que l'équation

$$x=y$$

soit vraie. Ainsi l'opération de la division, telle qu'on l'applique aux équations de l'algèbre, n'a pas d'équivalent formel en logique. La multiplication représente suffisamment la combinaison ou la composition des conceptions, mais la division ne saurait représenter leur décomposition ou abstraction. Cependant l'analogie, sur ce point, ne fait pas absolument défaut. Même dans l'algèbre, la règle de la division ne peut s'appliquer partout : par exemple, elle ne saurait être maintenue lorsque le diviseur est $z=0$. Par là l'auteur a le droit de rétablir la concordance des opérations logique et algébrique.

Revenant à l'équation

$$x^2=x$$

il remarque que seulement deux valeurs de x peuvent s'accommoder de cette équation, à savoir : 0 et 1. Car $0^2=0$, et $1^2=1$; la relation n'est pas applicable à d'autres nombres. Par suite, dans une algèbre dont les symboles x, y, z, etc., n'auraient jamais d'autre valeur que 0 et 1, les lois de l'opération coïncideraient avec les lois de l'opération logique. Les deux sciences ne diffèrent que par la façon d'interpréter l'opération.

Dans le chapitre III, Boole prétend déduire les lois des symboles de la logique, déjà exposés, des lois de l'opération de l'esprit. Il procède ainsi qu'il suit : — Dans tout discours, il y a une limite aux objets considérés ; en d'autres termes, il y a *un tout*. Ainsi le terme « homme » est employé par celui qui parle dans une certaine extension : il peut signifier tous les hommes, quels qu'ils soient, ou un tout plus limité, les hommes civilisés, les hommes mûrs, etc. Le terme « homme » éveille dans l'esprit de celui qui écoute l'idée des êtres qu'on veut lui faire désigner. Considérons maintenant l'emploi d'un adjectif. Supposons que « hommes» soit entendu dans son sens le plus général, et désigne

« tous les hommes », alors l'application de l'adjectif « bon » prescrit de choisir dans le tout les objets qui possèdent la bonté : ce choix correspond à l'expression — hommes bons. Ainsi le rôle d'un adjectif est non pas d'ajouter la qualité *bon* à tous les hommes, mais de nous faire choisir dans ce tout, les hommes, les individus qui s'accordent avec l'idée indiquée par le mot. Les facultés intellectuelles, employées dans ces opérations successives, peuvent être désignées sous les noms de conception ou d'imagination, et d'attention ; ou bien même l'opération entière peut être résumée en une seule fonction, la conception. Chaque pas en avant peut être considéré comme un *acte défini de conception.*

Or le symbolisme ci-dessus adopté correspond exactement à cette opération. Le symbole x porte notre attention sur une idée générale, les hommes par exemple, le symbole y, bon ou blanc, nous indique qu'il faut chercher dans ce tout les individus qui possèdent la qualité nommée : et la combinaison yx, ou xy exprime le choix qu'on a fait, hommes blancs ou hommes bons. Ce symbole ne rentre pas dans les relations qu'exprime une somme, un total. Le sens de ce symbole est un groupe qualifié par les conceptions associées x et y, et non un agrégat formé par l'addition de tout x à tout y. De cette façon Boole considère ses affirmations comme démontrées : 1° les opérations de l'esprit obéissent à des lois générales ; 2° ces lois sont mathématiques dans leur forme ; par suite les lois des symboles de la logique peuvent être déduites des opérations de l'esprit dans le raisonnement.

Boole arrive ensuite à déterminer la valeur logique des symboles 0 et 1. Le symbole 0 correspond à *rien :* le symbole 1 correspond au *tout* dont il est question. *Rien* et *tout* sont les deux limites de l'extension. Quelle que soit la classe y, les individus communs à cette classe et à la classe 0, ou rien, sont aussi 0 ou rien. C'est-à-dire que :

$$0\times y=0; \quad \text{ou} \quad 0y=0.$$

D'un autre côté le symbole 1 représente la loi d'équation :

$$1 \times y = y, \quad \text{ou} \quad 1y = y,$$

quel que soit le sens de y. La classe représentée par 1 doit être par conséquent le tout, la seule classe qui contienne tous les individus existant dans *quelque* classe.

Voici maintenant les contraires. Si x représente quelque classe d'objets, $1 - x$ représente la classe contraire ou supplémentaire, ce qui reste, lorsque x est distrait du tout, de l'idée générale 1. Si x représente les *hommes*, dans le tout *animaux*, $1 - x$ sera l'expression de tout ce qui n'est pas homme, des membres qui restent, des brutes. Ceci est d'accord avec les symboles adoptés par de Morgan, $U - x$, pour exprimer le contraire de x.

L'auteur tire ensuite de son équation logique fondamentale $x^2 = x$, ou $x - x^2 = 0$, une preuve formelle de la loi de contradiction. L'équation admet cette forme :

$$x(1-x)=0,$$

qui, interprétée d'après la signification des symboles, donne le sens suivant : la classe déterminée à la fois par x et par son contraire $1 - x$, est la même chose que 0 ou rien, en d'autres termes n'existe pas.

Si nous allons plus avant dans l'examen des propositions (ch. IV.) nous trouvons que l'auteur les divise en deux catégories : propositions primaires ou simples, propositions secondaires ou complexes, l'une qui se rapporte aux choses, l'autre aux propositions. Dans la dernière catégorie sont comprises les propositions hypothétiques, etc. Boole commence par proposer une méthode générale d'expression pour tous les termes qui peuvent entrer dans une proposition primaire. Cette méthode n'est que l'application des symboles qu'il a déjà exposés. Ainsi admettons que x représente les substances opaques, y les substances polies, z les pierres. Alors nous avons :

$xyz =$ les pierres opaques et polies.

Or, comme $1 - z$ représente les substances qui sont autres que les pierres, nous aurons :

$xy(1-z) =$ les substances opaques et polies qui ne sont pas des pierres.

De même :

$x(1-y)(1 z) =$ les substances opaques qui ne sont pas des pierres et qui ne sont point polies.

D'autre part, dans le cas où il s'agit de collections d'objets — d'objets réunis par *et* et par *ou*, il faut ajouter aux symboles le signe de l'addition, ainsi que nous l'avons déjà exposé. Le signe « ou » donne une forme disjonctive ; tous les x' s sont ou bien y' s ou z' s ; et cette formule a deux sens que l'emploi de *ou* ne suffit pas à distinguer, mais que la formule exprime différemment. On veut savoir si X est ou n'est pas à la fois y et z. — « C'est un fou ou un farceur. » Il peut être ou ne pas être les deux ; l'expression va jusque-là, mais le sens le plus général de la phrase est qu'il ne peut être les deux. Voici les deux manières de symboliser l'expression : 1° les choses qui sont ou bien x' s ou bien y' s, sont des choses qui ne sont pas y' s si elles sont x' s, et qui ne sont pas x' s si elles sont y' s : c'est-à-dire

$$x(1-y)+y(1-x);$$

2° les choses qui sont ou bien x' s, ou bien y' s, si elles ne sont pas x' s,

$$x+y(1-x).$$

Cette formule admet l'hypothèse que la chose soit à la fois x et y, hypothèse qui est encore plus explicitement formulée dans la forme équivalente que voici :

$$xy+x(1-y)+y(1-x).$$

Ici nous avons les trois alternatives ; xy exprimant la coïncidence de x et de y. Si ce n'est pas un farceur, c'est un fou, x fou, y farceur, $x(1-y)$; si ce n'est pas un fou, c'est un farceur, $y(1-x)$; il est à la fois l'un et l'autre, xy.

Pour prendre un exemple plus complet qui montre toute la puissance de la méthode, admettons que :

$$x = \text{dur},\ y = \text{élastique},\ z = \text{métaux},$$

et nous aurons les résultats suivants :

$$\text{Métaux non élastiques} = z(1-y).$$

Les substances élastiques avec les métaux non élastiques $y + z(1-y)$.

Les substances dures excepté les métaux, $x - z$.

Les substances métalliques, excepté celles qui ne sont ni dures ni élastiques.

$$z - z(1-x)(1-y) \quad \text{ou} \quad z\{1-(1-x)(1-y)$$

Prenons encore des exemples plus compliqués : « Les substances dures, à l'exception de celles qui sont métalliques et non élastiques, et de celles qui sont élastiques et non métalliques. » Substance dure est représentée par x, substance dure, métallique et non élastique, par $xz(1-y)$, substance dure, élastique et non métallique, par $xy(1-z)$; l'expression complète sera

$$x - \{xz(1-y) + xy(1-z)\} \quad \text{ou} \quad x - xz(1-y) - xy(1-z).$$

Telle est la méthode d'expression pour les termes : pour former les propositions on emploiera le signe $=$ comme copule.

Si nous voulons par exemple exprimer l'identité entre « les étoiles fixes » et « les soleils », ou dire que « Toutes les étoiles fixes sont des soleils » et « tous les soleils des étoiles fixes » (proposition universelle d'Hamilton avec prédicat universel), nous dirons :

$$x = y.$$

Telle est la forme applicable à la proposition verbale ou définition. Par exemple la définition de la richesse, « la richesse est un ensemble de choses transmissibles, limitées dans leur quantité, et qui ou bien procurent le plaisir, ou bien

préviennent la peine », peut être symbolisée de la façon suivante. Admettons que $w =$ richesse, $t =$ choses transmissibles ; $s =$ limitées dans leur quantité ; $p =$ qui produisent le plaisir ; $r =$ qui préviennent la peine. Ajoutons que l'emploi de la conjonction *et* est souvent inutile, et peut nous tromper : *et* entre deux adjectifs, « hommes grands et bons », a un sens très-différent de celui qu'il a lorsqu'il associe deux groupes comme les « hommes bons », et les « grands hommes »; dans le premier cas nous avons xyz, dans le second $xz + yz$. Remarquons encore que la disjonctive *ou* dans la phrase « produisent le plaisir ou préviennent la peine » représente des choses qui, si elles ne procurent pas du plaisir, préviennent la peine, et qui, si elles ne préviennent pas la peine, procurent du plaisir : elle ne laisse pas supposer que les choses aient à la fois les deux caractères. Ces explications une fois données, il est facile de comprendre la formule qui exprimera la proposition :

$$w = st\{p(1-r) + r(1-p)\}$$

Passant maintenant aux propositions *réelles* comme : « Les hommes sont mortels », nous avons besoin d'une méthode pour exprimer les termes *particuliers* : « Tous les hommes sont quelques êtres mortels ». Admettons que v représente une classe indéfinie, de laquelle quelques membres sont des êtres mortels ; que x représente la classe entière des êtres mortels ; alors vx exprimera « quelques êtres mortels ». Par suite, si y est le signe pour *hommes*, l'équation cherchée sera

$$y = vx.$$

Le symbole qualificatif v est donc le signe de la particularité dans tous les cas possibles. Dans la proposition : « Les planètes sont ou bien primaires ou bien secondaires » (*quelques* corps primaires, ou *quelques* corps secondaires

Si $x =$ planètes,
$y =$ les corps primaires,
$z =$ les corps secondaires,

alors, accordant que les planètes ne peuvent être à la fois primaires et secondaires, l'équation de la proposition est :

$$x=v\{y(1-z)+z(1-y)\}$$

Une forme plus simple, pour établir la même proposition, serait :

$$x=v(y+z)$$

En effet, le sens manifeste est que les planètes rentrent entièrement dans ces deux catégories, corps primaires ou secondaires ; c'est-à-dire qu'elles sont composées de quelques corps primaires et de quelques corps secondaires.

Tel est le *symbolisme* applicable aux propositions réelles affirmatives, où le prédicat doit être considéré en général comme ayant une extension supérieure au sujet. L'auteur montre ensuite comment on exprime les propositions négatives.

Supposons le cas « aucun homme n'est parfait », une négative universelle. Ici nous faisons une assertion, à l'effet d'établir que tous les hommes sont des êtres non parfaits. On peut donc réduire ainsi la proposition : *Tous les hommes* (sujet) *sont* (copule), *aucun être parfait* (prédicat). Admettons que y représente les hommes, et x, les êtres parfaits. Les êtres non parfaits seront exprimés par la forme négative $1-x$, et quelques êtres non parfaits par la même forme, qualifiée par le signe de la particularité v. De là l'équation :

$$y=v(1-x)$$

Ainsi, pour exprimer la forme aucun x n'est y, nous devons la convertir ainsi : « Tous les xs sont non ys. »

Une proposition négative particulière : « Quelques hommes sont non sages », peut être réduite ainsi : « Quelques hommes » (sujet), « sont » (copule), « non sages » (prédicat). Prenant alors y pour hommes, x pour sages, et v pour une classe indéfinie qui contient quelques individus de la classe qu'il qualifie, nous avons pour quelques hommes, vy, pour *non sage*, $v(1-x)$, ou l'équation :

$$vy=v(1-x).$$

Voilà pour l'expression symbolique des propositions simples ou primaires. Il faut ensuite montrer comment ces formes doivent être présentées, pour fournir des inférences immédiates, ou pour épuiser toutes les formes équivalentes de chaque proposition ; c'est dans cette opération que Boole déploie surtout la force de sa méthode.

Dans ce but, il faut prendre la permission de traiter, de manier les équations d'après le type de l'algèbre, avec les restrictions déjà admises. Le lecteur doit, d'après les explications données, reconnaître que les signes employés ont la même force, la même valeur dans la logique et dans l'algèbre. Les conditions d'un raisonnement solide sont au nombre de trois : 1° qu'une interprétation fixe soit assignée aux symboles ; 2° que les opérations formelles de solution ou de démonstration soient conduites selon les lois exposées et selon le sens des signes de l'opération ; 3° que le résultat final soit interprété de la même façon que les données primitives.

Ayant une fois habillé, pour ainsi dire, les termes de la logique dans le costume de l'algèbre, l'auteur prétend procéder exactement comme s'il avait affaire à une équation algébrique, partout où les symboles ont seulement les deux sens 0 et 1.

Les formes diverses de chaque proposition seront obtenues d'après un procédé de développement, qui est expliqué tout au long par l'auteur, et qui se rapproche beaucoup de la méthode algébrique.

Le plan général de ce procédé de développement est indiqué dans les considérations suivantes : Supposons que nous considérons une classe d'objets, relativement à la question de savoir si les membres qui la composent possèdent ou ne possèdent pas la qualité x ; par exemple les animaux, par rapport à l'humanité. Supposons ensuite que les membres qui possèdent la qualité x possèdent aussi une autre qualité u, et que les membres qui ne possèdent pas la qualité x sont soumis à une condition v. D'après ces suppositions la classe dans sa totalité sera représentée par :

$$ux + v(1-x).$$

On dit que toute fonction de x, $f(x)$, où x est un symbole logique, susceptible seulement des valeurs 1 et 0, est développée, lorsqu'elle est ramenée à la forme $ax+b(1-x)$, a et b étant déterminés de façon à rendre le résultat équivalent à la fonction d'où il dérive. L'exposition complète de ce développement est purement algébrique et occupe un grand nombre de pages dans l'ouvrage de Boole. Pour ceux qui sont exercés aux équations algébriques ordinaires, l'ensemble est suffisamment intelligible. Nous n'indiquerons ici que les résultats et les applications. Ce qui suit est donné comme exemple. C'est une définition à deux caractères : « Les animaux *mondes* (par opposition aux animaux immondes), sont ceux dont le sabot est divisé, et qui ruminent. »

Admettons que $x=$ les animaux mondes.
$y=$ les bêtes dont le pied est divisé.
$z=$ les bêtes qui ruminent.

La définition sera alors représentée par l'équation,

$$x=yz,$$

ce qui reviendra à la forme :

$$x-yz=0.$$

Ici une fonction de x, y, et z, à savoir $x-yz$, doit être développée selon les méthodes qui ont été exposées. Comme spécimen nous transcrirons le développement :

$$0xyz + xy(1-x) + x(1-y)z + x(1-y)(1-z) - (1-x)yz$$
$$+ 0(1-x)y(1-z) + 0(1-x)(1-y)z + 0(1-x)(1-y)(1-z).$$

Or tous les termes multipliés par 0 disparaissent nécessairement, et les termes qui restent sont les suivants :

$$xy(1-z)=0, \quad xz(1-y)=0, \quad x(1-y)(1-z)=0, (1-x)yz=0$$

Toutes ces équations expriment la négation ou la nullité des combinaisons exprimées dans la première partie, c'est-à-dire la partie gauche de chaque équation : ainsi $xy(1-z)=0$ signifie qu'il ne peut y avoir de bêtes qui soient mondes (x), et qui aient le sabot divisé (y), et qui ne ruminent pas $(1-z)$. De même $(1-x)yz=0$ veut dire qu'il n'y a pas de bêtes immondes $(1 - x)$, qui cependant aient le sabot divisé (y), et qui ruminent (z).

Ces formes équivalentes se présentent d'elles-mêmes, sans avoir recours à l'analyse. Mais l'auteur développe des équivalents plus compliqués, tels que ceux-ci : « Les bêtes immondes sont toutes celles qui ont le sabot divisé sans ruminer, toutes celles qui ruminent sans avoir le sabot divisé, toutes celles enfin qui à la fois n'ont pas le sabot divisé et ne ruminent pas. » Le lecteur sera curieux de connaître l'équation équivalente :

$$1-x=y(1-z)+z(1-y)+(1-y)(1-z).$$

D'après ces exemples, il est évident qu'étant donnée une définition qui, comme la définition de la richesse d'après Senior, contient trois ou quatre caractères essentiels, on peut en faire dériver un grand nombre de formes équivalentes. C'est une question de savoir si l'esprit pourrait, sans recourir à l'analyse algébrique, développer toutes celles de ces formes qui ont quelque importance. Il est possible néanmoins que des cas se présentent où les méthodes symboliques rendent faciles des équivalents trop subtils, trop compliqués, pour l'intelligence qui n'aurait à son service que la méthode logique ordinaire.

L'auteur étend son analyse de façon à embrasser des exemples plus compliqués, dont voici les types généraux : supposons que l'analyse d'une classe particulière de substances nous ait conduit aux conclusions générales que voici :

1° Partout où sont combinées les propriétés A et B, la propriété C ou la propriété D est aussi présente, mais elles ne sont jamais présentes à la fois;

2° Partout où B et C sont combinés, A et D sont ou présents ou absents à la fois;

3° Partout où A et B sont absents à la fois, C et D sont absents à la fois; et *vice versâ*, partout où C et B sont absents à la fois, A et D sont absents aussi.

Supposons maintenant que, ces conditions posées, on demande de déterminer ce que, dans un cas particulier, l'on doit conclure de la présence de la propriété A, par rapport à la présence ou à l'absence des propriétés B et C, sans nous occuper de D. Les équations correspondantes nous conduiront à ce résultat : — Partout où A est présent, ou bien C est présent et B absent, ou bien C est absent. Et inversement, partout où C est présent et B est absent, A est présent.

On pourrait citer d'autres combinaisons curieuses qui dérivent de l'équivalence des propositions simples.

Nous arrivons maintenant à l'examen des propositions secondaires (hypothétiques, etc.), que l'auteur symbolise en introduisant l'idée du *temps* comme leur caractère distinctif. Une proposition simple, non qualifiée, si elle est affirmative, s'applique à tous les temps; si elle est négative, elle ne s'applique à aucun temps; une proposition qualifiée ne s'applique qu'à un temps limité. Le symbole 1 peut représenter une vérité non qualifiée, comme étant vraie de tous les temps; le symbole 0 sera employé pour une négation non qualifiée, quelque chose qui n'est vrai en aucun temps. Admettons que X représente une proposition, et x le temps pendant lequel elle est vraie. De même, si Y représente une autre proposition, y sera pris pour indiquer le temps pendant lequel elle est vraie. Si nous résumons les deux propositions, $x + y$ dénotera la durée totale pendant laquelle X et Y sont respectivement vraies, ces temps étant distincts l'un de l'autre. D'autre part, $x - y$ dénotera ce qui reste de temps, lorsque la durée y est retranchée de la durée x, s'il est supposé que x enferme y. De même, $x = y$

indiquera que X et Y sont vrais pour des temps identiques. Enfin xy indique la portion du temps pendant laquelle X et Y sont vrais à la fois.

Maintenant, comme x dénote le temps pendant lequel X est vrai, $1 - x$ dénotera le temps pendant lequel X est faux. De même, $x\,(1 - y)$ dénotera le temps pendant lequel X est vrai, et Y est faux; et ainsi de suite. Le même système s'appliquera à tout symbole.

Pour exprimer la proposition : X est vrai (sans limite, sans qualification aucune), nous aurons :

$$x = 1.$$

Pour exprimer la proposition : X est faux :

$$x = 0.$$

S'il s'agit d'exprimer : « ou bien la proposition X est vraie, ou bien la proposition Y est vraie » (non pas toutes les deux à la fois); d'abord, « lorsque X est vrai, Y est faux », est signifié par $x\,(1 - y)$; « lorsque Y est vrai, X est faux », est signifié par $y\,(1 - x)$; alors l'opération sera :

$$x(1-y)+y(1-x)=1.$$

Passons à l'expression des propositions conditionnelles : « Si la proposition Y est vraie, la proposition X est vraie. » Ceci implique que partout où Y est vrai, X est vrai aussi; ou que le temps, pendant lequel X est vrai, couvre entièrement le temps pendant lequel Y est vrai, peut-être un temps plus long encore. Par suite, X est au moins égal à Y, si même il n'est pas plus grand. Conséquemment, il faut trouver quelque forme qui implique que Y est contenu dans X : forme analogue à celle qui est requise pour une proposition affirmative universelle. Admettons que v représente une portion indéfinie du temps, comme pour exprimer la partie inconnue d'un tout, « *quelque*, et peut-être *tout* », l'équation demandée sera :

$$y = vx.$$