Il n'est pas nécessaire de donner des exemples du symbolisme employé dans des cas plus compliqués. L'auteur est tellement entraîné par le succès de sa méthode, appliquée à l'expression des propositions composées ou secondaires qui se rapportent au temps, qu'il spécule sur un moyen analogue destiné à représenter les propositions primaires par rapport à l'espace. Il croit avoir par là confirmé la doctrine qui considère l'espace et le temps comme des formes pures de l'entendement humain.

Un chapitre est consacré à l'expression des propositions secondaires, traitées comme les propositions primaires, de façon à épuiser tout ce qu'elles impliquent. Le résultat est uniquement de déduire les conséquences ordinaires des propositions disjonctives et conditionnelles. Il est à remarquer que le *procédé* est encore ici un procédé d'inférence immédiate, ce qui prouve encore une fois que dans les syllogismes dits hypothétiques il n'y a pas d'inférence réelle ou médiate.

Pour faire mieux saisir la valeur de l'évolution symbolique des formes équivalentes, Boole choisit, pour les analyser, deux exemples d'argumentation métaphysique, suffisamment complexes pour éprouver la puissance de la méthode logique. Ces exemples sont : 1° une partie de la démonstration de Samuel Clarke sur l'existence et les attributs de Dieu ; 2° l'argument de Spinoza pour prouver l'identité de Dieu et de l'univers. Il confesse que la principale difficulté dans l'analyse de ces arguments est de dégager les prémisses réelles des auteurs ; il aurait pu reconnaître encore la difficulté qu'il y a à assigner des sens définis et invariables aux termes très-abstraits dont les auteurs se servent : nécessité, existence, éternité, cause, etc. Mais, les prémisses une fois établies, il est possible de les exposer dans des symboles, et par suite d'extraire tous leurs équivalents par la solution des équations correspondantes. La méthode peut être recommandée comme un effort intéressant ; elle vient confirmer, sous une autre forme, la méthode suivie par un esprit logique et pénétrant

qui, sans recourir à des symboles, opérerait sur les *corpora ipsa* des prémisses.

Nous avons maintenant passé en revue la plus grosse moitié du livre de Boole, et nous n'avons pas encore vu qu'il fût question du syllogisme. Un chapitre très-court est tout ce qu'il consacre à l'inférence *médiate :* ce n'est d'ailleurs qu'une simple application de la méthode algébrique, avec les modifications qu'exige la nature du cas.

Il commence par accepter les additions que M. de Morgan a faites aux quatre types de propositions de la logique usuelle. Il expose les huit formes, avec des équations pour chacune d'elles ; il exprime les quatre formes nouvelles en employant un sujet contraire à celui de chacune des vieilles formes. Le parallélisme est montré dans le tableau suivant :

A	—	Tous les Y*s* sont X*s*	$y=vx$	(1)
(A)		Tous les non Y*s* sont X*s*	$1-y=vx$	(2)
E		Aucun Y n'est X	$y=v(1-x)$	(3)
(E)		Aucun non Y n'est X	$1-y=v(1-x)$	(4)
	=	{ Tous les X*s* sont Y*s*	$v=vy$ }	
I		Quelques Y*s* sont X*s*	$vy=vx$	(5)
(I)		Quelques non Y*s* sont X*s*	$v(1-y)=vx$	(6)
	=	{ Quelques X*s* sont non Y*s*	$vy=(1-y)$ }	
O		Quelques Y*s* sont non X*s*	$vy=v(1-x)$	7
(O)		Quelques non Y*s* sont non X*s*	$v(1-y)=v(1-x)$	8

La seconde forme de E coïncide avec A par la seule transposition des lettres. La seconde forme de I est O, de la même manière. La seconde forme de O, (O) est la seule forme nouvelle. Quelques non Y*s* sont non X*s* ; quelques choses ne sont ni Y*s* ni X*s*. C'est là une des deux disjonctives de M. de Morgan ; l'autre disjonctive « Aucun non X n'est Y, toute chose est ou X ou Y », ne paraît pas dans la liste de Boole.

Les lois de la conversion dérivent des formes symboliques. La proposition « Tous les Y*s* sont X*s*,» étant représentée par $y = v x$, nous n'avons qu'à lire $v x = y$, Quelques X*s* sont Y*s*. Pour convertir la même proposition par négation (obversion et conversion), nous déduisons, en éliminant v,

$$y(1-x)=0$$

ce qui donne, par rapport à $1-x$ la solution :

$$1-x=\frac{0}{0}(1-y),$$

dont l'interprétation est : « Tous les non X*s* sont non Y*s*. » (Cette opération contient des méthodes et des symboles qui ne sont pas expliqués dans les extraits précédents.)

L'auteur continue à employer, dans les limites de la théorie de la conversion, les méthodes qu'il a déjà appliquées à la réduction et à l'interprétation des équations : c'est ce qu'il était naturel d'attendre, si l'on considère que la conversion est simplement une variété de l'inférence immédiate ou équivalente. Le SYLLOGISME exige qu'on fasse un pas en avant. Les deux prémisses doivent être exposées dans deux équations, avec un même moyen terme, et ce terme doit disparaître dans une troisième équation composée des deux premières. Ainsi

Tous les X*s* sont Y*s* $x=vy$
Tous les Y*s* sont Z*s* $y=v'z$.

D'où, en substituant à y, dans la première équation, sa valeur exprimée dans la seconde, on tire :

Tous les Y*s* sont Z*s* $x=vv'z$

La forme $vv'z$ montre que x est une partie d'une partie de z. Il en est de même pour tous les autres cas. Il ne s'agit que d'éliminer le moyen terme y. La méthode pourrait être appliquée tour à tour aux formes ordinaires du syllogisme. Mais l'auteur aime mieux déduire les règles générales du syllogisme par une équation qui comprend toutes les formes du raisonnement valide. Il donne comme résultats de son analyse les règles suivantes : « Lorsqu'un même moyen terme est pris au moins une fois universellement, égalisez les deux termes extrêmes. » « Lorsque les moyens termes sont différents (l'un négatif, l'autre positif), avec un extrême universel, changez la quantité et la qualité de cet extrême, et prononcez l'égalité du résultat avec l'autre extrême : avec deux moyens termes universels, changez la quantité et la qualité de l'un ou de l'autre des extrêmes, et prononcez l'égalité du résultat avec l'autre extrême qui reste le même. »

Supposons le cas :

Tous les Y*s* sont X*s*.
Tous les Z*s* sont Y*s*.

Ce cas relève de la première règle. « Tous les Y*s* » est le moyen terme universel : les extrêmes mis en équation donnent comme conclusion :

Tous les Z*s* sont X*s*.

Supposons ensuite :

Tous les X*s* sont Y*s*.
Aucun Z n'est Y.

L'expression exacte de ces prémisses est :

Tous les X*s* sont Y*s*.
Tous les Z*s* sont non Y*s*.

Ce cas est de ceux où les moyens termes diffèrent, et où un des extrêmes est universel. Par application de la règle nous changeons la qualité et la quantité de cet extrême, et nous prononçons son égalité avec l'autre extrême.

Tous les X*s* sont non Z*s* ou Aucun X n'est Z.

En commençant par l'autre extrême universel nous avons un résultat équivalent :

Aucun Z n'est X.

Un troisième cas sera :

Tous les Y*s* sont X*s*.
Tous les non Y*s* sont Z*s*.

Ici les termes diffèrent de qualité. Il y a deux moyens termes universels. D'après la règle nous changeons la quantité et la qualité de l'un ou de l'autre extrême (quelques X*s* devient tous les non X*s*), et nous prononçons son égalité avec l'autre extrême (quelques Z*s*) :

Tous les non X*s* sont Z*s*.

Les deux derniers exemples sont choisis par l'auteur comme représentant des syllogismes qui n'auraient pas été considérés comme valides dans la logique scolastique ; la logique ordinaire exige en effet que le sujet d'une proposition soit positif. (Comme on l'a souvent remarqué déjà, le défaut d'une exposition complète des contraires est le principal défaut du système d'Aristote.) Il n'en est pas moins vrai que les cas en question sont parfaitement légitimes, et les règles qui les déterminent sont, sans nul doute, *les règles les plus générales de l'inférence syllogistique*. L'analyse employée n'est pas, d'après l'auteur, du domaine propre du syllogisme, elle appartient à une méthode plus générale de combinaison des propositions ; et l'auteur cite un cas imaginaire pour éclaircir le sens plus large de cette analyse.

Sans pousser plus loin l'étude du syllogisme, Boole discute la question si souvent agitée du type fondamental du raisonnement déductif, et il accepte la solution de Whately et de Mill, qui s'accordent à reconnaître que tout raisonnement solide est au fond l'inférence de propositions nouvelles fondées sur des propositions plus générales : le syllogisme étant l'expression complète et adéquate de ce procédé. Comme le syllogisme est une sorte d'*élimination*, la question se réduit à ces deux recherches :

1° Toute élimination se ramène-t-elle au syllogisme ?

2° Le raisonnement déductif consiste-t-il seulement dans l'élimination ?

A la première question Boole répond, qu'il est toujours possible théoriquement de résoudre et de combiner les propositions, de façon que l'élimination puisse être ensuite accomplie par les règles du syllogisme, mais que les procédés de *réduction* seraient, dans beaucoup de cas, forcés et peu naturels, et exigeraient des opérations qui ne sont pas syllogistiques.

A la seconde question il répond que le raisonnement ne peut être réduit à l'élimination, excepté par des restrictions arbitraires. Le raisonnement ne saurait être moins que l'ensemble des méthodes fondées sur les lois de la pensée, et le procédé de l'élimination n'est qu'un de ces procédés.

Boole remarque encore que, de toutes les lois de la pensée, l'une des plus importantes au point de vue logique est la loi de la contradiction, à laquelle Leibniz attribue la même valeur.

Toutes les personnes qui se sont fait une juste idée de la relativité de toute connaissance s'accorderont à reconnaître, avec Boole, l'importance capitale de la contrariété ou de la contradiction : mais cette importance ne va pas au-delà de l'équivalence ou de l'inférence immédiate. La contradiction prépare les voies au syllogisme ; elle est la clé des quelques extensions utiles du syllogisme, mais la loi de contradiction ne touche pas à l'essence du syllogisme. L'axiome, ou loi de la pensée, qui sert de fondement à l'inférence médiate doit être quelque chose de plus, et si cet axiome n'est pas celui que nous avons indiqué dans le chapitre précédent, il faut du moins le chercher en dehors de la loi de contradiction. Passant des généralités un peu vagues de Boole à sa méthode, qui consiste à combiner deux équations à la place des deux prémisses, pour arriver à une troisième équation, qui représente la conclusion ; et considérant la maxime qui d'après lui justifie ce procédé de réduction, il nous semble voir que c'est la même maxime qui entre dans un problème d'équation à deux ou trois inconnues : comme par exemple, étant donnés $x + y = a$, $x - y = b$, trouver x et y. Si l'on accorde que les conditions du syllogisme logique ont été convenablement exprimées par les symboles de Boole, et que la réduction algébrique convient et s'applique justement aux propositions, il est naturel d'admettre que l'axiome logique est l'axiome algébrique, qui permet de substituer à y, dans une équation, son équivalent dans l'autre; comme par exemple quand nous tirons de $x - y = b$, $y = x - b$, et que nous introduisons la valeur de y dans l'équation $x + y = a$. L'axiome, directement applicable au syllogisme, serait que l'on peut dans une équation substituer à n'importe quelle quantité son équivalent. En d'autres termes la substitution de l'équivalent d'une quantité à la quantité elle-même ne change pas la valeur d'une équation. C'est là une variante de l'axiome de l'égalité médiate, les quantités égales à une même quantité sont égales l'une à l'autre : axiome auquel M. Mill compare, pour la forme, l'axiome du syllogisme. Si une quantité est égale à une seconde quantité, et la seconde égale à une troisième, la première est aussi égale à la troisième. Dans une combinaison qui contient A et B, nous pouvons introduire à la place de B son équivalent C.

Une grande partie de l'ouvrage de Boole est consacrée aux probabilités; sur ce point l'auteur emploie encore le symbolisme dont il s'est servi dans les autres parties de son travail. On admet généralement que Boole a fait des additions importantes à la théorie des probabilités, ce terrain commun de la logique et des mathématiques.

CHAPITRE III

DU ROLE ET DE LA VALEUR DU SYLLOGISME.

1. Le caractère propre du syllogisme, c'est que la conclusion n'y dépasse pas les prémisses. Ce caractère a été diversement envisagé.

D'une part, on a voulu y voir le signe de l'excellence du syllogisme.

D'autre part, on en a profité pour représenter le syllogisme comme une *petitio principii.*

Dans le syllogisme, « les hommes sont mortels, les rois sont des hommes, les rois sont mortels, » la conclusion paraît déjà contenue dans les prémisses. En vertu de leur rapprochement, les deux prémisses, la majeure universelle et la mineure interprétative, impliquent le fait que « les rois sont mortels ».

1° A cette circonstance a été attribué le mérite propre, l'excellence, la certitude de l'inférence syllogistique. Lorsqu'on a accepté les prémisses, on ne peut repousser la conclusion, sans se mettre en contradiction avec soi-même. Dans la transition des prémisses à la conclusion, il n'y a rien de hasardé ni de précaire.

Cette même circonstance a été présentée sous un aspect beaucoup moins favorable. On a allégué qu'une pure répétition n'est pas une inférence réelle : que reproduire, sous une forme nouvelle, ce qui a déjà été affirmé, peut être une opération nécessaire et irréprochable (comme nous l'avons montré pour les différentes espèces d'inférence im-