l'esprit, lorsqu'elles auront été déterminées avec précision, comporteront de même un grand nombre d'applications déductives, et impliqueront beaucoup de faits qui pour le moment ne peuvent être découverts que par l'observation. De même la doctrine de la relativité de nos sentiments et de nos pensées n'a pas encore été examinée dans toutes ses conséquences.

CHAPITRE V

DÉMONSTRATION. — AXIOMES. — VÉRITÉS NÉCESSAIRES.

1. L'évidence spéciale qui résulte de la démonstration a sa source dans l'induction.

La démonstration est un mot synonyme de la déduction qui, comme on l'a vu, n'est autre chose en dernière analyse qu'une induction. On dit, par exemple, que les propositions d'Euclide peuvent être démontrées; et cela revient à faire rentrer chacune de ces conclusions dans les principes fondamentaux de la science.

Pour établir que la démonstration mathématique est inductive, il y a deux choses requises. Il faut établir : 1° que les principes de la science (les axiomes) sont inductifs; 2° que l'axiome qui sert de fondement au syllogisme, est lui-même inductif. Les axiomes donnent aux mathématiques leurs principes, et le syllogisme assure l'application de ces principes.

Quant à ces principes derniers de la science qu'on appelle les axiomes, il y a des contradictions capitales dans les opinions des philosophes. Les uns prétendent que les axiomes mathématiques, l'axiome du syllogisme, aussi bien que l'axiome de causalité sont des inductions empruntées à l'expérience; les autres maintiennent que ces principes ont une origine intuitive, et que, grâce à cette origine, ils possèdent une certitude plus haute que celle qui pourrait leur être assurée par l'expérience (1).

2. Le principal argument qu'on fait valoir contre l'origine inductive ou expérimentale des axiomes, c'est, dit-on, qu'ils sont *nécessaires*, et que l'expérience est impuissante à assurer aux vérités qu'elle suggère ce caractère de nécessité.

L'idée de nécessité, appliquée aux vérités telles que les axiomes mathématiques, date de Leibnitz; elle a été rétablie, sous une forme spéciale, par Kant, et elle subsiste encore aujourd'hui dans l'esprit d'un grand nombre de philosophes. Le mot est néanmoins ambigu.

DIVERS SENS DU MOT NÉCESSITÉ.

3. I. — Dans le langage ordinaire « nécessité » est synonyme de certitude, et peut s'appliquer à des vérités inductives.

Lorsque nous parlons d'un événement qui arrivera certainement, nous employons, entre autres termes, le mot de nécessaire. Nous appellerons la congélation de l'eau à 32 degrés une nécessité, voulant dire par là que la congélation se produira sûrement. Nous dirons encore dans le même sens : le vice est la conséquence nécessaire d'une mauvaise éducation.

En pareil cas la nécessité n'a évidemment rien de commun avec une perception intuitive. L'expérience est dans chacun de ces exemples la source de la confiance absolue qu'exprime notre affirmation; c'est ainsi que l'expérience seule nous permet de croire que le soleil se lèvera nécessairement demain.

D'après cela, il n'y aurait aucun inconvénient à employer le mot de nécessaire pour caractériser toutes les lois inductives de la nature : lois de pesanteur, de mouvement,

(1) Quant à l'évidence propre aux mathématiques, d'autres questions peuvent être soulevées; par exemple, la place que les définitions doivent occuper dans la science, et le caractère hypothétique supposé des définitions. Ces questions seront traitées plus tard. (Voir *Logique des sciences mathématiques*.)

lois fondamentales de la vie, etc. Mais les métaphysiciens ont pris l'habitude d'appeler ces vérités principes *contingents*, par opposition aux principes nécessaires; car, disent-ils, bien qu'elles soient absolument vraies, dans la constitution actuelle du globe, elles auraient pu être tout autrement. Il pourrait se faire que la loi de pesanteur n'existât pas : les lois de la vie pourraient être différentes de ce qu'elles sont. Mais en aucun cas, dit-on, deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace; cette vérité est nécessaire dans un sens plus particulier du mot, sens qu'il reste à établir.

4. II. — La nécessité, dans un sens plus spécial, signifie l'*accord de la vérité avec elle-même*; en ce sens, les vérités nécessaires sont celles qui dérivent du principe de contradiction, ou de la loi de consistance. Le contraire de ces vérités est une contradiction formelle.

Nous avons déjà donné de nombreux exemples de ces vérités (voir l'Introduction, et aussi le chapitre relatif aux propositions équivalentes). Que le plus petit ne peut contenir le plus grand, c'est une vérité nécessaire; vérité qui dépend du sens même du mot « plus petit » et du mot « plus grand » ; cette vérité ne saurait être contredite, à moins de déclarer que le plus grand n'est pas le plus grand. Le même objet ne peut être à la fois en deux endroits, c'est encore une vérité nécessaire; le sens des mots « en un endroit » implique la négation de tout autre endroit; dire d'un objet qu'il est dans un certain endroit, c'est nier qu'il soit dans un second, dans un troisième ou ailleurs. Le temps est un éternel maintenant : voilà une affirmation qu'il faut rejeter comme contradictoire avec elle-même.

Quelques-uns des axiomes d'Euclide sont nécessaires en ce sens. « Le tout est plus grand que la partie » est une affirmation qui implique la définition même du tout et de la partie; on ne peut la contredire sans contredire la définition elle-même. Un tout se compose de l'ensemble de ses parties; omettez une de ses parties, et le tout est détruit;

ce qui reste est, dans une certaine mesure, moindre que le tout primitif.

« Les figures qui coïncident sont égales : » ce n'est pas un axiome, c'est une définition; la coïncidence est le signe ou la garantie de l'égalité; elle est la seule preuve qu'on puisse invoquer en dernière analyse.

De toutes les vérités nécessaires invoquées dans la controverse qui nous occupe, celle qu'on cite le plus fréquemment est la proposition que deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace. C'est une proposition que Kant donne comme une proposition réelle, comme un jugement *synthétique;* en d'autres termes, le sujet n'y serait pas impliqué dans le prédicat, et, par suite, le critérium de l'identité ne s'appliquerait pas à cette proposition.

D'autre part, les mathématiciens de notre temps sont probablement unanimes à regarder cette affirmation comme le corollaire qu'implique la définition de la ligne droite, et qui est contenu dans l'essence même de la ligne droite; de sorte que nier cette vérité serait une pure contradiction de mots. Ils la considèrent, pour prendre les expressions de Kant, comme une vérité analytique. La moindre réflexion nous convaincra que les mathématiciens sont dans le vrai. Prenons pour point de départ la définition de la ligne droite : « lorsque deux lignes sont telles qu'elles ne peuvent coïncider en deux points sans se confondre l'une avec l'autre, elles sont appelées lignes droites. » N'est-il pas évident que les termes mêmes de la définition écartent toute possibilité d'enfermer un espace? Quel sens peut-on attacher à ces mots « sans se confondre l'une avec l'autre », si ce n'est qu'ils excluent toute existence d'un espace intermédiaire? La coïncidence totale des lignes, et l'existence d'un espace intermédiaire, sont complétement incompatibles; si l'un de ces faits est vrai, l'autre est faux. La proposition est donc encore nécessaire dans le sens de l'identité, aussi bien que ces autres propositions : « une ligne droite n'est pas une ligne courbe; » ou bien : « le tout est plus grand que la partie. »

L'axiome : « deux choses égales à une troisième sont égales entre elles, » n'est pas une vérité identique; aussi n'est-ce pas une vérité nécessaire, dans le sens que nous donnons présentement à ce mot. Ici, en effet, le sujet et le prédicat représentent deux propriétés distinctes, et l'une ne peut impliquer l'autre. L'axiome déclare que la coïncidence *médiate* entraîne ou produit la coïncidence *immédiate;* mais ces deux formes de coïncidences ne sont pas identiques. C'est la coïncidence *immédiate* qui fait l'égalité, conformément à la *définition* de l'égalité : l'axiome élargit cette preuve très-étroite et souvent inapplicable, et prononce que la coïncidence par l'*intermédiaire d'une troisième chose,* d'un terme moyen, se trouvera en définitive correspondre et équivaloir à une coïncidence immédiate; qu'elle devra être, par conséquent, acceptée dans tous les cas comme une preuve d'égalité. Si donc cet axiome doit être pris comme une vérité nécessaire, c'est qu'il faut attribuer à la nécessité un sens que nous n'avons pas indiqué.

5. Les vérités nécessaires, entendues dans le sens que nous venons de déterminer, sont tellement indépendantes de l'expérience, qu'elles sont acceptées pour vraies dès que les mots qui les expriment sont compris. Elles n'exigent cependant aucune faculté particulière de perception intuitive.

Aussitôt que nous avons complétement compris l'idée du tout et l'idée de la partie, nous percevons l'évidence de la proposition : le tout est plus grand que la partie. Nous n'avons pas besoin de recourir à des observations ou à des expériences pour nous assurer de cette vérité. Nous avons besoin d'expériences concrètes pour comprendre préalablement la notion du tout et la notion de la partie. Mais la notion une fois bien déterminée explique par elle-même que le tout est plus grand. En fait, nous ne pourrions avoir la notion sans une expérience équivalente à cette conclusion. Lorsque nous connaissons un fait, nous le connaissons encore lorsqu'il est exprimé sous un autre nom; or, pour ce moment, la vérité nécessaire n'est pas autre chose que l'identité d'un même fait sous deux noms différents. Lorsque nous avons acquis la notion de la ligne droite, nous avons aussi acquis la notion de cette propriété particulière de la ligne droite, qu'exprime l'affirmation : deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace.

Pour de semblables propositions il n'est besoin ni de facultés innées, ni de perceptions intuitives. Nos facultés intellectuelles ordinaires suffisent à nous faire affirmer qu'un objet sous différentes formes est ce que nous avons constaté qu'il était. Nous ne pouvons avoir la notion complète de la ligne droite, sans faire une comparaison des lignes droites entre elles, et aussi des lignes droites et de leurs opposées, les lignes courbes. Le résultat de cette comparaison est, *inter alia,* que l'existence de deux lignes droites est incompatible avec la détermination d'un espace : la délimitation d'un espace implique qu'une des deux lignes au moins est courbe.

6. III. Un troisième sens du mot nécessité, un signe auquel on la reconnaît, c'est l'*inconcevabilité* du contraire.

On prétend que la proposition, « deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles » est une vérité nécessaire, parce que l'esprit est incapable de concevoir des quantités qui, coïncidant avec une même quantité prise pour commune mesure, ne coïncideraient pas entre elles, lorsqu'on les compare l'une à l'autre. De même, dit-on, nous sommes incapables de concevoir des effets qui se produiraient sans cause : et voilà pourquoi cette proposition serait encore une vérité nécessaire. La preuve de l'inconcevabilité du contraire (fortement exposée par Whewell et acceptée avec quelques modifications par Spencer) nous paraît exposée à de graves objections. C'est en grande partie notre éducation qui décide ce que nous pouvons concevoir, et ce que nous ne pouvons pas concevoir. La preuve en est que des vérités, qui passaient pour inconcevables à certaines époques et dans certains pays, deviennent très-

concevables avec une éducation différente, et même se sont à tel point fixées dans les esprits que c'est le contraire de ces vérités qui est maintenant inconcevable. Les Grecs admettaient que la matière est éternelle, qu'elle existe par elle-même : beaucoup de modernes prétendent que l'existence par soi de la matière est absolument inconcevable. Il y a des philosophes qui pensent que l'action de l'esprit est la seule origine concevable du pouvoir moteur, de la force motrice : d'autres, regardant au contraire l'action de l'esprit sur la matière comme absolument inconcevable, ont imaginé des hypothèses spéciales pour résoudre la difficulté, — par exemple Malebranche, avec sa théorie de l'intervention de Dieu, et Leibniz, avec son harmonie préétablie. Newton ne pouvait concevoir la gravitation sans l'existence d'une substance intermédiaire : théorie aujourd'hui abandonnée.

C'est quand il s'agit des vérités nécessaires par identité que l'inconcevabilité du contraire se présente à son maximum. Cependant, même alors, il n'est pas impossible de concevoir le contraire ; cela s'est vu souvent. Dans la religion, on a souvent mis en avant de flagrantes contradictions que le vulgaire accepte avec enthousiasme. Mais lorsque le sujet n'implique pas le prédicat, le cas n'est pas le même : il n'y a pas à proprement parler de contradiction, et le contraire de la proposition peut être conçu. Que des choses qui coïncident avec une troisième ne coïncident pas entre elles, c'est une proposition concevable : car les deux faits sont distincts. Si nous trouvons quelque difficulté à l'admettre, cela vient de la fréquence de nos expériences, dans un sujet si familier et si accessible à nos sens.

Des propositions, dont l'origine inductive est incontestable, peuvent être si fortement liées par l'association, qu'il est presque impossible de concevoir le contraire. Nous avons à peine le pouvoir de concevoir la couleur sans l'étendue. Et cependant ces deux faits sont associés uniquement par notre expérience : ils frappent l'esprit à la fois, grâce à deux sens ; et leur liaison constante produit une association d'idées véritablement indissoluble. Nous pouvons avoir quelque difficulté à concevoir que des graines de poussière, que des particules de suie, que de petits morceaux de papier tombent sur le sol, droit et vite comme la pierre. Quand les Grecs voulaient parler de l'impossible, ils parlaient d'un fleuve qui remonterait vers sa source.

DE LA NATURE DES AXIOMES.

7. Les principes fondamentaux des sciences déductives ont reçu le nom d'axiomes.

Toute science déductive doit s'appuyer sur un certain nombre de principes fondamentaux. Dans les mathématiques et en logique, ces principes sont si profonds, si évidents par eux-mêmes, qu'il n'est pas nécessaire de faire le moindre effort pour les établir. Dans la mécanique, l'établissement des lois du mouvement est accompagné d'un petit nombre d'exemples, destiné à rendre ces lois intelligibles et évidentes. Dans la chimie, la théorie atomique est, jusqu'à un certain point, trop éloignée des conceptions ordinaires, pour être appelée un axiome évident par lui-même, bien qu'elle soit le principe le plus fondamental de cette science.

Voici les conditions requises, les caractères d'un axiome : il faut 1° qu'il soit une proposition *réelle*, et non une définition; 2° qu'il soit *indépendant* de tout autre principe contenu dans la science.

D'après le premier caractère nous rejetterons, comme n'étant pas des axiomes, les propositions d'Euclide : « Les grandeurs qui coïncident sont égales; » et aussi : « Le tout est plus grand que la partie. »

D'après le second caractère, nous rejetterons du nombre des axiomes les propositions suivantes : —

« Les différences de quantités égales sont égales. »

« Si l'on ajoute des quantités égales à des quantités inégales, les totaux sont inégaux. »

« Si des quantités égales sont retranchées de quantités inégales, les restes sont inégaux. »

« Les doubles de quantités égales ou de la même quantité sont égaux. — Les moitiés de quantités égales ou de la même quantité sont égales. »

« Deux lignes droites ne peuvent passer par un même point et être parallèles à une même ligne droite, sans coïncider. »

Il peut être utile de donner une démonstration explicite de ces vérités, mais, comme elles sont toutes dérivées de certains autres axiomes, combinés avec des définitions, on peut les joindre à ces axiomes, comme en étant les corollaires ou les conséquences. Si dans un cas nous présentons une proposition dérivée comme un axiome, nous supprimons la seule limite qui distingue les axiomes des propositions ou théories, dont se compose le corps de la science.

8. Les deux seuls axiomes des mathématiques, à dire vrai, sont : 1° l'axiome « de la coïncidence médiate »; 2° l'axiome « de l'égalité des sommes de quantités égales ». Ces axiomes sont des vérités inductives.

Les définitions et leurs corollaires, les propositions dérivées, étant une fois écartés, il ne reste que deux axiomes que voici :

1° Les choses égales à une même troisième sont égales entre elles;

2° Les sommes de quantités égales sont égales.

Ce sont là des propositions réelles, et non pas des propositions identiques, analytiques; et en même temps ce sont les propositions dernières de la science. Ces axiomes constituent deux preuves distinctes d'égalité, en dehors de la preuve fondamentale, qui est la coïncidence immédiate. De ces axiomes, unis à la définition, peuvent être déduites toutes les autres preuves d'égalité.

Dire que ces axiomes sont des vérités inductives, des généralisations fondées sur l'expérience des faits particuliers, c'est dire qu'ils ont la même origine que la grande masse de nos connaissances (non déductives). Que la nuit et le jour alternent, que l'eau descend, que la fumée monte, que les plantes naissent d'une graine, que les animaux meurent, que les hommes recherchent le plaisir et fuient la douleur, — voilà autant d'exemples d'inductions obtenues par la comparaison des faits observés. Telle est la source ordinaire, régulière, des généralisations scientifiques. L'*onus probandi* incombe à ceux qui voudraient assigner aux deux axiomes indiqués une autre source que celle-là. Aussi a-t-on donné quelques raisons pour établir qu'ils constituent l'un et l'autre une exception à la règle générale qui détermine l'origine de nos connaissances.

Les principales raisons aujourd'hui invoquées sont celles que nous avons déjà mentionnées. Ces axiomes sont nécessaires. Le contraire en est inconcevable. Pour fortifier ces raisons, ou plutôt pour présenter sous une autre forme la difficulté qu'il y aurait, dit-on, à faire de ces axiomes les résultats de l'expérience, on ajoute que la force, que le degré de notre *conviction*, quand nous affirmons que deux choses égales à une troisième sont égales entre elles, est plus grand que dans toute affirmation qui dérive des comparaisons accumulées de l'expérience. Voici par quelles considérations on peut écarter cette objection :

1° D'après les lois de la croyance, lois précédemment exposées, toute expérience *qui n'a pas été contredite* a pour elle toute la force dont notre croyance instinctive est capable. Le premier mouvement qui porte l'esprit à croire penche plutôt du côté de l'excès, et si rien n'est venu le contrarier dans tel ou tel cas particulier, il se portera avec force sur toute chose.

2° La comparaison des grandeurs est facile ; nous pouvons renouveler sans cesse cette comparaison, qui n'exige que les instruments les plus simples. L'enfant qui dispose de trois morceaux de bois ne peut s'empêcher de faire, dans l'espace d'une heure, plus de vingt comparaisons, qui sont autant d'exemples et de confirmations de l'axiome relatif à la coïncidence médiate.

3° Enfin il est d'usage de remarquer, et avec raison, à propos des axiomes mathématiques en général, que les objets auxquels ils s'appliquent, à savoir : les grandeurs et les formes, — sont de nature à être représentés le plus aisément possible dans notre imagination : de sorte que nous pouvons faire un grand nombre d'expériences idéales, sans compter les comparaisons que nous accomplissons aussi d'une façon concrète dans les choses réelles.

9. Les axiomes du syllogisme reposent sur l'expérience.

La proposition : « Des attributs qui coexistent avec le même attribut coexistent, » est un principe qui ressemble absolument au premier axiome d'Euclide touchant l'égalité des quantités : par suite, l'évidence de ces deux principes semblables doit avoir la même origine. Ajoutons que cet axiome, loin d'être l'expression d'une certitude absolue et intuitive, est inexact. Nous pouvons le prouver en l'exprimant sous une forme parallèle : « Des objets en contact avec un troisième objet sont en contact l'un avec l'autre : » principe plausible, mais trompeur.

Le *dictum de omni et nullo* n'échappe pas à ce critérium de l'expérience. Il ne peut être compris sans qu'on se soit familiarisé avec un grand nombre d'exemples de généralisation ; et, comme pour les autres premiers principes, les mêmes connaissances, qui nous en font comprendre le sens, suffisent à en garantir la vérité.

Quelque forme qu'on leur donne, les axiomes du syllogisme sont en premier lieu des propositions réelles, et non pas des propositions identiques, formées d'après la loi de l'identité ou de l'accord de la vérité avec elle-même. En second lieu, en leur qualité de propositions réelles, elles ne sont pas suggérées intuitivement à l'esprit : elles dérivent de notre expérience, et si notre croyance à ces principes semble dépasser l'expérience, la même chose peut arriver de toutes nos croyances.

10. Quant à la loi de causalité, généralement comprise parmi les éléments *à priori* de notre connaissance, il y a une tendance primitive qui nous incline fortement à l'admettre sous sa forme générale; tandis que l'expérience ne cesse d'approprier cette croyance aux faits réels.

Nous avons déjà vu que la tendance primitive de l'esprit est de croire, jusqu'à ce qu'il rencontre des faits contraires, que ce qui est aujourd'hui sera demain, que ce qui existe ici existe partout. Ce n'est ni l'expérience, ni aucune faculté intellectuelle qui crée cet élan: mais l'expérience l'arrête et le modifie, jusqu'à ce que par degrés elle l'adapte aux réalités. La vivacité de cet instinct est modérée par certains objets, comme la température ambiante, la lumière, les apparences visibles, mais elle se développe librement dans d'autres sujets, comme la force de la pesanteur. Cet instinct est important parce qu'il est l'élément actif de la croyance: il est d'ailleurs sans valeur, s'il s'agit de choisir les choses qui méritent qu'on y croie. Quant à la preuve, à l'évidence de la causalité, l'expérience est supérieure à l'instinct: sans l'expérience, l'enfant croirait toute sa vie que toute l'eau du globe est à la température de son premier bain.

L'élan instinctif qui nous entraîne à croire que ce qui est sera, devient, lorsqu'il a été instruit par l'expérience, la croyance à l'uniformité de la nature, représentée par la loi de causalité.

11. L'axiome que supposent les axiomes des mathématiques et l'axiome du syllogisme n'est autre que l'axiome de l'uniformité de la nature.

L'examen de la cause et de l'effet nous met face à face avec le principe le plus fondamental de toute connaissance humaine; principe qu'on exprime ainsi: « La nature est uniforme, l'avenir ressemble au passé, la nature obéit à des lois fixes. » Cet axiome est le fond commun de toute inférence, des inférences qui sont ouvertement inductives, comme de celles qui se déguisent sous les formes de la déduction. Sans ce principe l'expérience ne peut rien prouver. Nous pouvons avoir constaté dix mille fois que les grandeurs qui coïncident avec une autre grandeur coïncident entre elles: dans les limites de notre expérience, la chose est sûre, et l'évidence de l'essai actuel est aussi grande que possible. Mais tout cela ne prouve pas qu'il en sera de même dans les cas non observés. Il faut le croire sans qu'on puisse le prouver. Cette croyance n'a pas d'autre principe qu'elle-même. Si nous croyons avoir trouvé une preuve qui la démontre, nous ne faisons en réalité que la poser en principe sous une autre forme. (Voir *Appendice* D.)