^{pi}, ce qui donne le reste 5^{pi}. Enfin, on obtient les 7 toises du reste total, en retranchant 9^{T} de 16^{T}. On a effectué la seconde soustraction d'après les mêmes principes.

274. Pour *multiplier un nombre complexe par un nombre entier abstrait*, on effectue la multiplication de chaque partie du multiplicande, par le multiplicateur, en commençant par les plus petites unités.

EXEMPLE. *Former le produit de* $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$ *par* 12.

On dispose le calcul de la manière suivante :

Multiplicande.............	$12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$
Multiplicateur..............	12
Produit......................	$145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$.

Et on dit : 12 fois $\frac{2^{d}}{11}$ valent $\frac{24^{d}}{11}$; pour extraire l'entier contenu dans $\frac{24}{11}$, on divise 24 par 11, ce qui fournit le quotient 2 et le reste 2; de sorte que $\frac{24^{d}}{11}$ valent $2^{d}\ \frac{2}{11}$; on écrit les $\frac{2}{11}$ de denier au produit, et on retient 2^{d} pour les joindre à 12 fois 3^{d}, ce qui donne 38^{d}. Pour extraire les sous contenus dans 38^{d}, on divise 38 par 12, ce qui fournit le quotient entier 3 et le reste 2; de sorte que 38^{d} valent $3^{s}\ 2^{d}$; on pose les 2^{d} au produit et on retient les 3^{s} pour les ajouter à 12 fois 2^{s}, ce qui donne 27^{s} ou $1^{\#}\ 7^{s}$; on écrit 7^{s} au produit, et la retenue $1^{\#}$ ajoutée à 12 fois $12^{\#}$, donne $145^{\#}$. Le produit total est donc $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$.

275. Pour *diviser un nombre concret, complexe ou incomplexe, par un nombre entier abstrait*, on convertit chaque reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur.

1er EXEMPLE. *Trouver le quotient de* $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$ *par* 12.

On divise $145^{\#}$ par 12, ce qui fournit le quotient $12^{\#}$ et le reste $1^{\#}$ ou 20^{s}; on ajoute à ce reste les 7^{s} du dividende, la somme 27^{s} divisée par 12 donne le quotient 2^{s} et le reste 3^{s} ou 36^{d}; ajoutant à 36^{d} les 2^{d} du dividende, on divise 38^{d} par 12, ce qui conduit au quotient 3^{d} et au reste 2^{d}; on divise $2^{d}\ \frac{2}{11}$ ou $\frac{24^{d}}{11}$, par 12, le quotient est $\frac{2^{d}}{11}$; la somme de ces quotiens partiels détermine le quotient total $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$.

2e EXEMPLE. *Calculer le quotient de* 23^{T} *par* 4.

On divise 23^{T} par 4, ce qui donne le quotient 5^{T}, et le reste 3^{T} qui vaut 18^{pi}. On divise 18^{pi} par 4, ce qui fournit le quotient 4^{pi}, et le reste 2^{pi} qui vaut 24^{po}. Enfin, la division de 24^{po} par 4 donne le quotient exact 6^{po}. On voit que le quotient total de 23^{T} par 4 est $5^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$.

276. La division d'un nombre concret par un nombre entier abstrait fournit une *seconde méthode pour multiplier un nombre complexe par un nombre entier abstrait.* On forme le produit total en décomposant le multiplicande en *parties aliquotes*, c'est-à-dire en parties qui sont contenues exactement les unes dans les autres.

Ainsi, dans l'exemple du n° **274**, on dispose et on exécute le calcul de la manière suivante :

Multiplicande..............................	$12^{\#}$	2^{s}	3^{d}	$\frac{2}{11}$
Multiplicateur................................	12			
12 *fois* $12^{\#}$ *font*..............................	$144^{\#}$	0^{s}	0^{d}	
12 *fois* $1^{\#}$ *donneraient* $12^{\#}$,				
12 *fois* 2^{s} *donnent le dixième de* $12^{\#}$, *ou*	1	4	0	
12 *fois* 3^{d} *donnent le huitième de* $1^{\#}\ 4^{s}$, *ou*	0	3	0	
12 *fois* 2^{d} *donneraient* 2^{s},				
12 *fois* $\frac{2^{d}}{11}$ *donnent donc le onzième de* 2^{s}, *ou*	0	0	2	$\frac{2}{11}$
12 *fois* $12^{\#}\ 2^{s}\ 3^{d}\ \frac{2}{11}$, *font donc*............	$145^{\#}$	7^{s}	2^{d}	$\frac{2}{11}$.

On multiplie d'abord les $12^{\#}$ du multiplicande, par le multiplicateur 12, ce qui donne $144^{\#}$.

Pour obtenir le produit de 2^{s} par 12, on dit : 12 fois $1^{\#}$ donneraient $12^{\#}$; mais 2^{s} est le dixième de $1^{\#}$; 12 fois 2^{s} donneront donc le dixième de $12^{\#}$, ou $1^{\#}\ 4^{s}$; et comme 3^{d} est le huitième de 2^{s}, 12 fois 3^{d} donneront le huitième de $1^{\#}\ 4^{s}$ ou 3^{s}. Enfin, 12 fois 2^{s} ayant donné $1^{\#}\ 4^{s}$, et 2^{d} étant le douzième de 2^{s}, le produit de 2^{d} par 12 est le douzième de $1^{\#}\ 4^{s}$ ou 2^{s}; le produit de $\frac{2}{11}$ de denier par 12 sera donc le onzième de 2^{s}, ou $2^{d}\ \frac{2}{11}$. La somme des produits partiels des différentes parties du multiplicande par le multiplicateur, détermine le produit total $145^{\#}\ 7^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$.

Cette 2e méthode, connue sous le nom de *méthode des parties aliquotes*, doit être préférée à celle du n° **274**, lorsque le multiplicateur surpasse 12.

277. La *multiplication* et la *division d'un nombre complexe par une fraction abstraite* se déduisent de ce qui précède, car chacune de ces opérations se réduit à multiplier et à diviser successivement un nombre complexe par un nombre entier.

278. Pour *diviser l'un par l'autre deux nombres complexes de même nature*, on les convertit d'abord en nombres incomplexes (n° **270**), et la question est réduite à diviser deux nombres incomplexes l'un par l'autre.

Par exemple, pour *diviser* $96^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ *par* $3^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$, on convertit le dividende et le diviseur en pouces (n° **270**), ce qui donne 6954 pouces et 270 pouces; le quotient demandé est donc $\frac{6954}{270}$ (n° **266**, 3°), ou $\frac{1159}{45}$, ou 25,755555 etc.

279. Nous allons résoudre des *problèmes dans lesquels le multiplicateur et le diviseur seront déterminés par le nombre abstrait qui exprime combien il y a d'unités et de parties d'unité dans un nombre complexe concret.*

1er Problème. *Trouver le prix de* $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ *d'un ouvrage dont la toise coûte* $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$.

1re Méthode. On convertit $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$, en fraction de toise, ce qui donne $\frac{31^{T}}{12}$ (n° **270**). Les $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ coûteront donc les $\frac{31}{12}$ du prix $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$ d'une toise, ou $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}\times\frac{31}{12}$, ou $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ (n° **277**).

Remarque. On voit que le nombre concret $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ n'a servi qu'à déterminer le nombre abstrait $\frac{31}{12}$ par lequel il faut multiplier le prix d'une toise, pour obtenir le prix des $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$. *Il serait absurde de dire qu'on a trouvé ce prix en multipliant* $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$ *par* $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$.

2e Méthode. On cherche successivement les prix des parties 2^{T}, 3^{pi}, 6^{po}, par le procédé des *parties aliquotes* (n° **276**), et on fait la somme. Voici le détail du calcul :

Le prix d'une toise étant	$0^{\#}$	9^{s}	10^{d}	$\frac{14}{31}$
Trouver le prix de	2^{T}	3^{pi}	6^{po}.	
Prix de 2 toises	$0^{\#}$	19^{s}	8^{d}	$\frac{28}{31}$
Prix de 3^{pi} ou de 36^{po}	0	4	11	$\frac{7}{31}$
Prix de 6^{po}	0	0	9	$\frac{27}{31}$
Prix des $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$	$1^{\#}$	5^{s}	6^{d}.	

On trouve le prix de 2^{T} en multipliant le prix d'une toise par 2 (n° **274**); 3^{pi} étant la moitié de 1^{T} ou de 6^{pi}, on obtient le prix de 3^{pi} en divisant le prix d'une toise par 2 ; 6^{po} étant le 6e de 3^{pi} ou de 36^{po}, on trouve le prix de 6^{po} en divisant le prix de 3^{pi} par 6 ; la somme des prix des parties 2^{T}, 3^{pi}, 6^{po}, exprime le prix $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ des $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$.

2e Problème. *Le prix de* $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ *d'un ouvrage étant* $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$, *on demande à combien revient la toise.*

1re Méthode. On convertit les $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ en fraction de toise ;

ce qui donne $\frac{31^{T}}{12}$. Les $\frac{31}{12}$ d'une toise coûtent donc $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$; le prix x d'une toise multiplié par $\frac{31}{12}$ doit donc être $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$. On obtiendra donc x en divisant $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ par $\frac{31}{12}$ (nº **277**); le quotient $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{14}{31}$ exprime le prix d'une toise.

REMARQUE. On voit que le nombre concret $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$, qui vaut $\frac{31^{T}}{12}$, a servi à déterminer le nombre abstrait $\frac{31}{12}$ par lequel il a fallu diviser $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{\#}$ pour obtenir le prix de la toise.

2ᵉ MÉTHODE. Puisque $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ coûtent $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$:

2 fois $2^{T}\ 3^{pi}\ 6^{po}$ ou $5^{T}\ 1^{pi}$, coûtent 2 fois $1^{\#}\ 5^{s}\ 6^{d}$ ou $2^{\#}\ 11^{s}$,
6 fois $5^{T}\ 1^{pi}$ ou 31^{T}, coûtent 6 fois $2^{\#}\ 11^{s}$ ou $15^{\#}\ 6^{s}$.

Une toise d'ouvrage coûte donc la $31^{ième}$ partie de $15^{\#}\ 6^{s}$, ou $9^{s}\ 10^{d}\ \frac{16}{31}$ (nº **275**).

3ᵉ PROBLÈME. *Déterminer la surface d'un carré dont chaque côté est de 2 toises 4 pieds 6 pouces.*

Pour évaluer cette surface en toises carrées, on convertit $2^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$ en fraction de toise, ce qui donne $\frac{11^{T}}{4}$ (nº **270**). Le nombre de toises carrées de la surface cherchée est donc $\frac{11}{4} \times \frac{11}{4}$ (nº **259**, 1º) ou $\frac{121}{16}$.

4ᵉ PROBLÈME. *La surface d'un carré étant de* $\frac{121^{T.q.}}{16}$, *trouver la longueur x toises du côté de ce carré.*

La surface x^{2} toises carrées de ce carré devant être égale à $\frac{121^{T.q}}{16}$, on a $x^{2} = \frac{121}{16}$; d'où $x = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{11}{4}$, (nº **159**).

Le côté du carré est donc $\frac{11^{T}}{4}$, ou $2^{T}\ 4^{pi}\ 6^{po}$.

§ III. *Du Système des nouvelles mesures.*

230. Dans le *système des nouvelles mesures*, on a choisi pour unité fondamentale, la longueur de la dix-millionième partie du quart de la circonférence de la terre. Toutes les autres mesures (à l'exception des mesures *circulaires* et de *température*), se déduisent de cette unité fondamentale nommée MÈTRE. Ce *système* est appelé *métrique*, parce que le *mètre* en est la base fondamentale; on le nomme aussi *système légal*, parce qu'il est le seul reconnu par les lois actuelles.

Les unités de longueur, plus grandes et plus petites que le mètre, sont soumises à la loi décimale; c'est-à-dire que ces unités sont de dix en dix fois plus grandes ou plus petites que l'unité principale. On forme les noms de ces unités en faisant précéder le nom de l'unité principale des mots :

myria, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*,

qui signifient respectivement

dix-mille, *mille*, *cent*, *dix*, *dixième*, *centième*, *millième*.

Ainsi, dix mètres forment une nouvelle unité de longueur nommée *décamètre*. Dix décamètres valent 10 fois 10 mètres ou cent mètres; ce qui forme un *hectomètre*. Dix hectomètres valent mille mètres, ou un *kilomètre*. Dix kilomètres valent 10000^{m} ou un *myriamètre*. Le dixième d'un mètre forme un *décimètre*; le dixième d'un décimètre vaut le centième d'un mètre ou un *centimètre*. Le dixième d'un centimètre vaut un millième de mètre, ou un *millimètre*. Ainsi, un mètre vaut dix décimètres, ou cent centimètres, ou mille millimètres. Cent décimètres valent 100 fois $\frac{1^{m}}{10}$, ou 10^{m}, ou un décamètre; le millième d'un myriamètre vaut le millième de 10000^{m}, ou 10^{m}, ou un décamètre; etc.

231. Afin d'introduire uniformément le système décimal dans toutes les mesures, on a divisé le quart de la circonférence du cercle en 100 parties égales nommées *grades* ou *degrés* *centésimaux ;* le degré se divise en 100 *minutes*, la minute en 100 *secondes;* etc.

282. L'*unité principale,* adoptée pour mesurer les surfaces, est le *mètre carré.* Ses multiples sont : le décamètre carré, l'hectomètre carré, le kilomètre carré et le myriamètre carré ; ses sous-multiples sont : le décimètre carré, le centimètre carré et le millimètre carré.

Le décamètre carré est un carré dont chaque côté a 10 mètres ; sa surface est donc égale à 10 × 10 mètres carrés (nº 259, 1º), ou à 100 mètres carrés, ou à 100 fois un mètre carré. L'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés ; le kilomètre carré vaut 100 hectomètres carrés, et le myriamètre carré vaut 100 kilomètres carrés. De sorte que les côtés des carrés devenant de 10 en 10 fois plus grands, les surfaces de ces carrés deviennent de 100 en 100 fois plus grandes.

Un mètre valant 10 décimètres, le mètre carré vaut 10 × 10 décimètres carrés, ou 100 fois un décimètre carré ; un décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, et un centimètre carré vaut 100 millimètres carrés. Un mètre valant 100 centimètres, ou 1000 millimètres, un mètre carré vaut 100 × 100 centimètres carrés, ou 1000 × 1000 millimètres carrés.

283. L'unité qui sert à mesurer les surfaces des terrains est un carré de dix mètres de côté, nommé *are ;* cette unité *agraire,* qui vaut 100 mètres carrés, est la même chose qu'un décamètre carré. La collection de 100 ares se nomme *hectare* et non pas *hecto-are ;* l'hectare vaut 100 fois une are, ou 100 fois 100 mètres carrés, ou 10000 mètres carrés ; c'est donc un carré dont chaque côté a 100 mètres de longueur, ou un hectomètre carré. Le centiare, qui est la centième partie de l'are, vaut le centième de 100 mètres carrés, ou un mètre carré. Ainsi, un hectare vaut 100 ares, ou 10000 centiares ; et 234567 mètres carrés, valent 23 hectares 45 ares 67 centiares.

284. L'unité principale adoptée pour mesurer les volumes est le *mètre cube.* On évalue les volumes en mètres cubes, en décimètres cubes, en centimètres cubes, etc.

Un mètre valant 10 décimètres, le mètre cube vaut 10 × 10 × 10 ou 1000 décimètres cubes ; un décimètre cube vaut 1000 centimètres cubes, et un centimètre cube vaut 1000 millimètres cubes. Un mètre valant 100 centimètres, ou 1000 millimètres, on en déduit (nº 259, 2º) qu'un mètre cube vaut 100 × 100 × 100 centimètres cubes, ou 1000 × 1000 × 1000 millimètres cubes.

285. Le mètre cube prend le nom de STÈRE, lorsqu'il sert à mesurer les bois de chauffage. On fait aussi usage du *décistère,* qui vaut le dixième d'un stère.

286. L'*unité de capacité,* pour les liquides et les grains, est le LITRE ; il équivaut à un *décimètre cube.* Les mesures usitées sont : l'*hectolitre* qui contient 100 litres, le *décalitre* qui contient dix litres, et le *décilitre* qui contient le dixième d'un litre. Ces mesures ont des formes *cylindriques;* elles contiennent des quantités de liquide égales aux mesures cubiques indiquées.

287. L'unité de poids nommée GRAMME, équivaut au poids d'un centimètre cube d'eau (*). Ses multiples sont : le *décagramme* qui vaut dix grammes, l'*hectogramme* qui vaut cent grammes, et le *kilogramme* qui vaut mille grammes ; ses sous-multiples sont : le *décigramme* qui vaut le dixième d'un gramme, le *centigramme* qui vaut le centième d'un gramme, et le *milligramme* qui vaut le millième d'un gramme.

Le *kilogramme* forme la *livre poids nouvelle,* nommée *livre décimale ;* il représente le poids de 1000 centimètres cubes d'eau, ou d'un décimètre cube d'eau (nº 284). Or, un décimètre cube équivaut à un litre (nº 286) ; *le kilogramme exprime donc le poids d'un litre d'eau distillée.* Un mètre cube valant

(*) Pour rendre cette mesure invariable, on a pris de l'eau distillée ramenée à son *maximum* de *condensation* ou de *densité.* Ce *maximum* de condensation de l'eau correspond, par une exception remarquable, à une température d'environ 4 degrés centigrades au-dessus de zéro. De sorte que *le volume d'une même masse d'eau augmente, lorsque la température augmente ou diminue à partir de 4 degrés centigrades au-dessus de zéro.*

1000 décimètres cubes, on voit qu'*un mètre cube d'eau pèse* 1000 *kilogrammes*.

288. Les nouvelles monnaies d'argent et d'or, renferment les 0,9 de leur poids en *fin;* c'est-à-dire qu'elles sont au *titre* de 0,9 ou de 900 millièmes, ou à 900 millièmes de *fin;* l'autre dixième est en cuivre.

289. La nouvelle *unité monétaire* est le *franc*. La pièce d'un franc est un *alliage* d'argent et de cuivre qui pèse cinq grammes ; elle contient les 9 dixièmes de son poids en argent pur, et l'autre dixième en cuivre. La dixième partie d'un franc s'appelle *décime*, et le centième d'un franc se nomme *centime;* on compte actuellement par francs, décimes et centimes. Un franc vaut 10 décimes ou 100 centimes.

Nos nouvelles pièces de monnaies sont : la *pièce d'or* de 40 francs, qui pèse $12^{\text{gram.}},90322$ et qui a 26 millimètres de diamètre ; la *pièce d'or* de 20 francs, qui pèse $6^{\text{gram.}},45161$ et qui a 21 millimètres de diamètre ; la *pièce d'argent* de 5 francs, qui pèse 25 grammes ; la *pièce d'argent* de 2 francs, qui pèse 10 grammes ; les *pièces d'argent* d'un franc, d'un demi-franc ou de 50 centimes, et d'un quart de franc ou de 25 centimes. Les *pièces de cuivre*, dites de *billon*, sont : la pièce d'un décime ou nouveau *gros sou*, qui vaut un dixième de franc ou 10 centimes, ou $0^{\mathrm{f}},10$; la pièce de 5 centimes, ou *petit sou* nouveau, qui vaut le vingtième d'un franc, ou $0^{\mathrm{f}},05$; et la pièce d'un centime, qui vaut le centième d'un franc, ou $0^{\mathrm{f}},01$.

290. *Les nouvelles pièces d'or et d'argent peuvent servir à former la livre décimale et la longueur du mètre.* En effet :

1°. La pièce d'argent de 5 francs pesant 25 grammes, 40 pièces de 5 francs pèsent 40 fois 25 grammes, ou 1000 grammes, ou un kilogramme, ou une livre poids nouvelle.

2°. Pour *former la longueur du mètre avec des pièces d'or* de 20 francs et de 40 francs, il suffit de placer les unes à la suite des autres, 34 pièces de 20 francs et 11 pièces de 40 francs ; car la somme des diamètres de ces 45 pièces est 34 fois 21 millimètres plus 11 fois 26 millimètres, ou 1000 millimètres, ou un mètre. On forme également la longueur du

mètre, en plaçant les unes à la suite des autres, 8 pièces de 20 francs et 32 pièces de 40 francs.

291. Lors de l'établissement du système des nouvelles mesures, on divisa le jour en 10 *heures*, l'heure en 100 *minutes*, la minute en 100 *secondes*, etc. La collection de 30 jours forma un *mois*. On divisa le mois en trois *décades* de 10 jours. L'année de 365 jours, fut composée de 12 mois de 30 jours, formant 360 jours, plus de 5 jours *complémentaires*. On divisa l'année en 4 *saisons* de trois mois chacune, savoir : le *printemps, l'été, l'automne* et *l'hiver*. Le PRINTEMPS fut composé des mois de *germinal, floréal* et *prairial;* l'ÉTÉ, des mois de *messidor, thermidor* et *fructidor;* l'AUTOMNE, des mois de *vendémiaire, brumaire* et *frimaire;* l'HIVER, des mois de *nivôse, pluviôse* et *ventôse*. Les changemens considérables que ce nouveau système apportait dans la construction des pendules et des montres, la célébration du *dimanche*, et l'habitude de se reposer tous les 7 jours, ne permirent pas d'adopter cette nouvelle division du temps, et on revint à l'ancien système (n° **264**).

De la numération et du calcul des nouvelles mesures.

292. Les règles données pour la numération et le calcul des nombres décimaux abstraits, conviennent aux nombres décimaux concrets qui expriment les nouvelles mesures ; car ces mesures sont soumises à la même loi décimale.

1°. Pour *énoncer une nouvelle mesure* exprimée par un nombre décimal, on énonce d'abord le nombre décimal en faisant abstraction de la nature de ses unités (n° **128**), et on remplace ensuite l'unité abstraite par l'unité concrète dont il s'agit.

Ainsi, le nombre $207^{\mathrm{m}},039$ peut s'énoncer :

deux cent sept mètres, trente-neuf millimètres, ou
deux cent sept mille trente-neuf millimètres.

Ce nombre est composé de deux hectomètres plus 7 mètres plus 3 centimètres plus 9 millimètres.

2°. Pour *mettre en chiffres une nouvelle mesure énoncée*, on écrit d'abord le nombre énoncé, d'après la règle du n° **129**, en faisant abstraction de l'espèce de l'unité concrète; on place ensuite sur la droite du chiffre des unités, et un peu au-dessus, la lettre initiale du nom de l'unité concrète.

Ainsi, chacun des nombres

deux cent sept mètres, trente-neuf millimètres,
deux cent sept mille trente-neuf millimètres,

s'écrit de cette manière, $207^{m},039$.

293. *La partie décimale d'un nombre de mètres carrés ou de mètres cubes, peut se décomposer en mesures carrées ou en mesures cubiques.* En effet :

1°. Soit le nombre $0^{m.q},34$ qui exprime les 34 centièmes d'un mètre carré; chaque mètre carré valant 100 décimètres carrés, le centième d'un mètre carré vaut un décimètre carré; le nombre $0^{m.q},34$ vaut donc 34 décimètres carrés. On verra d'une manière semblable que $0^{m.q},0065$ vaut 65 centimètres carrés, et que $0^{m.q},3465$ vaut 34 décimètres carrés, plus 65 centimètres carrés.

En général : *pour évaluer la partie décimale d'un nombre de mètres carrés, en décimètres carrés, centimètres carrés, etc., il suffit de diviser cette partie décimale en tranches de deux chiffres, à partir de la virgule, en ayant soin, lorsque la dernière tranche n'a qu'un seul chiffre, de mettre un zéro à sa droite; la première tranche exprime des décimètres carrés; la deuxième, des centimètres carrés;* etc.

2°. Le nombre $0^{m.c},456$, qui exprime les 456 millièmes d'un mètre cube, est composé de 456 décimètres cubes; car, un mètre cube valant 1000 décimètres cubes (n° **284**), chaque millième de mètre cube vaut un décimètre cube. De même, $0^{m.c},000789$ vaut 789 centimètres cubes; car, un mètre cube valant 1000000 centimètres cubes, chaque millionième de mètre cube vaut un centimètre cube. Le nombre $0^{m.c},456789$ vaut donc 456 décimètres cubes, plus 789 centimètres cubes.

En général : *pour évaluer la partie décimale d'un nombre de mètres cubes, en décimètres cubes, centimètres cubes, etc., il suffit de diviser cette partie décimale en tranches de trois*

chiffres, à partir de la virgule, en ayant soin, lorsque la dernière tranche n'a qu'un ou deux chiffres, de mettre deux zéro, ou un zéro à sa droite; la première tranche exprime des décimètres cubes; la deuxième des centimètres cubes; etc.

Par exemple, le nombre $0^{m.c},34567$, qui exprime les 34567 cent-millièmes d'un mètre cube, vaut 345 décimètres cubes, plus 670 centimètres cubes.

294. *Lorsque le nombre décimal qui représente une nouvelle mesure est rapporté à une certaine unité, pour le convertir en unités plus petites ou plus grandes, il suffit de multiplier ou de diviser le nombre des unités données par le nombre qui exprime combien l'unité de la plus grande espèce vaut d'unités de la plus petite espèce* (n° **269**) ; *ce qui se réduit à multiplier ou à diviser par une puissance de* 10.

Par exemple, un kilomètre valant 1000 mètres, 28 kilomètres valent 28 fois 1000 mètres, ou 28×1000 mètres, ou 28000 mètres. Pour *convertir* $84^{kilom.},5673$ *en mètres*, on multiplie 84,5673 par 1000, ce qui donne 84567,3; de sorte que les $84^{kilom.},5673$ valent $84567^{m},3$.

Pour *convertir* $39^{m},876$ *en myriamètres*, on observe qu'un myriamètre valant 10000 mètres, on trouvera combien il y a de myriamètres dans le nombre donné, en divisant 39,876 par 10000; ce qui fournit le quotient 0,0039876 (n° **130**, 3°).

On a vu (n° **282**) qu'un mètre carré vaut 100 décimètres carrés, ou 10000 centimètres carrés, etc.; et qu'un mètre cube vaut 1000 décimètres cubes, ou 1000000 centimètres cubes, etc. Par conséquent : *Pour convertir un nombre quelconque de mètres carrés, en décimètres carrés, ou en centimètres carrés, etc., il suffit de multiplier ce nombre par* 100, *ou par* 10000, *etc.; ce qui revient à avancer la virgule de deux rangs, ou de quatre rangs, etc., vers la droite du nombre donné; et pour convertir un nombre quelconque de mètres cubes, en décimètres cubes, ou en centimètres cubes, etc., il suffit de multiplier ce nombre par* 1000, *ou par* 1000000, *etc.; ce qui revient à avancer la virgule de trois rangs, ou de six rangs, etc., vers la droite du nombre donné.*

Ainsi, $345^{m.q.},7892$ valent $34578^{décim.q.},92$, ou 3457892 centimètres carrés; et $34^{m.c.},2567$ valent $34256^{décim.c.},7$, ou 34256700 centimètres cubes.

L'*are* vaut cent mètres carrés, et l'*hectare* vaut 10000 mètres carrés. Par conséquent, pour *convertir des mètres carrés en ares ou en hectares*, il suffit de diviser le nombre donné par 100 ou par 10000; ce qui revient à avancer la virgule de deux ou de quatre rangs à gauche (n° **130**, 3°).

Ainsi, $6274^{m.q.},5$ valent $62^{ares},745$ ou $0^{hectare},62745$.

Réciproquement, on convertit des ares ou des hectares en mètres carrés, en avançant la virgule de deux ou de quatre rangs vers la droite du nombre donné. Ainsi, $62^{ares},745$ valent $6274^{m.q.},5$, et $7^{hectares},234568$ valent $72345^{m.q.},68$.

295. L'*addition* et la *soustraction* des nombres rapportés à la même unité, s'effectuent d'après la règle du n° **132**; les unités du résultat sont les mêmes que celles des nombres sur lesquels on a opéré, (n° **266**, 1°).

Exemples d'addition.

	$37^m,93$	$9479^m,24$	$3^m,4$
	$78\ ,95$	$0\ ,456$	$475\ ,279$
	$40\ ,97$	$30\ ,02$	32
Sommes,	$157^m,85$	$9509^m,716$	$510^m,679$.

Exemples de soustraction.

	$7389^m,785$	$3005^m,06002$	$0^m,045007$
	$254\ ,321$	$47\ ,87258$	$0\ ,0032$
Reste,	$7135^m,464$	$2957^m,18744$	$0^m,041807$.

Quand les nombres donnés expriment des unités de grandeurs différentes, on ramène la question à la précédente, en les rapportant d'abord à la même unité (n° **269**).

296. Dans la *multiplication*, le produit étant de la nature du multiplicande, il suffit de trouver le nombre des unités du produit; pour trouver ce nombre, on effectue la multiplication en faisant abstraction de la nature des unités du multiplicande. La règle du n° **133** fournit le résultat demandé.

297. La DIVISION présente trois cas :

1°. *Lorsque le dividende et le diviseur sont rapportés à la même unité, le quotient est abstrait; et pour calculer ce quotient, il suffit d'effectuer la division d'après la règle du n°* **136**, *en faisant abstraction de la nature des unités du dividende et du diviseur.*

Par exemple, le quotient de la division de $8^m,568$ par $2^m,4$ est le même que celui de 8,568 par 2,4. En effectuant cette dernière division, d'après la règle du n° **136**, on trouve le quotient exact 3,57.

2°. *Lorsque le dividende et le diviseur sont deux nombres concrets de même nature rapportés à des unités différentes, on ramène ce cas au précédent en rapportant d'abord ces deux nombres à la même unité* (n° **269**).

3°. Enfin, *lorsque le dividende est concret et le diviseur abstrait, le quotient est de la nature du dividende; pour obtenir le nombre des unités du quotient, il suffit d'effectuer la division comme si le dividende était abstrait.*

Par exemple, le quotient de $8^m,568$ par 3,57 sera des mètres; et pour trouver le nombre des unités du quotient, il suffit de diviser 8,568 par 3,57, ce qui donne le quotient exact 2,4; de sorte que le quotient demandé est $2^m,4$.

298. Les règles des nos **141** et **142** s'appliquent aux nouvelles mesures. Ainsi, la valeur du quotient de $3^m,6$ par 1,1, à moins d'un millimètre, est $3^m,272$; et suivant qu'on ne veut conserver que deux ou trois décimales, la valeur la plus approchée de $3^m,2727$ etc. est $3^m,27$ ou $3^m,273$.

Comparaison des mesures anciennes avec les mesures nouvelles.

299. Lorsque le SYSTÈME MÉTRIQUE sera généralement adopté, on ne fera plus usage des mesures anciennes; il sera donc inutile de comparer ces deux systèmes. Mais, les mesures anciennes étant encore employées, nous allons voir comment on convertit les mesures anciennes en mesures nouvelles et réciproquement.

300. 1°. Pour *évaluer la toise en mètres, et le mètre en toises*, on observe que la longueur du quart de la circonférence de la terre étant égale à 5130740 toises (page 236), et à 10 000 000 mètres (page 251), on a,

$$5130740 \text{ toises} = 10\,000\,000 \text{ mètres}; \text{ d'où}$$

$$1^{T} = \frac{10\,000\,000^{m}}{5130740} \text{ et } 1^{m} = \frac{5130740^{T}}{10\,000\,000}.$$

En effectuant les divisions indiquées, on trouve

$$1^{T} = 1^{m},949036591212963 \text{ etc.}, \quad 1^{m} = 0^{T},513074.$$

Connaissant la valeur d'une toise en mètres, la règle du n° **269** donnera les expressions en mètres du pied, du pouce, etc., en divisant $1^{m},949$ etc. par 6, puis le quotient par 12, etc. On obtiendra de même les expressions du mètre en pieds, en pouces, etc., en convertissant successivement $0^{T},513074$ en pieds, en pouces, etc. On trouvera de cette manière que

$$1^{pi} = 0^{m},324839431868827 \text{ etc.}, \qquad 1^{po} = 0^{m},027069952655735 \text{ etc.},$$
$$1^{ligne} = 0^{m},002255829387977 \text{ etc.}, \qquad 1^{point} = 0^{m},000187985782331 \text{ etc.},$$

$$1^{m} = 3^{pi},078444 = 36^{po},941328 = 443^{lig},295936.$$

Le nombre $3^{pi},078444$ étant égal à $3^{pi}\ 11^{li},29593$ etc. (page 244), on voit qu'*un mètre vaut 3 pieds* $11^{li},296$ *à moins d'un millième de ligne.*

2°. Pour *comparer l'aune au mètre*, on observe qu'une aune vaut 6322 points, et qu'un point vaut $0^{m},000187985782331$ etc.; l'aune est donc égale à 6322 fois $0^{m},000187985782331$ etc., ou à $1^{m},188446158965$ etc.

Réciproquement: Une aune valant $1^{m},1884461158$ etc., ou $1^{m} \times 1,1884461$ etc., si l'on divise 1^{aune} par $1,188461$ etc., le quotient $0^{aune},8414348$ etc., sera la valeur du mètre en aunes.

3°. Pour *évaluer les lieues en kilomètres, et* réciproquement *les kilomètres en lieues*, on fera usage de l'ancienne division de la circonférence en 360 degrés, et l'on dira :

Le quart de la circonférence de la terre vaut 90° terrestres ou $10\,000\,000^{m}$ ou 10000 kilomètres. D'ailleurs,

Un degré terrestre = 25 lieues terrestres = 20 lieues marines,
Une lieue de poste = 2000 toises,
Une toise = $1^{m},949036 59$ etc. = $0^{kilom},001949036 59$ etc.,
Un mètre = $0^{T},513074$, un kilomètre = $513^{T},074$.

On en déduira facilement les valeurs de la lieue terrestre, de la lieue marine, et de la lieue de poste, en kilomètres, et réciproquement; on trouvera

$$1^{li.\ ter.} = 4^{kilom.},444 \text{ etc.}, \quad 1^{li.\ mar.} = 5^{kilom},555 \text{ etc.}, \quad 1^{li.\ de\ poste} = 3^{kilom},898 \text{ etc.}$$
$$1^{kilom.} = 0^{li.\ ter.},225 = 0^{li.\ mar.},18 = 0^{li.\ de\ poste},256537.$$

4°. Pour *évaluer les degrés en grades, et réciproquement*, on observe que le quart de la circonférence se divisant en 90 degrés anciens, et en 100 *grades* (pages 236 et 251), il en résulte que

$$\textit{L'ancien degré} = \frac{10}{9} \textit{ de grade, le grade} = \frac{9}{10} \textit{ de degré ancien.}$$

301. Les *valeurs de la toise carrée en mètres carrés, et du mètre carré en toises carrées,* se déduisent des relations

$1^{T} = 1^{m},949036591212963$ etc., $\quad 1^{m} = 0^{T},513074$ (page 250),

au moyen de la règle du n° **259**, en formant les carrés des nombres $1,949$ etc., $0,513074$. On trouve de cette manière que

$$1^{T.q.} = 3^{m.q.},7987436338 \text{ etc.}, \quad 1^{m.q.} = 0^{T.q.},263244929476.$$

On en déduit les valeurs du pied carré, du pouce carré, etc., en mètres carrés, et réciproquement: car d'après les relations

$$1^{T.q.} = 36^{pi.q.}, \quad 1^{pi.q.} = 144^{po.q.}, \quad 1^{po.q.} = 144^{lig.q.}, \text{ etc.},$$

si l'on divise la valeur $3^{m.q.},798$ etc., de la toise carrée par 36, le quotient $0^{m.q.},10552065$ etc., exprimera le pied carré; ce quotient, divisé par 144, donnera le pouce carré; etc.

Pour exprimer le mètre carré, en pieds carrés, en pouces carrés, etc., il suffit de convertir la valeur $0^{T.q.},26324$ etc., du mètre carré, en pieds carrés, en pouces carrés, etc.; ce qui s'exécute en multipliant successivement, par 36, par 144, etc. (n° **269**).

Des calculs analogues conduiront aux expressions de *l'aune carrée en mètres carrés*, du *mètre carré en aunes carrées*, de la *lieue terrestre carrée, en myriamètres carrés et en myriares, et réciproquement*; etc.

302. Pour *trouver les rapports des mesures de volume et de capacité, anciennes et nouvelles*, on suivra la même marche que pour les mesures de superficie. Il suffira de former des cubes au lieu de carrés.

Par exemple, une toise valant $1^{m},949\,036\,591\,212\,96$ etc., on obtiendra le nombre de mètres cubes contenus dans une toise cube en formant le cube de $1,949036$ etc.; or on a trouvé (page 261) que le carré de $1,949$ etc., est $3,7987436338$ etc.; il suffit donc de multiplier ce carré par $1,949$ etc. Le produit $7,4038903$ etc., exprimera le cube de $1,949036591212$ etc. Une toise cube vaut donc $7^{m.c.},4038903430 83$ etc.

On parviendra d'une manière semblable, aux valeurs du mètre cube en toises cubes, en pieds cubes, etc., et réciproquement. On trouvera,

$$1^{T.c.} = 7^{m.c.},4a389o343o83 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 0^{T.c.},135064128946 \text{ etc.},$$
$$1^{pi.c.} = 0^{m.c.},034277270106 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 29^{pi.c.},173851 \text{ etc.},$$
$$1^{po.c.} = 0^{m.c.},000019836383 \text{ etc.}, \quad 1^{m.c.} = 50412^{po.c.},416 \text{ etc.}$$

Pour déterminer les rapports entre les mesures de capacité anciennes et nouvelles, on a pris une pinte de $46^{po.c.},95$ et un litron de $40^{po.c.},98625$ etc. Or,

$$1^{po.c.} = 0^{m.c.},000019836 \text{ etc.} = 0^{décim.c.},019836 \text{ etc.} = 0^{litre},019836 \text{ etc.},$$

car le litre vaut un décimètre cube. On a donc,

$$1^{pinte} = 46^{po.c.},95, \quad 1^{litron} = 40^{po.c.},98625 \text{ etc.}, \quad 1^{po.c.} = 0^{lit.},019836 \text{ etc.}$$

On en déduit

$$1^{pinte} = 0^{litre},93131818185 \text{ etc.}, \quad 1^{litron} = 0^{litre},8130189 \text{ etc.},$$
$$1^{litre} = 1^{pinte},07374688 \text{ etc.}, \quad 1^{litre} = 1^{litron},2299836 \text{ etc.}$$

Or, $1^{muid} = 288^{pintes}$, $1^{boisseau} = 16^{litrons}$, $1^{setier} = 12^{boisseaux}$.

On en déduit

$$1^{muid} = 2^{hectol.},68219 \text{ etc.}, \quad 1^{boiss.} = 13^{litres},0083 \text{ etc}, \quad 1^{setier} = 1^{hect.},56099 \text{ etc.},$$
$$1^{hect.} = 0^{muid},372828 \text{ etc.}, \quad 1^{litre} = 0^{boi.},0768739 \text{ etc.}, \quad 1^{hect.} = 0^{setier},640616 \text{ etc.}$$

303. Pour *évaluer la livre poids en kilogrammes, et réciproquement*, on observe que le gramme exprime le poids d'un

centimètre cube d'eau (n° **287**). Or, on a trouvé que le poids d'un centimètre cube d'eau est $18^{grains},82715$. Le gramme vaut donc $18^{grains},82715$; le kilogramme ou la livre poids nouvelle, vaut donc $18827^{grains},15$. Mais,

$$1^{grain} = \frac{1\text{℔}}{9216}; \text{ donc } 1^{kilog.} = \frac{1882715}{100} \text{ de } \frac{1\text{℔}}{9216} = \frac{1882715\text{℔}}{921600}.$$

Ainsi, 1882715℔ valent 921600 kilogrammes. On en déduit,

$$1\text{℔} = \frac{921600^{kilog.}}{1882715} = 0^{kilog},489\,505\,84660 \text{ etc.},$$
$$1^{kilog} = \frac{1882715\text{℔}}{921600} = 2\text{℔},042\,876\,519 \text{ etc.}$$

On en déduit, $1^{once} = 0^{kilog.},030594$ etc., $1^{gros} = 0^{kilog.},003824$ etc.

304. Pour *convertir la livre tournois en francs, et réciproquement*, on observe que la pièce d'un franc pèse 5 grammes, et qu'elle contient en argent fin les $\frac{9}{10}$ de son poids (page 254), c'est-à-dire les $\frac{9}{10}$ de 5 grammes, ou $\frac{9}{2}$ grammes, ou les $\frac{9}{2}$ de $18^{grains},82715$, ou $84^{grains},722175$.

Puisque $84^{grains},722175$ d'argent, valent un franc,

Le prix d'un grain d'argent est $\frac{1^{f}}{84,722175}$ *ou* $\frac{1000000^{f}}{84722175}$.

Or, la *livre tournois*, déduite de l'écu de $6^{\#}$, contient $83^{grains},675936$ d'argent fin. Par conséquent, $83^{grains},675936$ d'argent fin valent $1^{\#}$; *le prix d'un grain d'argent est donc*

$$\frac{1^{\#}}{83,675936} \quad ou \quad \frac{1000000^{\#}}{83675936}.$$

Ces deux expressions du prix d'un grain d'argent fin devant être égales, on a $\frac{1000000^{f}}{84722175} = \frac{1000000^{\#}}{83675936}$. On en déduit,

$$1000000^{f} \times 83675936 = 1000000^{\#} \times 84722175 \text{ (n° 110)},$$
$$83675936000000^{f} = 84722175000000^{\#}, \quad 83675936^{f} = 84722175^{\#},$$

0,987650942 etc

$$1^{\#} = \frac{83675936^{f}}{84722175} = \cancel{0^{f},987659 \text{ etc.}}, \quad 1^{f} = \frac{84722175^{\#}}{83675936} = 1^{\#},01250 \text{ etc.}$$

305. Nous avons vu (page 239) que 80 degrés du *thermomètre de Réaumur* valent 100 degrés du *thermomètre centigrade*. Par conséquent,

$$1^\circ \text{ de Réaumur vaut } \frac{5^\circ}{4} \text{ centigrades, et}$$

$$1^\circ \text{ centigrade vaut } \frac{4^\circ}{5} \text{ de Réaumur.}$$

306. Connaissant la valeur de chaque espèce d'unité ancienne, en mesures nouvelles, et réciproquement, il est facile de *convertir les mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement;* car cela se réduit à multiplier la valeur de l'unité que l'on veut convertir, par le nombre de ces unités.

1er Exemple. *Convertir* 907 *toises en mètres.*

Une toise vaut $1^{m},94903659$ etc.; les 907 toises valent donc 907 fois $1^{m},94903659$ etc., ou $1767^{m},776$ etc.

2^{e} Exemple. *Convertir* 28℔ 4° 2^{G} *en kilogrammes.*

On a vu (page 263) que $1℔ = 0^{kilog},4895058$ etc., $1^{once} = 0^{kilog},030594$ etc., $1^{gros} = 0^{kilog},003824$ etc.

On en déduira les valeurs en kilogrammes, des parties 28℔, 4^{onces}, 2^{gros}; et en les ajoutant, on trouvera que les 28℔ 4° 2^{G} valent $13^{kilog},836$ etc.

3^{e} Exemple. *Convertir* $16847^{f},93$ *en livres tournois.*

Si l'on multiplie la valeur $1^{\#},01250346$ etc., de 1^{f}, par le nombre 16847,93 des francs, on trouvera que les $16847^{f},93$ valent $17058^{\#},5874$ etc.

Remarque. La relation $1^{f} = 1^{\#},012503$ etc., donnant $80^{f} = 81^{\#}$ à moins de $0^{\#},001$, on voit que, *pour convertir des livres tournois en francs, il suffit de diminuer le nombre des livres de leur* 81^{ième} *partie*, et que, *pour convertir des francs en livres tournois, il n'y a qu'à augmenter le nombre des francs de leur* 80^{ième} *partie.* On obtient la 81^{ième} partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 9, et en prenant le 9^{ième} du quotient; et on trouve la 80^{ième} partie d'un nombre, en le divisant d'abord par 10, et en prenant le 8^{ième} du quotient.

Ainsi, pour convertir $16847^{f},93$ en livres tournois, on prend

le dixième de 16847,93 qui est 1684,793, et le huitième de 1684,793 qui est 210,599 etc.; ajoutant 210,599 etc. à 16847,93, on trouve que $16847^{f},93$ valent $17058^{\#},529$ etc.

307. Les *tables* placées à la fin de l'Arithmétique fournissent le moyen de résoudre les problèmes suivants :

1er Problème. *Convertir des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.*

On a réuni (p. 324, ..., 328) les différens produits des valeurs de chaque espèce d'unité, par les nombres d'un seul chiffre; alors, pour passer d'un système à l'autre, il suffit de décomposer le nombre donné en ses unités des différens ordres, de chercher les valeurs de ces diverses parties dans les *tables*, et d'en faire la somme.

1er Exemple. *Convertir* 907 *toises en mètres.*

On décompose ce nombre en 900^{T} plus 7^{T}; les conversions de ces parties en mètres s'effectuent à l'aide de la première table (page 324) et du déplacement de la *virgule*. Voici le calcul :

9 toises valent $17^{m},54133$; les 900^{T} valent donc	$1754^{m},133$,
les 7 toises valent..........................	$13^{m},64326$;
les 907 toises valent donc....................	$1767^{m},77626$.

2^{e} Exemple. *Convertir* $16847^{f},93$ *en livres tournois.*

On trouve à l'aide de la 6^{e} *table* (page 328) que les $16847^{f},93$ valent $17058^{\#},529$ etc.

2^{e} Problème. *Déterminer le prix d'une mesure nouvelle, lorsque le prix de la mesure ancienne est donné, et réciproquement.*

On multiplie le prix donné, par le nombre abstrait qui exprime combien la mesure dont on cherche le prix contient de fois la mesure dont le prix est donné; le produit exprime le prix cherché.

1er Exemple. *Une toise d'ouvrage coûte* 12 *francs; trouver le prix d'un mètre du même ouvrage.*

On voit dans la 1re *table* (p. 324) qu'un mètre vaut $0^{T},51307$, ou 0,51307 fois 1^{T}; le prix d'un mètre est donc, 0,51307 fois 12^{f} ou $6^{f},15684$.

2^{e} Exemple. *Un mètre d'ouvrage coûtant* $6^{f},15684$, *calculer le prix d'une toise du même ouvrage.*

Une toise vaut $1^{m},94904$; la toise coûtera donc 1,94904 fois $6^{f},15684$, ou $11^{f},999$ etc., ou 12 francs à moins de $0^{f},001$.

3^{e} PROBLÈME. *Comparer entre elles les mesures et les monnaies des différens pays.*

1er EXEMPLE. *Déterminer combien 24787 pieds anglais valent de pieds russes.*

On trouve (page 317) que

Le pied anglais $= 304^{millimètres},8$, et que le pied russe $= 354^{millimètres},1$.

$$\text{Donc, } \frac{1^{pi}\text{ Anglais}}{1^{pi}\text{ Russe}} = \frac{304,8}{354,1} = \frac{3048}{3541}.$$

Le pied anglais vaut donc $\frac{3048}{3541}$ pieds russes.

Les 24787 pieds anglais valent donc 24787 fois $\frac{3048}{3541}$ pieds russes, ou 21336 pieds russes.

2^{e} EXEMPLE. *Calculer combien 14220 guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre, valent de ducats d'or de l'empereur d'Autriche.*

On trouve (page 317) qu'une guinée vaut $26^{f},47$ et que un ducat vaut $11^{f},85$. Par suite,

$$\frac{1^{guinée}}{1^{ducat}} = \frac{2647}{1185}\text{; donc } 1^{guinée} = \frac{2647^{ducats}}{1185}.$$

Les 14220 guinées valent donc 14220 fois $\frac{2647^{duc.}}{1185}$, ou 31764 ducats.

3^{e} EXEMPLE. *Calculer combien 31764 ducats d'or de l'empereur d'Autriche valent de guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre.*

On déduit du *tableau* (page 317) que

$$\frac{1^{ducat}}{1^{guinée}} = \frac{1185}{2647}\text{; d'où } 1^{ducat} = \frac{1185^{guinées}}{2647}.$$

Les 31764 ducats valent donc

$$31764 \text{ fois } \frac{1185^{guinées}}{2647}\text{, ou } 14220 \text{ guinées.}$$

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES.

308. Les méthodes exposées dans les chapitres précédens, fournissent le moyen d'effectuer les diverses opérations de l'arithmétique sur les nombres abstraits et concrets; nous allons voir comment on peut en déduire la solution de tous les problèmes de l'arithmétique. Nous aurons recours à deux méthodes principales : la première, que nous nommerons *méthode de l'unité*, n'exige que la connaissance des quatre premières règles; elle offre le double avantage de fournir les solutions de plusieurs problèmes qu'on ne savait pas résoudre arithmétiquement, et d'exercer les élèves en les préparant à l'étude de l'*Algèbre* (*). La seconde méthode est fondée sur la théorie des proportions.

§ I^{er}. *Règles de trois directes et inverses.*

Règle de trois directe.

309. 1er PROBLÈME. *Quatre ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage; combien 9 ouvriers en feront-ils?*

1re MÉTHODE. Puisque 4 ouvriers ont fait 20^{m} d'ouvrage, un ouvrier ferait le quart de 20^{m}, ou $\frac{20^{m}}{4}$.

Les 9 ouvriers feront donc 9 fois $\frac{20^{m}}{4}$, ou $\frac{20^{m}\times 9}{4}$, ou 45 mètres.

En général : lorsqu'on connaît l'ouvrage exécuté par des

(*) J'ai trouvé ces méthodes en 1800. Je les ai publiées à cette époque, sous le titre d'*Introduction à l'Algèbre*.

Une toise vaut $1^{m},94904$; la toise coûtera donc $1,94904$ fois $6^{f},15684$, ou $11^{f},999$ etc., ou 12 francs à moins de $0^{f},001$.

3^{e} Problème. *Comparer entre elles les mesures et les monnaies des différens pays.*

1er Exemple. *Déterminer combien 24787 pieds anglais valent de pieds russes.*

On trouve (page 317) que

Le pied anglais $= 304^{millimètres},8$, et que le pied russe $= 354^{millimètres},1$.

Donc, $\frac{1^{pi}\ \text{Anglais}}{1^{pi}\ \text{Russe}} = \frac{304,8}{354,1} = \frac{3048}{3541}$.

Le pied anglais vaut donc $\frac{3048}{3541}$ pieds russes.

Les 24787 pieds anglais valent donc 24787 fois $\frac{3048}{3541}$ pieds russes, ou 21336 pieds russes.

2^{e} Exemple. *Calculer combien 14220 guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre, valent de ducats d'or de l'empereur d'Autriche.*

On trouve (page 317) qu'une guinée vaut $26^{f},47$ et que un ducat vaut $11^{f},85$. Par suite,

$$\frac{1^{guinée}}{1^{ducat}} = \frac{2647}{1185}\text{; donc } 1^{guinée} = \frac{2647^{ducats}}{1185}.$$

Les 14220 guinées valent donc 14220 fois $\frac{2647^{duc.}}{1185}$, ou 31764 ducats.

3^{e} Exemple. *Calculer combien 31764 ducats d'or de l'empereur d'Autriche valent de guinées d'or de 21 schillings d'Angleterre.*

On déduit du *tableau* (page 317) que

$$\frac{1^{ducat}}{1^{guinée}} = \frac{1185}{2647}\text{; d'où } 1^{ducat} = \frac{1185^{guinées}}{2647}.$$

Les 31764 ducats valent donc

$$31764 \text{ fois } \frac{1185^{guinées}}{2647}\text{, ou 14220 guinées.}$$

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES.

308. Les méthodes exposées dans les chapitres précédens, fournissent le moyen d'effectuer les diverses opérations de l'arithmétique sur les nombres abstraits et concrets ; nous allons voir comment on peut en déduire la solution de tous les problèmes de l'arithmétique. Nous aurons recours à deux méthodes principales : la première, que nous nommerons *méthode de l'unité*, n'exige que la connaissance des quatre premières règles ; elle offre le double avantage de fournir les solutions de plusieurs problèmes qu'on ne savait pas résoudre arithmétiquement, et d'exercer les élèves en les préparant à l'étude de l'*Algèbre* (*). La seconde méthode est fondée sur la théorie des proportions.

§ I^{er}. *Règles de trois directes et inverses.*

Règle de trois directe.

309. 1er Problème. *Quatre ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage ; combien 9 ouvriers en feront-ils ?*

1re Méthode. Puisque 4 ouvriers ont fait 20^{m} d'ouvrage, un ouvrier ferait le quart de 20^{m}, ou $\frac{20^{m}}{4}$.

Les 9 ouvriers feront donc 9 fois $\frac{20^{m}}{4}$, ou $\frac{20^{m}\times 9}{4}$, ou 45 mètres.

En général : lorsqu'on connaît l'ouvrage exécuté par des

(*) J'ai trouvé ces méthodes en 1800. Je les ai publiées à cette époque, sous le titre d'*Introduction à l'Algèbre*.

ouvriers, pour trouver l'ouvrage qui serait exécuté par d'autres ouvriers de même force, on détermine d'abord ce qui serait fait par un seul ouvrier, en divisant l'ouvrage des premiers ouvriers par leur nombre. Pour en déduire l'ouvrage cherché, il suffit de multiplier l'ouvrage d'un ouvrier par le nombre des nouveaux ouvriers.

2ᵉ MÉTHODE. Tous les ouvriers étant supposés de même force, les quantités d'ouvrage qu'ils exécutent sont nécessairement *proportionnelles* aux nombres des ouvriers ; c'est-à-dire que le nombre 4 des premiers ouvriers, est au nombre 20 de mètres d'ouvrage qu'ils ont exécuté, comme le nombre 9 des seconds ouvriers, est au nombre x de mètres qui sera exécuté par ces 9 ouvriers. Ainsi, l'*inconnue* x sera déterminée par la proportion

$$4 : 20 :: 9 : x; \quad \text{d'où } x = \frac{20 \times 9}{4} = 45.$$

On voit que pour obtenir le nombre x de mètres cherché, les deux méthodes conduisent également à multiplier 20 par 9 et à diviser le produit par 4.

Il en sera de même dans tous les problèmes qui dépendront des proportions; en comparant les deux méthodes et en ne faisant qu'indiquer les opérations, on reconnaîtra que ces deux méthodes ne diffèrent que par la forme des raisonnemens; de sorte qu'*on sera toujours conduit par les deux procédés, à effectuer des calculs absolument identiques sur les nombres donnés, pour en déduire les valeurs des quantités inconnues.*

Nous désignerons par x, le nombre abstrait des unités de la quantité cherchée.

En général, lorsque le nombre des ouvriers employés à un ouvrage devient n fois *plus grand*, la quantité d'ouvrage exécutée devient nécessairement n fois *plus grande*; le quotient du nombre des ouvriers par le nombre des mètres d'ouvrage qu'ils exécuteront, doit donc rester constant; et par conséquent, si un certain nombre d'ouvriers ayant exécuté un cer-

tain nombre de mètres d'ouvrage, on veut en déduire combien tout autre nombre d'ouvriers exécuteraient de mètres du même ouvrage, il suffira d'observer que le rapport des deux premiers nombres devant être égal au rapport des deux autres, on a la proportion

Le premier nombre d'ouvriers,
est au nombre de mètres d'ouvrage qu'ils ont exécutés,
comme le deuxième nombre d'ouvriers,
est au nombre x de mètres d'ouvrage qu'ils exécuteront.

Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le principe du nᵒ 205 (1ᵒ), servira à calculer x.

REMARQUE. Les quantités d'ouvrage exécutées par des ouvriers étant proportionnelles aux nombres des ouvriers, on dit que les ouvrages exécutés par des ouvriers sont dans le *rapport direct* ou en *raison directe* du nombre de ces ouvriers.

2ᵉ PROBLÈME. *Cinq ouvriers ont fait* 728ᵐ,25 *d'ouvrage; combien* 9 *ouvriers en feraient-ils?*

On trouvera, par l'une quelconque des deux méthodes précédentes, que le nombre x de mètres cherché est 1310,85.

Règle de trois inverse.

310. 3ᵉ PROBLÈME. *Trois ouvriers ont fait un ouvrage en* 15 *heures; combien* 5 *ouvriers mettront-ils d'heures à exécuter le même ouvrage?*

1ʳᵉ MÉTHODE. Puisque 3 ouvriers ont mis 15 heures à faire l'ouvrage, un ouvrier mettrait 3 fois plus de temps, c'est-à-dire $15^h \times 3$; les 5 ouvriers mettront 5 fois moins de temps, c'est-à-dire $\frac{15^h \times 3}{5}$, ou 9 heures.

Pour plus de clarté, on dispose ainsi les calculs :

Puisque 3 ouvriers ont fait l'ouvrage en 15 heures,
un ouvrier ferait le même ouvrage en $15^h \times 3$.
Les 5 ouvriers feront donc l'ouvrage en $\frac{15^h \times 3}{5}$, ou en 9 heures.

En général, lorsqu'on connaît le temps employé par des ouvriers pour exécuter un ouvrage, si l'on veut trouver combien il faudrait de temps à d'autres ouvriers de même force pour faire le même ouvrage, on déterminera d'abord le temps qu'un seul ouvrier mettrait à exécuter l'ouvrage, en multipliant le temps que les premiers ouvriers ont mis à faire l'ouvrage, par le nombre de ces ouvriers. Pour en déduire combien les seconds ouvriers mettraient de temps à faire le même ouvrage, il suffira de diviser le temps qu'un seul ouvrier mettrait à faire l'ouvrage, par le nombre des seconds ouvriers.

2e Méthode. Lorsque le nombre des ouvriers employés à exécuter un ouvrage devient n fois *plus petit*, le temps qu'ils mettent à exécuter la même quantité d'ouvrage devient nécessairement n fois *plus grand*; le produit du nombre des ouvriers par le nombre d'heures qui leur sera nécessaire pour exécuter un même ouvrage, doit donc rester constant; et par conséquent, si un certain nombre d'ouvriers ayant mis un certain nombre d'heures à exécuter un ouvrage, on veut en déduire le nombre d'heures que mettraient tout autre nombre d'ouvriers à exécuter le même ouvrage, il suffira d'observer que le produit des deux premiers nombres devant être égal au produit des deux autres, le principe du n° **205** (2°) fournit la proportion,

Le 2e nombre d'ouvriers, est au 1er nombre d'ouvriers, comme le nombre d'heures employées par les premiers ouvriers pour faire l'ouvrage, est au nombre x des heures que les seconds ouvriers mettront à faire le même ouvrage.

Les trois premiers termes de cette proportion étant connus, le principe du n° **205** (1°) servira à calculer x.

Ainsi, dans le 3e problème, le nombre x d'heures demandé sera fourni par la proportion,

$$5 : 3 :: 15 : x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{15 \times 3}{5} = 9.$$

Remarque. Lorsque le nombre des ouvriers employés à

exécuter un ouvrage devient n fois *plus petit*, le temps qu'ils mettront à faire cet ouvrage, devient au contraire n fois *plus grand*. On dit, par ce motif, que le temps employé par des ouvriers pour faire un ouvrage, est dans le *rapport inverse* ou en *raison inverse* du nombre de ces ouvriers.

Or, les deux nombres d'ouvriers sont 3 et 5, les deux nombres d'heures correspondans sont 15 et x; et le 1er rapport étant (par définition) l'inverse du 2e, on voit que pour établir une proportion entre ces deux rapports, il a suffi de renverser d'abord l'ordre des termes du 1er rapport, et d'égaler ensuite ce rapport ainsi renversé au 2e rapport.

311. En général : *Pour établir une proportion entre un rapport direct et le rapport inverse correspondant, il suffit de transposer les termes de l'un de ces rapports, et d'égaler ensuite ce nouveau rapport à l'autre rapport.*

312. 4e Problème. *Les difficultés de deux ouvrages sont comme 5 est à 7; un ouvrier a fait 21 mètres du 1er ouvrage; combien ferait-il de mètres du 2e ouvrage.*

1re Méthode. Si la difficulté du 1er ouvrage au lieu d'être exprimée par 5, était 1, c'est-à-dire 5 fois plus petite, l'ouvrier ferait 5 fois plus d'ouvrage, c'est-à-dire 5 fois 21 mètres, ou $21^m \times 5$; mais la difficulté du 2e ouvrage est représentée par 7, c'est-à-dire qu'elle est 7 fois plus grande que si elle était exprimée par 1; l'ouvrier fera donc 7 fois moins d'ouvrage que si la difficulté était 1; il fera donc $\frac{21^m \times 5}{7}$ du 2e ouvrage, ce qui se réduit à 15 mètres.

On voit donc que les difficultés de deux ouvrages étant comme 5 est à 7, l'ouvrier qui a fait 21 mètres du premier ouvrage, ferait 15 mètres du second ouvrage.

2e Méthode. La quantité d'ouvrage qu'on peut exécuter pendant un temps déterminé, étant d'autant *moindre* que la difficulté de l'ouvrage est *plus grande*, les nombres de mètres du 1er et du 2e ouvrage qui seraient exécutés par un même ouvrier, seront dans le rapport inverse de 5 à 7, c'est-à-dire dans le rapport de 7 à 5 (n° **311**); le nombre x de mètres du 2e ouvrage, qui serait exécuté par l'ouvrier qui a fait 21 mètres du 1[er] ouvrage, sera donc déterminé par la proportion

$$7 : 5 :: 21 : x;\quad \text{d'où}\quad x = \frac{21 \times 5}{7} = 15.$$

5[e] Problème. *Combien doit-on prendre de mètres de toile à $\frac{5}{8}$ pour servir de doublure à 30 mètres de drap à $\frac{6}{8}$?*

1[re] Méthode. Si la toile avait $\frac{6}{8}$ de large, il en faudrait 30 mètres,

si la toile n'avait que $\frac{1}{8}$, il en faudrait 6 fois plus, c'est-à-dire $30^m \times 6$.

La toile ayant $\frac{5}{8}$, il n'en faut que $\frac{30^m \times 6}{5}$, c'est-à-dire 36 mètres.

2[e] Méthode. Il faut d'autant *plus* de mètres de toile qu'elle est *moins* large. Or, les largeurs du drap et de la toile sont dans le rapport de 6 à 5 (n° 199); les nombres de mètres de drap et de toile devant être dans le rapport *inverse* de ces largeurs, seront dans le rapport de 5 à 6; le nombre inconnu x de mètres de toile sera donc déterminé par la proportion

$$5 : 6 :: 30 : x \text{ (n° 311)};\quad \text{d'où}\quad x = \frac{30 \times 6}{5} = 36.$$

La méthode qui a été employée pour résoudre les problèmes des n[os] 309, 310 et 312, se nomme *règle de trois*, parce qu'il n'entre que *trois* nombres donnés dans l'énoncé de la question. Suivant que les deux rapports sont *directs* (n° 309), ou *inverses* (n[os] 310 et 312), on dit que la *règle de trois* est *directe* ou qu'elle est *inverse*.

Règle de trois composée.

313. 6[e] Problème. *Deux ouvriers ont mis 3 heures à faire 7 mètres d'ouvrage; combien 15 ouvriers feront-ils de mètres du même ouvrage pendant 11 heures?*

1[re] Méthode. On obtiendra le nombre x de mètres cherché à l'aide de raisonnemens analogues à ceux du n° 309, en ayant

égard successivement au nombre des ouvriers et au nombre des heures. En effet :

1°. Connaissant l'ouvrage fait par 2 ouvriers, pour en déduire l'ouvrage exécuté dans les mêmes circonstances par les 15 ouvriers, on dira :

Puisque 2 ouvriers ont fait 7 mètres d'ouvrage,
un ouvrier ferait la moitié de 7^m ou $3^m,5$;
les 15 ouvriers feront donc 15 fois $3^m,5$ ou $52^m,5$.
Les 15 ouvriers feront donc $52^m,5$ en 3 heures.

2°. De même, pour déduire de l'ouvrage $52^m,5$ fait en 3 heures, l'ouvrage qui sera fait en 11 heures, tout restant d'ailleurs égal, on dira :

Puisque l'ouvrage fait en 3^h est $52^m,5$,
l'ouvrage fait en 1^h sera le tiers de $52^m,5$ ou $17^m,5$,
l'ouvrage fait en 11^h sera 11 fois $17^m,5$ ou $192^m,5$.
Les 15 ouvriers feront donc $192^m,5$ en 11 heures.

Remarque. On simplifie les calculs en ne faisant qu'indiquer les multiplications et les divisions, parce qu'il arrive souvent que ces opérations se détruisent en partie.

En opérant de cette manière, on trouve que les 15 ouvriers, travaillant pendant 11^h, feront

$$\frac{7^m \times 15 \times 11}{2 \times 3},\ \text{ou}\ \frac{7^m \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 3},\ \text{ou}\ \frac{7^m \times 5 \times 11}{2},\ \text{ou}\ 192^m,5.$$

Cette manière d'opérer s'applique à tous les problèmes que nous allons résoudre. Nous effectuerons successivement les multiplications et les divisions; mais les élèves devront se borner à indiquer d'abord toutes les opérations, afin de profiter ensuite des simplifications qui pourront se présenter.

2[e] Méthode. La quantité d'ouvrage exécutée par des ouvriers de même force étant en *raison directe* du nombre des ouvriers et du temps pendant lequel ils ont travaillé, on pourra résoudre le problème à l'aide de deux règles de trois directes.

1°. On sait que 2 ouvriers travaillant 3^h font 7^m; pour trouver combien 15 ouvriers travaillant 3^h feront de cet ouvrage, on observe que le nombre des heures étant le même, il suffit de résoudre cette question :

2 ouvriers ont fait 7^m, combien 15 ouvriers en feront-ils?

Les quantités d'ouvrages étant proportionnelles aux nombres d'ouvriers, l'ouvrage cherché sera le 4^e terme de la proportion, $2:7::15:x$; d'où $x=52,5$.

Ainsi, les 15 ouvriers travaillant pendant 3 heures feraient $52^m,5$.

2°. Pour trouver combien ces 15 ouvriers feront d'ouvrage en 11 heures, on observe que le nombre des ouvriers ne changeant pas, les ouvrages exécutés sont proportionnels aux nombres des heures de travail. Le nombre x de mètres cherché sera donc déterminé par la proportion

$$3 : 52,5 :: 11 : x;\ \text{d'où}\ x = 192,5.$$

Les 15 ouvriers travaillant pendant 11 heures, feront donc $192^m,5$. Cette 2^e méthode, exigeant l'emploi de plusieurs règles de trois directes, est une *règle de trois composée directe*.

3^e Méthode. *On peut résoudre le problème, à l'aide d'une seule règle de trois simple.* En effet; 2 ouvriers travaillant pendant 3 heures font autant d'ouvrage qu'un ouvrier qui travaillerait seul pendant 2 fois 3^h ou 6 heures; et 15 ouvriers qui travaillent pendant 11 heures, font autant d'ouvrage qu'un ouvrier qui travaillerait seul pendant 15 fois 11^h ou 165 heures. La question est donc réduite à cette autre :

Un ouvrier a mis 6^h à faire 7^m d'ouvrage; combien ferait-il du même ouvrage en 165 heures?

Le nombre x de mètres cherché sera donc le 4^e terme de la proportion $6 : 7 :: 165 : x$; d'où $x = 192,5$.

7^e Problème. *Trente mètres de drap de 1re qualité à $\frac{9}{12}$ de large coûtent 720 francs; trouver le prix de 50 mètres de drap de 2^e qualité à $\frac{8}{12}$; à dimensions égales, le prix d'un mètre de 2^e qualité est les $\frac{15}{16}$ du prix d'un mètre de 1re qualité.*

1re Méthode. 30^m de drap de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, coûtant .... 720^f,
1^m de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, coûte le 30^e de 720^f, ou. 24^f,
50^m de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, coûtent $24^f \times 50$, ou.. 1200^f,
50^m de 1re qualité à $\frac{1}{12}$ coûtent le 9^e de 1200^f, ou $\frac{1200^f}{9}$,
50^m de 1re qualité à $\frac{8}{12}$, coûtent $\frac{1200^f}{9} \times 8$, ou $\frac{9600^f}{9}$.

Les 50^m de drap de 2^e qualité à $\frac{8}{12}$ coûteront donc $\frac{9600^f}{9} \times \frac{15}{16}$ ou 1000^f.

2^e Méthode. Les prix des draps de même qualité étant proportionnels aux nombres des mètres et aux largeurs, on trouvera le prix de 50^m de drap de 1re qualité à $\frac{9}{12}$, en faisant deux règles de trois simples et directes. En effet :

1°. Puisque 30^m de drap de 1re qualité à $\frac{9}{12}$ coûtent 720^f, le prix de 50^m du même drap sera déterminé par la proportion

$$30 : 720 :: 50 : x;\quad \text{d'où}\quad x = 1200.$$

2°. Les 50^m de 1re qualité à $\frac{9}{12}$ coûtant 1200^f, le prix de 50^m de même qualité à $\frac{8}{12}$, sera fourni par la proportion

$$\frac{9}{12} : 1200 :: \frac{8}{12} : x;\quad \text{d'où}\quad x = \frac{1200 \times 8}{9} = \frac{9600}{9}.$$

Ainsi, 50^m de 1re qualité à $\frac{8}{12}$ valent $\frac{9600^f}{9}$. Les 50^m de drap de 2^e qualité à $\frac{8}{12}$ coûteront donc $\frac{9600^f}{9} \times \frac{15}{16}$ ou 1000^f.

314. 8^e Problème. *Un ouvrage a été exécuté en 5 jours par 24 ouvriers qui ont travaillé 7 heures par jour; en combien de jours la même quantité d'ouvrage serait-elle exécutée par 21 ouvriers qui travailleraient 4 heures par jour.*

1re MÉTHODE. Suivant que le nombre des ouvriers ou des heures de travail par jour devient un certain nombre de fois *plus grand,* le nombre de jours nécessaire pour exécuter un même ouvrage, devient, au contraire, le même nombre de fois *plus petit.* Cela posé : puisque pour faire l'ouvrage donné,

24 ouvr. travaillant 7^h par jour ont mis 5^{jours},
un ouvr. travaillant 7^h par jour mettrait 24 fois 5^j, ou $5^j \times 24$,

21 ouvr. travaillant 7^h par jour mettraient $\frac{5^j \times 24}{21}$,

21 ouvr. travaillant 1^h par jour mettraient 7 fois $\frac{5^j \times 24}{21}$, ou $\frac{5^j \times 24 \times 7}{21}$.

Les 21 ouvr. travaillant 4^h par jour mettraient donc $\frac{5^j \times 24 \times 7}{21 \times 4}$, ou 10 jours.

2e MÉTHODE. Le nombre de jours nécessaire pour exécuter un ouvrage étant en *raison inverse* du nombre des ouvriers et du nombre des heures de travail par jour, on obtiendra le nombre de jours demandé, à l'aide de deux règles de trois inverses, en ayant égard successivement au nombre des ouvriers et au nombre des heures ; ce qui conduira au calcul suivant :

$$21 : 24 :: 5 : x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{24 \times 5}{21};$$

$$4 : 7 :: \frac{24 \times 5}{21} : x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{24 \times 5 \times 7}{21 \times 4} = 10.$$

Les 21 ouvriers mettront donc dix jours à faire l'ouvrage.

REMARQUE. La méthode qui a servi à résoudre les problèmes des nos **313** et **314**, est une *règle de trois composée,* parce qu'elle conduit au résultat à l'aide de plusieurs règles de trois simples ; et suivant que ces règles de trois sont *directes* ou *inverses,* la *règle de trois composée* est dite *directe* (n° **313**), ou *inverse* (n° **314**).

315. 9e PROBLÈME. *Deux ouvriers ont fait* 8 *mètres d'ouvrage ; combien* 5 *ouvriers feront-ils de mètres d'un autre ouvrage ? Les difficultés de ces ouvrages sont comme* 3 *est à* 4.

1re MÉTHODE. Puisque 2 ouvriers ont fait 8^m du 1er ouvrage,
un ouvrier ferait 4^m du 1er ouvrage ;
les 5 ouvriers feraient 5 fois 4^m ou 20^m du 1er ouvrage.

Puisque la difficulté du 1er ouvrage étant 3, les 5 ouvriers font 20^m,
si la difficulté était 1, les 5 ouvriers feraient $20^m \times 3$ ou 60^m.
La difficulté du 2e ouvrage étant 4, les 5 ouvriers feront $\frac{60^m}{4}$ ou 15^m.

2e MÉTHODE. Les quantités d'ouvrage exécutées par des ouvriers étant proportionnelles aux nombres des ouvriers, et 2 ouvriers ayant fait 8^m du 1er ouvrage, on trouvera combien 5 ouvriers feraient de cet ouvrage, à l'aide de la proportion,

$$2 : 8 :: 5 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 20.$$

Les 5 ouvriers feraient donc 20^m du 1er ouvrage. Pour trouver combien ces 5 ouvriers feront du 2e ouvrage, on observe que les difficultés des ouvrages étant comme 3 est à 4, les nombres de mètres de ces ouvrages exécutés par les 5 ouvriers seront dans le rapport de 4 à 3 (n° **311**) ; le nombre x de mètres du 2e ouvrage fait par les 5 ouvriers, sera donc déterminé par la proportion $4 : 3 :: 20 : x$; d'où $x = 15$.

La méthode précédente est une *règle de trois composée directe et inverse,* parce qu'on parvient au résultat à l'aide de deux règles de trois, l'une *directe,* l'autre *inverse.*

§ II. *Règle de compagnie ou de société.*

316. Cette règle est ainsi nommée parce qu'elle sert à partager entre plusieurs associés le bénéfice qui résulte de leur société. Le bénéfice de chaque associé est proportionnel au gain total, à sa mise, et au temps pendant lequel cette mise est restée dans la société.

10e PROBLÈME. *Les mises de trois associés sont* 300^f, 500^f *et* 700^f ; *le gain total est* 126^f. *Trouver le gain de chaque associé.*

1re MÉTHODE. La somme des mises étant 1500^f, on dira :

Puisque la mise 1500^f procure le gain 126^f,
la mise 1^f donne le gain $\frac{126^f}{1500}$ ou $0^f,084$.

Les gains relatifs aux mises 300^f, 500^f et 700^f sont donc les produits de $0^f,084$ par les nombres 300, 500 et 700 ; c'est-à-dire $25^f,2$, 42^f et $58^f,8$; leur somme est effectivement égale au gain total 126 francs.

2^e MÉTHODE. La mise totale est 1500 francs, et le gain total est 126 francs. Or, *les gains doivent être proportionnels aux mises,* 300^f, 500^f, 700^f. Les gains demandés dépendent donc des proportions

$$1500 : 126 :: 300 : x, \quad 1500 : 126 :: 500 : x, \quad 1500 : 126 :: 700 : x.$$

On trouve de cette manière que les gains cherchés sont 25^f,2, 42^f et 58^f,8.

11^e PROBLÈME. *Les mises de trois associés sont* 100^f, 250^f *et* 50^f; *la première mise est restée* 3 *mois dans la société, la seconde* 2 *mois, et la troisième* 14 *mois; le gain total est* 126^f. *On propose de calculer le gain relatif à chaque mise.*

Le gain de chaque associé dépend de sa mise et du temps qu'elle est restée dans la société. Si toutes les mises étaient restées le même temps dans la société, les méthodes employées dans le problème précédent, détermineraient les gains demandés. Nous allons donc chercher quelles seraient les mises qui, restant un même temps dans la société, procureraient les mêmes gains que les mises proposées.

Or, 100^f placés pendant 3 mois rapportent autant que 3 fois 100^f ou 300^f en un mois; 250^f placés pendant 2 mois, et 50^f placés pendant 14 mois, rapportent autant que 2 fois 250^f ou 500^f, et 14 fois 50^f ou 700^f, pendant un mois. Les gains sont donc les mêmes que dans le 10^e problème.

12^e PROBLÈME. *Trois négocians se sont réunis en société pendant* 3 *ans; le premier a mis d'abord* 12000^f, *et* 15 *mois plus tard il a mis* 4500^f; *le second, qui d'abord avait mis* 18000^f, *a retiré* 7 *mois après* 7600^f; *enfin le troisième a mis* 9650^f *qui sont restés pendant les* 3 *ans; le gain total a été de* 39045^f. *Calculer le bénéfice qui revient à chaque associé.*

Le premier négociant a mis d'abord 12000^f qui sont restés 3 ans ou 36 mois dans la société, et ensuite 4500^f qui n'y sont restés que pendant 36 — 15 ou 21 mois. Ces deux mises procurent autant de bénéfice que 36 fois 12000^f ou 432000^f et 21 fois 4500^f ou 94500^f, pendant un mois. De sorte que le bénéfice du premier négociant est le même que s'il eût mis 432000^f + 94500^f ou 526500 francs, pendant un mois.

On verra d'une manière semblable, que les gains des deux autres associés sont les mêmes que s'ils eussent mis 427600^f et 347400^f pendant un mois.

Les gains cherchés sont donc les mêmes que s'il s'agissait de *partager le bénéfice* 39045^f *entre trois associés dont les mises seraient* 526500^f, 427600^f *et* 347400 *francs.*

On trouvera que les gains demandés sont 15795^f, 12828^f et 10422 francs.

§ III. *Partages proportionnels.*

317. 13^e PROBLÈME. *Partager* 7800 *en trois parties qui satisfassent aux conditions*

$$1^{re}\ part : 2^e :: 3120 : 4680, \quad 1^{re}\ part : 3^e :: 3250 : 4550.$$

Pour simplifier ces proportions on divise d'abord 3120 et 4680 par leur plus grand commun diviseur 1560; on divise ensuite 3250 et 4550 par leur plus grand commun diviseur 650; ce qui fournit les proportions équivalentes,

$$1^{re}\ part : 2^e :: 2 : 3, \quad 1^{re}\ part : 3^e :: 5 : 7.$$

On déduit de ces deux dernières proportions, que si la 1re part était 1, la 2^e serait $\frac{3}{2}$ et la 3^e serait $\frac{7}{5}$. Les parts demandées doivent donc être proportionnelles aux nombres,

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \text{ ou aux fractions équivalentes } \frac{10}{10}, \frac{15}{10}, \frac{14}{10},$$

ou aux nombres 10, 15, 14 (n° 199).

La somme des nombres 10, 15, 14, étant 39, on voit que si le nombre à partager était 39, les trois parts seraient 10, 15 et 14. Or, le nombre à partager est 7800; les parts demandées seront donc déterminées par les proportions

$$39 : 7800 :: 10 : 1^{re}\ part, \quad 39 : 7800 :: 15 : 2^e\ part, \quad 39 : 7800 :: 14 : 3^e\ part.$$

Pour simplifier ces proportions, on divise les deux termes du 1^{er} rapport de chacune d'elles par leur plus grand commun diviseur 39, ce qui fournit les proportions équivalentes

$$1:200::10:1^{re}\,part,\quad 1:200::15:2^{e}\,part,\quad 1:200::14:3^{e}\,part.$$

On en déduit que les parts demandées sont 2000, 3000 et 2800. Ces parts satisfont aux conditions énoncées; car leur somme est le nombre 7800 à partager, et on a

$$2000:3000::3120:4680,\quad 2000:2800::3250:4550.$$

14ᵉ Problème. *Un homme laisse en mourant* 7800^f *à sa femme enceinte, à condition que si elle a un fils, elle prendra* 3120^f *et le fils le reste* 4680^f*; et que si elle a une fille, la mère prendra* 3250^f *et la fille le reste* 4550^f. *Cette femme accouche d'un fils et d'une fille. Il s'agit de satisfaire aux volontés du testateur.*

Si l'on considère la part de la mère comme la 1^{re}, celle du fils comme la 2^e, et celle de la fille comme la 3^e, les volontés du testateur reviendront à partager l'héritage 7800^f en trois parts qui satisfassent aux conditions

$$1^{re}\,part : 2^e :: 3120 : 4680,\quad 1^{re}\,part : 3^e :: 3250 : 4550.$$

Il résulte du 13ᵉ problème que les parts demandées sont 2000^f, 3000^f et 2800^f. Ainsi, sur les 7800^f, la mère prendra 2000^f, le fils 3000^f, et la fille prendra le reste 2800 francs.

§ IV. *Problèmes sur les intérêts simples.*

318. L'*intérêt* est le bénéfice que fait sur son argent celui qui le prête; la somme prêtée se nomme *capital*. Pour mettre de l'uniformité dans la manière de déterminer l'intérêt de l'argent, on convient ordinairement du bénéfice que procure le capital 100 francs placé pendant un an; ce bénéfice, considéré comme un nombre abstrait, est ce qu'on nomme le *taux* de l'intérêt, ou le *taux* de l'argent. Le quotient de 100 par le *taux* de l'argent s'appelle *denier*. Ainsi, lorsque 100 francs rapportent 5 francs d'intérêt par an, on dit que le *taux* de

l'argent est à 5 pour 100 par an, ou simplement que l'argent est à 5 pour 100, ou au *denier* 20.

On distingue deux sortes d'intérêt : le *simple* et le *composé*.

L'*intérêt* est *simple*, quand le capital reste le même pendant toute la durée du prêt. Dans ce cas, *l'intérêt est proportionnel au capital, au temps pendant lequel ce capital reste placé, et au taux de l'argent.*

Par exemple, lorsque l'argent est à 5 pour 100, l'intérêt d'un franc est le centième de 5^f ou $0^f,05$; l'intérêt de $427^f,6$ est 427,6 fois $0^f,05$ ou $21^f,38$; l'intérêt de 100^f pendant un mois est $\frac{5^f}{12}$; l'intérêt de 100 francs pendant 3 ans 7 mois ou 43 mois est 43 fois $\frac{5^f}{12}$; et ainsi de suite.

Nous donnerons la définition de *l'intérêt composé* dans le nº **333**. *Nous n'aurons égard qu'aux intérêts simples dans les questions des nºˢ* **319**, ..., **332**.

319. 15ᵉ Problème. *Calculer l'intérêt x francs pendant un an, de 480000 francs placés à 6 pour 100.*

1ʳᵉ Méthode. L'intérêt de 100^f étant 6^f, l'intérêt de 1^f est le $100^{ième}$ de 6^f ou $0^f,06$; l'intérêt des 480000^f est donc 480000 fois $0^f,06$, ou $0,06 \times 480000$ francs, ou $480000^f \times 0,6$, ou 28800 francs.

En général : *pour obtenir l'intérêt d'un capital, pendant un an, il suffit de multiplier ce capital par le quotient décimal qu'on trouve en divisant le taux de l'argent par 100.*

2ᵉ Méthode. L'intérêt de 100^f est 6^f, et on sait que l'intérêt est proportionnel au capital; l'intérêt x francs des 480000^f, sera donc déterminé par la proportion

$$100:6::480000:x;\quad \text{d'où}\quad x = 480000 \times 0,06 = 28800.$$

320. 16ᵉ Problème. *Calculer combien le capital 480000 fr. vaudra au bout d'un an, l'argent étant à 6 pour 100.*

1ʳᵉ Méthode. On cherche d'abord combien le capital 1^f vaudra dans un an; à cet effet, on observe que l'intérêt de 1^f étant $0^f,06$, le capital 1^f vaudra dans un an, $1^f + 0^f,06$ ou $1^f,06$; les

480000^f vaudront donc dans un an, $1^f{,}06 \times 480000$, ou $480000^f \times 1{,}06$, ou 508800^f.

En général, *pour trouver directement combien un capital vaut au bout d'un an, on ajoute le taux de l'argent à* 100, *on divise la somme par* 100, *et on multiplie le capital par le quotient de cette division; le produit exprime la valeur cherchée du capital au bout d'un an.*

2^e Méthode. L'intérêt de 100^f par an étant 6^f, le capital 100^f vaudra 106^f dans un an. La valeur x francs des 480000^f au bout d'un an sera donc déterminée par la proportion

$$100 : 106 :: 480000 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 480000 \times 1{,}06 = 508800.$$

321. 17^e Problème. *Calculer l'intérêt de 480000^f placés à* 6 *pour* 100 *par an, pendant* 3 *ans* 7 *mois.*

1re Méthode. L'intérêt de 1^f par an étant $0^f{,}06$,

L'intérêt de 1^f pendant $3^{ans}\ 7^{mois}$ ou $\frac{43^{ans}}{12}$ est $0^f{,}06 \times \frac{43}{12}$ ou $0^f{,}215$.

L'intérêt des 480000^f pendant $3^{ans}\ 7^{mois}$ est donc $0^f{,}215 \times 480000$ ou 103200^f.

En général : *Pour calculer l'intérêt simple d'un capital pendant un temps donné, on cherche d'abord l'intérêt de 1^f pendant ce temps; et en multipliant ce dernier intérêt par le nombre des francs du capital proposé, le produit exprime l'intérêt demandé.*

2^e Méthode. L'intérêt de 100^f pendant 12 mois étant 6^f, on trouvera l'intérêt de 100^f pendant 43 mois, en faisant la proportion $\quad 12 : 6 :: 43 : x; \quad$ d'où $\quad x = 21{,}5.$

L'intérêt de 100^f pendant 43 mois étant $21^f{,}5$, l'intérêt des 480000^f pendant ce temps sera déterminé par la proportion

$$100 : 21{,}5 :: 480000 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 103200.$$

322. 18^e Problème. *Calculer combien 480000^f placés à* 6 *pour* 100 *par an, vaudront dans* 3 *ans* 7 *mois.*

1re Méthode. On cherche d'abord combien le capital 1^f vaudra dans 3 ans 7 mois ou 43 mois; à cet effet, on observe que

L'intérêt de 1^f par an étant $0^f{,}06$,

l'intérêt de 1^f par mois est le 12^e de $0^f{,}06$ ou $0^f{,}005$.

L'intérêt de 1^f pendant 43 mois est donc $0^f{,}005 \times 43$ ou $0^f{,}215$.

Le capital 1^f vaudra donc $1^f + 0^f{,}215$ ou $1^f{,}215$ dans 43 mois.

Les 480000^f vaudront dans 43 mois, $1^f{,}215 \times 480000$, ou $480000^f \times 1{,}215$, ou 583200 francs.

En général, *pour trouver combien un capital placé à intérêt simple vaudra au bout d'un certain temps, on multiplie le capital par le nombre abstrait qui exprime combien 1^f vaut de francs au bout de ce temps; le produit exprime le résultat demandé.*

2^e Méthode. On obtiendra l'intérêt de 100^f pendant 43 mois, en faisant la proportion $12 : 6 :: 43 : x$; d'où $x = 21{,}5$.

Ainsi, 100^f comptant vaudront dans 43 mois, $100^f + 21^f{,}5$ ou $121^f{,}5$. La valeur des 480000^f au bout du même temps, sera donc déterminée par la proportion

$$100 : 121{,}5 :: 480000 : x; \quad \text{d'où} \ x = 583200.$$

323. 19^e Problème. *Calculer combien* 583200 *francs payables dans* 43 *mois valent en argent comptant. L'argent est à* 6 *pour* 100 *par an.*

On cherche d'abord combien 1^f vaut dans 43 mois; on a trouvé (page 282) que 1^f vaut $1^f{,}215$ au bout de 43 mois. Les 583200^f exprimant le produit du capital cherché par 1,215, si l'on divise 583200^f par 1,215, le quotient 480000^f sera le capital demandé.

324. En général, pour *trouver combien une somme payable après un temps donné, vaut en argent comptant,* on observe que la valeur d'un capital au bout d'un temps donné étant égale au produit du capital par le nombre abstrait qui exprime combien le capital 1^f vaut de francs au bout du temps donné (n° **322**), *si l'on divise une somme payable au bout d'un certain temps, par le nombre abstrait qui exprime combien le capital 1^f vaut de francs au bout de ce temps, le quotient sera la valeur demandée du capital primitif.*

* **325.** 20^e Problème. *Trouver dans combien d'années le capital* 480000 *fr., placé à* 6 *pour* 100, *vaudra* 583200 *francs.*

La différence entre 480000^f et 583200^f étant 103200^f, il s'agit de chercher pendant combien de temps les 480000^f doivent être placés, pour rapporter 103200^f d'intérêt. Or, l'intérêt de

480000^f pendant un an est 480000$^f \times 0{,}06$ (n° 319) ou 28800^f; cet intérêt multiplié par le nombre x des années cherché doit donc être 103200^f. On obtiendra donc x en divisant 103200 par 28800. Le temps cherché est donc égal au quotient de 103200 ans par 28800, qui est 3 ans 7 mois, ou 43 mois.

21^e Problème. *Le capital 480000 francs, augmenté de ses intérêts simples pendant 43 mois, vaut 583200 francs après ce temps. On demande à quel taux x ce capital a été placé.*

L'intérêt de 480000^f pendant 43 mois est égal à la différence 103200^f entre 480000^f et 583200^f. Pour en déduire le *taux* de l'argent, il suffit de déterminer l'intérêt annuel de 100^f.

1re Méthode. L'intérêt de 480000^f pendant 43 mois étant 103200^f,
l'intérêt de 480000^f pendant un mois est $\frac{103200^f}{43}$ ou 2400^f,
l'intérêt de 480000^f pendant un an est 12 fois 2400^f ou 28800^f,
l'intérêt d'un franc pendant un an est $\frac{28800^f}{480000}$, ou $0^f{,}06$.
L'intérêt de 100^f pendant un an est donc $0^f{,}06 \times 100$ ou 6^f.

L'argent était donc placé à 6 pour 100.

2^e Méthode. L'intérêt de 480000^f pendant 43 mois étant 103200^f, on obtiendra l'intérêt de 480000^f pendant 12 mois, en faisant la proportion

$$43 : 103200 :: 12 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 28800.$$

L'intérêt de 480000^f pendant un an étant 28800^f, l'intérêt de 100^f pendant un an sera déterminé par la proportion

$$480000 : 28800 :: 100 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 6.$$

Problèmes sur les fonds publics, français et étrangers.

* 326. 22^e Problème. *Un banquier achète du 5 pour 100 au cours de 108,75; à quel taux place-t-il son argent?* 108,75

Lorsqu'on dit que le 5 pour 100 est au cours de 108,675, on entend que pour 108^f,75 on peut acheter un titre de 100 francs de capital qui procure 5 francs d'intérêt par an. Le taux cherché

est donc tel que 108^f,75 rapportent 5^f d'intérêt par an; il s'agit d'en déduire l'intérêt de 100^f par an.

1re Méthode. L'intérêt de 108^f,75 par an étant 5^f,
l'intérêt annuel de 1^f est $\frac{5^f}{108{,}75}$,
et l'intérêt annuel de 100^f est $\frac{5^f \times 100}{108{,}75}$.
Le *taux* cherché est donc $\frac{5 \times 100}{108{,}75}$, ou 4,597 etc.

2^e Méthode. L'intérêt annuel de 108^f,75 étant 5^f, on obtiendra l'intérêt annuel de 100^f, en faisant la proportion

$$108{,}75 : 5 :: 100 : x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5 \times 100}{108{,}75} = 4{,}597 \text{ etc.}$$

On trouvera donc à quel taux le banquier a placé son argent, en multipliant 5 par 100, et en divisant le produit 500 par le cours 108,75 du 5 pour 100.

* 327. En général : *Pour trouver le taux de l'argent, quand on connaît le cours du 5 pour 100, il suffit de multiplier 5 par 100, et de diviser le produit 500 par le cours de la rente; le quotient exprime le taux demandé.*

On verra de même, que *pour trouver le taux de l'argent, quand on connaît le cours du 3 pour 100, ou du 4 pour 100, etc., il suffit de multiplier 3 ou 4 ou etc., par 100 et de diviser le produit par le cours de la rente; le quotient exprime le taux cherché.*

* 328. 23^e Problème. *Le 5 pour 100 est à 108,60, et le 3 pour 100 est à 82,25. On demande à quel taux on place de l'argent, en achetant du 5 et du 3 pour 100 à ces cours.*

Si l'on applique la règle précédente, on trouvera que le taux du 5 pour 100 est 4,64 etc., et que celui du 3 pour 100 est 3,64 etc.

* 24^e Problème. *Le cours du 5 pour 100 étant 108,75, combien faudra-t-il débourser pour obtenir un titre de 1200^f de rente?*

1re Méthode. Puisque pour acheter 5^{f} de revenu, il faut donner $108^{f},75$, pour obtenir 1^{f} de revenu, il faut donner le 5e de $108^{f},75$ ou $21^{f},75$.
Pour avoir 1200^{f} de revenu, il faut donc donner 1200 fois $21^{f},75$, ou 26100^{f}.

2e Méthode. Puisque 5^{f} de revenu coûtent $108^{f},75$, le prix x francs de 1200^{f} de revenu sera déterminé par la proportion

$$5 : 108,75 :: 1200 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 26100.$$

*329. 25e Problème. *Les rentes de Naples se comptent par ducats, à raison de 5 pour* 100. *Quand la rente est* au pair, 5 *ducats de rente valent* 100 *ducats de capital. On demande la valeur, en francs, d'une rente de* 75 *ducats, au cours de* 90,85, *le ducat étant* coté *au prix de* $4^{f},2$; (*le ducat au pair, vaut* $4^{f},4$).

1re Méthode. Puisque 5 ducats de rente valent $90^{ducats},85$,
un ducat de rente vaut le 5e de $90^{duc},85$ ou $18^{duc},17$,
une rente de 75^{duc} vaut 75 fois $18^{duc},17$ ou $1362^{duc},75$.
Le ducat étant *coté* à $4^{f},2$, les $1362^{duc},75$ valent 1362,75 fois $4^{f},2$, ou $5723^{f},55$.

Une rente de 75 ducats vaut donc $5723^{f},55$.

Si l'on veut *trouver à quel* taux *l'argent est placé en achetant cette rente*, on dira :

Puisque le capital $90^{duc},85$ rapporte 5 ducats par an,
le capital 1 ducat rapporte donc $\dfrac{5^{duc}}{90,85}$.
Le capital 100 ducats rapporte $\dfrac{500^{duc}}{90,85}$, ou $5^{duc},50$ etc.

L'argent est donc ainsi placé à environ 5,5 pour 100.

2e Méthode. Puisque 5 ducats de rente valent $90^{duc},85$, on obtiendra la valeur x ducats de 75 ducats de rente en faisant la proportion $5 : 90,85 :: 75 : x$; d'où $x = 1362,75$.

Ainsi, 75 ducats de rente valent $1362^{duc},75$. Le ducat étant coté à $4^{f},2$, les $1362^{duc},75$, valent $4^{f},2 \times 1362,75$ ou $5723^{f},55$.

Pour déterminer le taux de l'argent, on observe que $90^{duc},85$ rapportant 5^{duc} de rente, on trouvera combien 100 ducats rapportent par an, à l'aide de la proportion

$$90,85 : 5 :: 100 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 5,50 \text{ etc.}$$

* 26e Problème. *L'emprunt royal d'Espagne est par obligations de* 200 *piastres qui rapportent* 5 *pour* 100 *d'intérêt. La piastre au pair vaut* $5^{f},40$. *Il faut trouver la valeur, en francs, d'une rente de* 6000 *piastres, le cours de l'emprunt étant de* 50,25, *et la piastre étant cotée* $5^{f},30$.

Une rente de 5 piastres valant $50^{piastres},25$, on trouvera que 6000 piastres de rente valent 60300 piastres. Or, la piastre vaut $5^{f},30$; les 60 300 piastres valent donc 60300 fois $5^{f},30$, ou 319590 francs. Une rente de 6000 piastres au cours indiqué, vaut donc 319590 francs.

On trouvera, comme dans le problème précédent, qu'*en achetant cette rente, l'argent est placé à environ* 9,95 *pour* 100.

Règle d'escompte.

330. *L'escompte* est la retenue qui doit être faite sur la valeur d'un billet payable après un certain temps, lorsqu'on veut toucher ce billet avant son échéance.

On distingue deux sortes d'escompte, savoir :

1°. *L'escompte en dedans*, qui est égal à la différence entre la somme énoncée dans le billet, et la valeur que prend cette somme quand on l'évalue en argent comptant, en ne prenant que les *intérêts simples*.

Ainsi, *pour trouver l'escompte en dedans, à* 6 *pour* 100 *par an, d'un billet de* 583200^{f} *payable dans* 43 *mois*, il suffit de chercher combien 583200^{f} payables dans 43 mois valent comptant, l'argent étant à 6 pour 100 par an; on trouve que cette valeur est 480000^{f} (no 323) : la différence 103200^{f} entre 583200^{f} et 480000^{f}, exprime l'escompte demandé.

2°. *L'escompte en dehors*, qui se paie à tant pour cent sur la somme énoncée dans le billet, c'est-à-dire sur le capital augmenté de ses intérêts. De sorte que la retenue ou l'escompte en dehors, se compose de l'intérêt du capital primitif, plus de l'intérêt de l'intérêt de ce capital. *On peut donc considérer l'escompte en dehors comme l'intérêt simple au taux indiqué, de la somme énoncée dans le billet.* On obtiendra donc cet escompte, par les méthodes des nos 319 et 321.

Par exemple, pour *trouver l'escompte en dehors, à 6 pour 100 par an, d'un billet de 480000 francs payable dans 43 mois,* il suffit de calculer l'intérêt simple de 480000^{f} placés à 6 pour 100 pendant 43 mois ; cet intérêt, qui exprime l'escompte demandé, est 103200 francs.

La plupart des nations étrangères prennent l'*escompte en dedans*. Mais, comme on a l'usage en France de prendre l'*escompte en dehors*, nous ne considérerons désormais que ce dernier escompte. De sorte que l'*escompte à tant pour* 100 *se prendra toujours sur la somme énoncée dans le billet.*

331. 27^{e} Problème. *Combien doit-on payer d'escompte à* 6 *pour* 100 *par an, pour toucher sur-le-champ un billet de* 2850^{f},45 *payable dans* 40 *mois?*

1re Méthode. L'escompte de 100^{f} par an étant 6^{f},
l'escompte de 100^{f} par mois est le 12^{e} de 6^{f} ou 0^{f},5 ;
l'escompte de 100^{f} pour 40 mois est 0^{f},5 × 40 ou 20^{f},
l'escompte de 1^{f} pour 40 mois est le 100^{e} de 20^{f} ou 0^{f},2.
L'escompte des 2850^{f},45 sera donc 2850,45 fois 0^{f},2 ou 570^{f},09.

Si l'on diminue la valeur du billet de cet escompte, le reste 2280^{f},36 exprimera ce qu'on touchera en argent comptant.

2^{e} Méthode. L'escompte d'une somme pour un certain temps, étant proportionnel à la valeur de cette somme et au temps pendant lequel on en tire l'escompte, on peut dire : puisque l'escompte de 100^{f} par an est 6^{f}, l'escompte des 2850^{f},45 pour un an sera donné par la proportion

$$100 : 6 :: 2850{,}45 : x;\quad \text{d'où } x = 28{,}5045 \times 6.$$

Connaissant l'escompte des 2850^{f},45 pour un an ou 12 mois, on en déduira l'escompte de la même somme pour 40 mois, en posant la proportion

$$12 : 28{,}5045 \times 6 :: 40 : x;\quad \text{d'où } x = 570{,}09.$$

***332.** 28^{e} Problème. *Un billet de* 2850^{f},45 *payable dans* 40 *mois, a été escompté pour* 2280^{f},36 *argent comptant ; trouver le taux de l'escompte*. La différence entre 2850^{f},45 et 2280^{f},36 étant 570^{f},09, on voit que

l'escompte de 2850^{f},45 est 570^{f},09 ;
l'escompte de 1^{f} est donc $\frac{570^{f},09}{2850,45}$, ou $\frac{1^{f}}{5}$;
l'escompte de 100^{f} est donc $\frac{100^{f}}{5}$, ou 20^{f}.

Ainsi, l'escompte de 100^{f} est, en 40 mois de 20^{f}, en un mois de $\frac{20^{f}}{40}$ ou $\frac{1^{f}}{2}$, et en 12 mois de $\frac{12^{f}}{2}$ ou de 6^{f}. Le billet a donc été escompté à raison de 6 pour 100 par an.

* 29^{e} Problème. *Un billet de* 2850^{f},45 *ayant été escompté à* 6 *pour* 100 *par an, on a reçu* 2280^{f},36 *comptant ; à quelle époque le billet était-il payable?*

L'escompte du billet a été de 2850^{f},45 — 2280^{f},36, ou de 570^{f},09.

Or, l'escompte de 1^{f} par an étant 0^{f},06,
l'escompte des 2850^{f},45 par an est 0^{f},06 × 2850,45 ou 171^{f},027.
Puisque l'escompte 171^{f},027 correspond à 12 mois,
l'escompte 1^{f} correspond à $\frac{12 \text{ mois}}{171,027}$,
l'escompte 570^{f},09 répond à $\frac{12 \text{ mois}}{171,027} \times 570,09$, ou à 40 mois.

Le billet a donc été payé 40 mois avant son échéance.

§ V. *Problèmes sur les intérêts composés.*

333. On dit que l'*intérêt est composé*, ou qu'on prend les *intérêts des intérêts*, lorsqu'à la fin de chaque année l'intérêt s'ajoute au capital pour porter intérêt pendant l'année suivante.

Par exemple, si l'on place 20000^{f} à *intérêt composé*, à 5 pour 100 par an, comme l'intérêt de 1^{f} par an est 0^{f},05, l'intérêt des 20000^{f} pendant la 1re année est 20000 fois 0^{f},05 ou 1000^{f}; les 20000^{f} placés au commencement de la 1re année valent donc 20000^{f} + 1000^{f} ou 21000^{f} à la fin de cette année. Ces 21000^{f} placés au commencement de la 2^{e} année, rapportent pendant cette année 21000 fois 0^{f},05 ou 1050^{f}; le capital primitif 20000^{f} vaut donc à la fin de la 2^{e} année, 21000^{f} + 1050^{f} ou 22050^{f} ; et ainsi de suite.

Nous supposerons, dans les problèmes des nos **334**, ..., **339**, que l'intérêt de la somme placée au commencement de chaque année se joint au capital pour porter intérêt pendant l'année suivante. Lorsque le temps pendant lequel le capital reste placé sera composé d'un nombre entier d'années, et d'un nombre de mois moindre que 12, on prendra d'abord les intérêts composés d'année en année pendant ce nombre entier d'années; et ensuite, le nouveau capital qui en résultera sera placé à intérêt simple pendant le nombre de mois énoncé.

334. 30e Problème. *Calculer combien le capital 480000 francs, placé à intérêt composé à 6 pour 100 par an, vaudra dans trois ans.*

1re Méthode. D'après la règle du no **320**, les 480000^f, placés au commencement de la 1re année, vaudront à la fin de cette année $480000^f \times 1,06$. Par une raison semblable, la somme $480000^f \times 1,06$, placée au comencement de la 2e année, vaudra à la fin de cette année, $480000^f \times 1,06$ multiplié par $1,06$, ou $480000^f \times 1,06^2$. Enfin, cette dernière somme, que l'on place au commencement de la 3e année, vaudra à la fin de cette année, $480000^f \times 1,06^2$ multiplié par $1,06$, ou $480000^f \times 1,06^3$, ou $480000^f \times 1,191016$, ou $571687^f,68$.

On voit que pour trouver combien une somme, placée à intérêt composé, à 6 pour 100 par an, vaut après un certain nombre entier d'années, il suffit de multiplier cette somme par une puissance de 1,06 marquée par le nombre des années.

En général, *pour trouver combien un capital vaudra au bout d'un nombre entier d'années, en ayant égard aux intérêts des intérêts d'année en année, on ajoute le taux de l'argent à 100, on divise la somme par 100; le quotient est un nombre décimal abstrait qui exprime combien le capital 1^f vaut de francs à la fin de la 1re année; on multiplie le capital par une puissance de ce quotient marquée par le nombre entier des années pendant lequel le capital a été placé; le produit exprime la valeur cherchée du capital proposé au bout du temps donné.*

2e Méthode. L'intérêt annuel de 100^f étant 6^f, on voit que

100^f payables au commencement d'une année, valent 106^f à la fin de cette année. On trouvera donc combien le capital 480000^f, placé au commencement de la 1re année, vaudra à la fin de cette année, en posant la proportion

$$100 : 106 :: 480000 : x; \quad \text{d'où } x = 508800.$$

Pour déterminer combien les 508800^f placés au commencement de la 2e année, vaudront à la fin de cette année, on posera $100 : 106 :: 508800 : x$; d'où $x = 539328$.

Enfin, on trouve combien les 539328^f placés au commencement de la 3e année, vaudront à la fin de cette année, en posant $100 : 106 :: 539328 : x$; d'où $x = 571687,68$.

3e Méthode. Si l'on désigne par x francs la valeur de 480000^f au bout de trois ans, on aura

$$x = 480000 \times 1,06^3; \quad \text{d'où } lx = l480000 + 3l1,06 = 5,75717.$$

En cherchant à quel nombre correspond le logarithme 5,75717, on trouvera $x = 571700$. Or, la valeur exacte de x est 571687,68. L'erreur, due à l'emploi des logarithmes, est donc de $12^f,32$.

Remarque. On voit que l'*intérêt composé* de 480000 francs pendant 3 ans est $571687^f,68 - 480000^f$ ou $91687^f,68$. L'intérêt simple ne serait que de 86400 francs (no **321**).

335. 31e Problème. *Calculer combien le capital 480000 fr., placé à intérêt composé, à 6 pour 100 par an, vaudra dans 3 ans 7 mois.*

1re Méthode. On cherche d'abord combien le capital 1^f vaudra au bout des 3 ans 7 mois. Or, 1^f vaut au bout de 3 ans, $1^f \times 1,06^3$ (no **334**). Pour trouver combien cette dernière somme vaudra 7 mois plus tard, lorsqu'elle aura été augmentée de ses intérêts simples pendant 7 mois, on observe que

L'intérêt de 1^f par an étant $0^f,06$,
L'intérêt de 1^f par mois est le 12e de $0^f,06$, ou $0^f,005$,
L'intérêt de 1^f pendant 7 mois est $0^f,005 \times 7$, ou $0^f,035$.
Le capital 1^f vaudra donc au bout de 7 mois, $1^f + 0^f,035$, ou $1^f,035$, ou $1^f \times 1,035$.

Par conséquent, pour trouver combien une somme payable à une certaine époque, vaudra 7 mois plus tard, il suffit de multiplier cette somme par 1,035.

Le capital 1^f, qui valait $1^f \times 1{,}06^3$ au bout de 3 ans, vaudra donc au bout de 3 ans 7 mois, $1^f \times 1{,}06^3 \times 1{,}035$, ou $1{,}06^3 \times 1{,}035$ francs. Le capital 480000 francs vaudra donc dans 3 ans 7 mois, 480000 fois $1{,}06^3 \times 1{,}035$ francs, ou $480000^f \times 1{,}06^3 \times 1{,}035$, ou $591696^f{,}7488$.

Ainsi, pour trouver combien le capital 480000^f placé à intérêt composé, vaudra dans 3 ans 7 mois, il suffit de déterminer d'abord la valeur d'un franc au bout de ce temps, qui est $1{,}06^3 \times 1{,}035$ francs; et de multiplier ensuite le capital 480000^f par le nombre abstrait $1{,}06^3 \times 1{,}035$ qui exprime combien le capital 1^f vaudra de francs dans 3 ans 7 mois.

2^e Méthode. On trouvera d'abord, par la 1re ou la 2^e méthode du n° **334**, que les 480000^f comptant vaudront $571687^f{,}68$ à la fin de la 3^e année. Il suffit donc d'augmenter cette dernière somme de son intérêt simple pendant 7 mois; ce qui revient à chercher combien $571687^f{,}68$ payables à une époque, vaudront 7 mois plus tard.

Or, l'intérêt de 100^f en 12 mois est 6^f; on obtiendra donc l'intérêt de 100^f en 7 mois, en posant la proportion

$$12 : 6 :: 7 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 3{,}5.$$

Ainsi, 100^f comptant vaudront $103^f{,}5$ dans 7 mois.

On trouvera donc combien les $571687^f{,}68$ vaudront dans 7 mois, à l'aide de la proportion

$$100 : 103{,}5 :: 571687{,}68 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 591696{,}7488.$$

3^e Méthode. Si l'on désigne par x francs la valeur de 480000^f au bout de 3 ans 7 mois, la 1re méthode donnera

$$x = 480000 \times 1{,}06^3 \times 1{,}035; \text{ d'où}$$
$$lx = l480000 + 3l1{,}06 + l1{,}035 = 5{,}77211, \; x = 591714{,}2857.$$

Or, la valeur exacte de x est 591696,7488. L'erreur, en plus, due à l'emploi des logarithmes, est donc la différence $17^f{,}5369$ entre $591714^f{,}2857$ et $591696^f{,}7488$.

336. En général : 1°. Pour *trouver combien le capital* 1^f,

placé à intérêt composé, vaudra au bout d'un temps composé d'années et de mois, on détermine d'abord la valeur d'un franc au bout du nombre entier des années contenues dans le temps donné (n° **334**); on multiplie ensuite cette valeur de 1^f par le nombre abstrait qui exprime combien le capital 1^f vaut de francs au bout du nombre des mois contenus dans le temps donné (n° **322**), le produit exprime la valeur demandée du capital 1^f au bout du temps donné.

2°. Pour *trouver combien un capital, placé à intérêt composé pendant un certain nombre d'années et de mois, vaudra au bout de ce temps*, il suffit de chercher la valeur d'un franc au bout du temps donné, et de multiplier le capital par le nombre abstrait qui exprime combien 1f comptant vaut de francs au bout du temps donné; le produit exprime la valeur du capital au bout du temps donné.

337. 32^e Problème. *Trouver combien* $591696^f{,}7488$, *payables dans 3 ans 7 mois, valent en argent comptant. On a pris les intérêts des intérêts à 6 pour 100 par an.*

Il s'agit de trouver quel est le capital x francs qui vaudra $591696^f{,}7488$ dans 3 ans 7 mois, en prenant les intérêts composés à 6 pour 100 par an, d'après la convention du n° **333**.

1re Méthode. On a recours à la règle du n° **336**; à cet effet, on cherche d'abord la valeur de 1^f au bout de 3 ans 7 mois, qui est $1{,}06^3 \times 1{,}035$ francs (page 292). Les $591696^f{,}7488$ exprimant le produit du capital cherché par le nombre abstrait $1{,}06^3 \times 1{,}035$ qui exprime combien 1^f vaut de francs au bout de 3 ans 7 mois, si l'on divise 591696,7488 par $1{,}06^3 \times 1{,}035$, le quotient 480000 indiquera que le capital cherché est 480000 francs.

2^e Méthode. On cherche d'abord combien les $591696^f{,}7488$ payables dans 3 ans 7 mois, valent dans 3 ans, c'est-à-dire 7 mois plus tôt. On trouve par la 2^e méthode (page 292), que 100^f comptant valent $103^f{,}5$ au bout de 7 mois. On obtiendra donc combien les $591696^f{,}7488$ payables dans 3 ans 7 mois, valent dans 3 ans, en faisant la proportion

$$103{,}5 : 100 :: 591696{,}7488 : x; \quad \text{d'où,} \quad x = 571687{,}68.$$

La question est ainsi réduite à *chercher combien* $571687^f,68$ *payables dans 3 ans, valent comptant*. Or, 106^f payables dans un an, valent 100^f comptant; on trouvera donc combien les $571687^f,68$ payables à la fin de la 3e année, valent à la fin de la 2e année, en faisant la proportion

$$106 : 100 :: 571687,68 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 539328.$$

On trouvera d'une manière semblable, à l'aide de deux proportions, que 539328 payables à la fin de la 2e année valent 508800^f à la fin de la 1re année, et que 508800^f payables à la fin de la 1re année, valent 480000^f comptant.

3e Méthode. Le produit du capital x francs demandé, par le nombre $1,06^3 \times 1,035$ devant être égal à $591696^f,7488$ (page 293), on a

$$x = \frac{591696,7488}{1,06^3 \times 1,035}; \quad \text{d'où}$$

$$lx = l591696,7488 - 3l1,06 - l1,035 = 5,68123.$$

On en déduit $x = 479988,88$ etc. Or, la valeur exacte de x est 480000. L'erreur en moins, due à l'emploi des logarithmes, est donc $480000^f - 479988^f,88$ etc., ou $11^f,11$ etc.

*338. Nous allons résoudre des problèmes sur les intérêts composés, dans lesquels *la quantité cherchée sera le temps pendant lequel le capital a été placé, ou le taux de l'argent*.

*33e Problème. *Trouver dans combien d'années le capital* 480000^f *vaudra* $571687^f,68$, *en prenant les intérêts des intérêts à 6 pour 100 par an.*

Si l'on désigne par x le nombre des années demandé, la valeur des 480000^f au bout de x années sera $480000^f \times 1,06^x$; il faut donc que

$$480000 \times 1,06^x = 571687,68; \quad \text{d'où} \quad 1,06^x = \frac{571687,68}{480000},$$

$$(l1,06) \times x = l571687,68 - l480000 = 0,07592,$$

$$x = \frac{0,07592}{l1,06} = \frac{0,07592}{0,02531} = 2,9996 \text{ etc.}$$

La valeur exacte de x étant 3 (page 290), l'erreur due à l'emploi des logarithmes est moindre que 0,0004.

34e Problème. *Trouver dans combien de temps le capital* 480000^f *vaudra* $591696^f,7488$, *en prenant les intérêts des intérêts à 6 pour 100 par an.*

1re Méthode. On cherche les valeurs successives du capital 480000^f au bout d'un an, au bout de deux ans, etc., jusqu'à ce qu'on parvienne au nombre $591696^f,7488$, ou à deux valeurs consécutives qui comprennent ce nombre. On trouve, d'après la règle du n° 334, que les 480000^f valent : 508800^f dans un an, 539328^f dans 2 ans, $571687^f,68$ dans 3 ans, et $605988^f,9408$ dans 4 ans. Les $591696^f,7488$ étant compris entre $571687^f,68$ et $605988^f,9408$, le temps cherché est compris entre 3 et 4 ans. Ce temps est donc composé de 3 ans, plus d'un nombre de mois moindre que 12, que nous allons déterminer.

Le capital 480000 francs valant $571687^f,68$ au bout de trois ans, il s'agit de déterminer pendant combien de mois cette dernière somme doit être placée à intérêt simple, pour devenir $591696^f,7488$. L'intérêt simple des $571687^f,68$, pendant le nombre de mois cherché, doit donc être égal à la différence $20009^f,0688$ entre $591696^f,7488$ et $571687^f,68$. Or, l'intérêt de $571687^f,68$ pendant 12 mois, est $571687^f,68 \times 0,06$ ou $34301^f,2608$. On trouvera donc pendant combien de mois le capital $571687^f,68$ doit être placé pour rapporter $20009^f,0688$ d'intérêt, en faisant la proportion

$$34301,2608 : 12 :: 20009,0688 : x; \quad \text{d'où} \quad x = 7.$$

Le temps cherché est donc 3 ans 7 mois.

2e Méthode. On désigne par x le nombre des années demandé. Les 480000 francs vaudront au bout de x années, $480000^f \times 1,06^x$ (n° 334). Il faut donc que

$$480000 \times 1,06^x = 591696,7488; \quad \text{d'où} \quad 1,06^x = \frac{591696,7488}{480000},$$

$$x \times l1,06 = l591696,7488 - l480000 = 0,09086,$$

$$x \times 0,02531 = 0,09086, \qquad x = \frac{0,09086}{0,02531} = 3,1 \text{ etc.}$$

Le temps cherché est donc compris entre 3 et 4 ans. Ainsi, le capital 480000^f doit être placé pendant 3 ans à intérêt composé, et ensuite à intérêt simple pendant un certain nombre de mois (moindre que 12), que nous désignerons par y.

Mais, l'argent étant à 6 pour 100 par an, l'intérêt de 1^f par mois est $0^f,005$ (page 291); l'intérêt de 1^f pendant y mois est donc $0^f,005 \times y$. Le capital 1^f vaudra donc après y mois, $1^f + 0^f,005 \times y$, c'est-à-dire $(1 + 0,005 \times y)$ francs. Soit $1 + 0,005 \times y = z$. Le capital 1^f vaudra z francs au bout de y mois. Or, 1^f argent comptant vaut $1^f \times 1,06^3$ au bout de 3 ans; 1^f comptant vaudra donc au bout de 3 ans plus y mois, $1^f \times 1,06^3 \times z$. Les 480000 francs vaudront donc au bout de ce dernier temps, $480000^f \times 1,06^3 \times z$. Il faut donc que

$$480000 \times 1,06^3 \times z = 591696,7488; \text{ d'où}$$
$$lz = l591696,7488 - l480000 - 3l1,06.$$

Or, on a trouvé, en calculant le nombre des années, que

$$l591696,7488 - l480000 = 0,09086 \text{ (page 295)};$$

d'ailleurs, $3l1,06 = 0,07593$. On a donc,

$$lz = 0,09086 - 0,07593 = 0,01493; \quad \text{d'où} \quad z = 1,035.$$

Mais, $z = 1 + 0,005 \times y$; donc $0,005 \times y = 0,035$.

On en déduit $y = 7$. Le nombre de mois cherché est donc 7. Le capital 480000^f doit donc être placé pendant 3 ans 7 mois.

*35^e^ Problème. *Le capital 480000 francs, placé à intérêt composé, vaut $571687^f,68$ après 3 ans. Il s'agit de trouver le taux de l'argent.*

Si x francs désigne la valeur d'un franc à la fin de la première année, les 480000 francs vaudront $480000 \times x^3$ francs, à la fin de la troisième année. On doit donc avoir,

$$480000 \times x^3 = 571687,68; \text{ d'où } lx = 0,02531 \text{ et } x = 1,06.$$

Cela posé : puisque 1^f vaut $1^f,06$ après un an, 100^f valent 106^f à la fin de la 1^{re} année. L'intérêt de 100^f par an est donc 6^f. L'argent est donc à 6 pour 100 par an.

Remarque. Lorsqu'on connaît un capital, ainsi que sa valeur après un temps donné (composé d'années et de mois), les procédés arithmétiques ne suffisent plus pour calculer le taux de l'argent.

* 339. 36^e^ Problème. *Un particulier qui doit 11000 francs, paie une rente de 2200^f par an pour l'intérêt des 11000^f; il voudrait acquitter en deux ans la rente et le capital, au moyen de deux paiemens égaux effectués à la fin de chaque année. On a égard aux intérêts composés. Il s'agit de trouver la valeur x de chaque paiement.*

L'intérêt annuel de 11000^f étant 2200^f, l'intérêt annuel de 1^f est $\frac{2200^f}{11000}$ ou $0^f,2$. Ainsi, 1^f comptant vaut $1^f,2$ à la fin de l'année. On en déduit, que les 11000^f comptant vaudraient à la fin de la 2^e année, $11000^f \times 1,2^2$ ou 15840^f (n° 334). Les deux paiemens réunis, évalués à cette dernière époque, doivent donc valoir 15840^f. Or, le 1^{er} paiement x effectué à la fin de la 1^{re} année, vaut $x \times 1,2$ à la fin de la 2^e année; le 2^e paiement effectué à la fin de la 2^e année vaut x à cette époque. Les deux paiemens réunis, évalués à la fin de la 2^e année, valent donc $x \times 1,2 + x$, ou x multiplié par $1,2 + 1$, ou $x \times 2,2$. Le produit de x par 2,2 doit être égal à 15840^f. Ainsi, en divisant 15840^f par 2,2, le quotient 7200^f exprimera la valeur de chaque paiement.

Et en effet : on paie 7200^f à la fin de la 1^{re} année, on devait 2200^f pour la rente des 11000^f; on n'acquitte donc que 5000^f sur le capital 11000^f qui se trouve ainsi réduit à 6000^f; on ne doit donc tenir compte pendant la 2^e année que de l'intérêt des 6000^f qui restent dus; mais, on vient de voir que l'intérêt de 1^f est $0^f,2$; l'intérêt des 6000^f est donc 6000 fois $0^f,2$, ou 1200 francs; on ne redoit donc à la fin de la 2^e année que $6000^f + 1200^f$, ou 7200^f; le second paiement de 7200^f, effectué à cette époque, acquitte donc le reste de la dette. Les questions de cette espèce s'appellent questions d'*annuités*.

§ VI. *Règles de fausse position et de double fausse position.*

***340.** 37^{e} Problème. *On voudrait payer* 32^{f} *avec* 10 *pièces, en ne prenant que des pièces de* 2^{f} *et de* 5^{f}.

Si les 10 pièces étaient de 2^{f}, elles vaudraient 20^{f} au lieu de 32^{f}; il faut donc augmenter de $32^{f} - 20^{f}$ ou de 12^{f} la valeur de ces 10 pièces, sans en changer le nombre. Mais, chaque pièce de 5^{f}, substituée à une pièce de 2^{f}, augmente de 3^{f} la valeur des 10 pièces ; on devra donc prendre autant de pièces de 5^{f} que 3^{f} est contenu de fois dans 12^{f}; or, le quotient de 12^{f} par 3^{f} est 4 ; il faut donc substituer 4 pièces de 5^{f} à 4 pièces de 2^{f}; on formera donc les 32^{f} avec 4 pièces de 5^{f} et 6 pièces de 2 francs.

Remarque. Pour que les questions de cette nature soient possibles, il faut que la somme à payer soit comprise entre les deux sommes que l'on obtient, en ne prenant successivement que des pièces de la plus petite et de la plus grande valeur ; et il faut en outre que l'on trouve un nombre entier pour le nombre des pièces de chaque espèce.

La méthode précédente a reçu le nom de *règle de fausse position,* parce qu'elle conduit au résultat à l'aide d'*une fausse supposition.*

38^{e} Problème. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en était le quintuple. On demande l'âge du fils.*

Si le fils a 24 ans, le père a 72 ans ; il y a dix ans, le fils avait 14 ans et le père 62 ans ; or, le quintuple de 14 surpasse 62 de 8 ; l'erreur est donc 8. On verra de même que si l'âge 24 ans du fils diminue d'une année, l'erreur 8 diminuera de 2. Par conséquent, pour que cette erreur devienne nulle, il faut que l'âge 24 ans du fils diminue de 4 années. Le fils a donc 20 ans et le père 60 ans ; il y a dix ans, le fils avait 10 ans et le père 50 ans ; l'âge du père était donc quintuple de celui du fils.

La méthode qui a servi à résoudre le problème précédent, se nomme *règle de double fausse position,* parce qu'elle conduit au résultat à l'aide de deux fausses suppositions.

§ VII. *Problèmes sur des mélanges et des alliages.*

***341.** 39^{e} Problème. *Un mélange est composé de* 4 *litres de vin à* 14 *sous le litre, et de* 6 *litres à* 24 *sous. Trouver à combien revient le litre de ce mélange.*

Les 4 litres à 14^{s} le litre valent 4 fois 14^{s}, ou 56^{s}.
Les 6 litres à 24^{s} le litre valent 6 fois 24^{s}, ou 144^{s}.
Les 10 litres de ce mélange valent donc $56^{s} + 144^{s}$, ou 200^{s}.
Un litre de ce mélange vaut donc le dixième de 200^{s}, ou 20^{s}.

En général : *Pour obtenir le prix d'une unité de mesure d'un mélange, il suffit de multiplier le prix d'une mesure de chaque espèce par le nombre de ces mesures, et de diviser la somme de ces produits par le nombre total des mesures du mélange.* Le prix d'une mesure du mélange est toujours compris entre le prix le plus élevé et le prix le moins élevé d'une même mesure des substances mélangées.

Par exemple, si l'on forme un mélange de 20 litres de vin à 5^{s} le litre, de 30^{lit} à 10^{s}, de 28^{lit} à 14^{s} et de 12^{lit} à 24^{s}, on trouvera que ce mélange revient à 12^{s} le litre.

*40^{e} Problème. *Mélanger des vins à* 14^{s} *et à* 24^{s} *le litre, de manière que le mélange revienne à* 20^{s} *le litre.*

Chaque litre à 14^{s} que l'on vendrait 20^{s}, procurerait $20^{s} - 14^{s}$ ou 6^{s} de gain ; et chaque litre à 24^{s} que l'on vendrait 20^{s} donnerait $24^{s} - 20^{s}$ ou 4^{s} de perte. Par conséquent, pour que le gain compense la perte, il suffit de mêler 4 litres à 14^{s} avec 6 litres à 24^{s} ; les 10 litres du mélange reviendront à 20^{s} le litre.

1re Remarque. Le plus petit nombre divisible par 6 et par 4 étant 12, il est facile de voir que si l'on divise successivement un multiple quelconque de 12, par 6 et par 4, les quotiens respectifs exprimeront les nombres de litres à 14^{s} et à 24^{s} que l'on peut mélanger pour former du vin à 20^{s} le litre.

2^{e} Remarque. *Quand le nombre total des litres du mélange* *est donné, on peut facilement trouver combien ce mélange doit contenir de litres de vin de chaque espèce;* car,

10 litres du mélange contenant 4^{lit} à 14^s et 6^{lit} à 24^s,

Un litre de mélange contient $\frac{4^{lit}}{10}$ à 14^s et $\frac{6^{lit}}{10}$ à 24^s.

Par conséquent, le nombre de litres de vin à 14^s est les $\frac{4}{10}$ du nombre total des litres du mélange, et le nombre de litres de vin à 24^s est les $\frac{6}{10}$ du nombre des litres du mélange.

Par exemple, pour *composer* 30 *litres de vin à* 20^s *le litre*, on mélangera $30^{lit} \times \frac{4}{10}$ ou 12^{lit} de vin à 14^s avec $30^{lit} \times \frac{6}{10}$ ou 18 litres de vin à 24^s.

3e REMARQUE. *Quand le nombre des litres à* 14^s *est donné, il est facile de trouver le nombre des litres à* 24^s. En effet; on vient de voir que 10 litres du mélange contiennent 4 litres à 14^s et 6 litres à 24^s; d'ailleurs, 6 est les $\frac{6}{4}$ ou les $\frac{3}{2}$ de 4; le nombre de litres à 24^s doit donc être les $\frac{3}{2}$ du nombre de litres à 14^s.

Par exemple, si l'on veut *composer du vin à* 20^s *le litre, en mélangeant du vin à* 24^s *le litre avec* 12 *litres à* 14^s *le litre*, le nombre de litres à 24^s sera les $\frac{3}{2}$ de 12 ou 18.

* 41e PROBLÈME. *Combien faut-il ajouter d'eau à* 12 *litres de vin à* 15^s *le litre, pour que le mélange revienne à* 9^s *le litre.*

Le prix 9^s d'un litre du mélange demandé, multiplié par le nombre inconnu x des litres de ce mélange, devant être égal au prix total, 12 fois 15^s ou 180^s du mélange, on obtiendra la valeur de x en divisant 180^s par 9^s, ce qui donne 20. Le nombre cherché des litres d'eau est donc $20 - 12$, ou 8.

* **342.** Des raisonnemens analogues à ceux du n° **341** vont nous conduire aux solutions des *problèmes sur les alliages.*

* 42e PROBLÈME. *On fait fondre* 70 *grammes d'or au titre de* 0,90 (n° **261**), *avec* 30 *grammes d'or au titre de* 0,80. *Trouver le titre de l'alliage qui en résultera.*

Le produit du nombre des grammes par le titre donnant la quantité d'or pur (n° **262**), on trouve que

70^{gr} d'or au titre de 0,90 contiennent 63^{gr} d'or pur,
30^{gr} d'or au titre de 0,80 contiennent 24^{gr} d'or pur.
Les 100^{gr} d'alliage contiennent donc 87^{gr} d'or pur.
Un gramme d'alliage contient donc $0^{gr},87$ d'or pur.
Le titre de l'alliage est donc 0,87.

En général: *Pour trouver le titre de l'alliage qui résulte de la fonte de plusieurs lingots, il suffit de multiplier le poids de chaque lingot par son titre, et de diviser la somme de ces produits par le poids total de l'alliage.*

Par exemple, si l'on forme un alliage de 20^{gr} d'or à 0,05 de fin, de 30^{gr} à 0,10, de 28^{gr} à 0,14 et de 12^{gr} à 0,24, on trouvera que cet alliage est au titre de 0,12 par rapport à l'or.

* 43e PROBLÈME. *Dans quelle proportion doit-on combiner de l'or à* 0,90 *de fin, avec de l'or à* 0,80, *pour composer un alliage au titre de* 0,87.

L'alliage cherché devant être au titre de 0,87, un gramme de cet alliage doit contenir $0^{gr},87$ d'or fin. Ainsi,

1^{gr} d'or à 0,90 de *fin* contient de trop $0^{gr},90 - 0^{gr},87$ ou $0^{gr},03$ d'or fin,
et sur 1^{gr} d'or à 0,80 de *fin*, il manque $0^{gr},87 - 0^{gr},80$ ou $0^{gr},07$ d'or fin.

Il y aura donc compensation en combinant 7^{gr} d'or à 0,90 de *fin* avec 3^{gr} d'or à 0,80; car les 10^{gr} d'alliage qui résulteront de cette combinaison contiendront de trop 7 fois $0^{gr},03$ ou $0^{gr},21$ d'or fin, et il manquera 3 fois $0^{gr},07$ ou $0^{gr},21$ d'or fin. Chaque gramme de l'alliage demandé doit donc contenir $0^{gr},7$ d'or à 0,90 de *fin* et $0^{gr},3$ d'or à 0,80 de *fin*.

* 44e PROBLÈME. *Un orfèvre a deux lingots d'or, dont les titres sont* 0,90 *et* 0,80. *Combien doit-il prendre de grammes de chaque lingot pour composer* 100^{gr} *d'alliage au titre* 0,87.

Les 100 grammes de l'alliage demandé doivent renfermer 87 grammes d'or; si l'on prenait 100^{gr} du 1er lingot, ils contiendraient 90^{gr} d'or au lieu de 87^{gr}, c'est-à-dire 3^{gr} de trop. Il faut donc remplacer des grammes d'or à 0,90 de fin par le même nombre de grammes à 0,80, de manière que les 100^{gr} d'alliage ne renferment plus que 87^{gr} d'or pur.

Mais, pour chaque gramme à 0,9 de *fin* remplacé par un gramme à 0,8, la quantité d'or contenue dans les 100 grammes d'alliage diminue de $0^{gr},1$. On devra donc prendre autant de grammes à 0,8 de *fin* que $0^{gr},1$ est contenu de fois dans 3^{gr}. Divisant 3^{gr} par $0^{gr},1$, le quotient 30 fait voir qu'on doit remplacer 30 des 100^{gr} à 0,9 de *fin*, par 30^{gr} à 0,8.

Ainsi, 100^{gr} de l'alliage demandé doivent être composés de $100 - 30$ ou 70 grammes du 1er lingot à 0,9 de *fin*, et de 30 grammes du 2e lingot à 0,8 de *fin*.

REMARQUE. L'*Algèbre* donnera le moyen de résoudre plus simplement les questions des nos **338**, **339**, **340**, **341** et **342**.

§ VIII. *Problèmes sur des mobiles.*

* **343.** Nous supposerons que les *vitesses* sont *constantes*; c'est-à-dire que le *mouvement* est *uniforme*. De sorte que *les longueurs des routes parcourues par un même mobile seront proportionnelles aux temps employés à les parcourir.*

*45e PROBLÈME. *Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de* 138 *lieues, fait* 3 *lieues en* 4 *heures, et part* 40 *heures avant le second qui parcourt* 6 *lieues en* 7 *heures. On demande dans combien de temps le* 2e *courrier atteindra le* 1er *courrier, et quelles seront les distances des points de départ au point de rencontre.*

Le 1er courrier mettant 4 heures à parcourir 3 lieues, fera en une heure $\frac{3^{lieues}}{4}$; et comme il part 40 heures avant le 2e courrier, il fait pendant ce temps 40 fois $\frac{3^{lieues}}{4}$ ou 30 lieues; de sorte qu'à l'instant du départ du 2e courrier, le 1er a une avance de $138^{li} + 30^{li}$ ou de 168 lieues. Le 2e courrier n'atteindra donc le 1er que lorsqu'il s'en sera rapproché de 168 lieues. Or, le 2e courrier parcourant 6 lieues en 7 heures, fait $\frac{6^{lieues}}{7}$ par heure, tandis que le 1er courrier fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure. Il suit de là que pendant une heure, le 2e courrier se rapproche du 1er de $\frac{6^{li}}{7} - \frac{3^{li}}{4}$, ou de $\frac{3^{li}}{28}$. Il s'agit de trouver combien ce 2e courrier mettra de temps à se rapprocher du 1er des 168 lieues dont il est en arrière.

1re MÉTHODE. Puisque le 2e courrier se rapproche du 1er de $\frac{3^{li}}{28}$ par heure, il s'en rapprochera : de $\frac{1^{li}}{28}$ en $\frac{1^{h}}{3}$, d'une lieue en $\frac{28^{h}}{3}$, et de 168 lieues en 168 fois $\frac{28^{h}}{3}$ ou en 1568 heures. Le 2e courrier atteindra donc le 1er après 1568 heures de marche.

Pour vérifier ce résultat, on observe que le 2e courrier parcourant $\frac{6^{li}}{7}$ par heure, fera en 1568 heures, 1568 fois $\frac{6^{li}}{7}$, ou 1344 lieues; le 1er courrier, qui part 40^{h} avant le 2e, aura marché pendant 1608^{h} et aura parcouru 1608 fois $\frac{3^{li}}{4}$ ou 1206 lieues; la différence, 138 lieues, entre les espaces parcourus, 1344^{lieues}, 1206^{lieues}, est effectivement égale à la distance des points de départ des courriers.

2e MÉTHODE. Le 2e courrier se rapprochant du 1er de $\frac{3^{li}}{28}$ par heure, pour trouver en combien d'heures ce 2e courrier se rapprochera du 1er des 168 lieues dont il est en arrière, on fera la proportion $\frac{3}{28} : 1 :: 168 : x$; d'où $x = 1568$.

* 46e PROBLÈME. *Deux courriers vont dans le même sens; le premier a une avance de* 200 *lieues, fait* 3 *lieues en* 4 *heures, et part* 40 *heures avant le second qui fait* 6 *lieues en* 7 *heures; après combien d'heures de marche, le second courrier ne sera-t-il plus en arrière du premier que de* 62 *lieues?*

On verra, comme dans la question précédente, que le 1er courrier a fait 30 lieues avant le départ du 2e courrier; le 1er courrier a donc 230 lieues d'avance; et par conséquent, le

2^e courrier, pour n'être plus en arrière du 1^{er} que de 62 lieues, doit s'en rapprocher de 230 — 62 lieues, ou de 168 lieues. On vient de trouver dans le 45^e problème, que ce rapprochement aura lieu après 1568 heures de marche du 2^e courrier.

* 47^e Problème. *Une montre bien réglée marque midi; il faut trouver combien de fois l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure chaque rencontre aura lieu.*

1^{re} Solution. La circonférence du *cadran* étant divisée en 60 parties égales, la 1^{re} rencontre, à partir de midi, aura lieu quand l'aiguille des minutes aura parcouru 60 divisions de plus que celle des heures, c'est-à-dire lorsque la différence des espaces parcourus par les aiguilles sera de 60 divisions. Or, en une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, et celle des heures parcourt les 5 divisions comprises entre deux heures consécutives; la différence entre les espaces que les deux aiguilles parcourent est donc :

de 55 divisions en une heure, d'une division en $\frac{1}{55}$ d'heure,

et de 60 divisions en $\frac{60^h}{55}$ ou en $\frac{12}{11}$ d'heure.

La 1^{re} rencontre des aiguilles aura donc lieu à $\frac{12^h}{11}$.

Les aiguilles marchant toujours avec la même vitesse, le temps écoulé depuis une rencontre jusqu'à la suivante, est constamment égal à $\frac{12^h}{11}$. On en déduit, qu'à partir de midi, les rencontres successives des aiguilles ont lieu aux heures suivantes :

$\frac{12^h}{11}$, $\frac{24^h}{11}$, $\frac{36^h}{11}$, $\frac{48^h}{11}$, $\frac{60^h}{11}$, $\frac{72^h}{11}$, $\frac{84^h}{11}$, $\frac{96^h}{11}$, $\frac{108^h}{11}$, $\frac{120^h}{11}$, 12^h ou *minuit*.

2^e Solution. Les aiguilles se rencontrent 11 fois en 12 heures à partir de midi; car de midi à 1^h, il n'y a pas de rencontre, et pendant chacune des 11 heures suivantes, l'aiguille des minutes rencontre une seule fois celle des heures. Les 11 rencontres des aiguilles ayant lieu en 12 heures, et leurs vitesses étant constantes, le temps écoulé entre deux rencontres consécutives est égal à $\frac{12^h}{11}$ ou à $1^h\,5'\,27''\,\frac{3}{11}$.

* 48^e Problème. *Une montre qui avance de 3 minutes par jour, a été mise sur l'heure juste à midi. On demande quelle sera l'heure exacte (le même jour), lorsque cette montre marquera 7 heures 12 minutes après midi.*

Si la montre n'était pas dérangée, l'aiguille des minutes parcourrait en 24 heures, 24 fois 60 divisions du cadran ou 1440 divisions; mais comme on suppose que la montre avance de 3 minutes par jour, l'aiguille des minutes parcourra 1443 divisions en 24 heures; cette aiguille parcourt donc une de ces divisions en $\frac{24^h}{1443}$, ce qui se réduit à $\frac{8^h}{481}$.

Quand la montre marquera $7^h\,12'$, après midi, l'aiguille des minutes aura parcouru, depuis midi, 7 fois les 60 divisions du cadran en 7^h, plus 12 divisions en $12'$, ce qui fait en tout 432 divisions. Or, on vient de voir que cette aiguille parcourt une division en $\frac{8^h}{481}$; elle a donc parcouru les 432 divisions, en 432 fois $\frac{8^h}{481}$. L'heure cherchée est donc $\frac{8^h}{481} \times 432$ ou $7^h\,11'\,6''\,\frac{54}{481}$.

Problèmes divers.

* 49^e Problème. *On veut troquer du drap à $36^f,36$ le mètre, contre du casimir à $27^f,27$ le mètre. Combien devra-t-on recevoir de casimir en échange de 12 mètres de drap.*

Les 12 mètres de drap valant 12 fois $36^f,36$ ou $436^f,32$, on recevra autant de mètres de casimir que le prix $27^f,27$ d'un mètre de casimir est contenu de fois dans $436^f,32$; divisant $436^f,32$ par $27^f,27$, le quotient 16 exprimera le nombre de mètres demandé.

* 50^e Problème. *Un marchand veut échanger du drap contre du basin; 2 mètres de drap valent autant que 3 mètres de casimir, et 5 mètres de casimir valent autant que 7 mètres de basin. Com-*

bien le marchand recevra-t-il de mètres de basin pour 60 *mètres de drap.* D'après cet énoncé :

1^m de drap vaut $\frac{3^m}{2}$ de casimir, et 1^m de casimir vaut $\frac{7^m}{5}$ de basin. Il suit de là qu'un mètre de drap vaut les $\frac{3}{2}$ de 1^m de casimir, ou les $\frac{3}{2}$ de $\frac{7^m}{5}$ de basin, ou $\frac{21^m}{10}$ de basin. Les 60^m de drap valent donc 60 fois $\frac{21^m}{10}$ ou 126^m de basin.

* 51ᵉ PROBLÈME. *Trois ouvriers de forces différentes, sont employés à un ouvrage ; si chacun d'eux travaillait seul, le* 1ᵉʳ *ferait l'ouvrage en* $\frac{3^h}{2}$, *le* 2ᵉ *en* $\frac{7^h}{3}$, *et le* 3ᵉ *en* $\frac{7^h}{4}$. *En combien de temps cet ouvrage sera-t-il fait par les trois ouvriers travaillant ensemble.*

Puisque le 1ᵉʳ ouvrier travaillant seul met $\frac{3^h}{2}$ à faire l'ouvrage, en $\frac{1^h}{2}$ il ferait $\frac{1}{3}$ de l'ouvrage, et en une heure il ferait les $\frac{2}{3}$ de l'ouvrage. On verra de même que pendant une heure, le 2ᵉ ouvrier ferait les $\frac{3}{7}$ de l'ouvrage, tandis que le 3ᵉ ouvrier ferait les $\frac{4}{7}$ de l'ouvrage. Par conséquent, lorsque les trois ouvriers travaillent à la fois, ils font en une heure $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$ ou $\frac{5}{3}$ de l'ouvrage ; ils feraient donc $\frac{1}{3}$ de l'ouvrage en $\frac{1}{5}$ d'heure ; ils feront donc l'ouvrage en $\frac{3^h}{5}$ ou en 36 minutes.

* 52ᵉ PROBLÈME. *Un bassin est alimenté par deux fontaines ; la* 1ʳᵉ *le remplirait en* $\frac{3}{2}$ *heure, et la* 2ᵉ *en* $\frac{3}{4}$ *d'heure ; la totalité de l'eau qu'il peut contenir sortirait en* 3 *heures par une*

ouverture pratiquée à ce bassin ; en combien de temps, le bassin supposé vide, sera-t-il rempli, lorsque l'eau coulera par les trois ouvertures à la fois.

Puisque la 1ʳᵉ fontaine coulant seule met $\frac{3^h}{2}$ à remplir le bassin, en 3^h elle remplirait 2 fois le bassin, et en 1^h elle remplirait les $\frac{2}{3}$ du bassin. On verra de même qu'en une heure, la 2ᵉ fontaine remplit les $\frac{4}{3}$ du bassin, et que la 3ᵉ ouverture vide $\frac{1}{3}$ du bassin.

Ainsi, quand l'eau coule par ces trois ouvertures, la partie du bassin qui se remplit en une heure est $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, ou $\frac{5}{3}$.

Puisque les $\frac{5}{3}$ du bassin seraient remplis en une heure,

$\frac{1}{3}$ du bassin serait rempli en $\frac{1}{5}$ d'heure.

Le bassin serait donc rempli en 3 fois $\frac{1^h}{5}$, ou en $\frac{3}{5}$ d'heure.

* 53ᵉ PROBLÈME. *Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Chaque joueur ayant perdu une partie, dans l'ordre indiqué par le rang des joueurs, il reste* 24^f *au* 1ᵉʳ *joueur,* 28^f *au* 2ᵉ *joueur, et* 14^f *au* 3ᵉ *joueur. Combien chaque joueur avait-il d'argent en se mettant au jeu.*

A la fin de la 3ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 24^f, le 2ᵉ a 28^f, et le 3ᵉ a 14^f.

Le 3ᵉ joueur ayant perdu la 3ᵉ partie a doublé l'argent des deux autres ; ceux-ci n'avaient donc à la fin de la 2ᵉ partie que la moitié de ce qu'ils ont à la fin de la 3ᵉ, c'est-à-dire 12^f et 14^f ; le 3ᵉ joueur avait les 26^f qu'il a perdus avec les deux autres, plus les 14^f qui lui restent, c'est-à-dire 40 francs. Ainsi,

à la fin de la 2ᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 12^f, le 2ᵉ a 14^f, et le 3ᵉ a 40^f.

Des raisonnemens analogues conduisent aux résultats suivans :

à la fin de la 1ʳᵉ partie, le 1ᵉʳ joueur a 6^f, le 2ᵉ a 40^f, et le 3ᵉ a 20^f ;
en se mettant au jeu, le 1ᵉʳ joueur a 36^f, le 2ᵉ a 20^f, et le 3ᵉ a 10^f.

*54^e^ PROBLÈME. *La lumière met 8 minutes 13 secondes, ou 493 secondes, à parcourir la distance du soleil à la terre, qui est d'environ 39 millions de lieues de poste* (*). *On propose d'en déduire la* VITESSE *de la lumière, c'est-à-dire l'espace qu'elle parcourt en une seconde.*

Puisque l'espace parcouru par la lumière en 493 secondes est 39 000 000 lieues, on obtiendra l'espace qu'elle parcourt pendant une seconde, en divisant 39000000 lieues par 493 ; le quotient est 79107^{lieues},5050 etc., ou $2000^{\text{T}} \times 79107{,}5050$ etc., ou environ 158 215 010 toises; telle est la vitesse de la lumière.

*55^e^ PROBLÈME. *Un militaire entend un coup de canon, sept secondes après avoir vu la lumière produite par l'inflammation de la poudre. On sait que le son parcourt 340 mètres par seconde. Il s'agit de calculer à quelle distance le militaire est du canon.*

La vitesse de la lumière est tellement grande qu'il est permis de supposer, sans erreur sensible, qu'on aperçoit l'inflammation de la poudre à l'instant où le coup part. Dans cette hypothèse, le militaire est éloigné du canon de 7 fois 340^{m}, ou de 2380^{m}, ou d'environ 1221 toises.

*56^e^ PROBLÈME. *Trouver un nombre dont la moitié plus le huitième donnent 60.*

La somme des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, étant $\frac{5}{8}$, il en résulte que :

les $\frac{5}{8}$ du nombre cherché font 60 ;

$\frac{1}{8}$ du nombre cherché vaut donc le 5^e^ de 60 ou 12.

Le nombre cherché est donc 8 fois 12 ou 96.

*57^e^ PROBLÈME. *Un père laisse par testament : la moitié de son bien à son fils, le tiers à sa fille, et les 10000 francs qui restent à sa veuve ; il faut trouver le bien du défunt et la part de chaque enfant.*

(*) La *lieue de poste* est de 2000 toises, ou d'environ 3898 mètres.

La part du fils jointe à celle de la fille composent $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{6}$ de l'héritage ; les 10000^{f} qui restent à la mère expriment donc le sixième du bien total ; ce bien est donc 6 fois 10000^{f} ou 60000^{f} ; le fils en prend la moitié ou 30000^{f}, la fille le tiers ou 20000^{f} ; il reste effectivement 10000 francs à la veuve.

*58^e^ PROBLÈME. *On place sur une table, un* ÉTUI, *un* ANNEAU, *et une* MONTRE. *Trois personnes prennent chacune un de ces trois bijoux à votre insu. Il s'agit de deviner quel est l'objet qui a été pris par chaque personne.*

A cet effet : donnez un jeton à la 1^re^ personne, deux jetons à la 2^e^ personne, et trois jetons à la 3^e^ personne; posez 18 jetons sur la table, et après avoir passé dans une chambre voisine, ordonnez que la personne qui a l'étui prenne sur la table autant de jetons qu'elle en a dans la main, que celle qui a l'anneau prenne le double des jetons qu'elle a dans la main, et que la personne qui a la montre prenne le quadruple des jetons qu'elle a dans la main ; demandez alors combien il reste de jetons sur la table ; ce reste sera nécessairement un des nombres

1, 2, 3, 5, 6, 7 ;

vous rapporterez ces nombres aux mots

eaux, *aériennes*, *ém*ues, *am*oncelées, *mé*nagez, *Ma*rseille.

La 1^re^ lettre du mot correspondant au nombre des jetons qui restent sur la table est la lettre initiale du nom de l'objet pris par la 1^re^ personne, et la 2^e^ lettre du même mot est la lettre initiale du nom de l'objet pris par la 2^e^ personne.

Par exemple, lorsqu'il reste 6 jetons, le mot *mé*nagez, placé sous le reste 6, exprime que la première personne a la *m*ontre et que la seconde a l'*é*tui.

REMARQUE. L'exactitude de cette règle est facile à vérifier, car trois objets ne peuvent être pris que de six manières différentes, et en appliquant la règle indiquée, on trouve que les six *restes* correspondans sont, 1, 2, 3, 5, 6, 7.

Note sur les différens systèmes de numération.

* **344.** Nous avons vu (n° 5) que pour écrire tous les nombres avec *dix* chiffres, il suffit de convenir qu'en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de *dix* en *dix* fois plus grandes.

On peut établir d'autres systèmes de numération, c'est-à-dire écrire tous les nombres avec plus ou moins de *caractères*, en convenant, par *analogie*, qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités autant de fois plus grandes qu'il y a de chiffres dans le système.* Le nombre b des chiffres employé dans un système de numération, se nomme la *base* de ce système. Ainsi, quelle que soit la *base* b, le 1^er^ chiffre d'un nombre, à partir de la droite, exprime des unités simples ou du 1^er^ ordre; le 2^e^ chiffre exprime des unités du 2^e^ ordre, le 3^e^ des unités du 3^e^ ordre; etc. Chaque unité du 1^er^ ordre vaut 1; chaque unité du 2^e^ ordre est égale à la base b et vaut b unités; chaque unité du 3^e^ ordre est égale à b^2; et en général, *une unité du* $n^{ième}$ *ordre* vaut b^{n-1} unités simples.

Du Système duodécimal.

* **345.** Pour fixer les idées, nous considérerons le système composé de *douze* chiffres, et qu'on nomme, par cette raison, *système duodécimal.*

Les onze premiers nombres,

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze,

seront représentés par les *chiffres*,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δ, ω.

Les nombres que nous ne placerons pas entre parenthèses seront écrits dans le système *décimal*; et pour indiquer qu'un nombre est écrit dans le système *duodécimal*, nous le mettrons entre parenthèses.

Pour écrire tous les nombres entiers plus grands que onze, il suffit de convenir qu'*en avançant successivement d'un rang vers la gauche d'un nombre, ses chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus grandes*; de sorte qu'en partant de la droite d'un nombre, chaque unité du 1^er^ ordre vaut 1, chaque unité du 2^e^ ordre vaut 12, chaque unité du 3^e^ ordre vaut 12^2 ou 144, chaque unité du 4^e^ ordre vaut 12^3 ou 1728, chaque unité du 5^e^ ordre vaut 12^4 ou 20736; etc.

Ainsi, les nombres	(10),	(100),	(1000),	(10000),	etc.
ont pour valeurs	12,	144,	1728,	20736,	etc.

Cela posé : si l'on ajoute une unité à onze, on obtiendra le nombre (10). Pour écrire les nombres treize, quatorze,..., vingt-trois, on remplace successivement le zéro du nombre (10), par chacun des onze chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δ, ω.

Le nombre (1ω), qui vaut vingt-trois, étant composé d'une douzaine et de onze unités, en lui ajoutant 1, on obtient le nombre vingt-quatre, formé de 2 douzaines et qui s'écrit (20); remplaçant le zéro par chacun des onze chiffres significatifs, on trouve les onze nombres entiers compris entre 2 douzaines ou vingt-quatre, et 3 douzaines ou trente-six; et en continuant ainsi, on arrive au nombre ($\omega\omega$) composé de onze douzaines plus onze unités; ce nombre est égal à $11 \times 12 + 11$, ou à 143. De cette manière, on écrit avec deux chiffres tous les nombres compris entre onze et cent quarante-quatre. Ajoutant l'unité à ($\omega\omega$), on obtient le nombre cent quarante-quatre, qui vaut douze douzaines, et que l'on écrit (100). Remplaçant successivement les chiffres de ce dernier nombre, par chacun des onze chiffres significatifs, on parvient à écrire tous les nombres compris entre 144 et 1728. Et ainsi de suite.

1^re^ Remarque. *Pour multiplier un nombre par* (10), *ou par* (100), *ou par* (1000), *etc., il suffit de mettre sur sa droite un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro, etc. Réciproquement, lorsqu'un nombre est terminé par des zéro, pour le diviser par* (10), *ou par* (100), *ou par* (1000), *etc., il suffit de supprimer sur sa droite un zéro, ou deux zéro, ou trois zéro, etc.*

2^e^ Remarque. *Lorsque le chiffre des unités d'un nombre* α, *écrit dans le système duodécimal, n'est pas un zéro, ce nombre n'est pas divisible par la base* (10); car α étant décomposable en deux parties, dont l'une terminée par un zéro admet le diviseur (10), et dont l'autre, qui est le chiffre des unités, n'admet pas le diviseur (10), il résulte du principe établi (n° **54**, 8°), que α n'est pas divisible par (10).

Par exemple, le nombre (237) ne saurait être divisible par (10); car il se décompose en deux parties (230), 7, dont la première est divisible par (10), et dont la seconde n'admet pas ce diviseur.

* **346.** *Quand un nombre est écrit dans le système duodécimal, pour l'écrire dans le système décimal, on multiplie le 1^er^ chiffre à droite par 1, le 2^e^ par la base 12, le 3^e^ par* 12^2, *le 4^e^ par* 12^3; *et ainsi de suite, jusqu'au chiffre des plus hautes unités; la somme de ces produits est le nombre demandé.*

Exemple. On a, $(\delta 35) = 5 + 3 \times 12 + 10 \times 144 = 1481$.

* **347.** *Lorsqu'un nombre est écrit dans le système décimal, pour l'écrire dans le système duodécimal, on le divise par 12; le reste est le 1^er^ chiffre à droite du nombre demandé, et le quotient exprime des douzaines, c'est-à-dire des unités du 2^e^ ordre; divisant ce quotient par 12, le reste est le 2^e^ chiffre du nombre cherché, et le quotient représente des unités du 3^e^ ordre; continuant ce calcul, on parvient à un quotient moindre que 12, qui est le dernier chiffre du nombre demandé.* Cela résulte de ce que, dans le système duodécimal, douze unités d'un ordre quelconque valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Ainsi, pour *écrire* 1481 *dans le système duodécimal,* on divise 1481 par

12, ce qui donne le reste 5 et le quotient 123; la division de 123 par 12, fournit le reste 3 et le quotient δ; de sorte que le nombre demandé est (δ35).

* **348.** Pour *énoncer un nombre écrit dans le système duodécimal*, on l'écrit d'abord dans le système décimal (nº **346**), et on énonce ensuite ce dernier nombre d'après la règle du nº **7**.

* **349.** *Les méthodes qui ont été données pour opérer sur les nombres écrits dans le système décimal, s'appliquent au système duodécimal, avec cette seule différence que la base étant douze, il faut douze unités d'un ordre pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur.*

Exemples d'addition.

	(23δ5)	(ω0δ23)	(δω0000ω5)
	(437)	(70845)	(489δ2346)
	(60ω)	(δωδωδ)	(97δ56320)
	(4δω0)	(8δ9δδ)	(4789000)
Somme,	(811ω)	(320354)	(21840575ω)

Exemples de soustraction.

De	(δ98987)	(900084005)	(9000002)
Otez	(375712)	(8234δ7δ27)	(8785674)
Reste	(723275)	(9879819δ)	(43654δ).

Exemples de multiplication.

Multiplicande	(47δω8)	(113δω)
Multiplicateur	(113δω)	(47δω8)
	(433084)	(8δ734)
	(3δ71880)	(1027010)
	(11ω8ω000)	(ω131200)
	(47δω8000)	(79345000)
	(47δω80000)	(453780000)
Produit	(52112ω944)	(52112ω944).

Exemple de division.

Soit proposé de diviser (23832) par (3ω).

On effectue le calcul de la manière suivante :

Dividende,	(3ω) *diviseur.*	*Multiples du diviseur.*	
(23832)	(70δ) *quotient.*	(3ω) × 2 = (7δ)	(3ω) × 7 = (235)
(235)		(3ω) × 3 = (ω9)	(3ω) × 8 = (274)
(33)		(3ω) × 4 = (138)	(3ω) × 9 = (2ω3)
(332)		(3ω) × 5 = (177)	(3ω) × δ = (332)
(332)		(3ω) × 6 = (1ω6)	(3ω) × ω = (371).
0			

On forme d'abord les produits du diviseur (3ω), par chacun des nombres d'un seul chiffre. On voit alors que le 1er dividende partiel (238) tombe entre (235) et (274), c'est-à-dire entre (3ω) × 7 et (3ω) × 8; le 1er chiffre à gauche du quotient est donc 7; on retranche (235) de (238), et sur la droite du reste 3, on abaisse 3 qui est le chiffre suivant du dividende; le 2e dividende partiel (33) qui en résulte étant moindre que le diviseur, le chiffre correspondant du quotient est 0; on abaisse sur la droite de (33) le dernier chiffre 2 du dividende; le 3e dividende partiel (332) étant le produit de (3ω) par δ, le chiffre correspondant du quotient est δ; on retranche (332) de (332); le reste zéro indique que le quotient obtenu (70δ) est exact.

Les *preuves des quatre règles* s'exécutent comme dans le système décimal par les méthodes des nos **13, 17, 22, 31**.

***350.** *Les théories exposées dans le 2e et le 3e chapitre, s'appliquent au système duodécimal, en substituant la base douze à la base dix.* Ainsi:

1°. Comme en avançant successivement d'un rang vers la droite d'un *nombre duodécimal*, ses chiffres expriment des unités de douze en douze fois plus petites, les chiffres placés à la droite de la *virgule*, expriment des unités dont les valeurs respectives sont

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{12^2}\ \text{ou}\ \frac{1}{144},\ \frac{1}{12^3}\ \text{ou}\ \frac{1}{1728},\ \frac{1}{12^4}\ \text{ou}\ \frac{1}{20736},\ \text{etc.}$$

Ainsi, $(623{,}45\delta) = 6 \times 12^2 + 2 \times 12 + 3 + \frac{4}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{\delta}{12^3}$.

2°. Un nombre écrit dans le système duodécimal, est multiplié ou est divisé autant de fois par le facteur (10), que la *virgule* a été avancée de rangs vers la droite ou vers la gauche de ce nombre (nº **130**, 2º et 3º).

3°. Tout nombre duodécimal équivaut à une fraction dont le numérateur est le nombre duodécimal, abstraction faite de la *virgule*, et dont le dénominateur est l'unité suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres à droite de la *virgule* (nº **126**).

Ainsi, $(623{,}45\delta7) = \frac{(62345\delta7)}{(10000)}$, et $(0{,}0031) = \frac{(31)}{(10000)}$. $\frac{(31)}{(10000)}$

4°. Pour convertir en nombre duodécimal, une fraction dont le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on écrit le numérateur, et on sépare à l'aide de la *virgule* autant de chiffres sur la droite de ce numérateur, qu'il y a de zéro dans le dénominateur (nº **125**). Ainsi,

$$\frac{(62345\delta7)}{(10000)} = (623{,}45\delta7),\ \text{et}\ \frac{(31)}{(10000)} = (0{,}0031).$$

* **351.** *Les règles des nos* **132**,..., **142**, *s'appliquent aux nombres duodécimaux,* avec cette seule différence que la base *dix* et ses facteurs premiers, 2, 5, doivent être remplacés par la base *douze* et ses facteurs premiers 2, 3;

les fractions décimales périodiques deviennent des *fractions duodécimales périodiques;* et dans les dénominateurs des fractions ordinaires équivalentes, chaque 9 est remplacé par ω.

On trouve de cette manière que la *somme* des nombres (23,δ5), (4,37), (6,0ω), (4δ,ω0) est (81,1ω), que la *différence* entre (9008,4005) et (8234δ,7δ27) est (9879,819δ), et que le *produit* de (47,δω8) par (11,3δω) est (521,12ω944).

Pour *calculer le quotient de* (238,32) *par* (3,ω), on multiplie le dividende et le diviseur par (100), ce qui ne change pas le quotient (n° **199**). La question est ainsi réduite à diviser (23832) par (3ω0). En opérant d'une manière analogue à celle qui a été indiquée dans le n° **349**, on verra que le quotient cherché est (70,δ). Ce quotient est exact, car la multiplication du diviseur (3,ω) par (70,δ) donne le dividende (238,32).

On trouvera d'une manière semblable, en appliquant la règle du n° **136** au système duodécimal, que

$$\left(\frac{7}{300}\right) = (0,024),\quad \left(\frac{27}{\omega\omega}\right) = (0,27\ 27\ 27\ \text{etc.}),$$

$$\left(\frac{7\omega5354}{\omega\omega000}\right) = (8,013\ 67\ 67\ \text{etc.}),\qquad \left(\frac{12\omega4}{\omega\omega0000}\right) = (0,0013\ 07\ 07\ \text{etc.}).$$

Réciproquement, si l'on applique les règles du n° **139** au système duodécimal, on trouvera

$$(0,27\ 27\ 27\ \text{etc.}) = \left(\frac{27}{\omega\omega}\right),$$

$$(8,013\ 67\ 67\ \text{etc.}) = \frac{(801367) - (8013)}{(\omega\omega000)} = \frac{(7\omega5354)}{(\omega\omega000)},$$

$$(0,0013\ 07\ 07\ 07\ \text{etc.}) = \frac{(1307) - (13)}{(\omega\omega0000)} = \frac{(12\omega4)}{(\omega\omega0000)},$$

$$(0,\omega\omega\omega\omega\ \text{etc.}) = \left(\frac{\omega}{\omega}\right) = 1,\quad (0,0\omega\omega\omega\ \text{etc.}) = \left(\frac{\omega}{\omega0}\right) = (0,1);\ \text{etc.}$$

* **352.** Les règles du n° **144**, appliquées au système duodécimal, serviront à *reconnaître si la division du numérateur d'une fraction par son dénominateur conduirait à un quotient exact, ou à un quotient périodique simple, ou à un quotient périodique mixte.*

1°. *Quand le dénominateur est l'unité suivie de plusieurs zéro, on obtient directement le quotient de la division du numérateur par le dénominateur, en écrivant le numérateur, et en séparant par la virgule autant de chiffres sur la droite de ce numérateur qu'il y a de zéro dans le dénominateur.* Ainsi,

$$\left(\frac{347}{100}\right) = (3,47),\ \left(\frac{24}{1000}\right) = (0,024),\ \left(\frac{36}{1000}\right) = (0,036).$$

2°. *Quand le dénominateur n'étant pas l'unité suivie de plusieurs zéro, ne contient que les facteurs premiers 2, 3, de la base douze, la division du*

numérateur par le dénominateur fournit toujours un quotient duodécimal exact; car les puissances successives de la *base* étant

$$(10) = 2^2 \times 3,\ (10)^2 = (100) = 2^4 \times 3^2,\ (10)^3 = (1000) = 2^6 \times 3^3,\ \text{etc.},$$

on voit que pour transformer la fraction donnée en une fraction équivalente dont le dénominateur soit l'unité suivie de plusieurs zéro, il suffit de multiplier les deux termes de la fraction proposée par des puissances de 2 et de 3 telles que dans le nouveau dénominateur, l'exposant du facteur 2 soit double de l'exposant du facteur 3. Ainsi,

$$\left(\frac{7}{200}\right) = \frac{7}{288} = \frac{7}{2^5 \times 3^2} = \frac{7 \times 2 \times 3}{2^6 \times 3^3} = \left(\frac{36}{1000}\right) = (0,036).$$

3°. *Quand le dénominateur contient des facteurs premiers autres que 2 et 3, qui n'entrent pas dans le numérateur, la division du numérateur par le dénominateur conduit nécessairement à un quotient périodique simple ou mixte.*

Soit la fraction $\left(\frac{7}{26}\right)$. Le dénominateur (26)=30, contenant le facteur 5 qui n'entre pas dans le numérateur 7, je dis que la division de 7 par (26) fournira un quotient périodique. En effet, si l'on pouvait obtenir un quotient exact, tel que (0,89) par exemple, on aurait

$$\left(\frac{7}{26}\right) = (0,89) = \left(\frac{89}{100}\right);\ \text{d'où } (89) \times (26) = (100) \times 7,\ (\text{n° } \mathbf{110}).$$

Or, 5 divise (26); 5 devrait donc diviser (100) × 7; mais 5 est premier avec 7; 5 diviserait donc (100) ou (10) × (10); 5 diviserait donc (10), (n° **72**); 5 diviserait donc un des facteurs 2, 3, de (10); ce qui est impossible. La division de 7 par (26), fournira donc un quotient qui se prolongera indéfiniment.

Tous les restes étant moindres que le diviseur (26), on retombera nécessairement sur un reste déjà obtenu, après un nombre de divisions plus petit que (26); et on en conclura, par des raisonnemens analogues à ceux du n° **137**, que le quotient sera périodique. Et en effet, la division de 7 par (26), donne le quotient périodique mixte (0,2 9724 9724 etc.).

4°. *Lorsque le dénominateur ne renferme aucun des facteurs 2, 3, de la base douze, la division du numérateur par le dénominateur fournit un quotient périodique simple.*

En effet, soit la fraction $\left(\frac{10\omega}{4\omega7}\right)$; son dénominateur (4ω7) = 715, ne renfermant aucun des facteurs 2, 3, de la base 12, je dis que la division de (10ω) par (4ω7) donnera un quotient périodique simple. Le quotient étant nécessairement périodique (3°), il suffit de faire voir que la division de (10ω) par (4ω7) ne saurait fournir un quotient périodique mixte, tel que (0,5 89 89 etc.) par exemple.

Si l'on avait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = (0{,}5\ 89\ 89 \text{ etc.})$,

il en résulterait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = \left(\frac{589 - 5}{\omega\omega 0}\right)$, (nº **139**, 3º);

et par suite $(10\omega) \times (\omega\omega 0) = (4\omega 7) \times [(589) - 5]$, (nº **140**).

Or, $(\omega\omega 0)$ est divisible par (10); (10) diviserait donc le produit de $(4\omega 7)$ par $(589) - 5$. D'ailleurs, (10) est premier avec $(4\omega 7)$, car on suppose que le dénominateur $(4\omega 7)$ ne renferme aucun des facteurs 2, 3, de (10); le nombre (10) diviserait donc $(589) - 5$; le 1er chiffre à droite du nombre que l'on obtient en retranchant 5 de (589) serait donc un zéro (nº **55**, 1º); ce qui est impossible. La période commencera donc au premier chiffre après la *virgule*. Et en effet, la division de (10ω) par $(4\omega 7)$ fournit le quotient périodique simple (0,27 27 27 27 etc.).

5º. Enfin, *quand la fraction proposée est irréductible, si le dénominateur renferme des facteurs 2, 3, de la base douze, combinés avec d'autres facteurs premiers, la division du numérateur par le dénominateur fournit un quotient périodique mixte.*

Pour fixer les idées, considérons la fraction irréductible $\left(\frac{7}{26}\right)$. Le dénominateur étant égal à $2 \times 3 \times 5$, je dis que la division de 7 par (26) donnera un quotient périodique mixte. En effet; d'après (3º), le quotient sera nécessairement périodique; il suffit donc de prouver qu'on ne peut obtenir un quotient périodique simple, tel que (0,89 89 89 etc.) par exemple. Si l'on avait

$$\left(\frac{7}{26}\right) = (0{,}89\ 89\ 89 \text{ etc.}) = \left(\frac{89}{\omega\omega}\right), \text{ (nº 139, 2º)},$$

il en résulterait $(89) \times (26) = 7 \times (\omega\omega)$, (nº **140**).

Or, 3 divise (26); 3 diviserait donc $7 \times (\omega\omega)$. Mais, la fraction donnée étant irréductible, le facteur 3 du dénominateur est premier avec le numérateur 7; 3 devrait donc diviser $(\omega\omega)$ ou $(10)^2 - 1$; d'ailleurs 3 divise $(10)^2$; 3 diviserait donc la différence 1 entre $(10)^2$ et $(10)^2 - 1$, (nº **54**, 2º); ce qui est impossible. On obtiendra donc un quotient périodique mixte. Et en effet, ce quotient est (0,2 9724 9724 etc.).

* **353**. Pour *déterminer le reste de la division d'un nombre par la base douze diminuée ou augmentée de* 1, *c'est-à-dire par onze ou par treize*, il suffit d'avoir recours aux règles des nºs **57**, **59**, et d'y remplacer les nombres *neuf* et *onze*, par *onze* et *treize*.

Ainsi, le reste de la division de (234) par onze est 2+3+4 ou 9; le reste de la division de $(7\omega 5354)$ par treize est $(4+3+\omega) - (5+5+7)$, ou $(16) - (15)$, ou 1; le reste de la division de $(7\omega 53540)$ par treize est

$(5+5+7) + (11) - (4+3+\omega)$, ou $(15) + (11) - (16)$, ou $(26) - (16)$, ou (10).

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.	POIDS.	Gram.
Ancien pied français	324,7	Liv. poids de marc	489,2
Pied anglais	304,8	Angl. { livre troy	372,6
Vare de Castille	836,6	Angl. { avoir du pois	453,1
Pied du Rhin	313,9	Castille	459,4
De Vienne	316,0	Cologne	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienne	558,6
De Suède	297,1	Amsterdam	491,4
De Russie	354,1	Suède	424,6
De la Chine	320,0	Russie	409,5

TABLEAU de comparaison des monnaies étrangères avec les monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication.

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ANGLETERRE.			
Or.	Guinée de 21 shillings	8g380	917	26f 47c
	Demi	4,190	917	13 23,50
	Un quart	2,095	917	6 61,75
	Un tiers, ou 7 shillings	2,793	917	8 82,33
	Souverain depuis 1818, de 20 shillings	7,981	917	25 21
Arg.	Crown, ou couronne de 5 shill. anciens	30,074	925	6 16
	Shilling ancien	6,015	925	1 24
	Crown, ou couronne, depuis 1818	28,251	925	5 81
	Shilling, depuis 1818	5,650	925	1 16
	AUTRICHE ET BOHÊME.			
Or.	Ducat de l'Empereur	3,490	986	11 85
	Ducat de Hongrie	3,491	984	11 91
	Souverain	5,567	917	17 58
	Demi	2,783	917	8 79
Arg	Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753	28,064	833	5 19
	Demi-risdale, ou florin	14,032	833	2 60
	Vingt kreutzers	6,639	581	0 86
	Dix kreutzers	3,898	500	0 43
	BADE.			
Or	Pièce de 10 florins, depuis 1819	6,878	902	21 04
	—— de 5 florin	3,439	902	10 52
Arg.	Pièce de 3 florins. nouveaux	32,795	871	6 35
	—— de 2 florins	25,450	750	4 18
	—— de 1 florin	12,725	750	2 09

Si l'on avait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = (0{,}5\;89\;89 \text{ etc.})$,

il en résulterait $\left(\frac{10\omega}{4\omega 7}\right) = \left(\frac{589 - 5}{\omega\omega 0}\right)$, (n° **139**, 3°);

et par suite $(10\omega) \times (\omega\omega 0) = (4\omega 7) \times [(589) - 5]$, (n° **110**).

Or, $(\omega\omega 0)$ est divisible par (10); (10) diviserait donc le produit de $(4\omega 7)$ par $(589) - 5$. D'ailleurs, (10) est premier avec $(4\omega 7)$, car on suppose que le dénominateur $(4\omega 7)$ ne renferme aucun des facteurs 2, 3, de (10); le nombre (10) diviserait donc $(589) - 5$; le 1er chiffre à droite du nombre que l'on obtient en retranchant 5 de (589) serait donc un zéro (n° **55**, 1°); ce qui est impossible. La période commencera donc au premier chiffre après la *virgule*. Et en effet, la division de (10ω) par $(4\omega 7)$ fournit le quotient périodique simple $(0{,}27\;27\;27\;27$ etc.$)$.

5°. Enfin, *quand la fraction proposée est irréductible, si le dénominateur renferme des facteurs 2, 3, de la base douze, combinés avec d'autres facteurs premiers, la division du numérateur par le dénominateur fournit un quotient périodique mixte.*

Pour fixer les idées, considérons la fraction irréductible $\left(\frac{7}{26}\right)$. Le dénominateur étant égal à $2 \times 3 \times 5$, je dis que la division de 7 par (26) donnera un quotient périodique mixte. En effet; d'après (3°), le quotient sera nécessairement périodique; il suffit donc de prouver qu'on ne peut obtenir un quotient périodique simple, tel que $(0{,}89\;89\;89$ etc.$)$ par exemple. Si l'on avait

$$\left(\frac{7}{26}\right) = (0{,}89\;89\;89 \text{ etc.}) = \left(\frac{89}{\omega\omega}\right), \text{ (n° 139, 2°)},$$

il en résulterait $(89) \times (26) = 7 \times (\omega\omega)$, (n° **110**).

Or, 3 divise (26); 3 diviserait donc $7 \times (\omega\omega)$. Mais, la fraction donnée étant irréductible, le facteur 3 du dénominateur est premier avec le numérateur 7; 3 devrait donc diviser $(\omega\omega)$ ou $(10)^2 - 1$; d'ailleurs 3 divise $(10)^2$; 3 diviserait donc la différence 1 entre $(10)^2$ et $(10)^2 - 1$, (n° **54**, 2°); ce qui est impossible. On obtiendra donc un quotient périodique mixte. Et en effet, ce quotient est $(0{,}2\;9724\;9724$ etc.$)$.

* **353**. Pour *déterminer le reste de la division d'un nombre par la base douze diminuée ou augmentée de* 1, *c'est-à-dire par onze ou par treize*, il suffit d'avoir recours aux règles des nos **57**, **59**, et d'y remplacer les nombres *neuf* et *onze*, par *onze* et *treize*.

Ainsi, le reste de la division de (234) par onze est $2+3+4$ ou 9; le reste de la division de $(7\omega 5354)$ par treize est $(4+3+\omega) - (5+5+7)$, ou $(16) - (15)$, ou 1; le reste de la division de $(7\omega 53540)$ par treize est

$(5+5+7) + (11) - (4+3+\omega)$, ou $(15) + (11) - (16)$, ou $(26) - (16)$, ou (10).

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE

COMPARAISON *de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises.*

MESURES LINÉAIRES.	Millim.	POIDS.	Gram.
Ancien pied français	324,7	Liv. poids de marc	489,2
Pied anglais	304,8	Angl. { livre troy	372,6
Vare de Castille	836,6	Angl. { avoir du pois	453,1
Pied du Rhin	313,9	Castille	459,4
De Vienne	316,0	Cologne	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienne	558,6
De Suède	297,1	Amsterdam	491,4
De Russie	354,1	Suède	424,6
De la Chine	320,0	Russie	409,5

TABLEAU de comparaison des monnaies étrangères avec les monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication.

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ANGLETERRE.			
Or.	Guinée de 21 shillings	8g380	917	26f 47c
	Demi	4,190	917	13 23,50
	Un quart	2,095	917	6 61,75
	Un tiers, ou 7 shillings	2,793	917	8 82,33
	Souverain depuis 1818, de 20 shillings	7,981	917	25 21
Arg.	Crown, ou couronne de 5 shill. anciens	30,074	925	6 16
	Shilling ancien	6,015	925	1 24
	Crown, ou couronne, depuis 1818	28,251	925	5 81
	Shilling, depuis 1818	5,650	925	1 16
	AUTRICHE ET BOHÊME.			
Or.	Ducat de l'Empereur	3,490	986	11 85
	Ducat de Hongrie	3,491	984	11 91
	Souverain	5,567	917	17 58
	Demi	2,783	917	8 79
Arg	Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753	28,064	833	5 19
	Demi-risdale, ou florin	14,032	833	2 60
	Vingt kreutzers	6,639	581	0 86
	Dix kreutzers	3,898	500	0 43
	BADE.			
Or	Pièce de 10 florins, depuis 1819	6,878	902	21 04
	—— de 5 florin	3,439	902	10 52
Arg.	Pièce de 3 florins. nouveaux	32,795	871	6 35
	—— de 2 florins	25,450	750	4 18
	—— de 1 florin	12,725	750	2 09

Métal	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit légal.	Valeurs.
	BAVIÈRE.			
Or.	Ducat de Bavière de 1764 à 1800	3g490	986	11f85c
	Carolin	9,744	771	25 66
	Maximilien	6,496	771	17 18
Arg.	Couronne	29,540	872	5 72
	Risdale de 1800	28,064	833	5 19
	Teston ou kopfstuck	6,643	533	0 86
	BELGIQUE.			
Or.	20 francs	6,452	900	20,00
	40 francs	12,903	900	40,00
Arg.	$\frac{1}{4}$ de franc	1,25	900	0,25
	$\frac{1}{2}$ de franc	2,50	900	0,50
	1 franc	5,00	900	1,00
	2 francs	10,00	900	2,00
	5 francs	25,00	900	5,00
	DANEMARCK ET HOLSTEIN.			
Or.	Ducat courant depuis 1767	3,143	875	9 47
	Ducat spécies, 1791 à 1802	3,519	979	11 86
	Chrétien, 1773	6,735	903	20 95
Arg.	Risdale d'espèce, ou double écu de 96 schellings danois, de 1776	29,126	875	5 66
	Risdale, ou pièce de 6 m. Dan. de 1750	26,800	833	4 96
	Mark danois de 16 schellings, de 1776	» »	688	» »
	ESPAGNE.			
Or.	Pistole ou doublon de 8 écus, 1772 à 1786	27,045	901	83 93
	—— de 4 écus	13,5225	901	41 96,50
	—— de 2 écus	6,7613	901	20 98,25
	Demi-pistole, ou écu	3,3806	901	10 49,12
	Pistole ou doublon de 8 écus, depuis 1786	27,045	875	81 51
	—— de 4 écus	13,5225	875	40 75,50
	—— de 2 écus	6,7613	875	20 37,75
	Demi-pistole ou écu	3,3806	875	10 18,87
Arg.	Piastre, depuis 1772	27,045	903	5 43
	Réal de 2, ou piécette, ou cinquième de piastre.	5,971	813	1 08
	Réal de 1, ou demi-piécette, ou 10e de piastre	2,9855	813	0 54
	Réallillo, ou réal de veillon, ou 20e de piastre.	1,4928	813	0 27
	Nota. Ces trois dernières pièces sont dénommées *monnaie provinciale*; elles sont fabriquées en Espagne et n'ont cours que dans la péninsule.			
	ÉTAT ECCLÉSIASTIQUE.			
Or.	Pistoles de Pie VI et Pie VII	5,471	917	17 27,50
	Demi	2,7355	$916\frac{2}{3}$	8 63,75
	Sequin, 1769, Clément XIV et ses successeurs.	3,426	1000	11 80
	Demi	1,713	1000	5 90
Arg.	Ecu de 10 pauls, ou 100 bayoques	26,437	917	5 41
	Trois dixièmes d'écu, ou teston de 30 bayoques.	7,932	916	1 62
	Un cinquième d'écu, ou papeto de 20 bayoq.	5,287	916	1 08
	Un dixième d'écu, ou paul de 10 bayoques	2,644	916	0 54

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE.			
Or.	Double aigle de 10 dollars	17g480	917	55f21c
	Aigle de 5 dollars	8,740	917	27 60,50
	Demi-aigle, ou $2\frac{1}{2}$ dollars	4,370	917	13 80,25
Arg.	Dollar	27,000	903	5 42
	Demi	13,500	903	2 71
	Un quart	6,750	903	1 35,50
	HAMBOURG.			
Or.	Ducat *ad legem imperii*	3,490	986	11 85
	Ducat nouveau de la ville	3,488	979	11 76
	Marc banco (*monnaie imaginaire*)	» »	» »	1 88
Arg.	Marc ou 16 schell., d'après la convent. de Lubeck.	9,164	750	1 53
	Risdale de constitution, ou écu d'espèce	29,233	889	5 78
	HOLLANDE.			
Or.	Ducat de Hollande	3,482	982	11 78
	—— de Guillaume	3,490	986	11 85
	10 florins	6,729	900	20 8599
	5 florins	3,364	900	10 4299
Arg.	$\frac{1}{20}$ florin ou 5 cents	0,846	569	0 11
	$\frac{1}{10}$ florin ou 10 cents	1,692	569	0 21
	$\frac{1}{4}$ florin ou 25 cents	4,230	569	0 53
	$\frac{1}{2}$ florin ou 50 cents	5,383	893	1 07
	1 florin ou 100 cents	10,766	893	2 14
	3 florins	32,298	893	6 42
	JAPON.			
	(*Par approximation, et faute de renseignem. précis sur le poids et le titre légal des monn.*)			
Or.	Kobang vieux de 100 mas	» »	»	51 24
	Demi-kobang de 50 mas	» »	»	25 62
	—— nouveau de 100 mas	» »	»	39 69
	Demi —— de 50 mas	» »	»	16 34
	Tigo-gin, ou pièce de 40 mas	» »	»	14 40
	Demi de 20 mas	» »	»	7 20
Arg.	Un quart de 10 mas	» »	»	3 60
	Un huitième de 5 mas	» »	»	1 80
	LOMBARDO-VÉNITIEN (Royaume).			
Or.	Souverain depuis 1823	11,332	900	35 13
	Demi ou 20 liv. d'Autriche	5,666	900	17 56
Arg.	Ecu de 6 liv. d'Autriche	25,986	900	5 20
	Demi-Ecu ou 1 florin	12,993	900	2 60
	Livre d'Autriche	4,331	900	0 86
	MOGOL. (*Par approximation.*)			
Or.	Roupie aux signes du Zodiaque	10,889	1000	37 51
	Demie	» »	»	18 75
	Un quart	» »	»	9 37
	Pagode au croissant	« »	»	9 46
	—— à l'étoile	» »	»	9 35
	Ducat de la Compagnie hollandaise	» »	»	11 62
	Demi	» »	»	5 81

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Titre légal.	Valeurs.
	MOGOL. (Suite.)			
Arg.	Roupie du Mogol	» »	»	2f 42c
	—— de Madras	» »	»	2 40
	—— d'Arcate	» »	»	2 36
	—— de Pondichéry	» »	»	2 42
	Double fanon des Indes	» »	»	0 63
	Fanon	» »	»	0 31
	Pièce de la Compagnie hollandaise	» »	»	2 40
	NAPLES.			
Or.	6 ducats ou doppia de 60 carlins (don Carlos).	6g 799	894	26 59
	—— de Ferdinand IV	6,452	845	25 61
	Pièce de 20 francs (Murat)	» »	900	20 »
	Once nouveau de 3 ducats, depuis 1818	3,787	996	12 99
	Quintuple de 15 ducats, depuis 1818	18,933	996	64 95
	Décuple de 30 ducats, depuis 1818	37,867	996	129 91
Arg.	12 carlins de 120 grains, depuis 1804	27,533	833	5 10
	Ducats de 10 carlins de 100 grains, 1784	22,749	838	4 24
	2 carlins, depuis 1804	4,589	833	0 85
	1 carlin, depuis 1804	2,2945	833	0 42,5
	Ducat de 10 carlins, de 1818	22,943	833	4 24
	PARME.			
Or.	Sequin	3,468	1000	11 95
	Pistole de 1784	7,498	891	23 01
	Pistole de 1786 à 1791	7,141	891	21 91,50
	40 lire de Marie-Louise, depuis 1815	12,903	900	40 »
	20 lire de Marie-Louise, depuis 1815	6,451	900	20 »
Arg.	Ducat de 1784 et 1796	25,707	906	5 18
	Pièce de 3 livres, depuis 1790	3,672	833	0 68
	—— d'une livre 10 sous, depuis 1790	1,836	833	0 34
	5 lire de Marie-Louise, depuis 1815	25,000	900	5 »
	2 lire, 1 lira, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de lira, à proportion	» »	»	» »
	PERSE. (*Par approximation.*)			
Or.	Roupie	» »	»	36 75
	Demie	» »	»	18 37
	Double roupie de 5 abassis	» »	»	4 90
Arg.	Roupie de 2 $\frac{1}{2}$ abassis	» »	»	2 45
	Abassi	» »	»	0 97
	Mamoudi	» »	»	0 48,
	Larin	» »	»	1 03
	PORTUGAL.			
Or.	Moeda douro, lisbonnine de 4800 reis	10,752	917	33 96
	Meia moeda, demi-lisbonnine 2400 reis	5,376	917	16 98
	Quartinho, quart de lisbonnine, de 1200 reis	2,688	917	8 49
	Meia dobra, portugaise de 6400 reis	14,334	917	45 27
	Demi-portugaise de 3200 reis	7,167	917	22 63
	Pièce de 16 testons de 1600 reis	3,583	917	11 31
	—— de 12 testons de 1200 reis	2,538	917	8 02
	—— de 8 testons de 800 reis	1,792	917	5 66

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	PORTUGAL. (Suite.)			
Arg.	Cruzade de 480 reis	1,062	917	3 35
	Cruzade neuve de 480 reis	14,633	903	2 94
	1000 reis	» »	»	6 12
	PRUSSE.			
Or.	Ducat fin	3,490	986	11 85
	Frédéric	6,682	903	20 78
	Demi	3,341	903	10 39
Arg.	Risdale ou thaler de 30 silbergros, de 1823	22,272	750	3 71
	Pièce de 5 silbergros	3,712	750	0 61
	Silbergros, valeur intrinsèque	2,192	208	0 11
	RAGUSE.			
Or.	*Néant.*			
Arg.	Talaro, dit ragusine	29,400	600	3 90
	Demi	14,700	600	1 95
	Ducat	13,666	450	1 37
	12 grossettes	4,140	450	0 41
	6 grossettes	2,070	450	0 20 50
	RUSSIE.			
Or.	Ducat de 1755 à 1763	3,495	979	11 78
	—— de 1763	3,473	969	11 59
	Impériale de 10 roubles, de 1755 à 1763	16,585	917	52 38
	Demie de 5 roubles, de 1755 à 1763	8,2925	917	26 19
	Impériale de 10 roubles, depuis 1763	13,072	917	41 29
	Demie de 5 roubles, depuis 1763	6,5365	917	20 64,50
Arg.	Rouble de 100 copecks, de 1750 à 1762	25,870	802	4 61
	—— depuis 1763 à 1807	24,011	750	4 0
	SARDAIGNE.			
Or.	Carlin, depuis 1768	16,056	892	49
	Demi	8,028	892	24 66
	Pistole	9,118	906	28 45
	Demie	4,559	906	14 22
Arg.	Ecu, depuis 1768	23,590	896	4 70
	Demi-écu	11,795	896	2 35
	Quart d'écu, ou une livre	5,8975	896	1 17
	Ecu neuf de 5 livres, 1816	25,000	900	5 0
	SAVOIE ET PIÉMONT.			
Or.	Sequin à l'annonciade	3,452	995	11 84
	Double neuve pistole de 24 livres	9,620	906	30 02
	Demie de 12 livres	4,810	906	15 0
	Carlin depuis 1755	48,100	906	150 10
	Demi	24,050	906	75 05
	Pistole neuve de 20 livres, de 1816	6,452	900	20 0
Arg.	Ecu de 6 livres, depuis 1755	35,169	906	7 08
	Demi-écu	17,584	906	3 54
	Un quart, ou 30 sous	8,792	906	1 77
	Demi-quart, ou 15 sous	4,3897	906	0 88
	Ecu neuf de 5 livres, 1816	25 »	900	5 0

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	SAXE.			
Or.	Ducat	$3^{g}490$	986	$11^{f}\ 85^{c}$
	Double Auguste, ou 10 thalers	13,340	903	41 49
	Auguste, ou 5 thalers	6,670	903	20 75
	Demi-Auguste	3,335	903	10 37,25
Arg.	Risdale d'espèce, ou écu de convent., depuis 1763	28,064	833	5 19,50
	Demi, ou florin de convention	14,032	833	2 59,75
	Thaler de 24 bons gros (monnaie imaginaire.)	» »	»	3 90
	Un gros ou 32^{e} de risdale, ou 24^{e} de thaler	1,982	368	0 16,21
	SICILE.			
Or.	Once, depuis 1748	4,399	906	13 73
Arg.	Ecu de 12 tarins	27,533	833	5 10
	SUÈDE.			
Or.	Ducat	3,482	976	11 70
	Demi	1,741	976	5 85
	Quart	0,870	976	2 92,50
Arg.	Risdale d'espèce de 48 schell., de 1720 à 1802	29,508	878	5 75,73
	2 tiers de risdale, ou double plotte de 32 schell.	19,672	878	3 83,82
	Un tiers, ou 16 schellings	9,836	878	1 91,91
	SUISSE.			
Or.	Pièce de 32 franken de Suisse	15,297	904	47 63
	— de 16	7,648	904	23 81,50
	Ducat de Zurich	3,491	979	11 77
	— de Berne	3,452	979	11 64
	Pistole de Berne	7,648	902	23 76
Arg.	Ecu de Bâle de 30 batz, ou 2 florins	23,386	878	4 56
	Demi-écu, ou florin de 15 batz	11,693	878	2 28
	Franc de Berne, depuis 1803	7,512	900	1 50
	Ecu de Zurick, de 1781	25,057	844	4 70
	Demi, ou florin, depuis 1781	12,528	844	2 35
	Ecu de 40 batz de Bâle et Soleure, depuis 1798	29,480	901	5 90
	Pièce de 4 franken de Berne, de 1799	29,370	901	5 88
	— de 4 franken de Suisse, en 1803	30,049	900	6 0
	— de 2 franken de Suisse, en 1803	15,025	900	3 0
	— d'un franken de Suisse, en 1803	7,512	900	1 50
	TOSCANE.			
Or.	Ruspone, ou 3 sequins aux lis	10,464	1000	36 04
	Un tiers ruspone, ou sequin aux lis	3,488	1000	12 01,33
	Demi-sequin	1,744	1000	6 00,67
	Sequin à l'effigie	3,488	1000	12 01,33
	Rosine	6,976	896	21 54
	Demie	3,488	896	10 77
Arg.	Francescone de 10 paoli, livournine, piastre à la rose, talaro, léopoldine et écu de 10 paoli	27,507	917	5 61
	Pièce de 5 paoli	13,753	917	2 80,50
	— de 2 paoli	5,501	917	1 12,20
	— de 1 paoli	2,751	917	0 56,10

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	TURQUIE.			
Or.	Sequin zermahboub d'Abdoul-Hamid, 1774	$2^{g}642$	958	8 72
	Nisfie, ou $\frac{1}{2}$ zermahboub *idem*	1,321	958	4 36
	Roubbych, ou $\frac{1}{3}$ de sequin fondoukli	0,881	802	2 43,33
	Sequin zermahboub de Sélim III	2,642	802	7 30
	Demi	1,321	802	3 65
Arg.	Un quart	0,661	802	1 82,50
	L'allmichlec de 60 paras, depuis 1771	28,882	550	3 53
	Yaremlec de 20 paras, ou 60 aspres, 1757	» »	»	0 99
	Roub de 10 paras, ou 30 aspres, 1757	» »	»	0 49,50
	Para de 3 aspres, 1773	» »	»	0 04
	Aspre, dont 120 pour la piastre de 1773	» »	»	0 01,33
	Piastre de 40 paras, ou 120 aspres, 1780	18,015	500	2 0
	Pièce de 5 piastres de Mahmoud, 1811	» »	»	4 14

TABLE pour réduire les mesures *linéaires* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Lieues terrestr. en kilom. *	Lieues marines en kilom. **	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	N.	Aunes en mètres. ***	N.	Fractions d'aune en mètres.	N.	Fractions d'aune en mètres.	N.	Fractions d'aune en mètres.
1	4,4444	5,5556	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1	1,18845	1/2	0,594	5/8	0,743	7/16	0,520
2	8,8889	11,1111	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2	2,37689	1/3	0,396	7/8	1,040	9/16	0,668
3	13,3333	16,6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768	3	3,56534	2/3	0,792	1/12	0,099	11/16	0,817
4	17,7778	22,2222	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024	4	4,75378	1/4	0,297	5/12	0,495	13/16	0,966
5	22,2222	27,7778	9,74519	1,62420	0,135350	0,011280	5	5,94223	3/4	0,891	7/12	0,693	15/16	1,114
6	26,6667	33,3333	11,69422	1,94904	0,162419	0,013536	6	7,13068	1/6	0,198	11/12	1,089		
7	31,1111	38,8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792	7	8,31912	5/6	0,990	1/16	0,074		
8	35,5556	44,4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048	8	9,50757	1/8	0,149	3/16	0,223		
9	40,0000	50,0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,020304	9	10,69601	3/8	0,446	5/16	0,371		
10	44,4444	55,5556	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560	10	11,88446						

N.	Kilom. en lieues terrestres.	Kilom. en lieues mar.	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	N.	Mètres en aunes de Paris.
1	0,225	0,18	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	1	0,84144
2	0,450	0,36	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	2	1,68287
3	0,675	0,54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431
4	0,900	0,72	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	4	3,36574
5	1,125	0,90	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	5	4,20718
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775	6	5,04861
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148
9	2,025	1,62	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663	9	7,57292
10	2,250	1,80	5,13074	30,78444	369,4133	4432,959	10	8,41435

* La lieue de 25 au degré vaut 2280 ^{tois},33.

** La lieue marine de 20 au degré vaut 2850 ^{tois},41.

*** L'aune de Paris vaut 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$.

TABLE pour réduire les mesures *quarrées* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Toises quarr. en mètres quarr.	Pieds quarr. en mètres quarr.	Pouces quarr. en mètres quarr.	Lignes quarr. en mètres quarr.	N.	Lieues quarrées en myriamètres quarrés.	Lieues quarrées en myriares.	Arp. Eaux et For. en hec. ou perches quarrées en ares.	Arp. de Paris en hect. ou perch. quarrées en ares.
1	3,798744	0,105521	0,00073278	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597487	0,211041	0,00146556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396231	0,316562	0,00219834	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	1,532160	1,025661
4	15,194975	0,422083	0,00293112	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	18,993718	0,527604	0,00366390	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	22,792462	0,633124	0,00439668	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051322
7	26,591205	0,738645	0,00512946	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	30,389949	0,844166	0,00586224	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	34,188693	0,949686	0,00659502	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	37,987436	1,055207	0,00732780	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

N.	Mètres quarr. en toises quarr.	Mètres quarr. en pieds quarrés	Mètres quarr. en pouces quarr.	Mètres quarr. en lignes quarr.	N.	Myriamètres quarrés en lieues quarrées.	Myriares en lieues quarrées.	Hectares en arp. Eaux et F. ou ares en perch. quarr.	Hect. en arp. de Paris, ou ares en perch. quarr.
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,050625	1,958020	2,924943
2	0,526490	18,95363	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	0,789735	28,43045	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	1,052980	37,90726	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	1,316225	47,38408	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	1,842714	66,33771	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706140	20,474601
8	2,105959	75,81453	10917,30	1572090	8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	2,369204	85,29134	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622180	26,324487
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113	10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

TABLE pour réduire les mesures *cubiques* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Toises cubes en mètres cubes.	Pieds cubes en mètres cubes.	Pouces cubes en mètres cubes.	Lignes cubes en mètres cubes.	N.	Cordes de bois, Eaux et Forêts, en stères.	Solives (charpente) en stères ou mètres cubes.
1	7,40389	0,0342773	0,000019836	0,00000001148	1	3,8391	0,10283
2	14,80778	0,0685545	0,000039673	0,00000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,21167	0,1028318	0,000059509	0,00000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,61556	0,1371090	0,000079346	0,00000004592	4	15,3562	0,41133
5	37,01945	0,1713863	0,000099182	0,00000005740	5	19,1953	0,51416
6	44,42334	0,2056636	0,000119018	0,00000006888	6	23,0343	0,61699
7	51,82723	0,2399408	0,000138855	0,00000008036	7	26,8734	0,71982
8	59,23112	0,2742181	0,000158691	0,00000009184	8	30,7124	0,82265
9	66,63501	0,3084953	0,000178528	0,00000010332	9	34,5515	0,92549
10	74,03890	0,3427726	0,000198364	0,00000011480	10	38,3905	1,02832

N.	Mètres cubes en toises cubes.	Mètres cubes en pieds cubes.	Mètres cubes en pouces cubes.	Mètres cubes en lignes cubes.	N.	Stères en cordes de bois Eaux et Forêts.	Mètres cubes en solives.
1	0,135064	29,1739	50412,42	87112655	1	0,26048	9,7246
2	0,270128	58,3477	100824,83	174225310	2	0,52096	19,4492
3	0,405192	87,5216	151237,25	261337965	3	0,78144	29,1739
4	0,542057	116,6954	201649,66	348450619	4	1,04192	38,8985
5	0,675321	145,8693	252062,08	435563274	5	1,30241	48,6231
6	0,810385	175,0431	302474,50	522675929	6	1,56289	58,3477
7	0,945449	204,2170	352886,91	609788584	7	1,82337	68,0923
8	1,080513	233,3908	403299,33	696901239	8	2,08385	77,7970
9	1,215577	262,5647	453711,74	784013894	9	2,34433	87,5216
10	1,350641	291,7385	504124,16	871126549	10	2,60481	97,2462

TABLE pour réduire les mesures de *capacité* anciennes, en mesures nouvelles, et réciproquement.

N.	Pintes de Paris en litres.	Muids de vin de Paris en hectolitr.	Septiers de blé de Par. en hectolitr.	Boisseaux en litres.	Litrons en litres.
1	0,9313	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,042	4,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302

N.	Litres en pint. de Par.	Hectolit. en muids de vin de Paris.	Hectolit. en sept. de blé de Paris.	Litres en boisseaux.	Litres en litrons.
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9219	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2,5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8642	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4424	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5899	2,9826	5,1250	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7656	0,69187	11,0699
10	10,7374	3,7283	6,4062	0,76874	12,2998

TABLE pour réduire les *poids* anciens en poids nouveaux, et réciproquement.

N.	Livres en kilogramm.	Onces en kilogramm.	Gros en kilogramm.	Grains en kilogramm.	Quintaux en myriagram.
1	0,48951	0,03059	0,003824	0,0000531	4,8951
2	0,97901	0,06119	0,007648	0,0001062	9,7901
3	1,46852	0,09178	0,011472	0,0001593	14,6852
4	1,95802	0,12238	0,015296	0,0002124	19,5802
5	2,44753	0,15297	0,019120	0,0002655	24,4753
6	2,93704	0,18356	0,022944	0,0003186	29,3704
7	3,42654	0,21416	0,026768	0,0003717	34,2654
8	3,91605	0,24475	0,030592	0,0004248	39,1605
9	4,40555	0,27535	0,034416	0,0004779	44,0555
10	4,89506	0,30594	0,038240	0,0005310	48,9506

N.	Kilogramm. en livres.	Kilogramm. en onces.	Kilogramm. en gros.	Kilogramm. en grains.	Myriagram. en quintaux.
1	2,04288	32,686	261,49	18827,15	0,20429
2	4,08575	65,372	522,98	37654,30	0,40858
3	6,12863	98,958	784,46	56481,45	0,61286
4	8,17150	130,744	1045,95	75308,60	0,81715
5	10,21438	163,430	1307,44	94135,75	1,02144
6	12,25726	196,116	1568,93	112962,90	1,22573
7	14,30013	228,802	1830,42	131790,05	1,43001
8	16,34301	261,488	2091,90	150617,20	1,63430
9	18,38588	294,174	2353,39	169444,35	1,83859
10	20,42876	326,860	2614,88	188271,50	2,04288

TABLE

pour réduire des monnaies anciennes en monnaies nouvelles, et réciproquement.

N.	LIVRES EN FRANCS.	SOUS EN FRANCS	DENIERS EN FR.	FRANCS EN LIVRES.
1	0,987 650 942	0,049 382 547	0,004 115 212	1,012 503 463
2	1,975 301 885	0,098 765 094	0,008 230 424	2,025 006 926
3	2,962 952 827	0,148 147 641	0,012 345 636	3,037 510 390
4	3,950 603 770	0,197 530 188	0,016 460 849	4,050 013 853
5	4,938 2[illegible]3	0,246 912 735	0,020 576 061	5,062 517 316
6	5,925 9[illegible]5	0,296 295 282	0,024 691 273	6,075 020 780
7	6,913 556 598	0,345 677 829	0,028 806 485	7,087 524 432
8	7,901 207 541	0,395 060 377	0,032 921 698	8,100 027 706
9	8,888 858 483	0,444 442 924	0,037 036 910	9,112 531 170

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE.

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 9999.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N	Log.
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898	201	30320
2	30103	52	71600	102	00860	152	18184	202	30535
3	47712	53	72428	103	01284	153	18469	203	30750
4	60206	54	73239	104	01703	154	18752	204	30963
5	69897	55	74036	105	02119	155	19033	205	31175
6	77815	56	74819	106	02531	156	19312	206	31387
7	84510	57	75587	107	02938	157	19590	207	31597
8	90309	58	76343	108	03342	158	19866	208	31806
9	95424	59	77085	109	03743	159	20140	209	32015
10	00000	60	77815	110	04139	160	20412	210	32222
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683	211	32428
12	07918	62	79239	112	04922	162	20952	212	32634
13	11394	63	79934	113	05308	163	21219	213	32838
14	14613	64	80618	114	05690	164	21484	214	33041
15	17609	65	81291	115	06070	165	21748	215	33244
16	20412	66	81954	116	06446	166	22011	216	33445
17	23045	67	82607	117	06819	167	22272	217	33646
18	25527	68	83251	118	07188	168	22531	218	33846
19	27875	69	83885	119	07555	169	22789	219	34044
20	30103	70	84510	120	07918	170	23045	220	34242
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300	221	34439
22	34242	72	85733	122	08636	172	23553	222	34635
23	36173	73	86332	123	08991	173	23805	223	34830
24	38021	74	86923	124	09342	174	24055	224	35025
25	39794	75	87506	125	09691	175	24304	225	35218
26	41497	76	88081	126	10037	176	24551	226	35411
27	43136	77	88649	127	10380	177	24797	227	35603
28	44716	78	89209	128	10721	178	25042	228	35793
29	46240	79	89763	129	11059	179	25285	229	35984
30	47712	80	90309	130	11394	180	25527	230	36173
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768	231	36361
32	50515	82	91381	132	12057	182	26007	232	36549
33	51851	83	91908	133	12385	183	26245	233	36736
34	53148	84	92428	134	12710	184	26482	234	36922
35	54407	85	92942	135	13033	185	26717	235	37107
36	55630	86	93450	136	13354	186	26951	236	37291
37	56820	87	93952	137	13672	187	27184	237	37475
38	57978	88	94448	138	13988	188	27416	238	37658
39	59106	89	94939	139	14301	189	27646	239	37840
40	60206	90	95424	140	14613	190	27875	240	38021
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103	241	38202
42	62325	92	96379	142	15229	192	28330	242	38382
43	63347	93	96848	143	15534	193	28556	243	38561
44	64345	94	97313	144	15836	194	28780	244	38739
45	65321	95	97772	145	16137	195	29003	245	38917
46	66276	96	98227	146	16435	196	29226	246	39094
47	67210	97	98677	147	16732	197	29447	247	39270
48	68124	98	99123	148	17026	198	29667	248	39445
49	69020	99	99564	149	17319	199	29885	249	39620
50	69897	100	00000	150	17609	200	30103	250	39794

TABLE

pour réduire des monnaies anciennes en monnaies nouvelles, et réciproquement.

N.	LIVRES EN FRANCS.	SOUS EN FRANCS	DENIERS EN FR.	FRANCS EN LIVRES.
1	0,987 650 942 6,987 650 942	0,049 382 547	0,004 115 212	1,012 503 463
2	1,975 301 885	0,098 765 094	0,008 230 424	2,025 006 926
3	2,962 952 827	0,148 147 641	0,012 345 636	3,037 510 390
4	3,950 603 770	0,197 530 188	0,016 460 849	4,050 013 853
5	4,938 25[illegible]13	0,246 912 735	0,020 576 061	5,062 517 316
6	5,925 9[illegible]5	0,296 295 282	0,024 691 273	6,075 020 780
7	6,913 556 598	0,345 677 829	0,028 806 485	7,087 524 432
8	7,901 207 541	0,395 060 377	0,032 921 698	8,100 027 706
9	8,888 858 483	0,444 442 924	0,037 036 910	9,112 531 170

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE.

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 9999.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N	Log.
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898	201	30320
2	30103	52	71600	102	00860	152	18184	202	30535
3	47712	53	72428	103	01284	153	18469	203	30750
4	60206	54	73239	104	01703	154	18752	204	30963
5	69897	55	74036	105	02119	155	19033	205	31175
6	77815	56	74819	106	02531	156	19312	206	31387
7	84510	57	75587	107	02938	157	19590	207	31597
8	90309	58	76343	108	03342	158	19866	208	31806
9	95424	59	77085	109	03743	159	20140	209	32015
10	00000	60	77815	110	04139	160	20412	210	32222
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683	211	32428
12	07918	62	79239	112	04922	162	20952	212	32634
13	11394	63	79934	113	05308	163	21219	213	32838
14	14613	64	80618	114	05690	164	21484	214	33041
15	17609	65	81291	115	06070	165	21748	215	33244
16	20412	66	81954	116	06446	166	22011	216	33445
17	23045	67	82607	117	06819	167	22272	217	33646
18	25527	68	83251	118	07188	168	22531	218	33846
19	27875	69	83885	119	07555	169	22789	219	34044
20	30103	70	84510	120	07918	170	23045	220	34242
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300	221	34439
22	34242	72	85733	122	08636	172	23553	222	34635
23	36173	73	86332	123	08991	173	23805	223	34830
24	38021	74	86923	124	09342	174	24055	224	35025
25	39794	75	87506	125	09691	175	24304	225	35218
26	41497	76	88081	126	10037	176	24551	226	35411
27	43136	77	88649	127	10380	177	24797	227	35603
28	44716	78	89209	128	10721	178	25042	228	35793
29	46240	79	89763	129	11059	179	25285	229	35984
30	47712	80	90309	130	11394	180	25527	230	36173
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768	231	36361
32	50515	82	91381	132	12057	182	26007	232	36549
33	51851	83	91908	133	12385	183	26245	233	36736
34	53148	84	92428	134	12710	184	26482	234	36922
35	54407	85	92942	135	13033	185	26717	235	37107
36	55630	86	93450	136	13354	186	26951	236	37291
37	56820	87	93952	137	13672	187	27184	237	37475
38	57978	88	94448	138	13988	188	27416	238	37658
39	59106	89	94939	139	14301	189	27646	239	37840
40	60206	90	95424	140	14613	190	27875	240	38021
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103	241	38202
42	62325	92	96379	142	15229	192	28330	242	38382
43	63347	93	96848	143	15534	193	28556	243	38561
44	64345	94	97313	144	15836	194	28780	244	38739
45	65321	95	97772	145	16137	195	29003	245	38917
46	66276	96	98227	146	16435	196	29226	246	39094
47	67210	97	98677	147	16732	197	29447	247	39270
48	68124	98	99123	148	17026	198	29667	248	39445
49	69020	99	99564	149	17319	199	29885	249	39620
50	69897	100	00000	150	17609	200	30103	250	39794

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
251	39967	301	47857	351	54531	401	60314	451	65418
252	40140	302	48001	352	54654	402	60423	452	65514
253	40312	303	48144	353	54777	403	60531	453	65610
254	40483	304	48287	354	54900	404	60638	454	65706
255	40654	305	48430	355	55023	405	60746	455	65801
256	40824	306	48572	356	55145	406	60853	456	65896
257	40993	307	48714	357	55267	407	60959	457	65992
258	41162	308	48855	358	55388	408	61066	458	66087
259	41330	309	48996	359	55509	409	61172	459	66181
260	41497	310	49136	360	55630	410	61278	460	66276
261	41664	311	49276	361	55751	411	61384	461	66370
262	41830	312	49415	362	55871	412	61490	462	66464
263	41996	313	49554	363	55991	413	61595	463	66558
264	42160	314	49693	364	56110	414	61700	464	66652
265	42325	315	49831	365	56229	415	61805	465	66745
266	42488	316	49969	366	56348	416	61909	466	66839
267	42651	317	50106	367	56467	417	62014	467	66932
268	42813	318	50243	368	56585	418	62118	468	67025
269	42975	319	50379	369	56703	419	62221	469	67117
270	43136	320	50515	370	56820	420	62325	470	67210
271	43297	321	50651	371	56937	421	62428	471	67302
272	43457	322	50786	372	57054	422	62531	472	67394
273	43616	323	50920	373	57171	423	62634	473	67486
274	43775	324	51055	374	57287	424	62737	474	67578
275	43933	325	51188	375	57403	425	62839	475	67669
276	44091	326	51322	376	57519	426	62941	476	67761
277	44248	327	51455	377	57634	427	63043	477	67852
278	44404	328	51587	378	57749	428	63144	478	67943
279	44560	329	51720	379	57864	429	63246	479	68034
280	44716	330	51851	380	57978	430	63347	480	68124
281	44871	331	51983	381	58092	431	63448	481	68215
282	45025	332	52114	382	58206	432	63548	482	68305
283	45179	333	52244	383	58320	433	63649	483	68395
284	45332	334	52375	384	58433	434	63749	484	68485
285	45484	335	52504	385	58546	435	63849	485	68574
286	45637	336	52634	386	58659	436	63949	486	68664
287	45788	337	52763	387	58771	437	64048	487	68753
288	45939	338	52892	388	58883	438	64147	488	68842
289	46090	339	53020	389	58995	439	64246	489	68931
290	46240	340	53148	390	59106	440	64345	490	69020
291	46389	341	53275	391	59218	441	64444	491	69108
292	46538	342	53403	392	59329	442	64542	492	69197
293	46687	343	53529	393	59439	443	64640	493	69285
294	46835	344	53656	394	59550	444	64738	494	69373
295	46982	345	53782	395	59660	445	64836	495	69461
296	47129	346	53908	396	59770	446	64933	496	69548
297	47276	347	54033	397	59879	447	65031	497	69636
298	47422	348	54158	398	59988	448	65128	498	69723
299	47567	349	54283	399	60097	449	65225	499	69810
300	47712	350	54407	400	60206	450	65321	500	69897

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
501	69984	551	74115	601	77887	651	81358	701	84572
502	70070	552	74194	602	77960	652	81425	702	84634
503	70157	553	74273	603	78032	653	81491	703	84696
504	70243	554	74351	604	78104	654	81558	704	84757
505	70329	555	74429	605	78176	655	81624	705	84819
506	70415	556	74507	606	78247	656	81690	706	84880
507	70501	557	74586	607	78319	657	81757	707	84942
508	70586	558	74663	608	78390	658	81823	708	85003
509	70672	559	74741	609	78462	659	81889	709	85065
510	70757	560	74819	610	78533	660	81954	710	85126
511	70842	561	74896	611	78604	661	82020	711	85187
512	70927	562	74974	612	78675	662	82086	712	85248
513	71012	563	75051	613	78746	663	82151	713	85309
514	71096	564	75128	614	78817	664	82217	714	85370
515	71181	565	75205	615	78888	665	82282	715	85431
516	71265	566	75282	616	78958	666	82347	716	85491
517	71349	567	75358	617	79029	667	82413	717	85552
518	71433	568	75435	618	79099	668	82478	718	85612
519	71517	569	75511	619	79169	669	82543	719	85673
520	71600	570	75587	620	79239	670	82607	720	85733
521	71684	571	75664	621	79309	671	82672	721	85794
522	71767	572	75740	622	79379	672	82737	722	85854
523	71850	573	75815	623	79449	673	82802	723	85914
524	71933	574	75891	624	79518	674	82866	724	85974
525	72016	575	75967	625	79588	675	82930	725	86034
526	72099	576	76042	626	79657	676	82995	726	86094
527	72181	577	76118	627	79727	677	83059	727	86153
528	72263	578	76193	628	79796	678	83123	728	86213
529	72346	579	76268	629	79865	679	83187	729	86273
530	72428	580	76343	630	79934	680	83251	730	86332
531	72509	581	76418	631	80003	681	83315	731	86392
532	72591	582	76492	632	80072	682	83378	732	86451
533	72673	583	76567	633	80140	683	83442	733	86510
534	72754	584	76641	634	80209	684	83506	734	86570
535	72835	585	76716	635	80277	685	83569	735	86629
536	72916	586	76790	636	80346	686	83632	736	86688
537	72997	587	76864	637	80414	687	83696	737	86747
538	73078	588	76938	638	80482	688	83759	738	86806
539	73159	589	77012	639	80550	689	83822	739	86864
540	73239	590	77085	640	80618	690	83885	740	86923
541	73320	591	77159	641	80686	691	83948	741	86982
542	73400	592	77232	642	80754	692	84011	742	87040
543	73480	593	77305	643	80821	693	84073	743	87099
544	73560	594	77379	644	80889	694	84136	744	87157
545	73640	595	77452	645	80956	695	84198	745	87216
546	73719	596	77525	646	81023	696	84261	746	87274
547	73799	597	77597	647	81090	697	84323	747	87332
548	73878	598	77670	648	81158	698	84386	748	87390
549	73957	599	77743	649	81224	699	84448	749	87448
550	74036	600	77815	650	81291	700	84510	750	87506

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
751	87564	801	90363	851	92993	901	95472	951	97818
752	87622	802	90417	852	93044	902	95521	952	97864
753	87679	803	90472	853	93095	903	95569	953	97909
754	87737	804	90526	854	93146	904	95617	954	97955
755	87795	805	90580	855	93197	905	95665	955	98000
756	87852	806	90634	856	93247	906	95713	956	98046
757	87910	807	90687	857	93298	907	95761	957	98091
758	87967	808	90741	858	93349	908	95809	958	98137
759	88024	809	90795	859	93399	909	95856	959	98182
760	88081	810	90849	860	93450	910	95904	960	98227
761	88138	811	90902	861	93500	911	95952	961	98272
762	88195	812	90956	862	93551	912	95999	962	98318
763	88252	813	91009	863	93601	913	96047	963	98363
764	88309	814	91062	864	93651	914	96095	964	98408
765	88366	815	91116	865	93702	915	96142	965	98453
766	88423	816	91169	866	93752	916	96190	966	98498
767	88480	817	91222	867	93802	917	96237	967	98543
768	88536	818	91275	868	93852	918	96284	968	98588
769	88593	819	91328	869	93902	919	96332	969	98632
770	88649	820	91381	870	93952	920	96379	970	98677
771	88705	821	91434	871	94002	921	96426	971	98722
772	88762	822	91487	872	94052	922	96473	972	98767
773	88818	823	91540	873	94101	923	96520	973	98811
774	88874	824	91593	874	94151	924	96567	974	98856
775	88930	825	91645	875	94201	925	96614	975	98900
776	88986	826	91698	876	94250	926	96661	976	98945
777	89042	827	91751	877	94300	927	96708	977	98989
778	89098	828	91803	878	94349	928	96755	978	99034
779	89154	829	91855	879	94399	929	96802	979	99078
780	89209	830	91908	880	94448	930	96848	980	99123
781	89265	831	91960	881	94498	931	96895	981	99167
782	89321	832	92012	882	94547	932	96942	982	99211
783	89376	833	92065	883	94596	933	96988	983	99255
784	89432	834	92117	884	94645	934	97035	984	99300
785	89487	835	92169	885	94694	935	97081	985	99344
786	89542	836	92221	886	94743	936	97128	986	99388
787	89597	837	92273	887	94792	937	97174	987	99432
788	89653	838	92324	888	94841	938	97220	988	99476
789	89708	839	92376	889	94890	939	97267	989	99520
790	89763	840	92428	890	94939	940	97313	990	99564
791	89818	841	92480	891	94988	941	97359	991	99607
792	89873	842	92531	892	95036	942	97405	992	99651
793	89927	843	92583	893	95085	943	97451	993	99695
794	89982	844	92634	894	95134	944	97497	994	99739
795	90037	845	92686	895	95182	945	97543	995	99782
796	90091	846	92737	896	95231	946	97589	996	99826
797	90146	847	92788	897	95279	947	97635	997	99870
798	90200	848	92840	898	95328	948	97681	998	99913
799	90255	849	92891	899	95376	949	97727	999	99957
800	90309	850	92942	900	95424	950	97772	1000	00000

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log	D	N.	Log.	D
					41			40			38			36
1001	00043	44	1051	02160	42	1101	04179	39	1151	06108	37	1201	07954	36
1002	00087	43	1052	02202	41	1102	04218	40	1152	06145	38	1202	07990	37
1003	00130	43	1053	02243	41	1103	04258	39	1153	06183	38	1203	08027	36
1004	00173	44	1054	02284	41	1104	04297	39	1154	06221	37	1204	08063	36
1005	00217	43	1055	02325	41	1105	04336	40	1155	06258	38	1205	08099	36
1006	00260	43	1056	02366	41	1106	04376	39	1156	06296	37	1206	08135	36
1007	00303	43	1057	02407	42	1107	04415	39	1157	06333	38	1207	08171	36
1008	00346	43	1058	02449	41	1108	04454	39	1158	06371	37	1208	08207	36
1009	00389	43	1059	02490	41	1109	04493	39	1159	06408	38	1209	08243	36
1010	00432	43	1060	02531	41	1110	04532	39	1160	06446	37	1210	08279	35
1011	00475	43	1061	02572	40	1111	04571	39	1161	06483	38	1211	08314	36
1012	00518	43	1062	02612	41	1112	04610	40	1162	06521	37	1212	08350	36
1013	00561	43	1063	02653	41	1113	04650	39	1163	06558	37	1213	08386	36
1014	00604	43	1064	02694	41	1114	04689	38	1164	06595	38	1214	08422	36
1015	00647	42	1065	02735	41	1115	04727	39	1165	06633	37	1215	08458	35
1016	00689	43	1066	02776	40	1116	04766	39	1166	06670	37	1216	08493	36
1017	00732	43	1067	02816	41	1117	04805	39	1167	06707	37	1217	08529	36
1018	00775	42	1068	02857	41	1118	04844	39	1168	06744	37	1218	08565	35
1019	00817	43	1069	02898	40	1119	04883	39	1169	06781	38	1219	08600	36
1020	00860	43	1070	02938	41	1120	04922	39	1170	06819	37	1220	08636	36
1021	00903	42	1071	02979	40	1121	04961	38	1171	06856	37	1221	08672	35
1022	00945	43	1072	03019	41	1122	04999	39	1172	06893	37	1222	08707	36
1023	00988	42	1073	03060	40	1123	05038	39	1173	06930	37	1223	08743	35
1024	01030	42	1074	03100	41	1124	05077	38	1174	06967	37	1224	08778	36
1025	01072	43	1075	03141	40	1125	05115	39	1175	07004	37	1225	08814	35
1026	01115	42	1076	03181	41	1126	05154	38	1176	07041	37	1226	08849	35
1027	01157	42	1077	03222	40	1127	05192	39	1177	07078	37	1227	08884	36
1028	01199	43	1078	03262	40	1128	05231	38	1178	07115	36	1228	08920	35
1029	01242	42	1079	03302	40	1129	05269	39	1179	07151	37	1229	08955	36
1030	01284	42	1080	03342	41	1130	05308	38	1180	07188	37	1230	08991	35
1031	01326	42	1081	03383	40	1131	05346	39	1181	07225	37	1231	09026	35
1032	01368	42	1082	03423	40	1132	05385	38	1182	07262	36	1232	09061	35
1033	01410	42	1083	03463	40	1133	05423	38	1183	07298	37	1233	09096	36
1034	01452	42	1084	03503	40	1134	05461	39	1184	07335	37	1234	09132	35
1035	01494	42	1085	03543	40	1135	05500	38	1185	07372	36	1235	09167	35
1036	01536	42	1086	03583	40	1136	05538	38	1186	07408	37	1236	09202	35
1037	01578	42	1087	03623	40	1137	05576	38	1187	07445	37	1237	09237	35
1038	01620	42	1088	03663	40	1138	05614	38	1188	07482	36	1238	09272	35
1039	01662	41	1089	03703	40	1139	05652	38	1189	07518	37	1239	09307	35
1040	01703	42	1090	03743	39	1140	05690	39	1190	07555	36	1240	09342	35
1041	01745	42	1091	03782	40	1141	05729	38	1191	07591	37	1241	09377	35
1042	01787	41	1092	03822	40	1142	05767	38	1192	07628	36	1242	09412	35
1043	01828	42	1093	03862	40	1143	05805	38	1193	07664	36	1243	09447	35
1044	01870	42	1094	03902	39	1144	05843	38	1194	07700	37	1244	09482	35
1045	01912	41	1095	03941	40	1145	05881	37	1195	07737	36	1245	09517	35
1046	01953	42	1096	03981	40	1146	05918	38	1196	07773	36	1246	09552	35
1047	01995	41	1097	04021	39	1147	05956	38	1197	07809	37	1247	09587	34
1048	02036	42	1098	04060	40	1148	05994	38	1198	07846	36	1248	09621	35
1049	02078	41	1099	04100	39	1149	06032	38	1199	07882	36	1249	09656	35
1050	02119		1100	04139		1150	06070		1200	07918		1250	09691	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log	D
1251	09726	35	1301	11428	34	1351	13066	33	1401	14644	31	1451	16167	30
1252	09760	34	1302	11461	33	1352	13098	32	1402	14675	31	1452	16197	30
1253	09795	35	1303	11494	33	1353	13130	32	1403	14706	31	1453	16227	30
1254	09830	35	1304	11528	34	1354	13162	32	1404	14737	31	1454	16256	29
1255	09864	34	1305	11561	33	1355	13194	32	1405	14768	31	1455	16286	30
1256	09899	35	1306	11594	33	1356	13226	32	1406	14799	31	1456	16316	30
1257	09934	35	1307	11628	34	1357	13258	32	1407	14829	30	1457	16346	30
1258	09968	34	1308	11661	33	1358	13290	32	1408	14860	31	1458	16376	30
1259	10003	35	1309	11694	33	1359	13322	32	1409	14891	31	1459	16406	30
1260	10037	34	1310	11727	33	1360	13354	32	1410	14922	31	1460	16435	29
1261	10072	35	1311	11760	33	1361	13386	32	1411	14953	31	1461	16465	30
1262	10106	34	1312	11793	33	1362	13418	32	1412	14983	30	1462	16495	30
1263	10140	34	1313	11826	33	1363	13450	32	1413	15014	31	1463	16524	29
1264	10175	35	1314	11860	34	1364	13481	31	1414	15045	31	1464	16554	30
1265	10209	34	1315	11893	33	1365	13513	32	1415	15076	31	1465	16584	30
1266	10243	34	1316	11926	33	1366	13545	32	1416	15106	30	1466	16613	29
1267	10278	35	1317	11959	33	1367	13577	32	1417	15137	31	1467	16643	30
1268	10312	34	1318	11992	33	1368	13609	32	1418	15168	31	1468	16673	30
1269	10346	34	1319	12024	32	1369	13640	31	1419	15198	30	1469	16702	29
1270	10380	34	1320	12057	33	1370	13672	32	1420	15229	31	1470	16732	30
1271	10415	35	1321	12090	33	1371	13704	32	1421	15259	30	1471	16761	29
1272	10449	34	1322	12123	33	1372	13735	31	1422	15290	31	1472	16791	30
1273	10483	34	1323	12156	33	1373	13767	32	1423	15320	30	1473	16820	29
1274	10517	34	1324	12189	33	1374	13799	32	1424	15351	31	1474	16850	30
1275	10551	34	1325	12222	33	1375	13830	31	1425	15381	30	1475	16879	29
1276	10585	34	1326	12254	32	1376	13862	32	1426	15412	31	1476	16909	30
1277	10619	34	1327	12287	33	1377	13893	31	1427	15442	30	1477	16938	29
1278	10653	34	1328	12320	33	1378	13925	32	1428	15473	31	1478	16967	29
1279	10687	34	1329	12352	32	1379	13956	31	1429	15503	30	1479	16997	30
1280	10721	34	1330	12385	33	1380	13988	32	1430	15534	31	1480	17026	29
1281	10755	34	1331	12418	33	1381	14019	31	1431	15564	30	1481	17056	30
1282	10789	34	1332	12450	32	1382	14051	32	1432	15594	30	1482	17085	29
1283	10823	34	1333	12483	33	1383	14082	31	1433	15625	31	1483	17114	29
1284	10857	34	1334	12516	33	1384	14114	32	1434	15655	30	1484	17143	29
1285	10890	33	1335	12548	32	1385	14145	31	1435	15685	30	1485	17173	30
1286	10924	34	1336	12581	33	1386	14176	31	1436	15715	30	1486	17202	29
1287	10958	34	1337	12613	32	1387	14208	32	1437	15746	31	1487	17231	29
1288	10992	34	1338	12646	33	1388	14239	31	1438	15776	30	1488	17260	29
1289	11025	33	1339	12678	32	1389	14270	31	1439	15806	30	1489	17289	29
1290	11059	34	1340	12710	32	1390	14301	31	1440	15836	30	1490	17319	30
1291	11093	34	1341	12743	33	1391	14333	32	1441	15866	30	1491	17348	29
1292	11126	33	1342	12775	32	1392	14364	31	1442	15897	31	1492	17377	29
1293	11160	34	1343	12808	33	1393	14395	31	1443	15927	30	1493	17406	29
1294	11193	33	1344	12840	32	1394	14426	31	1444	15957	30	1494	17435	29
1295	11227	34	1345	12872	32	1395	14457	31	1445	15987	30	1495	17464	29
1296	11261	34	1346	12905	33	1396	14489	32	1446	16017	30	1496	17493	29
1297	11294	33	1347	12937	32	1397	14520	31	1447	16047	30	1497	17522	29
1298	11327	33	1348	12969	32	1398	14551	31	1448	16077	30	1498	17551	29
1299	11361	34	1349	13001	32	1399	14582	31	1449	16107	30	1499	17580	29
1300	11394	33	1350	13033	32	1400	14613	31	1450	16137	30	1500	17609	29

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1501	17638	29	1551	19061	28	1601	20439	27	1651	21775	27	1701	23070	25
1502	17667	29	1552	19089	28	1602	20466	27	1652	21801	26	1702	23096	26
1503	17696	29	1553	19117	28	1603	20493	27	1653	21827	26	1703	23121	25
1504	17725	29	1554	19145	28	1604	20520	27	1654	21854	27	1704	23147	26
1505	17754	29	1555	19173	28	1605	20548	28	1655	21880	26	1705	23172	25
1506	17782	28	1556	19201	28	1606	20575	27	1656	21906	26	1706	23198	26
1507	17811	29	1557	19229	28	1607	20602	27	1657	21932	26	1707	23223	25
1508	17840	29	1558	19257	28	1608	20629	27	1658	21958	26	1708	23249	26
1509	17869	29	1559	19285	28	1609	20656	27	1659	21985	27	1709	23274	25
1510	17898	29	1560	19312	27	1610	20683	27	1660	22011	26	1710	23300	26
1511	17926	28	1561	19340	28	1611	20710	27	1661	22037	26	1711	23325	25
1512	17955	29	1562	19368	28	1612	20737	27	1662	22063	26	1712	23350	25
1513	17984	29	1563	19396	28	1613	20763	26	1663	22089	26	1713	23376	26
1514	18013	29	1564	19424	28	1614	20790	27	1664	22115	26	1714	23401	25
1515	18041	28	1565	19451	27	1615	20817	27	1665	22141	26	1715	23426	25
1516	18070	29	1566	19479	28	1616	20844	27	1666	22167	26	1716	23452	26
1517	18099	29	1567	19507	28	1617	20871	27	1667	22194	27	1717	23477	25
1518	18127	28	1568	19535	28	1618	20898	27	1668	22220	26	1718	23502	25
1519	18156	29	1569	19562	27	1619	20925	27	1669	22246	26	1719	23528	26
1520	18184	28	1570	19590	28	1620	20952	27	1670	22272	26	1720	23553	25
1521	18213	29	1571	19618	28	1621	20978	26	1671	22298	26	1721	23578	25
1522	18241	28	1572	19645	27	1622	21005	27	1672	22324	26	1722	23603	25
1523	18270	29	1573	19673	28	1623	21032	27	1673	22350	26	1723	23629	26
1524	18298	28	1574	19700	27	1624	21059	27	1674	22376	26	1724	23654	25
1525	18327	29	1575	19728	28	1625	21085	26	1675	22401	25	1725	23679	25
1526	18355	28	1576	19756	28	1626	21112	27	1676	22427	26	1726	23704	25
1527	18384	29	1577	19783	27	1627	21139	27	1677	22453	26	1727	23729	25
1528	18412	28	1578	19811	28	1628	21165	26	1678	22479	26	1728	23754	25
1529	18441	29	1579	19838	27	1629	21192	27	1679	22505	26	1729	23779	25
1530	18469	28	1580	19866	28	1630	21219	27	1680	22531	26	1730	23805	26
1531	18498	29	1581	19893	27	1631	21245	26	1681	22557	26	1731	23830	25
1532	18526	28	1582	19921	28	1632	21272	27	1682	22583	26	1732	23855	25
1533	18554	28	1583	19948	27	1633	21299	27	1683	22608	25	1733	23880	25
1534	18583	29	1584	19976	28	1634	21325	26	1684	22634	26	1734	23905	25
1535	18611	28	1585	20003	27	1635	21352	27	1685	22660	26	1735	23930	25
1536	18639	28	1586	20030	27	1636	21378	26	1686	22686	26	1736	23955	25
1537	18667	28	1587	20058	28	1637	21405	27	1687	22712	26	1737	23980	25
1538	18696	29	1588	20085	27	1638	21431	26	1688	22737	25	1738	24005	25
1539	18724	28	1589	20112	27	1639	21458	27	1689	22763	26	1739	24030	25
1540	18752	28	1590	20140	28	1640	21484	26	1690	22789	26	1740	24055	25
1541	18780	28	1591	20167	27	1641	21511	27	1691	22814	25	1741	24080	25
1542	18808	28	1592	20194	27	1642	21537	26	1692	22840	26	1742	24105	25
1543	18837	29	1593	20222	28	1643	21564	27	1693	22866	26	1743	24130	25
1544	18865	28	1594	20249	27	1644	21590	26	1694	22891	25	1744	24155	25
1545	18893	28	1595	20276	27	1645	21617	27	1695	22917	26	1745	24180	25
1546	18921	28	1596	20303	27	1646	21643	26	1696	22943	26	1746	24204	24
1547	18949	28	1597	20330	27	1647	21669	26	1697	22968	25	1747	24229	25
1548	18977	28	1598	20358	28	1648	21696	27	1698	22994	26	1748	24254	25
1549	19005	28	1599	20385	27	1649	21722	26	1699	23019	25	1749	24279	25
1550	19033	28	1600	20412	27	1650	21748	26	1700	23045	26	1750	24304	25

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
1751	24329	25	1801	25551	24	1851	26741	24	1901	27898	23	1951	29026	23
1752	24353	24	1802	25575	24	1852	26764	23	1902	27921	23	1952	29048	22
1753	24378	25	1803	25600	25	1853	26788	24	1903	27944	23	1953	29070	22
1754	24403	25	1804	25624	24	1854	26811	23	1904	27967	23	1954	29092	22
1755	24428	25	1805	25648	24	1855	26834	23	1905	27989	22	1955	29115	23
1756	24452	24	1806	25672	24	1856	26858	24	1906	28012	23	1956	29137	22
1757	24477	25	1807	25696	24	1857	26881	23	1907	28035	23	1957	29159	22
1758	24502	25	1808	25720	24	1858	26905	24	1908	28058	23	1958	29181	22
1759	24527	25	1809	25744	24	1859	26928	23	1909	28081	23	1959	29203	22
1760	24551	24	1810	25768	24	1860	26951	23	1910	28103	22	1960	29226	23
1761	24576	25	1811	25792	24	1861	26975	24	1911	28126	23	1961	29248	22
1762	24601	25	1812	25816	24	1862	26998	23	1912	28149	23	1962	29270	22
1763	24625	24	1813	25840	24	1863	27021	23	1913	28171	22	1963	29292	22
1764	24650	25	1814	25864	24	1864	27045	24	1914	28194	23	1964	29314	22
1765	24674	24	1815	25888	24	1865	27068	23	1915	28217	23	1965	29336	22
1766	24699	25	1816	25912	24	1866	27091	23	1916	28240	23	1966	29358	22
1767	24724	25	1817	25935	23	1867	27114	23	1917	28262	22	1967	29380	22
1768	24748	24	1818	25959	24	1868	27138	24	1918	28285	23	1968	29403	23
1769	24773	25	1819	25983	24	1869	27161	23	1919	28307	22	1969	29425	22
1770	24797	24	1820	26007	24	1870	27184	23	1920	28330	23	1970	29447	22
1771	24822	25	1821	26031	24	1871	27207	23	1921	28353	23	1971	29469	22
1772	24846	24	1822	26055	24	1872	27231	24	1922	28375	22	1972	29491	22
1773	24871	25	1823	26079	24	1873	27254	23	1923	28398	23	1973	29513	22
1774	24895	24	1824	26102	23	1874	27277	23	1924	28421	23	1974	29535	22
1775	24920	25	1825	26125	24	1875	27300	23	1925	28443	22	1975	29557	22
1776	24944	24	1826	26150	24	1876	27323	23	1926	28466	23	1976	29579	22
1777	24969	25	1827	26174	24	1877	27346	23	1927	28488	22	1977	29601	22
1778	24993	24	1828	26198	24	1878	27370	24	1928	28511	23	1978	29623	22
1779	25018	25	1829	26221	23	1879	27393	23	1929	28533	22	1979	29645	22
1780	25042	24	1830	26245	24	1880	27416	23	1930	28556	23	1980	29667	22
1781	25066	24	1831	26269	24	1881	27439	23	1931	28578	22	1981	29688	21
1782	25091	25	1832	26293	24	1882	27462	23	1932	28601	23	1982	29710	22
1783	25115	24	1833	26316	23	1883	27485	23	1933	28623	22	1983	29732	22
1784	25139	24	1834	26340	24	1884	27508	23	1934	28646	23	1984	29754	22
1785	25164	25	1835	26364	24	1885	27531	23	1935	28668	22	1985	29776	22
1786	25188	24	1836	26387	23	1886	27554	23	1936	28691	23	1986	29798	22
1787	25212	24	1837	26411	24	1887	27577	23	1937	28713	22	1987	29820	22
1788	25237	25	1838	26435	24	1888	27600	23	1938	28735	22	1988	29842	22
1789	25261	24	1839	26458	23	1889	27623	23	1939	28758	23	1989	29863	21
1790	25285	24	1840	26482	24	1890	27646	23	1940	28780	22	1990	29885	22
1791	25310	25	1841	26505	23	1891	27669	23	1941	28803	23	1991	29907	22
1792	25334	24	1842	26529	24	1892	27692	23	1942	28825	22	1992	29929	22
1793	25358	24	1843	26553	24	1893	27715	23	1943	28847	22	1993	29951	22
1794	25382	24	1844	26576	23	1894	27738	23	1944	28870	23	1994	29973	22
1795	25406	24	1845	26600	24	1895	27761	23	1945	28892	22	1995	29994	21
1796	25431	25	1846	26623	23	1896	27784	23	1946	28914	22	1996	30016	22
1797	25455	24	1847	26647	24	1897	27807	23	1947	28937	23	1997	30038	22
1798	25479	24	1848	26670	23	1898	27830	23	1948	28959	22	1998	30060	22
1799	25503	24	1849	26694	24	1899	27852	22	1949	28981	22	1999	30081	21
1800	25527	24	1850	26717	23	1900	27875	23	1950	29003	22	2000	30103	22

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2001	30125	22	2051	31197	22	2101	32243	21	2151	33264	20	2201	34262	20
2002	30146	21	2052	31218	21	2102	32263	20	2152	33284	20	2202	34282	20
2003	30168	22	2053	31239	21	2103	32284	21	2153	33304	20	2203	34301	19
2004	30190	22	2054	31260	21	2104	32305	21	2154	33325	21	2204	34321	20
2005	30211	21	2055	31281	21	2105	32325	20	2155	33345	20	2205	34341	20
2006	30233	22	2056	31302	21	2106	32346	21	2156	33365	20	2206	34361	20
2007	30255	22	2057	31323	21	2107	32366	20	2157	33385	20	2207	34380	19
2008	30276	21	2058	31345	22	2108	32387	21	2158	33405	20	2208	34400	20
2009	30298	22	2059	31366	21	2109	32408	21	2159	33425	20	2209	34420	20
2010	30320	22	2060	31387	21	2110	32428	20	2160	33445	20	2210	34439	19
2011	30341	21	2061	31408	21	2111	32449	21	2161	33465	20	2211	34459	20
2012	30363	22	2062	31429	21	2112	32469	20	2162	33486	21	2212	34479	20
2013	30384	21	2063	31450	21	2113	32490	21	2163	33506	20	2213	34498	19
2014	30406	22	2064	31471	21	2114	32510	20	2164	33526	20	2214	34518	20
2015	30428	22	2065	31492	21	2115	32531	21	2165	33546	20	2215	34537	19
2016	30449	21	2066	31513	21	2116	32552	21	2166	33566	20	2216	34557	20
2017	30471	22	2067	31534	21	2117	32572	20	2167	33586	20	2217	34577	20
2018	30492	21	2068	31555	21	2118	32593	21	2168	33606	20	2218	34596	19
2019	30514	22	2069	31576	21	2119	32613	20	2169	33626	20	2219	34616	20
2020	30535	21	2070	31597	21	2120	32634	21	2170	33646	20	2220	34635	19
2021	30557	22	2071	31618	21	2121	32654	20	2171	33666	20	2221	34655	20
2022	30578	21	2072	31639	21	2122	32675	21	2172	33686	20	2222	34674	19
2023	30600	22	2073	31660	21	2123	32695	20	2173	33706	20	2223	34694	20
2024	30621	21	2074	31681	21	2124	32715	20	2174	33726	20	2224	34713	19
2025	30643	22	2075	31702	21	2125	32736	21	2175	33746	20	2225	34733	20
2026	30664	21	2076	31723	21	2126	32756	20	2176	33766	20	2226	34753	20
2027	30685	21	2077	31744	21	2127	32777	21	2177	33786	20	2227	34772	19
2028	30707	22	2078	31765	21	2128	32797	20	2178	33806	20	2228	34792	20
2029	30728	21	2079	31785	20	2129	32818	21	2179	33826	20	2229	34811	19
2030	30750	22	2080	31806	21	2130	32838	20	2180	33846	20	2230	34830	19
2031	30771	21	2081	31827	21	2131	32858	20	2181	33866	20	2231	34850	20
2032	30792	21	2082	31848	21	2132	32879	21	2182	33885	19	2232	34869	19
2033	30814	22	2083	31869	21	2133	32899	20	2183	33905	20	2233	34889	20
2034	30835	21	2084	31890	21	2134	32919	20	2184	33925	20	2234	34908	19
2035	30856	21	2085	31911	21	2135	32940	21	2185	33945	20	2235	34928	20
2036	30878	22	2086	31931	20	2136	32960	20	2186	33965	20	2236	34947	19
2037	30899	21	2087	31952	21	2137	32980	20	2187	33985	20	2237	34967	20
2038	30920	21	2088	31973	21	2138	33001	21	2188	34005	20	2238	34986	19
2039	30942	22	2089	31994	21	2139	33021	20	2189	34025	20	2239	35005	19
2040	30963	21	2090	32015	21	2140	33041	20	2190	34044	19	2240	35025	20
2041	30984	21	2091	32035	20	2141	33062	21	2191	34064	20	2241	35044	19
2042	31006	22	2092	32056	21	2142	33082	20	2192	34084	20	2242	35064	20
2043	31027	21	2093	32077	21	2143	33102	20	2193	34104	20	2243	35083	19
2044	31048	21	2094	32098	21	2144	33122	20	2194	34124	20	2244	35102	19
2045	31069	21	2095	32118	20	2145	33143	21	2195	34143	19	2245	35122	20
2046	31091	22	2096	32139	21	2146	33163	20	2196	34163	20	2246	35141	19
2047	31112	21	2097	32160	21	2147	33183	20	2197	34183	20	2247	35160	19
2048	31133	21	2098	32181	21	2148	33203	20	2198	34203	20	2248	35180	20
2049	31154	21	2099	32201	20	2149	33224	21	2199	34223	20	2249	35199	19
2050	31175	21	2100	32222	21	2150	33244	20	2200	34242	19	2250	35218	19

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2251	35238	20	2301	36192	19	2351	37125	18	2401	38039	18	2451	38934	17
2252	35257	19	2302	36211	19	2352	37144	19	2402	38057	18	2452	38952	18
2253	35276	19	2303	36229	18	2353	37162	18	2403	38075	18	2453	38970	18
2254	35295	19	2304	36248	19	2354	37181	19	2404	38093	18	2454	38987	17
2255	35315	20	2305	36267	19	2355	37199	18	2405	38112	19	2455	39005	18
2256	35334	19	2306	36286	19	2356	37218	19	2406	38130	18	2456	39023	18
2257	35353	19	2307	36305	19	2357	37236	18	2407	38148	18	2457	39041	18
2258	35372	19	2308	36324	19	2358	37254	18	2408	38166	18	2458	39058	17
2259	35392	20	2309	36342	18	2359	37273	19	2409	38184	18	2459	39076	18
2260	35411	19	2310	36361	19	2360	37291	18	2410	38202	18	2460	39094	18
2261	35430	19	2311	36380	19	2361	37310	19	2411	38220	18	2461	39111	17
2262	35449	19	2312	36399	19	2362	37328	18	2412	38238	18	2462	39129	18
2263	35468	19	2313	36418	19	2363	37346	18	2413	38256	18	2463	39146	17
2264	35488	20	2314	36436	18	2364	37365	19	2414	38274	18	2464	39164	18
2265	35507	19	2315	36455	19	2365	37383	18	2415	38292	18	2465	39182	18
2266	35526	19	2316	36474	19	2366	37401	18	2416	38310	18	2466	39199	17
2267	35545	19	2317	36493	19	2367	37420	19	2417	38328	18	2467	39217	18
2268	35564	19	2318	36511	18	2368	37438	18	2418	38346	18	2468	39235	18
2269	35583	19	2319	36530	19	2369	37457	19	2419	38364	18	2469	39252	17
2270	35603	20	2320	36549	19	2370	37475	18	2420	38382	18	2470	39270	18
2271	35622	19	2321	36568	19	2371	37493	18	2421	38399	17	2471	39287	17
2272	35641	19	2322	36586	18	2372	37511	18	2422	38417	18	2472	39305	18
2273	35660	19	2323	36605	19	2373	37530	19	2423	38435	18	2473	39322	17
2274	35679	19	2324	36624	19	2374	37548	18	2424	38453	18	2474	39340	18
2275	35698	19	2325	36642	18	2375	37566	18	2425	38471	18	2475	39358	18
2276	35717	19	2326	36661	19	2376	37585	19	2426	38489	18	2476	39375	17
2277	35736	19	2327	36680	19	2377	37603	18	2427	38507	18	2477	39393	18
2278	35755	19	2328	36698	18	2378	37621	18	2428	38525	18	2478	39410	17
2279	35774	19	2329	36717	19	2379	37639	18	2429	38543	18	2479	39428	18
2280	35793	19	2330	36736	19	2380	37658	19	2430	38561	18	2480	39445	17
2281	35813	20	2331	36754	18	2381	37676	18	2431	38578	17	2481	39463	18
2282	35832	19	2332	36773	19	2382	37694	18	2432	38596	18	2482	39480	17
2283	35851	19	2333	36791	18	2383	37712	18	2433	38614	18	2483	39498	18
2284	35870	19	2334	36810	19	2384	37731	19	2434	38632	18	2484	39515	17
2285	35889	19	2335	36829	19	2385	37749	18	2435	38650	18	2485	39533	18
2286	35908	19	2336	36847	18	2386	37767	18	2436	38668	18	2486	39550	17
2287	35927	19	2337	36866	19	2387	37785	18	2437	38686	18	2487	39568	18
2288	35946	19	2338	36884	18	2388	37803	18	2438	38703	17	2488	39585	17
2289	35965	19	2339	36903	19	2389	37822	19	2439	38721	18	2489	39602	17
2290	35984	19	2340	36922	19	2390	37840	18	2440	38739	18	2490	39620	18
2291	36003	19	2341	36940	18	2391	37858	18	2441	38757	18	2491	39637	17
2292	36021	18	2342	36959	19	2392	37876	18	2442	38775	18	2492	39655	18
2293	36040	19	2343	36977	18	2393	37894	18	2443	38792	17	2493	39672	17
2294	36059	19	2344	36996	19	2394	37912	18	2444	38810	18	2494	39690	18
2295	36078	19	2345	37014	18	2395	37931	19	2445	38828	18	2495	39707	17
2296	36097	19	2346	37033	19	2396	37949	18	2446	38846	18	2496	39724	17
2297	36116	19	2347	37051	18	2397	37967	18	2447	38863	17	2497	39742	18
2298	36135	19	2348	37070	19	2398	37985	18	2448	38881	18	2498	39759	17
2299	36154	19	2349	37088	18	2399	38003	18	2449	38899	18	2499	39777	18
2300	36173	19	2350	37107	19	2400	38021	18	2450	38917	18	2500	39794	17

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2501	39811	17	2551	40671	17	2601	41514	17	2651	42341	16	2701	43152	16
2502	39829	18	2552	40688	17	2602	41531	17	2652	42357	16	2702	43169	17
2503	39846	17	2553	40705	17	2603	41547	16	2653	42374	17	2703	43185	16
2504	39863	17	2554	40722	17	2604	41564	17	2654	42390	16	2704	43201	16
2505	39881	18	2555	40739	17	2605	41581	17	2655	42406	16	2705	43217	16
2506	39898	17	2556	40756	17	2606	41597	16	2656	42423	17	2706	43233	16
2507	39915	17	2557	40773	17	2607	41614	17	2657	42439	16	2707	43249	16
2508	39933	18	2558	40790	17	2608	41631	17	2658	42455	16	2708	43265	16
2509	39950	17	2559	40807	17	2609	41647	16	2659	42472	17	2709	43281	16
2510	39967	17	2560	40824	17	2610	41664	17	2660	42488	16	2710	43297	16
2511	39985	18	2561	40841	17	2611	41681	17	2661	42504	16	2711	43313	16
2512	40002	17	2562	40858	17	2612	41697	16	2662	42521	17	2712	43329	16
2513	40019	17	2563	40875	17	2613	41714	17	2663	42537	16	2713	43345	16
2514	40037	18	2564	40892	17	2614	41731	17	2664	42553	16	2714	43361	16
2515	40054	17	2565	40909	17	2615	41747	16	2665	42570	17	2715	43377	16
2516	40071	17	2566	40926	17	2616	41764	17	2666	42586	16	2716	43393	16
2517	40088	17	2567	40943	17	2617	41780	16	2667	42602	16	2717	43409	16
2518	40106	18	2568	40960	17	2618	41797	17	2668	42619	17	2718	43425	16
2519	40123	17	2569	40976	16	2619	41814	17	2669	42635	16	2719	43441	16
2520	40140	17	2570	40993	17	2620	41830	16	2670	42651	16	2720	43457	16
2521	40157	17	2571	41010	17	2621	41847	17	2671	42667	16	2721	43473	16
2522	40175	18	2572	41027	17	2622	41863	16	2672	42684	17	2722	43489	16
2523	40192	17	2573	41044	17	2623	41880	17	2673	42700	16	2723	43505	16
2524	40209	17	2574	41061	17	2624	41896	16	2674	42716	16	2724	43521	16
2525	40226	17	2575	41078	17	2625	41913	17	2675	42732	16	2725	43537	16
2526	40243	17	2576	41095	17	2626	41929	16	2676	42749	17	2726	43553	16
2527	40261	18	2577	41111	16	2627	41946	17	2677	42765	16	2727	43569	16
2528	40278	17	2578	41128	17	2628	41963	17	2678	42781	16	2728	43584	15
2529	40295	17	2579	41145	17	2629	41979	16	2679	42797	16	2729	43600	16
2530	40312	17	2580	41162	17	2630	41996	17	2680	42813	16	2730	43616	16
2531	40329	17	2581	41179	17	2631	42012	16	2681	42830	17	2731	43632	16
2532	40346	17	2582	41196	17	2632	42029	17	2683	42846	16	2732	43648	16
2533	40364	18	2583	41212	16	2633	42045	16	2683	42862	16	2733	43664	16
2534	40381	17	2584	41229	17	2634	42062	17	2684	42878	16	2734	43680	16
2535	40398	17	2585	41246	17	2635	42078	16	2685	42894	16	2735	43696	16
2536	40415	17	2586	41263	17	2636	42095	17	2686	42911	17	2736	43712	16
2537	40432	17	2587	41280	17	2637	42111	16	2687	42927	16	2737	43727	15
2538	40449	17	2588	41296	16	2638	42127	16	2688	42943	16	2738	43743	16
2539	40466	17	2589	41313	17	2639	42144	17	2689	42959	16	2739	43759	16
2540	40483	17	2590	41330	17	2640	42160	16	2690	42975	16	2740	43775	16
2541	40500	17	2591	41347	17	2641	42177	17	2691	42991	16	2741	43791	16
2542	40518	18	2592	41363	16	2642	42193	16	2692	43008	17	2742	43807	16
2543	40535	17	2593	41380	17	2643	42210	17	2693	43024	16	2743	43823	16
2544	40552	17	2594	41397	17	2644	42226	16	2694	43040	16	2744	43838	15
2545	40569	17	2595	41414	17	2645	42243	17	2695	43056	16	2745	43854	16
2546	40586	17	2596	41430	16	2646	42259	16	2696	43072	16	2746	43870	16
2547	40603	17	2597	41447	17	2647	42275	16	2697	43088	16	2747	43886	16
2548	40620	17	2598	41464	17	2648	42292	17	2698	43104	16	2748	43902	16
2549	40637	17	2599	41481	17	2649	42308	16	2699	43120	16	2749	43917	15
2550	40654	17	2600	41497	16	2650	42325	17	2700	43136	16	2750	43933	16

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
2751	43949	16	2801	44731	15	2851	45500	16	2901	46255	15	2951	46997	15
2752	43965	16	2802	44747	16	2852	45515	15	2902	46270	15	2952	47012	15
2753	43981	16	2803	44762	15	2853	45530	15	2903	46285	15	2953	47026	14
2754	43996	15	2804	44778	16	2854	45545	15	2904	46300	15	2954	47041	15
2755	44012	16	2805	44793	15	2855	45561	16	2905	46315	15	2955	47056	15
2756	44028	16	2806	44809	16	2856	45576	15	2906	46330	15	2956	47070	14
2757	44044	16	2807	44824	15	2857	45591	15	2907	46345	15	2957	47085	15
2758	44059	15	2808	44840	16	2858	45606	15	2908	46359	14	2958	47100	15
2759	44075	16	2809	44855	15	2859	45621	15	2909	46374	15	2959	47114	14
2760	44091	16	2810	44871	16	2860	45637	16	2910	46389	15	2960	47129	15
2761	44107	16	2811	44886	15	2861	45652	15	2911	46404	15	2961	47144	15
2762	44122	15	2812	44902	16	2862	45667	15	2912	46419	15	2962	47159	15
2763	44138	16	2813	44917	15	2863	45682	15	2913	46434	15	2963	47173	14
2764	44154	16	2814	44932	15	2864	45697	15	2914	46449	15	2964	47188	15
2765	44170	16	2815	44948	16	2865	45712	15	2915	46464	15	2965	47202	14
2766	44185	15	2816	44963	15	2866	45728	16	2916	46479	15	2966	47217	15
2767	44201	16	2817	44979	16	2867	45743	15	2917	46494	15	2967	47232	15
2768	44217	16	2818	44994	15	2868	45758	15	2918	46509	15	2968	47246	14
2769	44232	15	2819	45010	16	2869	45773	15	2919	46523	14	2969	47261	15
2770	44248	16	2820	45025	15	2870	45788	15	2920	46538	15	2970	47276	15
2771	44264	16	2821	45040	15	2871	45803	15	2921	46553	15	2971	47290	14
2772	44279	15	2822	45056	16	2872	45818	15	2922	46568	15	2972	47305	15
2773	44295	16	2823	45071	15	2873	45834	16	2923	46583	15	2973	47319	14
2774	44311	16	2824	45086	15	2874	45849	15	2924	46598	15	2974	47334	15
2775	44326	15	2825	45102	16	2875	45864	15	2925	46613	15	2975	47349	15
2776	44342	16	2826	45117	15	2876	45879	15	2926	46627	14	2976	47363	14
2777	44358	16	2827	45133	16	2877	45894	15	2927	46642	15	2977	47378	15
2778	44373	15	2828	45148	15	2878	45909	15	2928	46657	15	2978	47392	14
2779	44389	16	2829	45163	15	2879	45924	15	2929	46672	15	2979	47407	15
2780	44404	15	2830	45179	16	2880	45939	15	2930	46687	15	2980	47422	15
2781	44420	16	2831	45194	15	2881	45954	15	2931	46702	15	2981	47436	14
2782	44436	16	2832	45209	15	2882	45969	15	2932	46716	14	2982	47451	15
2783	44451	15	2833	45225	16	2883	45984	15	2933	46731	15	2983	47465	14
2784	44467	16	2834	45240	15	2884	46000	16	2934	46746	15	2984	47480	15
2785	44483	16	2835	45255	15	2885	46015	15	2935	46761	15	2985	47494	14
2786	44498	15	2836	45271	16	2886	46030	15	2936	46776	15	2986	47509	15
2787	44514	16	2837	45286	15	2887	46045	15	2937	46790	14	2987	47524	15
2788	44529	15	2838	45301	15	2888	46060	15	2938	46805	15	2988	47538	14
2789	44545	16	2839	45317	16	2889	46075	15	2939	46820	15	2989	47553	15
2790	44560	15	2840	45332	15	2890	46090	15	2940	46835	15	2990	47567	14
2791	44576	16	2841	45347	15	2891	46105	15	2941	46850	15	2991	47582	15
2792	44592	16	2842	45362	15	2892	46120	15	2942	46864	14	2992	47596	14
2793	44607	15	2843	45378	16	2893	46135	15	2943	46879	15	2993	47611	15
2794	44623	16	2844	45393	15	2894	46150	15	2944	46894	15	2994	47625	14
2795	44638	15	2845	45408	15	2895	46165	15	2945	46909	15	2995	47640	15
2796	44654	16	2846	45423	15	2896	46180	15	2946	46923	14	2996	47654	14
2797	44669	15	2847	45439	16	2897	46195	15	2947	46938	15	2997	47669	15
2798	44685	16	2848	45454	15	2898	46210	15	2948	46953	15	2998	47683	14
2799	44700	15	2849	45469	15	2899	46225	15	2949	46967	14	2999	47698	15
2800	44716	16	2850	45484	15	2900	46240	15	2950	46982	15	3000	47712	14

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3001	47727	15	3051	48444	14	3101	49150	14	3151	49845	14	3201	50529	14
3002	47741	14	3052	48458	14	3102	49164	14	3152	49859	14	3202	50542	13
3003	47756	15	3053	48473	15	3103	49178	14	3153	49872	13	3203	50556	14
3004	47770	14	3054	48487	14	3104	49192	14	3154	49886	14	3204	50569	13
3005	47784	14	3055	48501	14	3105	49206	14	3155	49900	14	3205	50583	14
3006	47799	15	3056	48515	14	3106	49220	14	3156	49914	14	3206	50596	13
3007	47813	14	3057	48530	15	3107	49234	14	3157	49927	13	3207	50610	14
3008	47828	15	3058	48544	14	3108	49248	14	3158	49941	14	3208	50623	13
3009	47842	14	3059	48558	14	3109	49262	14	3159	49955	14	3209	50637	14
3010	47857	15	3060	48572	14	3110	49276	14	3160	49969	14	3210	50651	14
3011	47871	14	3061	48586	14	3111	49290	14	3161	49982	13	3211	50664	13
3012	47885	14	3062	48601	15	3112	49304	14	3162	49996	14	3212	50678	14
3013	47900	15	3063	48615	14	3113	49318	14	3163	50010	14	3213	50691	13
3014	47914	14	3064	48629	14	3114	49332	14	3164	50024	14	3214	50705	14
3015	47929	15	3065	48643	14	3115	49346	14	3165	50037	13	3215	50718	13
3016	47943	14	3066	48657	14	3116	49360	14	3166	50051	14	3216	50732	14
3017	47958	15	3067	48671	14	3117	49374	14	3167	50065	14	3217	50745	13
3018	47972	14	3068	48686	15	3118	49388	14	3168	50079	14	3218	50759	14
3019	47986	14	3069	48700	14	3119	49402	14	3169	50092	13	3219	50772	13
3020	48001	15	3070	48714	14	3120	49415	13	3170	50106	14	3220	50786	14
3021	48015	14	3071	48728	14	3121	49429	14	3171	50120	14	3221	50799	13
3022	48029	14	3072	48742	14	3122	49443	14	3172	50133	13	3222	50813	14
3023	48044	15	3073	48756	14	3123	49457	14	3173	50147	14	3223	50826	13
3024	48058	14	3074	48770	14	3124	49471	14	3174	50161	14	3224	50840	14
3025	48073	15	3075	48785	15	3125	49485	14	3175	50174	13	3225	50853	13
3026	48087	14	3076	48799	14	3126	49499	14	3176	50188	14	3226	50866	13
3027	48101	14	3077	48813	14	3127	49513	14	3177	50202	14	3227	50880	14
3028	48116	15	3078	48827	14	3128	49527	14	3178	50215	13	3228	50893	13
3029	48130	14	3079	48841	14	3129	49541	14	3179	50229	14	3229	50907	14
3030	48144	14	3080	48855	14	3130	49554	13	3180	50243	14	3230	50920	13
3031	48159	15	3081	48869	14	3131	49568	14	3181	50256	13	3231	50934	14
3032	48173	14	3082	48883	14	3132	49582	14	3182	50270	14	3232	50947	13
3033	48187	14	3083	48897	14	3133	49596	14	3183	50284	14	3233	50961	14
3034	48202	15	3084	48911	14	3134	49610	14	3184	50297	13	3234	50974	13
3035	48216	14	3085	48926	15	3135	49624	14	3185	50311	14	3235	50987	13
3036	48230	14	3086	48940	14	3136	49638	14	3186	50325	14	3236	51001	14
3037	48244	14	3087	48954	14	3137	49651	13	3187	50338	13	3237	51014	13
3038	48259	15	3088	48968	14	3138	49665	14	3188	50352	14	3238	51028	14
3039	48273	14	3089	48982	14	3139	49679	14	3189	50365	13	3239	51041	13
3040	48287	14	3090	48996	14	3140	49693	14	3190	50379	14	3240	51055	14
3041	48302	15	3091	49010	14	3141	49707	14	3191	50393	14	3241	51068	13
3042	48316	14	3092	49024	14	3142	49721	14	3192	50406	13	3242	51081	13
3043	48330	14	3093	49038	14	3143	49734	13	3193	50420	14	3243	51095	14
3044	48344	14	3094	49052	14	3144	49748	14	3194	50433	13	3244	51108	13
3045	48359	15	3095	49066	14	3145	49762	14	3195	50447	14	3245	51121	13
3046	48373	14	3096	49080	14	3146	49776	14	3196	50461	14	3246	51135	14
3047	48387	14	3097	49094	14	3147	49790	14	3197	50474	13	3247	51148	13
3048	48401	14	3098	49108	14	3148	49803	13	3198	50488	14	3248	51162	14
3049	48416	15	3099	49122	14	3149	49817	14	3199	50501	13	3249	51175	13
3050	48430	14	3100	49136	14	3150	49831	14	3200	50515	14	3250	51188	13

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3251	51202	14	3301	51865	14	3351	52517	13	3401	53161	13	3451	53794	12
3252	51215	13	3302	51878	13	3352	52530	13	3402	53173	12	3452	53807	13
3253	51228	13	3303	51891	13	3353	52543	13	3403	53186	13	3453	53820	13
3254	51242	14	3304	51904	13	3354	52556	13	3404	53199	13	3454	53832	12
3255	51255	13	3305	51917	13	3355	52569	13	3405	53212	13	3455	53845	13
3256	51268	13	3306	51930	13	3356	52582	13	3406	53224	12	3456	53857	12
3257	51282	14	3307	51943	13	3357	52595	13	3407	53237	13	3457	53870	13
3258	51295	13	3308	51957	14	3358	52608	13	3408	53250	13	3458	53882	12
3259	51308	13	3309	51970	13	3359	52621	13	3409	53263	13	3459	53895	13
3260	51322	14	3310	51983	13	3360	52634	13	3410	53275	12	3460	53908	13
3261	51335	13	3311	51996	13	3361	52647	13	3411	53288	13	3461	53920	12
3262	51348	13	3312	52009	13	3362	52660	13	3412	53301	13	3462	53933	13
3263	51362	14	3313	52022	13	3363	52673	13	3413	53314	13	3463	53945	12
3264	51375	13	3314	52035	13	3364	52686	13	3414	53326	12	3464	53958	13
3265	51388	13	3315	52048	13	3365	52699	13	3415	53339	13	3465	53970	12
3266	51402	14	3316	52061	13	3366	52711	12	3416	53352	13	3466	53983	13
3267	51415	13	3317	52075	14	3367	52724	13	3417	53364	12	3467	53995	12
3268	51428	13	3318	52088	13	3368	52737	13	3418	53377	13	3468	54008	13
3269	51441	13	3319	52101	13	3369	52750	13	3419	53390	13	3469	54020	12
3270	51455	14	3320	52114	13	3370	52763	13	3420	53403	13	3470	54033	13
3271	51468	13	3321	52127	13	3371	52776	13	3421	53415	12	3471	54045	12
3272	51481	13	3322	52140	13	3372	52789	13	3422	53428	13	3472	54058	13
3273	51495	14	3323	52153	13	3373	52802	13	3423	53441	13	3473	54070	12
3274	51508	13	3324	52166	13	3374	52815	13	3424	53453	12	3474	54083	13
3275	51521	13	3325	52179	13	3375	52827	12	3425	53466	13	3475	54095	12
3276	51534	13	3326	52192	13	3376	52840	13	3426	53479	13	3476	54108	13
3277	51548	14	3327	52205	13	3377	52853	13	3427	53491	12	3477	54120	12
3278	51561	13	3328	52218	13	3378	52866	13	3428	53504	13	3478	54133	13
3279	51574	13	3329	52231	13	3379	52879	13	3429	53517	13	3479	54145	12
3280	51587	13	3330	52244	13	3380	52892	13	3430	53529	12	3480	54158	13
3281	51601	14	3331	52257	13	3381	52905	13	3431	53542	13	3481	54170	12
3282	51614	13	3332	52270	13	3382	52917	12	3432	53555	13	3482	54183	13
3283	51627	13	3333	52284	14	3383	52930	13	3433	53567	12	3483	54195	12
3284	51640	13	3334	52297	13	3384	52943	13	3434	53580	13	3484	54208	13
3285	51654	14	3335	52310	13	3385	52956	13	3435	53593	13	3485	54220	12
3286	51667	13	3336	52323	13	3386	52969	13	3436	53605	12	3486	54233	13
3287	51680	13	3337	52336	13	3387	52982	13	3437	53618	13	3487	54245	12
3288	51693	13	3338	52349	13	3388	52994	12	3438	53631	13	3488	54258	13
3289	51706	13	3339	52362	13	3389	53007	13	3439	53643	12	3489	54270	12
3290	51720	14	3340	52375	13	3390	53020	13	3440	53656	13	3490	54283	13
3291	51733	13	3341	52388	13	3391	53033	13	3441	53668	12	3491	54295	12
3292	51746	13	3342	52401	13	3392	53046	13	3442	53681	13	3492	54307	12
3293	51759	13	3343	52414	13	3393	53058	12	3443	53694	13	3493	54320	13
3294	51772	13	3344	52427	13	3394	53071	13	3444	53706	12	3494	54332	12
3295	51786	14	3345	52440	13	3395	53084	13	3445	53719	13	3495	54345	13
3296	51799	13	3346	52453	13	3396	53097	13	3446	53732	13	3496	54357	12
3297	51812	13	3347	52466	13	3397	53110	13	3447	53744	12	3497	54370	13
3298	51825	13	3348	52479	13	3398	53122	12	3448	53757	13	3498	54382	12
3299	51838	13	3349	52492	13	3399	53135	13	3449	53769	12	3499	54394	12
3300	51851	13	3350	52504	12	3400	53148	13	3450	53782	13	3500	54407	13

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log	D	N.	Log.	D
3501	54419	12	3551	55035	12	3601	55642	12	3651	56241	12	3701	56832	12
3502	54432	13	3552	55047	12	3602	55654	12	3652	56253	12	3702	56844	12
3503	54444	12	3553	55060	13	3603	55666	12	3653	56265	12	3703	56855	11
3504	54456	12	3554	55072	12	3604	55678	12	3654	56277	12	3704	56867	12
3505	54469	13	3555	55084	12	3605	55691	13	3655	56289	12	3705	56879	12
3506	54481	12	3556	55096	12	3606	55703	12	3656	56301	12	3706	56891	12
3507	54494	13	3557	55108	12	3607	55715	12	3657	56312	11	3707	56902	11
3508	54506	12	3558	55121	13	3608	55727	12	3658	56324	12	3708	56914	12
3509	54518	12	3559	55133	12	3609	55739	12	3659	56336	12	3709	56926	12
3510	54531	13	3560	55145	12	3610	55751	12	3660	56348	12	3710	56937	11
3511	54543	12	3561	55157	12	3611	55763	12	3661	56360	12	3711	56949	12
3512	54555	12	3562	55169	12	3612	55775	12	3662	56372	12	3712	56961	12
3513	54568	13	3563	55182	13	3613	55787	12	3663	56384	12	3713	56972	11
3514	54580	12	3564	55194	12	3614	55799	12	3664	56396	12	3714	56984	12
3515	54593	13	3565	55206	12	3615	55811	12	3665	56407	11	3715	56996	12
3516	54605	12	3566	55218	12	3616	55823	12	3666	56419	12	3716	57008	12
3517	54617	12	3567	55230	12	3617	55835	12	3667	56431	12	3717	57019	11
3518	54630	13	3568	55242	12	3618	55847	12	3668	56443	12	3718	57031	12
3519	54642	12	3569	55255	13	3619	55859	12	3669	56455	12	3719	57043	12
3520	54654	12	3570	55267	12	3620	55871	12	3670	56467	12	3720	57054	11
3521	54667	13	3571	55279	12	3621	55883	12	3671	56478	11	3721	57066	12
3522	54679	12	3572	55291	12	3622	55895	12	3672	56490	12	3722	57078	12
3523	54691	12	3573	55303	12	3623	55907	12	3673	56502	12	3723	57089	11
3524	54704	13	3574	55315	12	3624	55919	12	3674	56514	12	3724	57101	12
3525	54716	12	3575	55528	13	3625	55931	12	3675	56526	12	3725	57113	12
3526	54728	12	3576	55340	12	3626	55943	12	3676	56538	12	3726	57124	11
3527	54741	13	3577	55352	12	3627	55955	12	3677	56549	11	3727	57136	12
3528	54753	12	3578	55364	12	3628	55967	12	3678	56561	12	3728	57148	12
3529	54765	12	3579	55376	12	3629	55979	12	3679	56573	12	3729	57159	11
3530	54777	12	3580	55388	12	3630	55991	12	3680	56585	12	3730	57171	12
3531	54790	13	3581	55400	12	3631	56003	12	3681	56597	12	3731	57183	12
3532	54802	12	3582	55413	13	3632	56015	12	3682	56608	11	3732	57194	11
3533	54814	12	3583	55425	12	3633	56027	12	3683	56620	12	3733	57206	12
3534	54827	13	3584	55437	12	3634	56038	11	3684	56632	12	3734	57217	11
3535	54839	12	3585	55449	12	3635	56050	12	3685	56644	12	3735	57229	12
3536	54851	12	3586	55461	12	3636	56062	12	3686	56656	12	3736	57241	12
3537	54864	13	3587	55473	12	3637	56074	12	3687	56667	11	3737	57252	11
3538	54876	12	3588	55485	12	3638	56086	12	3688	56679	12	3738	57264	12
3539	54888	12	3589	55497	12	3639	56098	12	3689	56691	12	3739	57276	12
3540	54900	12	3590	55509	12	3640	56110	12	3690	56703	12	3740	57287	11
3541	54913	13	3591	55522	13	3641	56122	12	3691	56714	11	3741	57299	12
3542	54925	12	3592	55534	12	3642	56134	12	3692	56726	12	3742	57310	11
3543	54937	12	3593	55546	12	3643	56146	12	3693	56738	12	3743	57322	12
3544	54949	12	3594	55558	12	3644	56158	12	3694	56750	12	3744	57334	12
3545	54962	13	3595	55570	12	3645	56170	12	3695	56761	11	3745	57345	11
3546	54974	12	3596	55582	12	3646	56182	12	3696	56773	12	3746	57357	12
3547	54986	12	3597	55594	12	3647	56194	12	3697	56785	12	3747	57368	11
3548	54998	12	3598	55606	12	3648	56205	11	3698	56797	12	3748	57380	12
3549	55011	13	3599	55618	12	3649	56217	12	3699	56808	11	3749	57392	12
3550	55023	12	3600	55630	12	3650	56229	12	3700	56820	12	3750	57403	11

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
3751	57415	12	3801	57990	12	3851	58557	11	3901	59118	12	3951	59671	11
3752	57426	11	3802	58001	11	3852	58569	12	3902	59129	11	3952	59682	11
3753	57438	12	3803	58013	12	3853	58580	11	3903	59140	11	3953	59693	11
3754	57449	11	3804	58024	11	3854	58591	11	3904	59151	11	3954	59704	11
3755	57461	12	3805	58035	11	3855	58602	11	3905	59162	11	3955	59715	11
3756	57473	12	3806	58047	12	3856	58614	12	3906	59173	11	3956	59726	11
3757	57484	11	3807	58058	11	3857	58625	11	3907	59184	11	3957	59737	11
3758	57496	12	3808	58070	12	3858	58636	11	3908	59195	11	3958	59748	11
3759	57507	11	3809	58081	11	3859	58647	11	3909	59207	12	3959	59759	11
3760	57519	12	3810	58092	11	3860	58659	12	3910	59218	11	3960	59770	11
3761	57530	11	3811	58104	12	3861	58670	11	3911	59229	11	3961	59780	10
3762	57542	12	3812	58115	11	3862	58681	11	3912	59240	11	3962	59791	11
3763	57553	11	3813	58127	12	3863	58692	11	3913	59251	11	3963	59802	11
3764	57565	12	3814	58138	11	3864	58704	12	3914	59262	11	3964	59813	11
3765	57576	11	3815	58149	11	3865	58715	11	3915	59273	11	3965	59824	11
3766	57588	12	3816	58161	12	3866	58726	11	3916	59284	11	3966	59835	11
3767	57600	12	3817	58172	11	3867	58737	11	3917	59295	11	3967	59846	11
3768	57611	11	3818	58184	12	3868	58749	12	3918	59306	11	3968	59857	11
3769	57623	12	3819	58195	11	3869	58760	11	3919	59318	12	3969	59868	11
3770	57634	11	3820	58206	11	3870	58771	11	3920	59329	11	3970	59879	11
3771	57646	12	3821	58218	12	3871	58782	11	3921	59340	11	3971	59890	11
3772	57657	11	3822	58229	11	3872	58794	12	3922	59351	11	3972	59901	11
3773	57669	12	3823	58240	11	3873	58805	11	3923	59362	11	3973	59912	11
3774	57680	11	3824	58252	12	3874	58816	11	3924	59373	11	3974	59923	11
3775	57692	12	3825	58263	11	3875	58827	11	3925	59384	11	3975	59934	11
3776	57703	11	3826	58274	11	3876	58838	11	3926	59395	11	3976	59945	11
3777	57715	12	3827	58286	12	3877	58850	12	3927	59406	11	3977	59956	11
3778	57726	11	3828	58297	11	3878	58861	11	3928	59417	11	3978	59966	10
3779	57738	12	3829	58309	12	3879	58872	11	3929	59428	11	3979	59977	11
3780	57749	11	3830	58320	11	3880	58883	11	3930	59439	11	3980	59988	11
3781	57761	12	3831	58331	11	3881	58894	11	3931	59450	11	3981	59999	11
3782	57772	11	3832	58343	12	3882	58906	12	3932	59461	11	3982	60010	11
3783	57784	12	3833	58354	11	3883	58917	11	3933	59472	11	3983	60021	11
3784	57795	11	3834	58365	11	3884	58928	11	3934	59483	11	3984	60032	11
3785	57807	12	3835	58377	12	3885	58939	11	3935	59494	11	3985	60043	11
3786	57818	11	3836	58388	11	3886	58950	11	3936	59506	12	3986	60054	11
3787	57830	12	3837	58399	11	3887	58961	11	3937	59517	11	3987	60065	11
3788	57841	11	3838	58410	11	3888	58973	12	3938	59528	11	3988	60076	11
3789	57852	11	3839	58422	12	3889	58984	11	3939	59539	11	3989	60086	10
3790	57864	12	3840	58433	11	3890	58995	11	3940	59550	11	3990	60097	11
3791	57875	11	3841	58444	11	3891	59006	11	3941	59561	11	3991	60108	11
3792	57887	12	3842	58456	12	3892	59017	11	3942	59572	11	3992	60119	11
3793	57898	11	3843	58467	11	8393	59028	11	3943	59583	11	3993	60130	11
3794	57910	12	3844	58478	11	3894	59040	12	3944	59594	11	3994	60141	11
3795	57921	11	3845	58490	12	3895	59051	11	3945	59605	11	3995	60152	11
3796	57933	12	3846	58501	11	3896	59062	11	3946	59616	11	3996	60163	11
3797	57944	11	3847	85512	11	3897	59073	11	3947	59627	11	3997	60173	10
3798	57955	11	3848	58524	12	3898	59084	11	3948	59638	11	3998	60184	11
3799	57967	12	3849	58535	11	3899	59095	11	3949	59649	11	3999	60195	11
3800	57978	11	3850	58546	11	3900	59106	11	3950	59660	11	4000	60206	11

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4001	60217	11	4051	60756	10	4101	61289	11	4151	61815	10	4201	62335	10
4002	60228	11	4052	60767	11	4102	61300	11	4152	61826	11	4202	62346	11
4003	60239	11	4053	60778	11	4103	61310	10	4153	61836	10	4203	62356	10
4004	60249	10	4054	60788	10	4104	61321	11	4154	61847	11	4204	62366	10
4005	60260	11	4055	60799	11	4105	61331	10	4155	61857	10	4205	62377	11
4006	60271	11	4056	60810	11	4106	61342	11	4156	61868	11	4206	62387	10
4007	60282	11	4057	60821	11	4107	61352	10	4157	61878	10	4207	62397	10
4008	60293	11	4058	60831	10	4108	61363	11	4158	61888	10	4208	62408	11
4009	60304	11	4059	60842	11	4109	61374	11	4159	61899	11	4209	62418	10
4010	60314	10	4060	60853	11	4110	61384	10	4160	61909	10	4210	62428	10
4011	60325	11	4061	60863	10	4111	61395	11	4161	61920	11	4211	62439	11
4012	60336	11	4062	60874	11	4112	61405	10	4162	61930	10	4212	62449	10
4013	60347	11	4063	60885	11	4113	61416	11	4163	61941	11	4213	62459	10
4014	60358	11	4064	60895	10	4114	61426	10	4164	61951	10	4214	62469	10
4015	60369	11	4065	60906	11	4115	61437	11	4165	61962	11	4215	62480	11
4016	60379	10	4066	60917	11	4116	61448	11	4166	61972	10	4216	62490	10
4017	60390	11	4067	60927	10	4117	61458	10	4167	61982	10	4217	62500	10
4018	60401	11	4068	60938	11	4118	61469	11	4168	61993	11	4218	62511	11
4019	60412	11	4069	60949	11	4119	61479	10	4169	62003	10	4219	62521	10
4020	60423	11	4070	60959	10	4120	61490	11	4170	62014	11	4220	62531	10
4021	60433	10	4071	60970	11	4121	61500	10	4171	62024	10	4221	62542	11
4022	60444	11	4072	60981	11	4122	61511	11	4172	62034	10	4222	62552	10
4023	60455	11	4073	60991	10	4123	61521	10	4173	62045	11	4223	62562	10
4024	60466	11	4074	61002	11	4124	61532	11	4174	62055	10	4224	62572	10
4025	60477	11	4075	61013	11	4125	61542	10	4175	62066	11	4225	62583	11
4026	60487	10	4076	61023	10	4126	61553	11	4176	62076	10	4226	62593	10
4027	60498	11	4077	61034	11	4127	61563	10	4177	62086	10	4227	62603	10
4028	60509	11	4078	61045	11	4128	61574	11	4178	62097	11	4228	62613	10
4029	60520	11	4079	61055	10	4129	61584	10	4179	62107	10	4229	62624	11
4030	60531	11	4080	61066	11	4130	61595	11	4180	62118	11	4230	62634	10
4031	60541	10	4081	61077	11	4131	61606	11	4181	62128	10	4231	62644	10
4032	60552	11	4082	61087	10	4132	61616	10	4182	62138	10	4232	62655	11
4033	60563	11	4083	61098	11	4133	61627	11	4183	62149	11	4233	62665	10
4034	60574	11	4084	61109	11	4134	61637	10	4184	62159	10	4234	62675	10
4035	60584	10	4085	61119	10	4135	61648	11	4185	62170	11	4235	62685	10
4036	60595	11	4086	61130	11	4136	61658	10	4186	62180	10	4236	62696	11
4037	60606	11	4087	61140	10	4137	61669	11	4187	62190	10	4237	62706	10
4038	60617	11	4088	61151	11	4138	61679	10	4188	62201	11	4238	62716	10
4039	60627	10	4089	61162	11	4139	61690	11	4189	62211	10	4239	62726	10
4040	60638	11	4090	61172	10	4140	61700	10	4190	62221	10	4240	62737	11
4041	60649	11	4091	61183	11	4141	61711	11	4191	62232	11	4241	62747	10
4042	60660	11	4092	61194	11	4142	61721	10	4192	62242	10	4242	62757	10
4043	60670	10	4093	61204	10	4143	61731	10	4193	62252	10	4243	62767	10
4044	60681	11	4094	61215	11	4144	61742	11	4194	62263	11	4244	62778	11
4045	60692	11	4095	61225	10	4145	61752	10	4195	62273	10	4245	62788	10
4046	60703	11	4096	61236	11	4146	61763	11	4196	62284	11	4246	62798	10
4047	60713	10	4097	61247	11	4147	61773	10	4197	62294	10	4247	62808	10
4048	60724	11	4098	61257	10	4148	61784	11	4198	62304	10	4248	62818	10
4049	60735	11	4099	61268	11	4149	61794	10	4199	62315	11	4249	62829	11
4050	60746	11	4100	61278	10	4150	61805	11	4200	62325	10	4250	62839	10

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4251	62849	10	4301	63357	10	4351	63859	10	4401	64355	10	4451	64846	10
4252	62859	10	4302	63367	10	4352	63869	10	4402	64365	10	4452	64856	10
4253	62870	11	4303	63377	10	4353	63879	10	4403	64375	10	4453	64865	9
4254	62880	10	4304	63387	10	4354	63889	10	4404	64385	10	4454	64875	10
4255	62890	10	4305	63397	10	4355	63899	10	4405	64395	10	4455	64885	10
4256	62900	10	4306	63407	10	4356	63909	10	4406	64404	9	4456	64895	10
4257	62910	10	4307	63417	10	4357	63919	10	4407	64414	10	4457	64904	9
4258	62921	11	4308	63428	11	4358	63929	10	4408	64424	10	4458	64914	10
4259	62931	10	4309	63438	10	4359	63939	10	4409	64434	10	4459	64924	10
4260	62941	10	4310	63448	10	4360	63949	10	4410	64444	10	4460	64933	9
4261	62951	10	4311	63458	10	4361	63959	10	4411	64454	10	4461	64943	10
4262	62961	10	4312	63468	10	4362	63969	10	4412	64464	10	4462	64953	10
4263	62972	11	4313	63478	10	4363	63979	10	4413	64473	9	4463	64963	10
4264	62982	10	4314	63488	10	4364	63988	9	4414	64483	10	4464	64972	9
4265	62992	10	4315	63498	10	4365	63998	10	4415	64493	10	4465	64982	10
4266	63002	10	4316	63508	10	4366	64008	10	4416	64503	10	4466	64992	10
4267	63012	10	4317	63518	10	4367	64018	10	4417	64513	10	4467	65002	10
4268	63022	10	4318	63528	10	4368	64028	10	4418	64523	10	4468	65011	9
4269	63033	11	4319	63538	10	4369	64038	10	4419	64532	9	4469	65021	10
4270	63043	10	4320	63548	10	4370	64048	10	4420	64542	10	4470	65031	10
4271	63053	10	4321	63558	10	4371	64058	10	4421	64552	10	4471	65040	9
4272	63063	10	4322	63568	10	4372	64068	10	4422	64562	10	4472	65050	10
4273	63073	10	4323	63579	11	4373	64078	10	4423	64572	10	4473	65060	10
4274	63083	10	4324	63589	10	4374	64088	10	4424	64582	10	4474	65070	10
4275	63094	11	4325	63599	10	4375	64098	10	4425	64591	9	4475	65079	9
4276	63104	10	4326	63609	10	4376	64108	10	4426	64601	10	4476	65089	10
4277	63114	10	4327	63619	10	4377	64118	10	4427	64611	10	4477	65099	10
4278	63124	10	4328	63629	10	4378	64128	10	4428	64621	10	4478	65108	9
4279	63134	10	4329	63639	10	4379	64137	9	4429	64631	10	4479	65118	10
4280	63144	10	4330	63649	10	4380	64147	10	4430	64640	9	4480	65128	10
4281	63155	11	4331	63659	10	4381	64157	10	4431	64650	10	4481	65137	9
4282	63165	10	4332	63669	10	4382	64167	10	4432	64660	10	4482	65147	10
4283	63175	10	4333	63679	10	4383	64177	10	4433	64670	10	4483	65157	10
4284	63185	10	4334	63689	10	4384	64187	10	4434	64680	10	4484	65167	10
4285	63195	10	4335	63699	10	4385	64197	10	4435	64689	9	4485	65176	9
4286	63205	10	4336	63709	10	4386	64207	10	4436	64699	10	4486	65186	10
4287	63215	10	4337	63719	10	4387	64217	10	4437	64709	10	4487	65196	10
4288	63225	10	4338	63729	10	4388	64227	10	4438	64719	10	4488	65205	9
4289	63236	11	4339	63739	10	4389	64237	10	4439	64729	10	4489	65215	10
4290	63246	10	4340	63749	10	4390	64246	9	4440	64738	9	4490	65225	10
4291	63256	10	4341	63759	10	4391	64256	10	4441	64748	10	4491	65234	9
4292	63266	10	4342	63769	10	4392	64266	10	4442	64758	10	4492	65244	10
4293	63276	10	4343	63779	10	4393	64276	10	4443	64768	10	4493	65254	10
4294	63286	10	4344	63789	10	4394	64286	10	4444	64777	9	4494	65263	9
4295	63296	10	4345	63799	10	4395	64296	10	4445	64787	10	4495	65273	10
4296	63306	10	4346	63809	10	4396	64306	10	4446	64797	10	4496	65283	10
4297	63317	11	4347	63819	10	4397	64316	10	4447	64807	10	4497	65292	9
4298	63327	10	4348	63829	10	4398	64326	10	4448	64816	9	4498	65302	10
4299	63337	10	4349	63839	10	4399	64335	9	4449	64826	10	4499	65312	10
4300	63347	10	4350	63849	10	4400	64345	10	4450	64836	10	4500	65321	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4501	65331	10	4551	65811	10	4601	66285	9	4651	66755	10	4701	67219	9
4502	65341	10	4552	65820	9	4602	66295	10	4652	66764	9	4702	67228	9
4503	65350	9	4553	65830	10	4603	66304	9	4653	66773	9	4703	67237	9
4504	65360	10	4554	65839	9	4604	66314	10	4654	66783	10	4704	67247	10
4505	65369	9	4555	65849	10	4605	66323	9	4655	66792	9	4705	67256	9
4506	65379	10	4556	65858	9	4606	66332	9	4656	66801	9	4706	67265	9
4507	65389	10	4557	65868	10	4607	66342	10	4657	66811	10	4707	67274	9
4508	65398	9	4558	65877	9	4608	66351	9	4658	66820	9	4708	67284	10
4509	65408	10	4559	65887	10	4609	66361	10	4659	66829	9	4709	67293	9
4510	65418	10	4560	65896	9	4610	66370	9	4660	66839	10	4710	67302	9
4511	65427	9	4561	65906	10	4611	66380	10	4661	66848	9	4711	67311	9
4512	65437	10	4562	65916	10	4612	66389	9	4662	66857	9	4712	67321	10
4513	65447	10	4563	65925	9	4613	66398	9	4663	66867	10	4713	67330	9
4514	65456	9	4564	65935	10	4614	66408	10	4664	66876	9	4714	67339	9
4515	65466	10	4565	65944	9	4615	66417	9	4665	66885	9	4715	67348	9
4516	65475	9	4566	65954	10	4616	66427	10	4666	66894	9	4716	67357	9
4517	65485	10	4567	65963	9	4617	66436	9	4667	66904	10	4717	67367	10
4518	65495	10	4568	65973	10	4618	66445	9	4668	66913	9	4718	67376	9
4519	65504	9	4569	65982	9	4619	66455	10	4669	66922	9	4719	67385	9
4520	65514	10	4570	65992	10	4620	66464	9	4670	66932	10	4720	67394	9
4521	65523	9	4571	66001	9	4621	66474	10	4671	66941	9	4721	67403	9
4522	65533	10	4572	66011	10	4622	66483	9	4672	66950	9	4722	67413	10
4523	65543	10	4573	66020	9	4623	66492	9	4673	66960	10	4723	67422	9
4524	65552	9	4574	66030	10	4624	66502	10	4674	66969	9	4724	67431	9
4525	65562	10	4575	66039	9	4625	66511	9	4675	66978	9	4725	67440	9
4526	65571	9	4576	66049	10	4626	66521	10	4676	66987	9	4726	67449	9
4527	65581	10	4577	66058	9	4627	66530	9	4677	66997	10	4727	67459	10
4528	65591	10	4578	66068	10	4628	66539	9	4678	67006	9	4728	67468	9
4529	65600	9	4579	66077	9	4629	66549	10	4679	67015	9	4729	67477	9
4530	65610	10	4580	66087	10	4630	66558	9	4680	67025	10	4730	67486	9
4531	65619	9	4581	66096	9	4631	66567	9	4681	67034	9	4731	67495	9
4532	65629	10	4582	66106	10	4632	66577	10	4682	67043	9	4732	67504	9
4533	65639	10	4583	66115	9	4633	66586	9	4683	67052	9	4733	67514	10
4534	65648	9	4584	66124	9	4634	66596	10	4684	67062	10	4734	67523	9
4535	65658	10	4585	66134	10	4635	66605	9	4685	67071	9	4735	67532	9
4536	65667	9	4586	66143	9	4636	66614	9	4686	67080	9	4736	67541	9
4537	65677	10	4587	66153	10	4637	66624	10	4687	67089	9	4737	67550	9
4538	65686	9	4588	66162	9	4638	66633	9	4688	67099	10	4738	67560	10
4539	65696	10	4589	66172	10	4639	66642	9	4689	67108	9	4739	67569	9
4540	65706	10	4590	66181	9	4640	66652	10	4690	67117	9	4740	67578	9
4541	65715	9	4591	66191	10	4641	66661	9	4691	67127	10	4741	67587	9
4542	65725	10	4592	66200	9	4642	66671	10	4692	67136	9	4742	67596	9
4543	65734	9	4593	66210	10	4643	66680	9	4693	67145	9	4743	67605	9
4544	65744	10	4594	66219	9	4644	66689	9	4694	67154	9	4744	67614	9
4545	65753	9	4595	66229	10	4645	66699	10	4695	67164	10	4745	67624	10
4546	65763	10	4596	66238	9	4646	66708	9	4696	67173	9	4746	67633	9
4547	65772	9	4597	66247	9	4647	66717	9	4697	67182	9	4747	67642	9
4548	65782	10	4598	66257	10	4648	66727	10	4698	67191	9	4748	67651	9
4549	65792	10	4599	66266	9	4649	66736	9	4699	67201	10	4749	67660	9
4550	65801	9	4600	66276	10	4650	66745	9	4700	67210	9	4750	67669	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
4751	67679	10	4801	68133	9	4851	68583	9	4901	69028	8	4951	69469	8
4752	67688	9	4802	68142	9	4852	68592	9	4902	69037	9	4952	69478	9
4753	67697	9	4803	68151	9	4853	68601	9	4903	69046	9	4953	69487	9
4754	67706	9	4804	68160	9	4854	68610	9	4904	69055	9	4954	69496	9
4755	67715	9	4805	68169	9	4855	68619	9	4905	69064	9	4955	69504	8
4756	67724	9	4806	68178	9	4856	68628	9	4906	69073	9	4956	69513	9
4757	67733	9	4807	68187	9	4857	68637	9	4907	69082	9	4957	69522	9
4758	67742	9	4808	68196	9	4858	68646	9	4908	69090	8	4958	69531	9
4759	67752	10	4809	68205	9	4859	68655	9	4909	69099	9	4959	69539	8
4760	67761	9	4810	68215	10	4860	68664	9	4910	69108	9	4960	69548	9
4761	67770	9	4811	68224	9	4861	68673	9	4911	69117	9	4961	69557	9
4762	67779	9	4812	68233	9	4862	68681	8	4912	69126	9	4962	69566	9
4763	67788	9	4813	68242	9	4863	68690	9	4913	69135	9	4963	69574	8
4764	67797	9	4814	68251	9	4864	68699	9	4914	69144	9	4964	69583	9
4765	67806	9	4815	68260	9	4865	68708	9	4915	69152	8	4965	69592	9
4766	67815	9	4816	68269	9	4866	68717	9	4916	69161	9	4966	69601	9
4767	67825	10	4817	68278	9	4867	68726	9	4917	69170	9	4967	69609	8
4768	67834	9	4818	68287	9	4868	68735	9	4918	69179	9	4968	69618	9
4769	67843	9	4819	68296	9	4869	68744	9	4919	69188	9	4969	69627	9
4770	67852	9	4820	68305	9	4870	68753	9	4920	69197	9	4970	69636	9
4771	67861	9	4821	68314	9	4871	68762	9	4921	69205	8	4971	69644	8
4772	67870	9	4822	68323	9	4872	68771	9	4922	69214	9	4972	69653	9
4773	67879	9	4823	68332	9	4873	68780	9	4923	69223	9	4973	69662	9
4774	67888	9	4824	68341	9	4874	68789	9	4924	69232	9	4974	69671	9
4775	67897	9	4825	68350	9	4875	68797	8	4925	69241	9	4975	69679	8
4776	67906	9	4826	68359	9	4876	68806	9	4926	69249	8	4976	69688	9
4777	67916	10	4827	68368	9	4877	68815	9	4927	69258	9	4977	69697	9
4778	67925	9	4828	68377	9	4878	68824	9	4928	69267	9	4978	69705	8
4779	67934	9	4829	68386	9	4879	68833	9	4929	69276	9	4979	69714	9
4780	67943	9	4830	68395	9	4880	68842	9	4930	69285	9	4980	69723	9
4781	67952	9	4831	68404	9	4881	68851	9	4931	69294	9	4981	69732	9
4782	67961	9	4832	68413	9	4882	68860	9	4932	69302	8	4982	69740	8
4783	67970	9	4833	68422	9	4883	68869	9	4933	69311	9	4983	69749	9
4784	67979	9	4834	68431	9	4884	68878	9	4934	69320	9	4984	69758	9
4785	67988	9	4835	68440	9	4885	68886	8	4935	69329	9	4985	69767	9
4786	67997	9	4836	68449	9	4886	68895	9	4936	69338	9	4986	69775	8
4787	68006	9	4837	68458	9	4887	68904	9	4937	69346	8	4987	69784	9
4788	68015	9	4838	68467	9	4888	68913	9	4938	69355	9	4988	69793	9
4789	68024	9	4839	68476	9	4889	68922	9	4939	69364	9	4989	69801	8
4790	68034	19	4840	68485	9	4890	68931	9	4940	69373	9	4990	69810	9
4791	68043	9	4841	68494	9	4891	68940	9	4941	69381	8	4991	69819	9
4792	68052	9	4842	68502	8	4892	68949	9	4942	69390	9	4992	69827	8
4793	68061	9	4843	68511	9	4893	68958	9	4943	69399	9	4993	69836	9
4794	68070	9	4844	68520	9	4894	68966	8	4944	69408	9	4994	69845	9
4795	68079	9	4845	68529	9	4895	68975	9	4945	69417	9	4995	69854	9
4796	68088	9	4846	68538	9	4896	68984	9	4946	69425	8	4996	69862	8
4797	68097	9	4847	68547	9	4897	68993	9	4947	69434	9	4997	69871	9
4798	68106	9	4848	68556	9	4898	69002	9	4948	69443	9	4998	69880	9
4799	68115	9	4849	68565	9	4899	69011	9	4949	69452	9	4999	69888	8
4800	68124	9	4850	68574	9	4900	69020	9	4950	69461	9	5000	69897	9

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	
5001	69906	9	5051	70338	9	5101	70766	9	5151	71189	8	5201	71609	9
5002	69914	8	5052	70346	8	5102	70774	8	5152	71198	9	5202	71617	8
5003	69923	9	5053	70355	9	5103	70783	9	5153	71206	8	5203	71625	8
5004	69932	9	5054	70364	9	5104	70791	8	5154	71214	8	5204	71634	9
5005	69940	8	5055	70372	8	5105	70800	9	5155	71223	9	5205	71642	8
5006	69949	9	5056	70381	9	5106	70808	8	5156	71231	8	5206	71650	8
5007	69958	9	5057	70389	8	5107	70817	9	5157	71240	9	5207	71659	9
5008	69966	8	5058	70398	9	5108	70825	8	5158	71248	8	5208	71667	8
5009	69975	9	5059	70406	8	5109	70834	9	5159	71257	9	5209	71675	8
5010	69984	9	5060	70415	9	5110	70842	8	5160	71265	8	5210	71684	9
5011	69992	8	5061	70424	9	5111	70851	9	5161	71273	8	5211	71692	8
5012	70001	9	5062	70432	8	5112	70859	8	5162	71282	9	5212	71700	8
5013	70010	9	5063	70441	9	5113	70868	9	5163	71290	8	5213	71709	9
5014	70018	8	5064	70449	8	5114	70876	8	5164	71299	9	5214	71717	8
5015	70027	9	5065	70458	9	5115	70885	9	5165	71307	8	5215	71725	8
5016	70036	9	5066	70467	9	5116	70893	8	5166	71315	8	5216	71734	9
5017	70044	8	5067	70475	8	5117	70902	9	5167	71324	9	5217	71742	8
5018	70053	9	5068	70484	9	5118	70910	8	5168	71332	8	5218	71750	8
5019	70062	9	5069	70492	8	5119	70919	9	5169	71341	9	5219	71759	9
5020	70070	8	5070	70501	9	5120	70927	8	5170	71349	8	5220	71767	8
5021	70079	9	5071	70509	8	5121	70935	8	5171	71357	8	5221	71775	8
5022	70088	9	5072	70518	9	5122	70944	9	5172	71366	9	5222	71784	9
5023	70096	8	5073	70526	8	5123	70952	8	5173	71374	8	5223	71792	8
5024	70105	9	5074	70535	9	5124	70961	9	5174	71383	9	5224	71800	8
5025	70114	9	5075	70544	9	5125	70969	8	5175	71391	8	5225	71809	9
5026	70122	8	5076	70552	8	5126	70978	9	5176	71399	8	5226	71817	8
5027	70131	9	5077	70561	9	5127	70986	8	5177	71408	9	5227	71825	8
5028	70140	9	5078	70569	8	5128	70995	9	5178	71416	8	5228	71834	9
5029	70148	8	5079	70578	9	5129	71003	8	5179	71425	9	5229	71842	8
5030	70157	9	5080	70586	8	5130	71012	9	5180	71433	8	5230	71850	8
5031	70165	8	5081	70595	9	5131	71020	8	5181	71441	8	5231	71858	8
5032	70174	9	5082	70603	8	5132	71029	9	5182	71450	9	5232	71867	9
5033	70183	9	5083	70612	9	5133	71037	8	5183	71458	8	5233	71875	8
5034	70191	8	5084	70621	9	5134	71046	9	5184	71466	8	5234	71883	8
5035	70200	9	5085	70629	8	5135	71054	8	5185	71475	9	5235	71892	9
5036	70209	9	5086	70638	9	5136	71063	9	5186	71483	8	5236	71900	8
5037	70217	8	5087	70646	8	5137	71071	8	5187	71492	9	5237	71908	8
5038	70226	9	5088	70655	9	5138	71079	8	5188	71500	8	5238	71917	9
5039	70234	8	5089	70663	8	5139	71088	9	5189	71508	8	5239	71925	8
5040	70243	9	5090	70672	9	5140	71096	8	5190	71517	9	5240	71933	8
5041	70252	9	5091	70680	8	5141	71105	9	5191	71525	8	5241	71941	8
5042	70260	8	5092	70689	9	5142	71113	8	5192	71533	8	5242	71950	9
5043	70269	9	5093	70697	8	5143	71122	9	5193	71542	9	5243	71958	8
5044	70278	9	5094	70706	9	5144	71130	8	5194	71550	8	5244	71966	8
5045	70286	8	5095	70714	8	5145	71139	9	5195	71559	9	5245	71975	9
5046	70295	9	5096	70723	9	5146	71147	8	5196	71567	8	5246	71983	8
5047	70303	8	5097	70731	8	5147	71155	8	5197	71575	8	5247	71991	8
5048	70312	9	5098	70740	9	5148	71164	9	5198	71584	9	5248	71999	8
5049	70321	9	5099	70749	9	5149	71172	8	5199	71592	8	5249	72008	9
5050	70329	8	5100	70757	8	5150	71181	9	5200	71600	8	5250	72016	8

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5251	72024	8	5301	72436	8	5351	72843	8	5401	73247	8	5451	73648	8
5252	72032	8	5302	72444	8	5352	72852	9	5402	73255	8	5452	73656	8
5253	72041	9	5303	72452	8	5353	72860	8	5403	73263	8	5453	73664	8
5254	72049	8	5304	72460	8	5354	72868	8	5404	73272	9	5454	73672	8
5255	72057	8	5305	72469	9	5355	72876	8	5405	73280	8	5455	73679	7
5256	72066	9	5306	72477	8	5356	72884	8	5406	73288	8	5456	73687	8
5257	72074	8	5307	72485	8	5357	72892	8	5407	73296	8	5457	73695	8
5258	72082	8	5308	72493	8	5358	72900	8	5408	73304	8	5458	73703	8
5259	72090	8	5309	72501	8	5359	72908	8	5409	73312	8	5459	73711	8
5260	72099	9	5310	72509	8	5360	72916	8	5410	73320	8	5460	73719	8
5261	72107	8	5311	72518	9	5361	72925	9	5411	73328	8	5461	73727	8
5262	72115	8	5312	72526	8	5362	72933	8	5412	73336	8	5462	73735	8
5263	72123	8	5313	72534	8	5363	72941	8	5413	73344	8	5463	73743	8
5264	72132	9	5314	72542	8	5364	72949	8	5414	73352	8	5464	73751	8
5265	72140	8	5315	72550	8	5365	72957	8	5415	73360	8	5465	73759	8
5266	72148	8	5316	72558	8	5366	72965	8	5416	73368	8	5466	73767	8
5267	72156	8	5317	72567	9	5367	72973	8	5417	73376	8	5467	73775	8
5268	72165	9	5318	72575	8	5368	72981	8	5418	73384	8	5468	73783	8
5269	72173	8	5319	72583	8	5369	72989	8	5419	73392	8	5469	73791	8
5270	72181	8	5320	72591	8	5370	72997	8	5420	73400	8	5470	73799	8
5271	72189	8	5321	72599	8	5371	73006	9	5421	73408	8	5471	73807	8
5272	72198	9	5322	72607	8	5372	73014	8	5422	73416	8	5472	73815	8
5273	72206	8	5323	72616	9	5373	73022	8	5423	73424	8	5473	73823	8
5274	72214	8	5324	72624	8	5374	73030	8	5424	73432	8	5474	73830	7
5275	72222	8	5325	72632	8	5375	73038	8	5425	73440	8	5475	73838	8
5276	72230	8	5326	72640	8	5376	73046	8	5426	73448	8	5476	73846	8
5277	72239	9	5327	72648	8	5377	73054	8	5427	73456	8	5477	73854	8
5278	72247	8	5328	72656	8	5378	73062	8	5428	73464	8	5478	73862	8
5279	72255	8	5329	72665	9	5379	73070	8	5429	73472	8	5479	73870	8
5280	72263	8	5330	72673	8	5380	73078	8	5430	73480	8	5480	73878	8
5281	72272	9	5331	72681	8	5381	73086	8	5431	73488	8	5481	73886	8
5282	72280	8	5332	72689	8	5382	73094	8	5432	73496	8	5482	73894	8
5283	72288	8	5333	72697	8	5383	73102	8	5433	73504	8	5483	73902	8
5284	72296	8	5334	72705	8	5384	73111	9	5434	73512	8	5484	73910	8
5285	72304	8	5335	72713	8	5385	73119	8	5435	73520	8	5485	73918	8
5286	72313	9	5336	72722	9	5386	73127	8	5436	73528	8	5486	73926	8
5287	72321	8	5337	72730	8	5387	73135	8	5437	73536	8	5487	73933	7
5288	72329	8	5338	72738	8	5388	73143	8	5438	73544	8	5488	73941	8
5289	72337	8	5339	72746	8	5389	73151	8	5439	73552	8	5489	73949	8
5290	72346	9	5340	72754	8	5390	73159	8	5440	73560	8	5490	73957	8
5291	72354	8	5341	72762	8	5391	73167	8	5441	73568	8	5491	73965	8
5292	72362	8	5342	72770	8	5392	73175	8	5442	73576	8	5492	73973	8
5293	72370	8	5343	72779	9	5393	73183	8	5443	73584	8	5493	73981	8
5294	72378	8	5344	72787	8	5394	73191	8	5444	73592	8	5494	73989	8
5295	72387	9	5345	72795	8	5395	73199	8	5445	73600	8	5495	73997	8
5296	72395	8	5346	72803	8	5396	73207	8	5446	73608	8	5496	74005	8
5297	72403	8	5347	72811	8	5397	73215	8	5447	73616	8	5497	74013	8
5298	72411	8	5348	72819	8	5398	73223	8	5448	73624	8	5498	74020	7
5299	72419	8	5349	72827	8	5399	73231	8	5449	73632	8	5499	74028	8
5300	72428	9	5350	72835	8	5400	3239	8	5450	73640	8	5500	74036	8

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5501	74044	8	5551	74437	8	5601	74827	8	5651	75213	8	5701	75595	8
5502	74052	8	5552	74445	8	5602	74834	7	5652	75220	7	5702	75603	8
5503	74060	8	5553	74453	8	5603	74842	8	5653	75228	8	5703	75610	7
5504	74068	8	5554	74461	8	5604	74850	8	5654	75236	8	5704	75618	8
5505	74076	8	5555	74468	7	5605	74858	8	5655	75243	7	5705	75626	8
5506	74084	8	5556	74476	8	5606	74865	7	5656	75251	8	5706	75633	7
5507	74092	8	5557	74484	8	5607	74873	8	5657	75259	8	5707	75641	8
5508	74099	7	5558	74492	8	5608	74881	8	5658	75266	7	5708	75648	7
5509	74107	8	5559	74500	8	5609	74889	8	5659	75274	8	5709	75656	8
5510	74115	8	5560	74507	7	5610	74896	7	5660	75282	8	5710	75664	8
5511	74123	8	5561	74515	8	5611	74904	8	5661	75289	7	5711	75671	7
5512	74131	8	5562	74523	8	5612	74912	8	5662	75297	8	5712	75679	8
5513	74139	8	5563	74531	8	5613	74920	8	5663	75305	8	5713	75686	7
5514	74147	8	5564	74539	8	5614	74927	7	5664	75312	7	5714	75694	8
5515	74155	8	5565	74547	8	5615	74935	8	5665	75320	8	5715	75702	8
5516	74162	7	5566	74554	7	5616	74943	8	5666	75328	8	5716	75709	7
5517	74170	8	5567	74562	8	5617	74950	7	5667	75335	7	5717	75717	8
5518	74178	8	5568	74570	8	5618	74958	8	5668	75343	8	5718	75724	7
5519	74186	8	5569	74578	8	5619	74966	8	5669	75351	8	5719	75732	8
5520	74194	8	5570	74586	8	5620	74974	8	5670	75358	7	5720	75740	8
5521	74202	8	5571	74593	7	5621	74981	7	5671	75366	8	5721	75747	7
5522	74210	8	5572	74601	8	5622	74989	8	5672	75374	8	5722	75755	8
5523	74218	8	5573	74609	8	5623	74997	8	5673	75381	7	5723	75762	7
5524	74225	7	5574	74617	8	5624	75005	8	5674	75389	8	5724	75770	8
5525	74233	8	5575	74624	7	5625	75012	7	5675	75397	8	5725	75778	8
5526	74241	8	5576	74632	8	5626	75020	8	5676	75404	7	5726	75785	7
5527	74249	8	5577	74640	8	5627	75028	8	5677	75412	8	5727	75793	8
5528	74257	8	5578	74648	8	5628	75035	7	5678	75420	8	5728	75800	7
5529	74265	8	5579	74656	8	5629	75043	8	5679	75427	7	5729	75808	8
5530	74273	8	5580	74663	7	5630	75051	8	5680	75435	8	5730	75815	7
5531	74280	7	5581	74671	8	5631	75059	8	5681	75442	7	5731	75823	8
5532	74288	8	5582	74679	8	5632	75066	7	5682	75450	8	5732	75831	8
5533	74296	8	5583	74687	8	5633	75074	8	5683	75458	8	5733	75838	7
5534	74304	8	5584	74695	8	5634	75082	8	5684	75465	7	5734	75846	8
5535	74312	8	5585	74702	7	5635	75089	7	5685	75473	8	5735	75853	7
5536	74320	8	5586	74710	8	5636	75097	8	5686	75481	8	5736	75861	8
5537	74327	7	5587	74718	8	5637	75105	8	5687	75488	7	5737	75868	7
5538	74335	8	5588	74726	8	5638	75113	8	5688	75496	8	5738	75876	8
5539	74343	8	5589	74733	7	5639	75120	7	5689	75504	8	5739	75884	8
5540	74351	8	5590	74741	8	5640	75128	8	5690	75511	7	5740	75891	7
5541	74359	8	5591	74749	8	5641	75136	8	5691	75519	8	5741	75899	8
5542	74367	8	5592	74757	8	5642	75143	7	5692	75526	7	5742	75906	7
5543	74374	7	5593	74764	7	5643	75151	8	5693	75534	8	5743	75914	8
5544	74382	8	5594	74772	8	5644	75159	8	5694	75542	8	5744	75921	7
5545	74390	8	5595	74780	8	5645	75166	7	5695	75549	7	5745	75929	8
5546	74398	8	5596	74788	8	5646	75174	8	5696	75557	8	5746	75937	8
5547	74406	8	5597	74796	8	5647	75182	8	5697	75565	8	5747	75944	7
5548	74414	8	5598	74803	7	5648	75189	7	5698	75572	7	5748	75952	8
5549	74421	7	5599	74811	8	5649	75197	8	5699	75580	8	5749	75959	7
5550	74429	8	5600	74819	8	5650	75205	8	5700	75587	7	5750	75967	8

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
5751	75974	8	5801	76350	8	5851	76723	7	5901	77093	7	5951	77459	7
5752	75982	7	5802	76358	7	5852	76730	8	5902	77100	7	5952	77466	8
5753	75989	8	5803	76365	8	5853	76738	7	5903	77107	8	5953	77474	7
5754	75997	8	5804	76373	7	5854	76745	8	5904	77115	7	5954	77481	7
5755	76005	7	5805	76380	8	5855	76753	7	5905	77122	7	5955	77488	7
5756	76012	8	5806	76388	7	5856	76760	8	5906	77129	8	5956	77495	8
5757	76020	7	5807	76395	8	5857	76768	7	5907	77137	7	5957	77503	7
5758	76027	8	5808	76403	7	5858	76775	7	5908	77144	7	5958	77510	7
5759	76035	7	5809	76410	8	5859	76782	8	5909	77151	8	5959	77517	8
5760	76042	8	5810	76418	7	5860	76790	7	5910	77159	7	5960	77525	7
5761	76050	7	5811	76425	8	5861	76797	8	5911	77166	7	5961	77532	7
5762	76057	8	5812	76433	7	5862	76805	7	5912	77173	8	5962	77539	7
5763	76065	7	5813	76440	8	5863	76812	7	5913	77181	7	5963	77546	8
5764	76072	8	5814	76448	7	5864	76819	8	5914	77188	7	5964	77554	7
5765	76080	7	5815	76455	7	5865	76827	7	5915	77195	8	5965	77561	7
5766	76087	8	5816	76462	8	5866	76834	8	5916	77203	7	5966	77568	8
5767	76095	8	5817	76470	7	5867	76842	7	5917	77210	7	5967	77576	7
5768	76103	7	5818	76477	8	5868	76849	7	5918	77217	8	5968	77583	7
5769	76110	8	5819	76485	7	5869	76856	8	5919	77225	7	5969	77590	7
5770	76118	7	5820	76492	8	5870	76864	7	5920	77232	8	5970	77597	8
5771	76125	8	5821	76500	7	5871	76871	8	5921	77240	7	5971	77605	7
5772	76133	7	5822	76507	8	5872	76879	7	5922	77247	7	5972	77612	7
5773	76140	8	5823	76515	7	5873	76886	7	5923	77254	8	5973	77619	8
5774	76148	7	5824	76522	8	5874	76893	8	5924	77262	7	5974	77627	7
5775	76155	8	5825	76530	7	5875	76901	7	5925	77269	7	5975	77634	7
5776	76163	7	5826	76537	8	5876	76908	8	5926	77276	7	5976	77641	7
5777	76170	8	5827	76545	7	5877	76916	7	5927	77283	8	5977	77648	8
5778	76178	7	5828	76552	7	5878	76923	7	5928	77291	7	5978	77656	7
5779	76185	8	5829	76559	8	5879	76930	8	5929	77298	7	5979	77663	7
5780	76193	7	5830	76567	7	5880	76938	7	5930	77305	8	5980	77670	7
5781	76200	8	5831	76574	8	5881	76945	8	5931	77313	7	5981	77677	8
5782	76208	7	5832	76582	7	5882	76953	7	5932	77320	7	5982	77685	7
5783	76215	8	5833	76589	8	5883	76960	7	5933	77327	8	5983	77692	7
5784	76223	7	5834	76597	7	5884	76967	8	5934	77335	7	5984	77699	7
5785	76230	8	5835	76604	8	5885	76975	7	5935	77342	7	5985	77706	8
5786	76238	7	5836	76612	7	5886	76982	7	5936	77349	8	5986	77714	7
5787	76245	8	5837	76619	7	5887	76989	8	5937	77357	7	5987	77721	7
5788	76253	7	5838	76626	8	5888	76997	7	5938	77364	7	5988	77728	7
5789	76260	8	5839	76634	7	5889	77004	8	5939	77371	8	5989	77735	8
5790	76268	7	5840	76641	8	5890	77012	7	5940	77379	7	5990	77743	7
5791	76275	8	5841	76649	7	5891	77019	7	5941	77386	7	5991	77750	7
5792	76283	7	5842	76656	8	5892	77026	8	5942	77393	8	5992	77757	7
5793	76290	8	5843	76664	7	5893	77034	7	5943	77401	7	5993	77764	8
5794	76298	7	5844	76671	7	5894	77041	7	5944	77408	7	5994	77772	7
5795	76305	8	5845	76678	8	5895	77048	8	5945	77415	7	5995	77779	7
5796	76313	7	5846	76686	7	5896	77056	7	5946	77422	8	5996	77786	7
5797	76320	8	5847	76693	8	5897	77063	7	5947	77430	7	5997	77793	8
5798	76328	7	5848	76701	7	5898	77070	8	5948	77437	7	5998	77801	7
5799	76335	8	5849	76708	8	5899	77078	7	5949	77444	8	5999	77808	7
5800	76343		5850	76716		5900	77085		5950	77452		6000	77815	

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
6001	77822	8	6051	78183	7	6101	78540	7	6151	78895	7	6201	79246	7
6002	77830	7	6052	78190	7	6102	78547	7	6152	78902	7	6202	79253	7
6003	77837	7	6053	78197	7	6103	78554	7	6153	78909	7	6203	79260	7
6004	77844	7	6054	78204	7	6104	78561	8	6154	78916	7	6204	79267	7
6005	77851	8	6055	78211	8	6105	78569	7	6155	78923	7	6205	79274	7
6006	77859	7	6056	78219	7	6106	78576	7	6156	78930	7	6206	79281	7
6007	77866	7	6057	78226	7	6107	78583	7	6157	78937	7	6207	79288	7
6008	77873	7	6058	78233	7	6108	78590	7	6158	78944	7	6208	79295	7
6009	77880	7	6059	78240	7	6109	78597	7	6159	78951	7	6209	79302	7
6010	77887	8	6060	78247	7	6110	78604	7	6160	78958	7	6210	79309	7
6011	77895	7	6061	78254	8	6111	78611	7	6161	78965	7	6211	79316	7
6012	77902	7	6062	78262	7	6112	78618	7	6162	78972	7	6212	79323	7
6013	77909	7	6063	78269	7	6113	78625	8	6163	78979	7	6213	79330	7
6014	77916	8	6064	78276	7	6114	78633	7	6164	78986	7	6214	79337	7
6015	77924	7	6065	78283	7	6115	78640	7	6165	78993	7	6215	79344	7
6016	77931	7	6066	78290	7	6116	78647	7	6166	79000	7	6216	79351	7
6017	77938	7	6067	78297	8	6117	78654	7	6167	79007	7	6217	79358	7
6018	77945	7	6068	78305	7	6118	78661	7	6168	79014	7	6218	79365	7
6019	77952	8	6069	78312	7	6119	78668	7	6169	79021	8	6219	79372	7
6020	77960	7	6070	78319	7	6120	78675	7	6170	79029	7	6220	79379	7
6021	77967	7	6071	78326	7	6121	78682	7	6171	79036	7	6221	79386	7
6022	77974	7	6072	78333	7	6122	78689	7	6172	79043	7	6222	79393	7
6023	77981	7	6073	78340	7	6123	78696	8	6173	79050	7	6223	79400	7
6024	77988	8	6074	78347	8	6124	78704	7	6174	79057	7	6224	79407	7
6025	77996	7	6075	78355	7	6125	78711	7	6175	79064	7	6225	79414	7
6026	78003	7	6076	78362	7	6126	78718	7	6176	79071	7	6226	79421	7
6027	78010	7	6077	78369	7	6127	78725	7	6177	79078	7	6227	79428	7
6028	78017	8	6078	78376	7	6128	78732	7	6178	79085	7	6228	79435	7
6029	78025	7	6079	78383	7	6129	78739	7	6179	79092	7	6229	79442	7
6030	78032	7	6080	78390	8	6130	78746	7	6180	79099	7	6230	79449	7
6031	78039	7	6081	78398	7	6131	78753	7	6181	79106	7	6231	79456	7
6032	78046	7	6082	78405	7	6132	78760	7	6182	79113	7	6232	79463	7
6033	78053	8	6083	78412	7	6133	78767	7	6183	79120	7	6233	79470	7
6034	78061	7	6084	78419	7	6134	78774	7	6184	79127	7	6234	79477	7
6035	78068	7	6085	78426	7	6135	78781	8	6185	79134	7	6235	79484	7
6036	78075	7	6086	78433	7	6136	78789	7	6186	79141	7	6236	79491	7
6037	78082	7	6087	78440	7	6137	78796	7	6187	79148	7	6237	79498	7
6038	78089	8	6088	78447	8	6138	78803	7	6188	79155	7	6238	79505	6
6039	78097	7	6089	78455	7	6139	78810	7	6189	79162	7	6239	79511	7
6040	78104	7	6090	78462	7	6140	78817	7	6190	79169	7	6240	79518	7
6041	78111	7	6091	78469	7	6141	78824	7	6191	79176	7	6241	79525	7
6042	78118	7	6092	78476	7	6142	78831	7	6192	79183	7	6242	79532	7
6043	78125	7	6093	78483	7	6143	78838	7	6193	79190	7	6243	79539	7
6044	78132	8	6094	78490	7	6144	78845	7	6194	79197	7	6244	79546	7
6045	78140	7	6095	78497	7	6145	78852	7	6195	79204	7	6245	79553	7
6046	78147	7	6096	78504	8	6146	78859	7	6196	79211	7	6246	79560	7
6047	78154	7	6097	78512	7	6147	78866	7	6197	79218	7	6247	79567	7
6048	78161	7	6098	78519	7	6148	78873	7	6198	79225	7	6248	79574	7
6049	78168	8	6099	78526	7	6149	78880	8	6199	79232	7	6249	79581	7
6050	78176		6100	78533	7	6150	78888	8	6200	79239	7	6250	79588	7

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
6251	79595	7	6301	79941	7	6351	80284	7	6401	80625	7	6451	80963	7
6252	79602	7	6302	79948	7	6352	80291	7	6402	80632	7	6452	80969	6
6253	79609	7	6303	79955	7	6353	80298	7	6403	80638	6	6453	80976	7
6254	79616	7	6304	79962	7	6354	80305	7	6404	80645	7	6454	80983	7
6255	79623	7	6305	79969	7	6355	80312	7	6405	80652	7	6455	80990	7
6256	79630	7	6306	79975	6	6356	80318	6	6406	80659	7	6456	80996	6
6257	79637	7	6307	79982	7	6357	80325	7	6407	80665	6	6457	81003	7
6258	79644	7	6308	79989	7	6358	80332	7	6408	80672	7	6458	81010	7
6259	79650	6	6309	79996	7	6359	80339	7	6409	80679	7	6459	81017	7
6260	79657	7	6310	80003	7	6360	80346	7	6410	80686	7	6460	81023	6
6261	79664	7	6311	80010	7	6361	80353	7	6411	80693	7	6461	81030	7
6262	79671	7	6312	80017	7	6362	80359	6	6412	80699	6	6462	81037	7
6263	79678	7	6313	80024	7	6363	80366	7	6413	80706	7	6463	81043	6
6264	79685	7	6314	80030	6	6364	80373	7	6414	80713	7	6464	81050	7
6265	79692	7	6315	80037	7	6365	80380	7	6415	80720	7	6465	81057	7
6266	79699	7	6316	80044	7	6366	80387	7	6416	80726	6	6466	81064	7
6267	79706	7	6317	80051	7	6367	80393	6	6417	80733	7	6467	81070	6
6268	79713	7	6318	80058	7	6368	80400	7	6418	80740	7	6468	81077	7
6269	79720	7	6319	80065	7	6369	80407	7	6419	80747	7	6469	81084	7
6270	79727	7	6320	80072	7	6370	80414	7	6420	80754	7	6470	81090	6
6271	79734	7	6321	80079	7	6371	80421	7	6421	80760	6	6471	81097	7
6272	79741	7	6322	80085	6	6372	80428	7	6422	80767	7	6472	81104	7
6273	79748	7	6323	80092	7	6373	80434	6	6423	80774	7	6473	81111	7
6274	79754	6	6324	80099	7	6374	80441	7	6424	80781	7	6474	81117	6
6275	79761	7	6325	80106	7	6375	80448	7	6425	80787	6	6475	81124	7
6276	79768	7	6326	80113	7	6376	80455	7	6426	80794	7	6476	81131	7
6277	79775	7	6327	80120	7	6377	80462	7	6427	80801	7	6477	81137	6
6278	79782	7	6328	80127	7	6378	80468	6	6428	80808	7	6478	81144	7
6279	79789	7	6329	80134	7	6379	80475	7	6429	80814	6	6479	81151	7
6280	79796	7	6330	80140	6	6380	80482	7	6430	80821	7	6480	81158	7
6281	79803	7	6331	80147	7	6381	80489	7	6431	80828	7	6481	81164	6
6282	79810	7	6332	80154	7	6382	80496	7	6432	80835	7	6482	81171	7
6283	79817	7	6333	80161	7	6383	80502	6	6433	80841	6	6483	81178	7
6284	79824	7	6334	80168	7	6384	80509	7	6434	80848	7	6484	81184	6
6285	79831	7	6335	80175	7	6385	80516	7	6435	80855	7	6485	81191	7
6286	79837	6	6336	80182	7	6386	80523	7	6436	80862	7	6486	81198	7
6287	79844	7	6337	80188	6	6387	80530	7	6437	80868	6	6487	81204	6
6288	79851	7	6338	80195	7	6388	80536	6	6438	80875	7	6488	81211	7
6289	79858	7	6339	80202	7	6389	80543	7	6439	80882	7	6489	81218	7
6290	79865	7	6340	80209	7	6390	80550	7	6440	80889	7	6490	81224	6
6291	79872	7	6341	80216	7	6391	80557	7	6441	80895	6	6491	81231	7
6292	79879	7	6342	80223	7	6392	80564	7	6442	80902	7	6492	81238	7
6293	79886	7	6343	80229	6	6393	80570	6	6443	80909	7	6493	81245	7
6294	79893	7	6344	80236	7	6394	80577	7	6444	80916	7	6494	81251	6
6295	79900	7	6345	80243	7	6395	80584	7	6445	80922	6	6495	81258	7
6296	79906	6	6346	80250	7	6396	80591	7	6446	80929	7	6496	81265	7
6297	79913	7	6347	80257	7	6397	80598	7	6447	80936	7	6497	81271	6
6298	79920	7	6348	80264	7	6398	80604	6	6448	80943	7	6498	81278	7
6299	79927	7	6349	80271	7	6399	80611	7	6449	80949	6	6499	81285	7
6300	79934	7	6350	80277	6	6400	80618	7	6450	80956	7	6500	81291	6

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
6501	81298	7	6551	81631	7	6601	81961	7	6651	82289	7	6701	82614	7
6502	81305	7	6552	81637	6	6602	81968	7	6652	82295	6	6702	82620	6
6503	81311	6	6553	81644	7	6603	81974	6	6653	82302	7	6703	82627	7
6504	81318	7	6554	81651	7	6604	81981	7	6654	82308	6	6704	82633	6
6505	81325	7	6555	81657	6	6605	81987	6	6655	82315	7	6705	82640	7
6506	81331	6	6556	81664	7	6606	81994	7	6656	82321	6	6706	82646	6
6507	81338	7	6557	81671	7	6607	82000	6	6657	82328	7	6707	82653	7
6508	81345	7	6558	81677	6	6608	82007	7	6658	82334	6	6708	82659	6
6509	81351	6	6559	81684	7	6609	82014	7	6659	82341	7	6709	82666	7
6510	81358	7	6560	81690	6	6610	82020	6	6660	82347	6	6710	82672	6
6511	81365	7	6561	81697	7	6611	82027	7	6661	82354	7	6711	82679	7
6512	81371	6	6562	81704	7	6612	82033	6	6662	82360	6	6712	82685	6
6513	81378	7	6563	81710	6	6613	82040	7	6663	82367	7	6713	82692	7
6514	81385	7	6564	81717	7	6614	82046	6	6664	82373	6	6714	82698	6
6515	81391	6	6565	81723	6	6615	82053	7	6665	82380	7	6715	82705	7
6516	81398	7	6566	81730	7	6616	82060	7	6666	82387	7	6716	82711	6
6517	81405	7	6567	81737	7	6617	82066	6	6667	82393	6	6717	82718	7
6518	81411	6	6568	81743	6	6618	82073	7	6668	82400	7	6718	82724	6
6519	81418	7	6569	81750	7	6619	82079	6	6669	82406	6	6719	82730	6
6520	81425	7	6570	81757	7	6620	82086	7	6670	82413	7	6720	82737	7
6521	81431	6	6571	81763	6	6621	82092	6	6671	82419	6	6721	82743	6
6522	81438	7	6572	81770	7	6622	82099	7	6672	82426	7	6722	82750	7
6523	81445	7	6573	81776	6	6623	82105	6	6673	82432	6	6723	82756	6
6524	81451	6	6574	81783	7	6624	82112	7	6674	82439	7	6724	82763	7
6525	81458	7	6575	81790	7	6625	82119	7	6675	82445	6	6725	82769	6
6526	81465	7	6576	81796	6	6626	82125	6	6676	82452	7	6726	82776	7
6527	81471	6	6577	81803	7	6627	82132	7	6677	82458	6	6727	82782	6
6528	81478	7	6578	81809	6	6628	82138	6	6678	82465	7	6728	82789	7
6529	81485	7	6579	81816	7	6629	82145	7	6679	82471	6	6729	82795	6
6530	81491	6	6580	81823	7	6630	82151	6	6680	82478	7	6730	82802	7
6531	81498	7	6581	81829	6	6631	82158	7	6681	82484	6	6731	82808	6
6532	81505	7	6582	81836	7	6632	82164	6	6682	82491	7	6732	82814	6
6533	81511	6	6583	81842	6	6633	82171	7	6683	82497	6	6733	82821	7
6534	81518	7	6584	81849	7	6634	82178	7	6684	82504	7	6734	82827	6
6535	81525	7	6585	81856	7	6635	82184	6	6685	82510	6	6735	82834	7
6536	81531	6	6586	81862	6	6636	82191	7	6686	82517	7	6736	82840	6
6537	81538	7	6587	81869	7	6637	82197	6	6687	82523	6	6737	82847	7
6538	81544	6	6588	81875	6	6638	82204	7	6688	82530	7	6738	82853	6
6539	81551	7	6589	81882	7	6639	82210	6	6689	82536	6	6739	82860	7
6540	81558	7	6590	81889	7	6640	82217	7	6690	82543	7	6740	82866	6
6541	81564	6	6591	81895	6	6641	82223	6	6691	82549	6	6741	82872	6
6542	81571	7	6592	81902	7	6642	82230	7	6692	82556	7	6742	82879	7
6543	81578	7	6593	81908	6	6643	82236	6	6603	82562	6	6743	82885	6
6544	81584	6	6594	81915	7	6644	82243	7	6694	82569	7	6744	82892	7
6545	81591	7	6595	81921	6	6645	82249	6	6695	82575	6	6745	82898	6
6546	81598	7	6596	81928	7	6646	82256	7	6696	82582	7	6746	82905	7
6547	81604	6	6597	81935	7	6647	82263	7	6697	82588	6	6747	82911	6
6548	81611	7	6598	81941	6	6648	82269	6	6698	82595	7	6748	82918	7
6549	81617	6	6599	81948	7	6649	82276	7	6699	82601	6	6749	82924	6
6550	81624	7	6600	81954	6	6650	82282	6	6700	82607	6	6750	82930	6

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
6751	82937	7	6801	83257	6	6851	83575	6	6901	83891	6	6951	84205	7
6752	82943	6	6802	83264	7	6852	83582	7	6902	83897	6	6952	84211	6
6753	82950	7	6803	83270	6	6853	83588	6	6903	83904	7	6953	84217	6
6754	82956	6	6804	83276	6	6854	83594	6	6904	83910	6	6954	84223	6
6755	82963	7	6805	83283	7	6855	83601	7	6905	83916	6	6955	84230	7
6756	82969	6	6806	83289	6	6856	83607	6	6906	83923	7	6956	84236	6
6757	82975	6	6807	83296	7	6857	83613	6	6907	83929	6	6957	84242	6
6758	82982	7	6808	83302	6	6858	83620	7	6908	83935	6	6958	84248	6
6759	82988	6	6809	83308	6	6859	83626	6	6909	83942	7	6959	84255	7
6760	82995	7	6810	83315	7	6860	83632	6	6910	83948	6	6960	84261	6
7661	83001	6	6811	83321	6	6861	83639	7	6911	83954	6	6961	84267	6
6762	83008	7	6812	83327	6	6862	83645	6	6912	83960	6	6962	84273	6
7663	83014	6	6813	83334	7	6863	83651	6	6913	83967	7	6963	84280	7
6764	83020	6	6814	83340	6	6864	83658	7	6914	83973	6	6964	84286	6
6765	83027	7	6815	83347	7	6865	83664	6	6915	83979	6	6965	84292	6
6766	83033	6	6816	83353	6	6866	83670	6	6916	83985	6	6966	84298	6
6767	83040	7	6817	83359	6	6867	83677	7	6917	83992	7	6967	84305	7
6768	83046	6	6818	83366	7	6868	83683	6	6918	83998	6	6968	84311	6
6769	83052	6	6819	83372	6	6869	83689	6	6919	84004	6	6969	84317	6
6770	83059	7	6820	83378	6	6870	83696	7	6920	84011	7	6970	84323	6
6771	83065	6	6821	83385	7	6871	83702	6	6921	84017	6	6971	84330	7
6772	83072	7	6822	83391	6	6872	83708	6	6922	84023	6	6972	84336	6
6773	83078	6	6823	83398	7	6873	83715	7	6923	84029	6	6973	84342	6
6774	83085	7	6824	83404	6	6874	83721	6	6924	84036	7	6974	84348	6
6775	83091	6	6825	83410	6	6875	83727	6	6925	84042	6	6975	84354	6
6776	83097	6	6826	83417	7	6876	83734	7	6926	84048	6	6976	84361	7
6777	83104	7	6827	83423	6	6877	83740	6	6927	84055	7	6977	84367	6
6778	83110	6	6828	83429	6	6878	83746	6	6928	84061	6	6978	84373	6
6779	83117	7	6829	83436	7	6879	83753	7	6929	84067	6	6979	84379	6
6780	83123	6	6830	83442	6	6880	83759	6	6930	84073	6	6980	84386	7
6781	83129	6	6831	83448	6	6881	83765	6	6931	84080	7	6981	84392	6
6782	83136	7	6832	83455	7	6882	83771	6	6932	84086	6	6982	84398	6
6783	83142	6	6833	83461	6	6883	83778	7	6933	84092	6	6983	84404	6
6784	83149	7	6834	83467	6	6884	83784	6	6934	84098	6	6984	84410	6
6785	83155	6	6835	83474	7	6885	83790	6	6935	84105	7	6985	84417	7
6786	83161	6	6836	83480	6	6886	83797	7	6936	84111	6	6986	84423	6
6787	83168	7	6837	83487	7	6887	83803	6	6937	84117	6	6987	84429	6
6788	83174	6	6838	83493	6	6888	83809	6	6938	84123	6	6988	84435	6
6789	83181	7	6839	83499	6	6889	83816	7	6939	84130	7	6989	84442	7
6790	83187	6	6840	83506	7	6890	83822	6	6940	84136	6	6990	84448	6
6791	83193	6	6841	83512	6	6891	83828	6	6941	84142	6	6991	84454	6
6792	83200	7	6842	83518	6	6892	83835	7	6942	84148	6	6992	84460	6
6793	83206	6	6843	83525	7	6893	83841	6	6943	84155	7	6993	84466	6
6794	83213	7	6844	83531	6	6894	83847	6	6944	84161	6	6994	84473	7
6795	83219	6	6845	83537	6	6895	83853	6	6945	84167	6	6995	84479	6
6796	83225	6	6846	83544	7	6896	83860	7	6946	84173	6	6996	84485	6
6797	83232	7	6847	83550	6	6897	83866	6	6947	84180	7	6997	84491	6
6798	83238	6	6848	83556	6	6898	83872	6	6948	84186	6	6998	84497	6
6799	83245	7	6849	83563	7	6899	83879	7	6949	84192	6	6999	84504	7
6800	83251	6	6850	83569	6	6900	83885	6	6950	84198	6	7000	84510	6

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log..	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7001	84516	6	7051	84825	6	7101	85132	6	7151	85437	6	7201	85739	6
7002	84522	6	7052	84831	6	7102	85138	6	7152	85443	6	7202	85745	6
7003	84528	6	7053	84837	6	7103	85144	6	7153	85449	6	7203	85751	6
7004	84535	7	7054	84844	7	7104	85150	6	7154	85455	6	7204	85757	6
7005	84541	6	7055	84850	6	7105	85156	6	7155	85461	6	7205	85763	6
7006	84547	6	7056	84856	6	7106	85163	7	7156	85467	6	7206	85769	6
7007	84553	6	7057	84862	6	7107	85169	6	7157	85473	6	7207	85775	6
7008	84559	6	7058	84868	6	7108	85175	6	7158	85479	6	7208	85781	6
7009	84566	7	7059	84874	6	7109	85181	6	7159	85485	6	7209	85788	7
7010	84572	6	7060	84880	6	7110	85187	6	7160	85491	6	7210	85794	6
7011	84578	6	7061	84887	7	7111	85193	6	7161	85497	6	7211	85800	6
7012	84584	6	7062	84893	6	7112	85199	6	7162	85503	6	7212	85806	6
7013	84590	6	7063	84899	6	7113	85205	6	7163	85509	6	7213	85812	6
7014	84597	7	7064	84905	6	7114	85211	6	7154	85516	7	7214	85818	6
7015	84603	6	7065	84911	6	7115	85217	6	7165	85522	6	7215	85824	6
7016	84609	6	7066	84917	6	7116	85224	7	7166	85528	6	7216	85830	6
7017	84615	6	7067	84924	7	7117	85230	6	7167	85534	6	7217	85836	6
7018	84621	6	7068	84930	6	7118	85236	6	7158	85540	6	7218	85842	6
7019	84628	7	7069	84936	6	7119	85242	6	7169	85546	6	7219	85848	6
7020	84634	6	7070	84942	6	7120	85248	6	7170	85552	6	7220	85854	6
7021	84640	6	7071	84948	6	7121	85254	6	7171	85558	6	7221	85860	6
7022	84646	6	7072	84954	6	7122	85260	6	7172	85564	6	7222	85866	6
7023	84652	6	7073	84960	6	7123	85266	6	7173	85570	6	7223	85872	6
7024	84658	6	7074	84967	7	7124	85272	6	7174	85570	6	7224	85878	6
7025	84665	7	7075	84973	6	7125	85278	6	7175	85582	6	7225	85884	6
7026	84671	6	7076	84979	6	7126	85285	7	7176	85588	6	7226	85890	6
7027	84677	6	7077	84985	6	7127	85291	6	7177	85594	6	7227	85896	6
7028	84683	6	7078	84991	6	7128	85297	6	7178	85600	6	7228	85902	6
7029	84689	6	7079	84997	6	7129	85303	6	7179	85606	6	7229	85908	6
7030	84696	7	7080	85003	6	7130	85309	6	7180	85612	6	7230	85914	6
7031	84702	6	7081	85009	6	7131	85315	6	7181	85618	6	7231	85920	6
7032	84708	6	7082	85016	7	7132	85321	6	7182	85625	7	7232	85926	6
7033	84714	6	7083	85022	6	7133	85327	6	7183	85631	6	7233	85932	6
7034	84720	6	7084	85028	6	7134	85333	6	7184	85637	6	7234	85938	6
7035	84726	6	7085	85034	6	7135	85339	6	7185	85643	6	7235	85944	6
7036	84733	7	7086	85040	6	7136	85345	6	7186	85649	6	7236	85950	6
7037	84739	6	7087	85046	6	7137	85352	7	7187	85655	6	7237	85956	6
7038	84745	6	7088	85052	6	7138	85358	6	7188	85661	6	7238	85962	6
7039	84751	6	7089	85058	6	7139	85364	6	7189	85667	6	7239	85968	6
7040	84757	6	7090	85065	7	7140	85370	6	7190	85673	6	7240	85974	6
7041	84763	6	7091	85071	6	7141	85376	6	7191	85679	6	7241	85980	6
7042	84770	7	7092	85077	6	7142	85382	6	7192	85685	6	7242	85986	6
7043	84776	6	7093	85083	6	7143	85388	6	7193	85691	6	7243	85992	6
7044	84782	6	7094	85089	6	7144	85394	6	7194	85697	6	7244	85998	6
7045	84788	6	7095	85095	6	7145	85400	6	7195	85703	6	7245	86004	6
7046	84794	6	7096	85101	6	7146	85406	6	7196	85709	6	7246	86010	6
7047	84800	6	7097	85107	6	7147	85412	6	7197	85715	6	7247	86016	6
7048	84807	7	7098	85114	7	7148	85418	6	7198	85721	6	7248	86022	6
7049	84813	6	7099	85120	6	7149	85425	7	7199	85727	6	7249	86028	6
7050	84819	6	7100	85126	6	7150	85431	6	7200	85733	6	7250	86034	6

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7251	86040	6	7301	86338	6	7351	86635	6	7401	86929	6	7451	87221	5
7252	86046	6	7302	86344	6	7352	86641	6	7402	86935	6	7452	87227	6
7253	86052	6	7303	86350	6	7353	86646	5	7403	86941	6	7453	87233	6
7254	86058	6	7304	86356	6	7354	86652	6	7404	86947	6	7454	87239	6
7255	86064	6	7305	86362	6	7355	86658	6	7405	86953	6	7455	87245	6
7256	86070	6	7306	86368	6	7356	86664	6	7406	86958	5	7456	87251	6
7257	86076	6	7307	86374	6	7357	86670	6	7407	86964	6	7457	87256	5
7258	86082	6	7308	86380	6	7358	86676	6	7408	86970	6	7458	87262	6
7259	86088	6	7309	86386	6	7359	86682	6	7409	86976	6	7459	87268	6
7260	86094	6	7310	86392	6	7360	86688	6	7410	86982	6	7460	87274	6
7261	86100	6	7311	86398	6	7361	86694	6	7411	86988	6	7461	87280	6
7262	86106	6	7312	86404	6	7362	86700	6	7412	86994	6	7462	87286	6
7263	86112	6	7313	86410	6	7363	86705	5	7413	86999	5	7463	87291	5
7264	86118	6	7314	86415	5	7364	86711	6	7414	87005	6	7464	87297	6
7265	86124	6	7315	86421	6	7365	86717	6	7415	87011	6	7465	87303	6
7266	86130	6	7316	86427	6	7366	86723	6	7416	87017	6	7466	87309	6
7267	86136	6	7317	86433	6	7367	86729	6	7417	87023	6	7467	87315	6
7268	86141	5	7318	86439	6	7368	86735	6	7418	87029	6	7468	87320	5
7269	86147	6	7319	86445	6	7369	86741	6	7419	87035	6	7469	87326	6
7270	86153	6	7320	86451	6	7370	86747	6	7420	87040	5	7470	87332	6
7271	86159	6	7321	86457	6	7371	86753	6	7421	87046	6	7471	87338	6
7272	86165	6	7322	86463	6	7372	86759	6	7422	87052	6	7472	87344	6
7273	86171	6	7323	86469	6	7373	86764	5	7423	87058	6	7473	87349	5
7274	86177	6	7324	86475	6	7374	86770	6	7424	87064	6	7474	87355	6
7275	86183	6	7325	86481	6	7375	86776	6	7425	87070	6	7475	87361	6
7276	86189	6	7326	86487	6	7376	86782	6	7426	87075	5	7476	87367	6
7277	86195	6	7327	86493	6	7377	86788	6	7427	87081	6	7477	87373	6
7278	86201	6	7328	86499	6	7378	86794	6	7428	87087	6	7478	87379	6
7279	86207	6	7329	86504	5	7379	86800	6	7429	87093	6	7479	87384	5
7280	86213	6	7330	86510	6	7380	86806	6	7430	87099	6	7480	87390	6
7281	86219	6	7331	86516	6	7381	86812	6	7431	87105	6	7481	87396	6
7282	86225	6	7332	86522	6	7382	86817	5	7432	87111	6	7482	87402	6
7283	86231	6	7333	86528	6	7383	86823	6	7433	87116	5	7483	87408	6
7284	86237	6	7334	86534	6	7384	86829	6	7434	87122	6	7484	87413	5
7285	86243	6	7335	86540	6	7385	86835	6	7435	87128	6	7485	87419	6
7286	86249	6	7336	86546	6	7386	86841	6	7436	87134	6	7486	87425	6
7287	86255	6	7337	86552	6	7387	86847	6	7437	87140	6	7487	87431	6
7288	86261	6	7338	86558	6	7388	86853	6	7438	87146	6	7488	87437	6
7289	86267	6	7339	86564	6	7389	86859	6	7439	87151	5	7489	87442	5
7290	86273	6	7340	86570	6	7390	86864	5	7440	87157	6	7490	87448	6
7291	86279	6	7341	86576	6	7391	86870	6	7441	87163	6	7491	87454	6
7292	86285	6	7342	86581	5	7392	86876	6	7442	87169	6	7492	87460	6
7293	86291	6	7343	86587	6	7393	86882	6	7443	87175	6	7493	87466	6
7294	86297	6	7344	86593	6	7394	86888	6	7444	87181	6	7494	87471	5
7295	86303	6	7345	86599	6	7395	86894	6	7445	87186	5	7495	87477	6
7296	86308	5	7346	86605	6	7396	86900	6	7446	87192	6	7496	87483	6
7297	86314	6	7347	86611	6	7397	86906	6	7447	87198	6	7497	87489	6
7298	86320	6	7348	86617	6	7398	86911	5	7448	87204	6	7498	87495	6
7299	86326	6	7349	86623	6	7399	86917	6	7449	87210	6	7499	87500	5
7300	86332	6	7350	86629	6	7400	86923	6	7450	87216	6	7500	87506	6

N.	Log,	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7501	87512	6	7551	87800	5	7601	88087	6	7651	88372	6	7701	88655	6
7502	87518	6	7552	87806	6	7602	88093	6	7652	88377	5	7702	88660	5
7503	87523	5	7553	87812	6	7603	88098	5	7653	88383	6	7703	88666	6
7504	87529	6	7554	87818	6	7604	88104	6	7654	88389	6	7704	88672	6
7505	87535	6	7555	87823	5	7605	88110	6	7655	88395	6	7705	88677	5
7506	87541	6	7556	87829	6	7606	88116	6	7656	88400	5	7706	88683	6
7507	87547	6	7557	87835	6	7607	88121	5	7657	88406	6	7707	88689	6
7508	87552	5	7558	87841	6	7608	88127	6	7658	88412	6	7708	88694	5
7509	87558	6	7559	87846	5	7609	88133	6	7659	88417	5	7709	88700	6
7510	87564	6	7560	87852	6	7610	88138	5	7660	88423	6	7710	88705	5
7511	87570	6	7561	87858	6	7611	88144	6	7661	88429	6	7711	88711	6
7512	87576	6	7562	87864	6	7612	88150	6	7662	88434	5	7712	88717	6
7513	87581	5	7563	87869	5	7613	88156	6	7663	88440	6	7713	88722	5
7514	87587	6	7564	87875	6	7614	88161	5	7664	88446	6	7714	88728	6
7515	87593	6	7565	87881	6	7615	88167	6	7665	88451	5	7715	88734	6
7516	87599	6	7566	87887	6	7616	88173	6	7666	88457	6	7716	88739	5
7517	87604	5	7567	87892	5	7617	88178	5	7667	88463	6	7717	88745	6
7518	87610	6	7568	87898	6	7618	88184	6	7668	88468	5	7718	88750	5
7519	87616	6	7569	87904	6	7619	88190	6	7669	88474	6	7719	88756	6
7520	87622	6	7570	87910	6	7620	88195	5	7670	88480	6	7720	88762	6
7521	87628	6	7571	87915	5	7621	88201	6	7671	88485	5	7721	88767	5
7522	87633	5	7572	87921	6	7622	88207	6	7672	88491	6	7722	88773	6
7523	87639	6	7573	87927	6	7623	88213	6	7673	88497	6	7723	88779	6
7524	87645	6	7574	87933	6	7624	88218	5	7974	88502	5	7724	88784	5
7525	87651	6	7575	87938	5	7625	88224	6	7675	88508	6	7725	88790	6
7526	87656	5	7576	87944	6	7626	88230	6	7676	88513	5	7726	88795	5
7527	87662	6	7577	87950	6	7627	88235	5	7677	88519	6	7727	88801	6
7528	87668	6	7578	87955	5	7628	88241	6	7678	88525	6	7728	88807	6
7529	87674	6	7579	87961	6	7629	88247	6	7679	88530	5	7729	88812	5
7530	87679	5	7580	87967	6	7630	88252	5	7680	88536	6	7730	88818	6
7531	87685	6	7581	87973	6	7631	88258	6	7681	88542	6	7731	88824	6
7532	87691	6	7582	87978	5	7632	88264	6	7682	88547	5	7732	88829	5
7533	87697	6	7583	87984	6	7633	88270	6	7683	88553	6	7733	88835	6
7534	87703	6	7584	87990	6	7634	88275	5	7684	88559	6	7734	88840	5
7535	87708	5	7585	87996	6	7635	88281	6	7685	88564	5	7735	88846	6
7536	87714	6	7586	88001	5	7636	88287	6	7686	88570	6	7736	88852	6
7537	87720	6	7587	88007	6	7637	88292	5	7687	88576	6	7737	88857	5
7538	87726	6	7588	88013	6	7638	88298	6	7688	88581	5	7738	88863	6
7539	87731	5	7589	88018	5	7639	88304	6	7689	88587	6	7739	88868	5
7540	87737	6	7590	88024	6	7640	88309	5	7690	88593	6	7740	88874	6
7541	87743	6	7591	88030	6	7641	88315	6	7691	88598	5	7741	88880	6
7542	87749	6	7592	88036	6	7642	88321	6	7692	88604	6	7742	88885	5
7543	87754	5	7593	88041	5	7643	88326	5	7693	88610	6	7743	88891	6
7544	87760	6	7594	88047	6	7644	88332	6	7694	88615	5	7744	88897	6
7545	87766	6	7595	88053	6	7645	88338	6	7695	88621	6	7745	88902	5
7546	87772	6	7596	88058	5	7646	88343	5	7696	88627	6	7746	88908	6
7547	87777	5	7597	88064	6	7647	88349	6	7697	88632	5	7747	88913	5
7548	87783	6	7598	88070	6	7648	88355	6	7698	88638	6	7748	88919	6
7549	87789	6	7599	88076	6	7649	88360	5	7699	88643	5	7749	88925	6
7550	87795	6	7600	88081	5	7650	88366	6	7700	88649	6	7750	88930	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
7751	88936	6	7801	89215	6	7851	89492	5	7901	89768	5	7951	90042	5
7752	88941	5	7802	89221	6	7852	89498	6	7902	89774	6	7952	90048	6
7753	88947	6	7003	89226	5	7853	89504	6	7903	89779	5	7953	90053	5
7754	88953	6	7804	89232	6	7854	89509	5	7904	89785	6	7954	90059	6
7755	88958	5	7805	89237	5	7855	89515	6	7905	89790	5	7955	90064	5
7756	88964	6	7806	89243	6	7856	89520	5	7906	89796	6	7956	90069	5
7757	88969	5	7807	89248	5	7857	89526	6	7907	89801	5	7957	90075	6
7758	88975	6	7808	89254	6	7858	89531	5	7908	89807	6	7958	90080	5
7759	88981	6	7809	89260	6	7859	89537	6	7909	89812	5	7959	90086	6
7760	88986	5	7810	89265	5	7860	89542	5	7910	89818	6	7960	90091	5
7761	88992	6	7811	89271	6	7861	89548	6	7911	89823	5	7961	90097	6
7762	88997	5	7812	89276	5	7862	89553	5	7912	89829	6	7962	90102	5
7763	89003	6	7813	89282	6	7863	89559	6	7913	89834	5	7963	90108	6
7764	89009	6	7814	89287	5	7864	89564	5	7914	89840	6	7964	90113	5
7765	89014	5	7815	89293	6	7865	89570	6	7915	89845	5	7965	90119	6
7766	89020	6	7816	89298	5	7866	89575	5	7916	89851	6	7966	90124	5
7767	89025	5	7817	89304	6	7867	89581	6	7917	89856	5	7967	90129	5
7768	89031	6	7818	89310	6	7868	89586	5	7918	89862	6	7968	90135	6
7769	89037	6	7819	89315	5	7869	89592	6	7919	89867	5	7969	90140	5
7770	89042	5	7820	89321	6	7870	89597	5	7920	89873	6	7970	90146	6
7771	89048	6	7821	80326	5	7871	89603	6	7921	89878	5	7971	90151	5
7772	89053	5	7822	89332	6	7872	89609	6	7922	89883	5	7972	90157	6
7773	89059	6	7823	89337	5	7873	89614	5	7923	89889	6	7973	90162	5
7774	89064	5	7824	89343	6	7874	89620	6	7924	89894	5	7974	90168	6
7775	89070	6	7825	89348	5	7875	89625	5	7925	89900	6	7975	90173	5
7776	89076	6	7826	89354	6	7876	89631	6	7926	89905	5	7976	90179	6
7777	89081	5	7827	89360	6	7877	89636	5	7927	89911	6	7977	90184	5
7778	89087	6	7828	89365	5	7878	89642	6	7928	89916	5	7978	90189	5
7779	89092	5	7829	89371	6	7879	89647	5	7929	89922	6	7979	90195	6
7780	89098	6	7830	89376	5	7880	89653	6	7930	89927	5	7980	90200	5
7781	89104	6	7831	89382	6	7881	89658	5	7931	89933	6	7981	90206	6
7782	89109	5	7832	89387	5	7882	89664	6	7932	89938	5	7982	90211	5
7783	89115	6	7833	89393	6	7883	89669	5	7933	89944	6	7983	90217	6
7784	89120	5	7834	89398	5	7884	89675	6	7934	89949	5	7984	90222	5
7785	89126	6	7835	89404	6	7885	89680	5	7935	89955	6	7985	90227	5
7786	89131	5	7836	89409	5	7886	89686	6	7936	89960	5	7986	90233	6
7787	89137	6	7837	89415	6	7887	89691	5	7937	89966	6	7987	90238	5
7788	89143	6	7838	89421	6	7888	89697	6	7938	89971	5	7988	90244	6
7789	89148	5	7839	89426	5	7889	89702	5	7939	89977	6	7989	90249	5
7790	89154	6	7840	89432	6	7890	89708	6	7940	89982	5	7990	90255	6
7791	89159	5	7841	89437	5	7891	89713	5	7941	89988	6	7991	90260	5
7792	89165	6	7842	89443	6	7892	89719	6	7942	89993	5	7992	90266	6
7793	89170	5	7843	89448	5	7893	89724	5	7943	89998	5	7993	90271	5
7794	89176	6	7844	89454	6	7894	89730	6	7944	90004	6	7994	90276	5
7795	89182	6	7845	89459	5	7895	89735	5	7945	90009	5	7995	90282	6
7796	89187	5	7846	89465	6	7896	89741	6	7946	90015	6	7996	90287	5
7797	89193	6	7847	89470	5	7897	89746	5	7947	90020	5	7997	90293	6
7798	89198	5	7848	89476	6	7898	89752	6	7948	90026	6	7998	90298	5
7799	89204	6	7846	89481	5	7899	89757	5	7919	90031	5	7999	90304	6
7800	89209	5	7850	89487	6	7900	89763	6	7950	90037	6	8000	90309	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
8001	90314	5	8051	90585	5	8101	90854	5	8151	91121	5	8201	91387	6
8002	90320	6	8052	90590	5	8102	90859	5	8152	91126	5	8202	91392	5
8003	90325	5	8053	90596	6	8103	90865	6	8153	91132	6	8203	91397	5
8004	90331	6	8054	90601	5	8104	90870	5	8154	91137	5	8204	91403	6
8005	90336	5	8055	90607	6	8105	90875	5	8155	91142	5	8205	91408	5
8006	90342	6	8056	90612	5	8106	90881	6	8156	91148	6	8206	91413	5
8007	90347	5	8057	90617	5	8107	90886	5	8157	91153	5	8207	91418	5
8008	90352	5	8058	90623	6	8108	90891	5	8158	91158	5	8208	91424	6
8009	90358	6	8059	90628	5	8109	90897	6	8159	91164	6	8209	91429	5
8010	90363	5	8060	90634	6	8110	90902	5	8160	91169	5	8210	91434	5
8011	90369	6	8061	90639	5	8111	90907	5	8161	91174	5	8211	91440	6
8012	90374	5	8062	90644	5	8112	90913	6	8162	91180	6	8212	91445	5
8013	90380	6	8063	90650	6	8113	90918	5	8163	91185	5	8213	91450	5
8014	90385	5	8064	90655	5	8114	90924	6	8164	91190	5	8214	91455	5
8015	90390	5	8065	90660	5	8115	90929	5	8165	91196	6	8215	91461	6
8016	90396	6	8066	90666	6	8116	90934	5	8166	91201	5	8216	91466	5
8017	90401	5	8067	90671	5	8117	90940	6	8167	91206	5	8217	91471	5
8018	90407	6	8068	90677	6	8118	90945	5	8168	91212	6	8218	91477	6
8019	90412	5	8069	90682	5	8119	90950	5	8169	91217	5	8219	91482	5
8020	90417	5	8070	90687	5	8120	90956	6	8170	91222	5	8220	91487	5
8021	90423	6	8071	90693	6	8121	90961	5	8171	91228	6	8221	91492	5
8022	90428	5	8072	90698	5	8122	90966	5	8172	91233	5	8222	91498	6
8023	90434	6	8073	90703	5	8123	90972	6	8173	91238	5	8223	91503	5
8024	90439	5	8074	90709	6	8124	90977	5	8174	91243	5	8224	91508	5
8025	90445	6	8075	90714	5	8125	90982	5	8175	91249	6	8225	91514	6
8026	90450	5	8076	90720	6	8126	90988	6	8176	91254	5	8226	91519	5
8027	90455	5	8077	90725	5	8127	90993	5	8177	91259	5	8227	91524	5
8028	90461	6	8078	90730	5	8128	90998	5	8178	91265	6	8228	91529	5
8029	90466	5	8079	90736	6	8129	91004	6	8179	91270	5	8229	91535	6
8030	90472	6	8080	90741	5	8130	91009	5	8180	91275	5	9230	91540	5
8031	90477	5	8081	90747	6	8131	91014	5	8181	91281	6	8231	91545	5
8032	90482	5	8082	90752	5	8132	91020	6	8182	91286	5	8232	91551	6
8033	90488	6	8083	90757	5	8133	91025	5	8183	91291	5	8233	91556	5
8034	90493	5	8084	90763	6	8134	91030	5	8184	91297	6	8234	91561	5
8035	90499	6	8085	40768	5	8135	91036	6	8185	91302	5	8235	91566	5
8036	90504	5	8086	90773	5	8136	91041	5	8186	91307	5	8236	91572	6
8037	90509	5	8087	90779	6	8137	91046	5	8187	91312	5	8237	91577	5
8038	90515	6	8088	90784	5	8138	91052	6	8188	91318	6	8238	91582	5
8039	90520	5	8089	90789	5	8139	91057	5	8189	91323	5	8239	91587	5
8040	90526	6	8090	90795	6	8140	91062	5	8190	91328	5	8240	91593	6
8041	90531	5	8091	90800	5	8141	91068	6	8191	91334	6	8241	91598	5
8042	90536	5	8092	90806	6	8142	91073	5	8192	91339	5	8242	91603	5
8043	90542	6	8093	90811	5	8143	91078	5	8193	91344	5	8243	91609	6
8044	90547	5	8094	90816	5	8144	91084	6	8194	91350	6	8244	91614	5
8045	90553	6	8095	90822	6	8145	91089	5	8195	91355	5	8245	91619	5
8046	90558	5	8096	90827	5	8146	91094	5	8196	91360	5	8246	91624	5
8047	90563	5	8097	00832	5	8147	91100	6	8197	91365	5	8247	91630	6
8048	90569	6	8098	90838	6	8148	91105	5	8198	91371	6	8248	91635	5
8049	90574	5	8099	90843	5	8149	91110	5	8199	91376	5	8249	91640	5
8050	90580	6	8100	90849	6	8150	91116	6	8200	91381	5	8250	91645	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
8251	91651	6	8301	91913	5	8351	92174	5	8401	92433	5	8451	92691	5
8252	91656	5	8302	91918	5	8352	92179	5	8402	92438	5	8452	92696	5
8253	91661	5	8303	91924	6	8353	92184	5	8403	92443	5	8453	92701	5
8254	91666	5	8304	91929	5	8354	92189	5	8404	92449	6	8454	92706	5
8255	91672	6	8305	91934	5	8355	92195	6	8405	92454	5	8455	92711	5
8256	91677	5	8306	91939	5	8356	92200	5	8406	92459	5	8456	92716	5
8257	91682	5	8307	91944	5	8357	92205	5	8407	92464	5	8457	92722	6
8258	91687	5	8308	91950	6	8358	92210	5	8408	92469	5	8458	92727	5
8259	91693	6	8309	91955	5	8359	92215	5	8409	92474	5	8459	92732	5
8260	91698	5	8310	91960	5	8360	92221	6	8410	92480	6	8460	92737	5
8261	91703	5	8311	91965	5	8361	92226	5	8411	92485	5	8461	92742	5
8262	91709	6	8312	91971	6	8362	92231	5	8412	92490	5	8462	92747	5
8263	91714	5	8313	91976	5	8363	92236	5	8413	92495	5	8463	92752	5
8264	91719	5	8314	91981	5	8364	92241	5	8414	92500	5	8464	92758	6
8265	91724	5	8315	91986	5	8365	92247	6	8415	92505	5	8465	92763	5
8266	91730	6	8316	91991	5	8366	92252	5	8416	92511	6	8466	92768	5
8267	91735	5	8317	91997	6	8367	92257	5	8417	92516	5	8467	92773	5
8268	91740	5	8318	92002	5	8368	92262	5	8418	92521	5	8468	92778	5
8269	91745	5	8319	92007	5	8369	92267	5	8419	92526	5	8469	92783	5
8270	91751	6	8320	92012	5	8370	92273	6	8420	92531	5	8470	92788	5
8271	91756	5	8321	92018	6	8371	92278	5	8421	92536	5	8471	92793	5
8272	91761	5	8322	92023	5	8372	92283	5	8422	92542	6	8472	92799	6
8273	91766	5	8323	92028	5	8373	92288	5	8423	92547	5	8473	92804	5
8274	91772	6	8324	92033	5	8374	92293	5	8424	92552	5	8474	92809	5
8275	91777	5	8325	92038	5	8375	92298	5	8425	92557	5	8475	92814	5
8276	91782	5	8326	92044	6	8376	92304	6	8426	92562	5	8476	92819	5
8277	91787	5	8327	92049	5	8377	92309	5	8427	92567	5	8477	92824	5
8278	91793	6	8328	92054	5	8378	92314	5	8428	92572	5	8478	92829	5
8279	91798	5	8329	92059	5	8379	92319	5	8429	92578	6	8479	92834	5
8280	91803	5	8330	92065	6	8380	92324	5	8430	92583	5	8480	92840	6
8281	91808	5	8331	92070	5	8381	92330	6	8431	92588	5	8481	92845	5
8282	91814	6	8332	92075	5	8382	92335	5	8432	92593	5	8482	92850	5
8283	91819	5	8333	92080	5	8383	92340	5	8433	92598	5	8483	92855	5
8284	91824	5	8334	92085	5	8384	92345	5	8434	92603	5	8484	92860	5
8285	91829	5	8335	92091	6	8385	92350	5	8435	92609	6	8485	92865	5
8286	91834	5	8336	92096	5	8386	92355	5	8436	92614	5	8486	92870	5
8287	91840	6	8337	92101	5	8387	92361	6	8437	92619	5	8487	92875	5
8288	91845	5	8338	92106	5	8388	92366	5	8438	92624	5	8488	92881	6
8289	91850	5	8339	92111	5	8389	92371	5	8439	92629	5	8489	92886	5
8290	91855	5	8340	92117	6	8390	92376	5	8440	92634	5	8490	92891	5
8291	91861	6	8341	92122	5	8391	92381	5	8441	92639	5	8491	92896	5
8292	91866	5	8342	92127	5	8392	92387	6	8442	92645	6	8492	92901	5
8293	91871	5	8343	92132	5	8393	92392	5	8443	92650	5	8493	92906	5
8294	91876	5	8344	92137	5	8394	92397	5	8444	92655	5	8494	92911	5
8295	91882	6	8345	92143	6	8395	92402	5	8445	92660	5	8495	92916	5
8296	91887	5	8346	92148	5	8396	92407	5	8446	92665	5	8496	92921	5
8297	91892	5	8347	92153	5	8397	92412	5	8447	92670	5	8497	92927	6
8298	91897	5	8348	92158	5	8398	92418	6	8448	92675	5	8498	92932	5
8299	91903	6	8349	92163	5	8399	92423	5	8449	92681	6	8499	92937	5
8300	91908	5	8350	92169	6	8400	92428	5	8450	92686	5	8500	92942	5

N.	Log.	D	N.	Log	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
8501	92947	5	8551	93202	5	8601	93455	5	8651	93707	5	8701	93957	5
8502	92952	5	8552	93207	5	8602	93460	5	8652	93712	5	8702	93962	5
8503	92957	5	8553	93212	5	8603	93465	5	8653	93717	5	8703	93967	5
8504	92962	5	8554	93217	5	8604	93470	5	8654	93722	5	8704	93972	5
8505	92967	5	8555	93222	5	8605	93475	5	8655	93727	5	8705	93977	5
8506	92973	6	8556	93227	5	8606	93480	5	8656	93732	5	8706	93982	5
8507	92978	5	8557	93232	5	8607	93485	5	8657	93737	5	8707	93987	5
8508	92983	5	8558	93237	5	8608	93490	5	8658	93742	5	8708	93992	5
8509	92988	5	8559	93242	5	8609	93495	5	8659	93747	5	8709	93997	5
8510	92993	5	8560	93247	5	8610	93500	5	8660	93752	5	8710	94002	5
8511	92998	5	8561	93252	5	8611	93505	5	8661	93757	5	8711	94007	5
8512	93003	5	8562	93258	6	8612	93510	5	8662	93762	5	8712	94012	5
8513	93008	5	8563	93263	5	8613	93515	5	8663	93767	5	8713	94017	5
8514	93013	5	8564	93268	5	8614	93520	5	8664	93772	5	8714	94022	5
8515	93018	5	8565	93273	5	8615	93526	6	8665	93777	5	8715	94027	5
8516	93024	6	8566	93278	5	8616	93531	5	8666	93782	5	8716	94032	5
8517	93029	5	8567	93283	5	8617	93536	5	8667	93787	5	8717	94037	5
8518	93034	5	8568	93288	5	8618	93541	5	8668	93792	5	8718	94042	5
8519	93039	5	8569	93293	5	8619	93546	5	8669	93797	5	8719	94047	5
8520	93044	5	8570	93298	5	8620	93551	5	8670	93802	5	8720	94052	5
8521	93049	5	8571	93303	5	8621	93556	5	8671	93807	5	8721	94057	5
8522	93054	5	8572	93308	5	8622	93561	5	8672	93812	5	8722	94062	5
8523	93059	5	8573	93313	5	8623	93566	5	8673	93817	5	8723	94067	5
8524	93064	5	8574	93318	5	8624	93571	5	8674	93822	5	8724	94072	5
8525	93069	5	8575	93323	5	8625	93576	5	8675	93827	5	8725	94077	5
8526	93075	6	8576	93328	5	8626	93581	5	8676	93832	5	8726	94082	5
8527	93080	5	8577	93334	6	8627	93586	5	8677	93837	5	8727	94086	4
8528	93085	5	8578	93339	5	8628	93591	5	8678	93842	5	8728	94091	5
8529	93090	5	8579	93344	5	8629	93596	5	8679	93847	5	8729	94096	5
8530	93095	5	8580	93349	5	8630	93601	5	8680	93852	5	8730	94101	5
8531	93100	5	8581	93354	5	8631	93606	5	8681	93857	5	8731	94106	5
8532	93105	5	8582	93359	5	8632	93611	5	8682	93862	5	8732	94111	5
8533	93110	5	8583	93364	5	8633	93616	5	8683	93867	5	8733	94116	5
8534	93115	5	8584	93369	5	8634	93621	5	8684	93872	5	8734	94121	5
8535	93120	5	8585	93374	5	8635	93626	5	8685	93877	5	8735	94126	5
8536	93125	5	8586	93379	5	8636	93631	5	8686	93882	5	8736	94131	5
8537	93131	6	8587	93384	5	8637	93636	5	8687	93887	5	8737	94136	5
8538	93136	5	8588	93389	5	8638	93641	5	8688	93892	5	8738	94141	5
8539	93141	5	8589	93394	5	8639	93646	5	8689	93897	5	8739	94146	5
8540	93146	5	8590	93399	5	8640	93651	5	8690	93902	5	8740	94151	5
8541	93151	5	8591	93404	5	8641	93656	5	8691	93907	5	8741	94156	5
8542	93156	5	8592	93409	5	8642	93661	5	8692	93912	5	8742	94161	5
8543	93161	5	8593	93414	5	8643	93666	5	8693	93917	5	8743	94166	5
8544	93166	5	8594	93420	6	8644	93671	5	8694	93922	5	8744	94171	5
8545	93171	5	8595	93425	5	8645	93676	5	8695	93927	5	8745	94176	5
8546	93176	5	8596	93430	5	8646	93682	6	8696	93932	5	8746	94181	5
8547	93181	5	8597	93435	5	8647	93687	5	8697	93937	5	8747	94186	5
8548	93186	5	8598	93440	5	8648	93692	5	8698	93942	5	8748	94191	5
8549	93192	6	8599	93445	5	8649	93697	5	8699	93947	5	8749	94196	5
8550	93197	5	8600	93450	5	8650	93702	5	8700	93952	5	8750	94201	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
8751	94206	5	8801	94453	5	8851	94699	5	8901	94944	5	8951	95187	5
8752	94211	5	8802	94458	5	8852	94704	5	8902	94949	5	8952	95192	5
8753	94216	5	8803	94463	5	8853	94709	5	8903	94954	5	8953	95197	5
8754	94221	5	8804	94468	5	8854	94714	5	8904	94959	4	8954	95202	5
8755	94226	5	8805	94473	5	8855	94719	5	8905	94963	5	8955	95207	4
8756	94231	5	8806	94478	5	8856	84724	5	8906	94968	5	8956	95211	5
8757	94236	4	8807	94483	5	8857	94729	5	8907	94973	5	8957	95216	5
8758	94240	5	8808	94488	5	8858	94734	4	8908	94978	5	8958	95221	5
8759	94245	5	8809	94493	5	8859	94738	5	8909	94983	5	8959	95226	5
8760	94250	5	8810	94498	5	8860	94743	5	8910	94988	5	8960	95231	5
8761	94255	5	8811	94503	4	8861	94748	5	8911	94993	5	8961	95236	4
8762	94260	5	8812	94507	5	8862	94753	5	8912	94998	4	8962	95240	5
8763	94265	5	8813	94512	5	8863	94758	5	8913	95002	5	8963	95245	5
8764	94270	5	8814	94517	5	8864	94763	5	8914	95007	5	8964	95250	5
8765	94275	5	8815	94522	5	8865	94768	5	8915	95012	5	8965	95255	5
8766	94280	5	8816	94527	5	8866	94773	5	8916	95017	5	8966	95260	5
8767	94285	5	8817	94532	5	8867	94778	5	8917	95022	5	8967	95265	5
8768	94290	5	8818	94537	5	8868	94783	4	8918	95027	5	8968	95270	4
8769	94295	5	8819	94542	5	8869	94787	5	8919	95032	4	8969	95274	5
8770	94300	5	8820	94547	5	8870	94792	5	8920	95036	5	8970	95279	5
8771	94305	5	8821	94552	5	8871	94797	5	8921	95041	5	8971	95284	5
8772	94310	5	8822	94557	5	8872	94802	5	8922	95046	5	8972	95289	5
8773	94315	5	8823	94562	5	8873	94807	5	8923	95051	5	8973	95294	5
8774	94320	5	8824	94567	4	8874	94812	5	8924	95056	5	8974	95299	4
8775	94325	5	8825	94571	5	8875	94817	5	8925	95061	5	8975	95303	5
8776	94330	5	8826	94576	5	8876	94822	5	8926	95066	5	8976	95308	5
8777	94335	5	8827	94581	5	8877	94827	5	8927	95071	4	8977	95313	5
8778	94340	5	8828	94586	5	8878	94832	4	8928	95075	5	8978	95318	5
8779	94345	4	8829	94591	5	8879	94836	5	8929	95080	5	8979	95323	5
8780	94349	5	8830	94596	5	8880	94841	5	8930	95085	5	8980	95328	4
8781	94354	5	8831	94601	5	8881	94846	5	8931	95090	5	8981	95332	5
8782	94359	5	8832	94606	5	8882	94851	5	8932	95095	5	8982	95337	5
8783	94364	5	8833	94611	5	8883	94856	5	8933	95100	5	8983	95342	5
8784	94369	5	8834	94616	5	8884	94861	5	8934	95105	4	8984	95347	5
8785	94374	5	8835	94621	5	8885	94866	5	8935	95109	5	8985	95352	5
8786	94379	5	8836	94626	4	8886	94871	5	8936	95114	5	8986	95357	4
8787	94384	5	8837	94630	5	8887	94876	4	8937	95119	5	8987	95361	5
8788	94389	5	8838	94635	5	8888	94880	5	8938	95124	5	8988	95366	5
8789	94394	5	8839	94640	5	8889	94885	5	8930	95129	5	8989	95371	5
8790	94399	5	8840	94645	5	8890	94890	5	8940	95134	5	8990	95376	5
8791	94404	5	8841	94650	5	8891	94895	5	8941	95139	4	8991	95381	5
8792	94409	5	8842	94655	5	8892	94900	5	8942	95143	5	8992	95386	4
8793	94414	5	8843	94660	5	8893	94905	5	8943	95148	5	8993	95390	5
8794	94419	5	8844	94665	5	8894	94910	5	8944	95153	5	8994	95395	5
8795	94424	5	8845	94670	5	8895	94915	4	8945	95158	5	8995	95400	5
8796	94429	4	8846	94675	5	8896	94919	5	8946	95163	5	8996	95405	5
8797	94433	5	8847	94680	5	8897	94924	5	8947	95168	5	8997	95410	5
8798	94438	5	8848	94685	4	8898	94929	5	8948	95173	4	8998	95415	4
8799	94443	5	8849	94689	5	8899	94934	5	8949	95177	5	8999	95419	5
8800	94448	5	8850	94694	5	8900	94939	5	8950	95182	5	9000	95424	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9001	95429	5	9051	95670	4	9101	95909	5	9151	96147	5	9201	96384	4
9002	95434	5	9052	95674	5	9102	95914	4	9152	96152	4	9202	96388	5
9003	95439	5	9053	95679	5	9103	95918	5	9153	96156	5	9203	96393	5
9004	95444	4	9054	95684	5	9104	95923	5	9154	96161	5	9204	96398	4
9005	95448	5	9055	95689	5	9105	95928	5	9155	96166	5	9205	96402	5
9006	95453	5	9056	95694	4	9106	95933	5	9156	96171	4	9206	96407	5
9007	95458	5	9057	95698	5	9107	95938	4	9157	96175	5	9207	96412	5
9008	95463	5	9058	95703	5	9108	95942	5	9158	96180	5	9208	96417	4
9009	95468	4	9059	95708	5	9109	95947	5	9159	96185	5	9209	96421	5
9010	95472	5	9060	95713	5	9100	95952	5	9160	96190	4	9210	96426	5
9011	95477	5	9061	95718	4	9111	95957	4	9161	96194	5	9211	96431	4
9012	95482	5	9062	95722	5	9112	95961	5	9162	96199	5	9212	96435	5
9013	95487	5	9063	95727	5	9113	95966	5	9163	96204	5	9213	96440	5
9014	95492	5	9064	95732	5	9114	95971	5	9164	96209	4	9214	96445	5
9015	95497	4	9065	95737	5	9115	95976	4	9165	96213	5	9215	96450	4
9016	95501	5	9066	95742	4	9116	95980	5	9166	96218	5	9216	96454	5
9017	95506	5	9067	95746	5	9117	95985	5	9167	96223	4	9217	96459	5
9018	95511	5	9068	95751	5	9118	95990	5	9168	96227	5	9218	96464	4
9019	95516	5	9069	95756	5	9119	95995	4	9169	96232	5	9219	96468	5
9020	95521	4	9070	95761	5	9120	95999	5	9170	96237	5	9220	96473	5
9021	95525	5	9071	95766	4	9121	96004	5	9171	96242	4	9221	96478	5
9022	95530	5	9072	95770	5	9122	96009	5	9172	96246	5	9222	96483	4
9023	95535	5	9073	95775	5	9123	96014	5	9173	96251	5	9223	96487	5
9024	95540	5	9074	95780	5	9124	96019	4	9174	96256	5	9224	96492	5
9025	95545	5	9075	95785	4	9125	96023	5	9175	96261	4	9225	96497	4
9026	95550	4	9076	95789	5	9126	96028	5	9176	96265	5	9226	96501	5
9027	95554	5	9077	95794	5	9127	96033	5	9177	96270	5	9227	96506	5
9028	95559	5	9078	95799	5	9128	96038	4	9178	96275	5	9228	96511	4
9029	95564	5	9079	95804	5	9129	96042	5	9179	96280	4	9229	96515	5
9030	95569	5	9080	95809	4	9130	96047	5	9180	96284	5	9230	96520	5
9031	95574	4	9081	95813	5	9131	96052	5	9181	96289	5	9231	96525	5
9032	95578	5	9082	95818	5	9132	96057	4	9182	96294	4	9232	96530	4
9033	95583	5	9083	95823	5	9133	96061	5	9183	96298	5	9233	96534	5
9034	95588	5	9084	95828	4	9134	96066	5	9184	96303	5	9234	96539	5
9035	95593	5	9085	95832	5	9135	96071	5	9185	96308	5	9235	96544	4
9036	95598	4	9086	95837	5	9136	96076	4	9186	96313	4	9236	96548	5
9037	95602	5	9087	95842	5	9137	96080	5	9187	96317	5	9237	96553	5
9038	95607	5	9088	95847	5	9138	96085	5	9188	96322	5	9238	96558	4
9039	95612	5	9089	95852	4	9139	96090	5	9189	96327	5	9239	96562	5
9040	95617	5	9090	95856	5	9140	96095	4	9190	96332	4	9240	96567	5
9041	95622	4	9091	95861	5	9141	96099	5	9191	96336	5	9241	96572	5
9042	95626	5	9092	95866	5	9142	96104	5	9192	96341	5	9242	96577	4
9043	95631	5	9093	95871	4	9143	96109	5	9193	96346	4	9243	96581	5
9044	95636	5	9094	95875	5	9144	96114	4	9194	96350	5	9244	96586	5
9045	95641	5	9095	95880	5	9145	96118	5	9195	96355	5	9245	96591	4
9046	95646	4	9096	95885	5	9146	96123	5	9196	96360	5	9246	96595	5
9047	95650	5	9097	95890	5	9147	96128	5	9197	96365	4	9247	96600	5
9048	95655	5	9098	95895	4	9148	96133	4	9198	96369	5	9248	96605	4
9049	95660	5	9099	95899	5	6149	96137	5	9199	96374	5	9249	96609	5
9050	95665	5	9100	95904	5	9150	96142	5	9200	96379	5	9250	96614	5

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9251	96619	5	9301	96853	5	9351	97086	5	9401	97317	4	9451	97548	5
9252	96624	5	9302	96858	5	9352	97090	4	9402	97322	5	9452	97552	4
9253	96628	4	9303	96862	4	9353	97095	5	9403	97327	5	9453	97557	5
9254	96633	5	9304	96867	5	9354	97100	5	9404	97331	4	9454	97562	5
9255	96638	5	9305	96872	5	9355	97104	4	9405	97336	5	9455	97566	4
9256	96642	4	9306	96876	4	9356	97109	5	9406	97340	4	9456	97571	5
9257	96647	5	9307	96881	5	9357	97114	5	9407	97345	5	9457	97575	4
9258	96652	5	9308	96886	5	9358	97118	4	9408	97350	5	9458	97580	5
9259	96656	4	9309	96890	4	9359	97123	5	9409	97354	4	9459	97585	5
9260	96661	5	9310	96895	5	9360	97128	5	9410	97359	5	9460	97589	4
9261	96666	5	9311	96900	5	9361	97132	4	9411	97364	5	9461	97594	5
9262	96670	4	9312	96904	4	9362	97137	5	9412	97368	4	9462	97598	4
9263	96675	5	9313	96909	5	9363	97142	5	9413	97373	5	9463	97603	5
9264	96680	5	9314	96914	5	9364	97146	4	9414	97377	4	9464	97607	4
9265	96685	5	9315	96918	4	9365	97151	5	9415	97382	5	9465	97612	5
9266	96689	4	9316	96923	5	9366	97155	4	9416	97387	5	9466	97617	5
9267	96694	5	9317	96928	5	9367	97160	5	9417	97391	4	9467	97621	4
9268	96699	5	9318	96932	4	9368	97165	5	9418	97396	5	9468	97626	5
9269	96703	4	9319	96937	5	9369	97169	4	9419	97400	4	9469	97630	4
9270	96708	5	9320	96942	5	9370	97174	5	9420	97405	5	9470	97635	5
9271	96713	5	9321	96946	4	9371	97179	5	9421	97410	5	9471	97640	5
9272	96717	4	9322	96951	5	9372	97183	4	9422	97414	4	9472	97644	4
9273	96722	5	9323	96956	5	9373	97188	5	9423	97419	5	9473	97649	5
9274	96727	5	9324	96960	4	9374	97192	4	9424	97424	5	9474	97653	4
9275	96731	4	9325	96965	5	9375	97197	5	9425	97428	4	9475	97658	5
9276	96736	5	9326	96970	5	9376	97202	5	9426	97433	5	9476	97663	5
9277	96741	5	9327	96974	4	9377	97206	4	9427	97437	4	9477	97667	4
9278	96745	4	9328	96979	5	9378	97211	5	9428	97442	5	9478	97672	5
9279	96750	5	9329	96984	5	9379	97216	5	9429	97447	5	9479	97676	4
9280	96755	5	9330	96988	4	9380	97220	4	9430	97451	4	9480	97681	5
9281	96759	4	9331	96993	5	9381	97225	5	9431	97456	5	9481	97685	4
9282	96764	5	9332	96997	4	9382	97230	5	9432	97460	4	9482	97690	5
9283	96769	5	9333	97002	5	9383	97234	4	9433	97465	5	9483	97695	5
9284	96774	5	9334	97007	5	9384	97239	5	9434	97470	5	9484	97699	4
9285	96778	4	9335	97011	4	9385	97243	4	9435	97474	4	9485	97704	5
9286	96783	5	9336	97016	5	9386	97248	5	9436	97479	5	9486	97708	4
9287	96788	5	9337	97021	5	9387	97253	5	9437	97483	4	9487	97713	5
9288	96792	4	9338	97025	4	9388	97257	4	9438	97488	5	9488	97717	4
9289	96797	5	9339	97030	5	9389	97262	5	9439	97493	5	9489	97722	5
9290	96802	5	9340	97035	5	9390	97267	5	9440	97497	4	9490	97727	5
9291	96806	4	9341	97039	4	9391	97271	4	9441	97502	5	9491	97731	4
9292	96811	5	9342	97044	5	9392	97276	5	9442	97506	4	9492	97736	5
9293	96816	5	9343	97049	5	9393	97280	4	9443	97511	5	9493	97740	4
9294	96820	4	9344	97053	4	9394	97285	5	9444	97516	5	9494	97745	5
9295	96825	5	9345	97058	5	9395	97290	5	9445	97520	4	9495	97749	4
9296	96830	5	9346	97063	5	9396	97294	4	9446	97525	5	9496	97754	5
9297	96834	4	9347	97067	4	9397	97299	5	9447	97529	4	9497	97759	5
9298	96839	5	9348	97072	5	9398	97304	5	9448	97534	5	9498	97763	4
9299	96844	5	9349	97077	5	9399	97308	4	9449	97539	5	9499	97768	5
9300	96848	4	9350	97081	4	9400	97313	5	9450	97543	4	9500	97772	4

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9501	97777	5	9551	98005	5	9601	98232	5	9651	98457	4	9701	98682	5
9502	97782	5	9552	98009	4	9602	98236	4	9652	98462	5	9702	98686	4
9503	97786	4	9553	98014	5	9603	98241	5	9653	98466	4	9703	98691	5
9504	97791	5	9554	98019	5	9604	98245	4	9654	98471	5	9704	98695	4
9505	97795	4	9555	98023	4	9605	98250	5	9655	98475	4	9705	98700	5
9506	97800	5	9556	98028	5	9606	98254	4	9656	98480	5	9706	98704	4
9507	97804	4	9557	98032	4	9607	98259	5	9657	98484	4	9707	98709	5
9508	97809	5	9558	98037	5	9608	98263	4	9658	98489	5	9708	98713	4
9509	97813	4	9559	98041	4	9609	98268	5	9659	98493	4	9709	98717	4
9510	97818	5	9560	98046	5	9610	98272	4	9660	98498	5	9710	98722	5
9511	97823	5	9561	98050	4	9611	98277	5	9661	98502	4	9711	98726	4
9512	97827	4	9562	98055	5	9612	98281	4	9662	98507	5	9712	98731	5
9513	97832	5	9563	98059	4	9613	98286	5	9663	98511	4	9713	98735	4
9514	97836	4	9564	98064	5	9614	98290	4	9664	98516	5	9714	98740	5
9515	97841	5	9565	98068	4	9615	98295	5	9665	98520	4	9715	98744	4
9516	97845	4	9566	98073	5	9616	98299	4	9666	98525	5	9716	98749	5
9517	97850	5	9567	98078	5	9617	98304	5	9667	98529	4	9717	98753	4
9518	97855	5	9568	98082	4	9618	98308	4	9668	98534	5	9718	98758	5
9519	97859	4	9569	98087	5	9619	98313	5	9669	98538	4	9719	98762	4
9520	97864	5	9570	98091	4	9620	98318	5	9670	98543	5	9720	98767	5
9521	97868	4	9571	98096	5	9621	98322	4	9671	98547	4	9721	98771	4
9522	97873	5	9572	98100	4	9622	98327	5	9672	98552	5	9722	98776	5
9523	97877	4	9573	98105	5	9623	98331	4	9673	98556	4	9723	98780	4
9524	97882	5	9574	98109	4	9624	98336	5	9674	98561	5	9724	98784	4
9525	97886	4	9575	98114	5	9625	98340	4	9675	98565	4	9725	98789	5
9526	97891	5	9576	98118	4	9626	98345	5	9676	98570	5	9726	98793	4
9527	97896	5	9577	98123	5	9627	98349	4	9677	98574	4	9727	98798	5
9528	97900	4	9578	98127	4	9628	98354	5	9678	98579	5	9728	98802	4
9529	97905	5	9579	98132	5	9629	98358	4	9679	98583	4	9729	98807	5
9530	97909	4	9580	98137	5	9630	98363	5	9680	98588	5	9730	98811	4
9531	97914	5	9581	98141	4	9631	98367	4	9681	98592	4	9731	98816	5
9532	97918	4	9582	98146	5	9632	98372	5	9682	98597	5	9732	98820	4
9533	97923	5	9583	98150	4	9633	98376	4	9683	98601	4	9733	98825	5
9534	97928	5	9584	98155	5	9634	98381	5	9684	98605	4	9734	98829	4
9535	97932	4	9585	98159	4	9635	98385	4	9685	98610	5	9735	98834	5
9536	97937	5	9586	98164	5	9636	98390	5	9686	98614	4	9736	98838	4
9537	97941	4	9587	98168	4	9637	98394	4	9687	98619	5	9737	98843	5
9538	97946	5	9588	98173	5	9638	98399	5	9688	98623	4	9738	98847	4
9539	97950	4	9589	98177	4	9639	98403	4	9689	98628	5	9739	98851	4
9540	97955	5	9590	98182	5	9640	98408	5	9690	98632	4	9740	98856	5
9541	97959	4	9591	98186	4	9641	98412	4	9691	98637	5	9741	98860	4
9542	97964	5	9592	98191	5	9642	98417	5	9692	98641	4	9742	98865	5
9543	97968	4	9593	98195	4	9643	98421	4	9693	98646	5	9743	98869	4
9544	97973	5	9594	98200	5	9644	98426	5	9694	98650	4	9744	98874	5
9545	97978	5	9595	98204	4	9645	98430	4	9695	98655	5	9745	98878	4
9546	97982	4	9596	98209	5	9646	98435	5	9696	98659	4	9746	98883	5
9547	97987	5	9597	98214	5	9647	98439	4	9697	98664	5	9747	98887	4
9548	97991	4	9598	98218	4	9648	98444	5	9698	98668	4	9748	98892	5
9549	97996	5	9599	98223	5	9649	98448	4	9699	98673	5	9749	98896	4
9550	98000	4	9600	98227	4	9650	98453	5	9700	98677	4	9750	98900	4

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D
9751	98905	5	9801	99127	4	9851	99348	4	9901	99568	4	9951	99787	5
9752	98909	4	9802	99131	4	9852	99352	4	9902	99572	4	9952	99791	4
9753	98914	5	9803	99136	5	9853	99357	5	9903	99577	5	9953	99795	4
9754	98918	4	9804	99140	4	9854	99361	4	9904	99581	4	9954	99800	5
9755	98923	5	9805	99145	5	9855	99366	5	9905	99585	4	9955	99804	4
		4			4			4			5			4
9756	98927		9806	99149		9856	99370		9906	99590		9956	99808	
9757	98932	5	9807	99154	5	9857	99374	4	9907	99594	4	9957	99813	5
9758	98936	4	9808	99158	4	9858	99379	5	9908	99599	5	9958	99817	4
9759	98941	5	9809	99162	4	9859	99383	4	9909	99603	4	9959	99822	5
9760	98945	4	9810	99167	5	9860	99388	5	9910	99607	4	9960	99826	4
		4			4			4			5			4
9761	98949		9811	99171		9861	99392		9911	99612		9961	99830	
9762	98954	5	9812	99176	5	9862	99396	4	9912	99616	4	9962	99835	5
9763	98958	4	9813	99180	4	9863	99401	5	9913	99621	5	9963	99839	4
9764	98963	5	9814	99185	5	9864	99405	4	9914	99625	4	9964	99843	4
9765	98967	4	9815	99189	4	9865	99410	5	9915	99629	4	9965	99848	5
		5			4			4			5			4
9766	98972		9816	99193		9866	99414		9916	99634		9966	99852	
9767	98976	4	9817	99198	5	9867	99419	5	9917	99638	4	9967	99856	4
9768	98981	5	9818	99202	4	9868	99423	4	9918	99642	4	9968	99861	5
9769	98985	4	9819	99207	5	9869	99427	4	9919	99647	5	9969	99865	4
9770	98989	4	9820	99211	4	9870	99432	5	9920	99651	4	9970	99870	5
		5			5			4			5			4
9771	98994		9821	99216		9871	99436		9921	99656		9971	99874	
9792	98998	4	9822	99220	4	9872	99441	5	9922	99660	4	9972	99878	4
9773	99003	5	9823	99224	4	9873	99445	4	9923	99664	4	9973	99883	5
9774	99007	4	9824	99229	5	9874	99449	4	9924	99669	5	9974	99887	4
9775	99012	5	9825	99233	4	9875	99454	5	9925	99673	4	9975	99891	4
		4			5			4			4			5
9776	99016		9826	99238		9876	99458		9926	99677		9976	99896	
9777	99021	5	9827	99242	4	9877	99463	5	9927	99682	5	9977	99900	4
9778	99025	4	9828	99247	5	9878	99467	4	9928	99686	4	9978	99904	4
9779	99029	4	9829	99251	4	9879	99471	4	9929	99691	5	9979	99909	5
9780	99034	5	9830	99255	4	9880	99476	5	9930	99695	4	9980	99913	4
		4			5			4			4			4
9781	99038		9831	99260		9881	99480		9931	99699		9981	99917	
9782	99043	5	9832	99264	4	9882	99484	4	9932	99704	5	9982	99922	5
9783	99047	4	9833	99269	5	9883	99489	5	9933	99708	4	9983	99926	4
9784	99052	5	9834	99273	4	9884	99493	4	9934	96712	4	9984	99930	4
9785	99556	4	9835	99277	4	9885	99498	5	9935	99717	5	9985	99935	5
		5			5			4			4			4
9786	99061		9836	99282		9886	99502		9936	99721		9986	99939	
9787	99065	4	9837	99286	4	9887	99506	4	9937	99726	5	9987	99944	5
9788	99069	4	9838	99291	5	9888	99511	5	9938	99730	4	9988	99948	4
9789	99074	5	9839	99295	4	9889	99515	4	9939	99734	4	9989	99952	4
9790	99078	4	9840	99300	5	9890	99520	5	9940	99739	5	9990	99957	5
		5			4			4			4			4
9791	99083		9841	99304		9891	99524		9941	99743		9991	99961	
9792	99087	4	9842	99308	4	9892	99528	4	9942	98747	4	9992	99965	4
9793	99092	5	9843	99313	5	9893	99533	5	9943	99752	5	9993	99970	5
9794	99096	4	9844	99317	4	9894	99537	4	9944	99756	4	9994	99974	4
9795	99100	4	9845	99322	5	9895	99542	5	9945	99760	4	9995	99978	4
		5			4			4			5			5
9796	99105		9846	99326		9896	99546		9946	99765		9996	99983	
9797	99109	4	9847	99330	4	9897	99550	4	9947	99769	4	9997	99987	4
9798	99114	5	9848	99335	5	9898	99555	5	9948	99774	5	9998	99991	4
9799	99118	4	9849	99339	4	9899	99559	4	9949	99778	4	9999	99996	5
9800	99123	5	9850	99344	5	9900	99564	5	9950	99782	4			

FIN.

abreviations inglesas.

far = farthings (4 equivalen á 1 pence.

d = pence.

s = shelling.

cwt = hundreds (112 lb = 4 @ ingles de 28 lb @)

pwt = penny weights.