émotions étaient strictement ultimes, elles seraient mutuellement exclusives; mais il y en a peu qui le soient. La peur, l'amour, l'admiration, sont presque ultimes, sans l'être tout à fait. La plupart des émotions, étant formées d'éléments communs, ne peuvent être mutuellement exclusives. Elles ont cependant des caractères distinctifs et peuvent être envisagées comme des espèces. L'amour, l'égoïsme, l'ambition, la colère, les plaisirs de l'étude, le sentiment de la beauté, les sentiments moraux sont des groupes distincts, mais ils résultent d'éléments communs, que notre conscience saisit. Comme produits de l'association ou de l'évolution, ils ne peuvent être limités en nombre; des circonstances nouvelles peuvent donner naissance à des espèces, à des variétés nouvelles. Ils ne peuvent donc s'exclure mutuellement. Ils sont soumis aux règles de la classification, mais ils échappent à la division logique.

Il est impossible de même d'appliquer aux sciences la division logique, parce que ces sciences se succèdent l'une à l'autre, en se développant l'une par l'autre. La chimie implique la physique, la biologie implique la chimie. Les sciences de l'histoire naturelle, — minéralogie, botanique, zoologie, géologie, — sont pleines de mauvaises divisions, de doubles emplois qu'il est impossible d'éviter. De même il y a beaucoup de doubles emplois dans la *materia medica.* La même substance est à la fois un stimulant et un narcotique. Les sciences sociales, — politique, économie politique, jurisprudence, — ne peuvent s'exclure mutuellement.

LIVRE V

LOGIQUE DES SCIENCES

LIVRE V.

LOGIQUE DES SCIENCES.

Pour exposer les principes et les règles de la logique sous un aspect nouveau, pour indiquer les parties du domaine de l'esprit où ces règles sont le plus nécessaires, et où elles s'appliquent aussi complétement que possible, — nous allons passer en revue les sciences théoriques, et quelques-unes des sciences pratiques les plus importantes.

CHAPITRE PREMIER.

LOGIQUE DES MATHÉMATIQUES.

1. Les mathématiques, considérées au point de vue logique, nous fournissent l'exemple le plus complet d'une science formelle déductive.

Les procédés déductifs se montrent dans tout leur avantage en mathématiques. Les définitions, les axiomes, les démonstrations, le langage symbolique, et les divers expédients employés pour multiplier les relations de quantité, qui sont l'objet de cette science, nous présentent, dans son ensemble, le mécanisme nécessaire pour accomplir les opérations déductives d'une nature formelle.

2. Les mathématiques traitent de la quantité abstraite, et en poursuivent l'étude, tant que la quantité est susceptible d'une expression définie.

La première, la plus fondamentale opération de l'esprit humain est la relation ou la relativité : cette expérience est impliquée dans la nature même de la conscience. La dualité, la complexité essentielle de tout état de conscience est un fait primitif, sans antécédent. Or, parmi les différences, les contrastes, ou en d'autres termes les couples corrélatives auxquelles donne lieu immédiatement la constitution de notre esprit, il faut placer au premier rang la différence en quantité, la distinction du *plus* et du *moins*.

La quantité appartient à la fois au sujet et à l'objet, mais elle n'est pas toujours définie, et il ne peut entrer dans les mathématiques que des expressions définies. La forme de la quantité la mieux définie est le NOMBRE, comme un, deux, trois, etc. Une quantité continue et indivise devient définie, lorsqu'on la divise artificiellement, lorsqu'on la transforme en quantité numérique. Dans un petit nombre d'exemples, dans la géométrie des incommensurables, des relations définies peuvent être exprimées par des lignes et des figures : telle est la relation du côté à la diagonale d'un carré. Une difficulté métaphysique a longtemps pesé sur l'expression mathématique d'une quantité continue dans ses relations incommensurables.

Notions mathématiques.

3. L'énumération des principales notions, qui se présentent dans les mathématiques, nous prépare à déterminer exactement le caractère des propositions de cette science.

La principale notion des mathématiques, c'est l'*égalité*, avec son opposé, l'*inégalité*. C'est là le prédicat essentiel des mathématiques. La ressemblance appliquée au degré, à la proportion, donne l'égalité. Il peut y avoir ressem-

blance pour d'autres qualités, comme le son, la couleur, le plaisir; mais, sauf pour la quantité, il n'y a pas égalité. Nous pouvons classer, distinguer, sans invoquer les mathématiques; mais, quand nous parlons de choses égales ou inégales, nous entrons dans le domaine des mathématiques.

Pour reconnaître l'égalité, c'est en définitive aux sens et à la conscience qu'il faut faire appel. Pour le nombre, nous identifions une succession de petites impressions comme deux, trois; c'est le jugement le plus sûr que l'esprit humain puisse former. Pour les quantités continues, nous distinguons des degrés d'après le sens auquel ces quantités se rapportent, — tantôt les yeux, tantôt les oreilles, tantôt le toucher, etc. La distinction générale la plus délicate et celle à laquelle toutes les autres doivent être ramenées, si la chose est possible, est l'étendue *visible* : immédiatement après vient la continuité du son. Euclide définit l'égalité : la coïncidence visible des grandeurs étendues.

Le *nombre* est une notion fondamentale des mathématiques. Les sensations de la conscience se distinguent vivement les unes des autres, et par la mémoire nous pouvons aisément retenir une courte série de ces états de conscience, pour les identifier avec une série semblable. Ainsi trois pièces de monnaie, saisies par les yeux, s'identifient aisément avec les trois doigts, d'après le nombre des interruptions, des transitions qui dans les deux cas se produisent dans la conscience. On sent tout de suite la différence qui les sépare de deux ou de quatre transitions visibles. Voilà l'égalité ou l'inégalité numérique. Pour les nombres élevés, il faut recourir à des artifices, si l'on veut s'assurer de l'exactitude de la comparaison ; grâce à ces artifices (c'est-à-dire à des groupements réguliers) nous pouvons comparer des nombres d'une certaine grandeur ; nous pouvons identifier deux centaines d'objets différents, et distinguer cent de quatre-vingt-dix-neuf.

Des noms ont été donnés à ces nombres successifs, un deux, trois, quatre, cinq, etc. : quand on est arrivé au nombre dix, on forme un groupe, et l'on recommence de nouveau à partir de ce point d'arrêt. C'est là notre *système décimal*, auquel correspondent les expressions d'*unités*, de *dizaines*, de *centaines*, etc.

L'*addition* est une notion fondamentale : elle dérive aussi des sens, en dernière analyse. Lorsque nous juxtaposons deux groupes détachés, en les transportant des points différents qu'ils occupaient pour les mettre à la même place, nous les ajoutons ; l'opération contraire s'appelle *soustraction*. Les mots *total* et *partie* se rattachent à la même opération, et une expérience semblable les explique. La *multiplication* n'est qu'une série d'additions, et l'opération inverse est la *division*. Ces notions désignent les quatre procédés essentiels de la manipulation des nombres. A ces opérations se rattachent les mots de somme, de différence, de reste, de facteur, de produit, de dividende, de diviseur, de quotient, de nombre premier.

La *fraction* dérive de la divison, et avec elle les expressions de *numérateur*, de *dénominateur*, de *commune mesure*. Aux fractions on applique les opérations cardinales de l'*addition*, etc.

Les nombres *décimaux* sont une forme fractionnaire, qui se rattache à notre système décimal.

Carré, cube, racine carrée, racine cubique, etc., sont des formes spéciales de division ou de multiplication.

La *raison* est l'indication du nombre de fois qu'un nombre est contenu dans un autre : la raison de trois à douze est *quatre*, ou comme un est à quatre. Nous ne pouvons pas toujours réduire la raison à ses termes les plus bas ; nous pouvons parler de la raison de trois à six, mais la comparaison de ces nombres ne peut être faite que par multiplication ou division. L'expression des raisons prend la forme de *fraction*.

La *proportion* est l'égalité des raisons : trois est à huit dans la proportion de neuf à vingt-quatre.

Raison, proportion et fraction nous conduisent à l'idée de l'*incommensurable*.

La *progression* ou la *série* est une succession de nombres

d'après une loi fixe : la progression *arithmétique* est soumise à l'addition, la progression *géométrique* à la multiplication. Toute progression contient des *extrêmes* et des *moyens*.

Les *permutations*, les *combinaisons*, sont des façons d'opérer sur les nombres qui n'ont pas besoin d'être expliquées ici.

Le *logarithme* est une notion encore plus compliquée : c'est le mot qu'on emploie pour désigner une façon entièrement nouvelle d'exprimer les relations des nombres, relations qui, exposées dans des tables, diminuent singulièrement le travail des opérations les plus compliquées, telles que la multiplication, la division, l'extraction des racines et l'élévation aux puissances.

Les notions déjà indiquées sont les principes essentiels des mathématiques, dans leur branche initiale, l'ARITHMÉTIQUE pure. Pour l'arithmétique concrète ou commerciale, il faut compter en outre le taux des monnaies, les poids et les mesures, en même temps que l'appropriation des procédés essentiels de la proportion et des fractions au calcul des ces différentes quantités concrètes.

L'ALGÈBRE applique les notions arithmétiques à un ordre nouveau d'expressions de la quantité. Elle détache les opérations des nombres déterminés, par l'emploi des symboles, ce qui donne lieu à des désignations nouvelles, *quantité négative*, *exposant*, *quantités impossibles*, *indice*. Le théorème général de l'extension par les puissances ou les racines est le *théorème du binome*. Puis vient l'équation du premier, du deuxième degré, etc.

Les notions de GÉOMÉTRIE sont comprises dans les définitions d'Euclide : point, ligne, ligne droite, ligne courbe, angle, parallèles, surface, triangle, carré, polygone, cercle, cube, sphère, cylindre, cône, problème, théorème, corollaire, etc.

Dans la TRIGONOMÉTRIE il y a de nouvelles désignations : — sinus, cosinus, tangente, sécante.

Dans les SECTIONS CONIQUES sont comprises les figures ainsi nommées, avec des expressions spéciales, excentricité, foyer, directrice, *latus rectum*, paramètre, abscisse, normal, asymptote.

La GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE comprend les *coordonnés* et les *lieux*, et désigne un certain nombre de courbes réservées pour un examen spécial : les cissoïdes, les conchoïdes, les lemnicates, les cycloïdes, les spirales, les caténaires, etc.

Enfin le CALCUL INFINITÉSIMAL nous élève à d'autres notions encore : différentiel, intégral, limite, dépendant et indépendant, variable.

Propositions des mathématiques.

4. Sous leur forme logique ces propositions nous fournissent des exemples saillants du prédicat appelé *proprium*. L'attribut de ces propositions peut être déduit du sujet.

Les axiomes sont des inductions qui unissent des propriétés concomitantes. Les autres propositions (excepté celles qui sont en réalité des définitions) sont analytiques ; le prédicat peut y être déduit du sujet par l'intermédiaire des axiomes.

Ainsi, dans cette proposition arithmétique, six fois quatre égale vingt-quatre, le prédicat (24) dérive du sujet (6 fois 4) par l'intermédiaire des deux grands axiomes de l'égalité. Sans doute les prédicats ne sont pas contenus dans les sujets, dans le sens d'une implication nécessaire ou immédiate. Ces propositions sont des inférences médiates, obtenues grâce à des généralités plus hautes : elles nous donnent des exemples de ce qu'on appelle le *proprium*.

Définitions mathématiques.

5. Parmi les notions mathématiques quelques-unes sont primitives et indéfinissables : les autres se définissent par dérivation ou analyse.

Il suffira de considérer la question au point de vue de l'arithmétique et de la géométrie.

Définitions de l'arithmétique. Nous avons vu que le nombre ou la quantité discrète est une série d'impressions mentales interrompues, séparées par des intervalles : — impressions de couleur, de son, etc. C'est là un fait ultime ; le langage ne peut en rendre compte autrement qu'en faisant appel à l'expérience personnelle de chacun de nous. Par rapport aux nombres eux-mêmes, l'expérience doit nous en fournir un petit nombre pour commencer : le reste peut être déduit de ce point de départ. L'unité est un point de repaire ultime ; c'est l'abstraction d'un grand nombre d'objets concrets, c'est-à-dire de plusieurs impressions simples. L'unité s'oppose à deux, à trois, à toutes les successions plus élevées. Nous apprenons le sens de un, de deux, de trois, de quatre, de cinq, etc., en renouvelant l'expérience des successions ainsi nommées : les doigts de chaque main présentent un exemple familier de la succession appelée cinq. Nous pourrions avoir un mot particulier pour distinguer chaque nombre successif ; mais, en fait, lorsque nous sommes arrivés à douze ou à peu près, nous avons besoin de recourir à des comparaisons qui impliquent des arrangements par groupes.

C'est ainsi que nous expérimentons réellement les nombres, expérience qui est nécessaire pour arriver à les définir. Au point de vue d'une stricte définition, nous devons considérer *un* comme indéfinissable, c'est-à-dire comme déjà connu. Mais cela suppose que nous connaissons aussi tout au moins *deux ;* car, sans un contraste avec la pluralité, nous ne pouvons saisir le sens de l'unité.

Avant d'aller plus loin, il faut comprendre le sens de l'*addition*. L'addition est une notion abstraite obtenue par plusieurs expériences concrètes d'objets accumulés. Nous ne pouvons la définir ; nous devons nous rapporter à l'opération elle-même : opération qui, comme on l'a déjà remarqué, nous rend compte en même temps de la *soustraction*, et aussi du *tout* et de la *partie*. Essayer de définir ces notions, ce serait entreprendre sur les expériences ultimes de l'esprit. L'impuissance d'une pareille tentative se révèle dans les mots qu'on emploie, quand on s'y essaie, mots tels que « assemblage, agrégation », etc., qui ne sont pas plus élémentaires ou plus simples que les notions qu'ils prétendent définir.

Connaissant l'*unité* et l'*addition*, nous pouvons commencer à définir. Le premier nombre définissable est *deux*, qui est l'addition de un à un. Et ainsi de suite : *trois* est l'addition de un à deux ; *quatre* de un à trois, etc. Chaque nombre peut être défini l'addition de un au nombre antérieur. Une fois arrivés à dix, nous recourons à la notation décimale, c'est-à-dire au groupement par dix : onze est dix et un, douze est onze et un, ou bien *dix* et *deux*. La définition peut ici être exprimée sous deux formes. Mais nous pouvons nous contenter de la seconde, sans oublier qu'elle équivaut à l'autre ; nous dirons donc seize est dix et six, vingt-six est vingt (deux fois dix) et six.

Toutes les autres notions de l'arithmétique peuvent être définies, c'est-à-dire déduites de notions préalablement exprimées. Dans un sens logique rigoureux, il n'est plus nécessaire de faire appel à l'expérience ; bien que l'intelligence réelle des opérations puisse être facilitée en employant des exemples concrets de la formation des nombres.

Définitions de la géométrie. — Les difficultés ici sont plus graves : cependant le procédé est le même. Nous devons admettre l'existence de certains principes indéfinissables, et recourir à l'expérience, pour tout ce qui peut être connu seulement par expérience.

Par l'expérience, toutes les formes de l'étendue nous deviennent familières, et nous apprenons leurs noms. Nous

connaissons, grâce à elle, les corps solides, les surfaces ou les aires, la longueur, l'angle, la direction, la ligne droite, courbe, brisée, parallèle, et ainsi de suite. Nous savons aussi ce que c'est qu'un point, en tant que le point désigne uniquement une position, à partir de laquelle on mesure, on termine, on commence, on divise une longueur. Tandis que le corps solide est seul un fait concret, toutes les autres notions sont des abstractions, et nous apprenons à les représenter sous cette forme. Nous pouvons considérer une ligne, ou une longueur, sans rien affirmer de la largeur de la chose en question : nous pouvons réduire notre affirmation à ce qui serait vrai, quelle que fût la largeur, comme, par exemple, quand nous disons qu'un cordon et une planche sont de même longueur. Par des expériences concrètes de cette nature, nous nous préparons aux méthodes très-rigoureuses, d'après lesquelles en géométrie on dispose et on établit ces notions.

Considérons plus spécialement notre expérience des lignes ou des longueurs, abstraction faite de la largeur et de l'épaisseur. Dans cette expérience unique est compris et confondu un groupe entier de notions que le géomètre expose séparément. En opérant avec des baguettes, des cordons, des ficelles ou d'autres objets semblables, nous apprenons à connaître non pas seulement la longueur (en tant que plus grande ou moins grande) mais aussi la différence entre la ligne droite et la ligne brisée, courbe, et en même temps la direction, les angles, le parallélisme. Ligne droite, direction, angle, convergence, divergence et parallélisme, sont autant de notions que la géométrie distingue, mais qui n'en sont pas moins mêlées et confondues dans notre expérience concrète primitive. On ne peut saisir complétement le sens d'aucune d'elles, si l'on n'a pas compris toutes les autres. Nous ne pouvons comprendre dans toute sa force le mot de « ligne droite », si nous n'avons pas saisi le sens du mot « direction » ; « direction » serait un mot très-obscur, s'il n'impliquait pas l'intelligence du mot angle, et l'expérience concrète d'un angle nous présente tout ce que signifient les mots de convergence et de divergence, et aussi le mot opposé de parallélisme.

Toutes ces notions, par conséquent, doivent être prises pour des notions parfaitement intelligibles par elles-mêmes, et qu'il est impossible de définir. Comment trouver pour les définir des notions plus simples ou plus élémentaires? Tout effort pour définir un angle ne pourra être qu'un cercle vicieux : c'est ainsi qu'on dira que l'angle est l'*inclinaison de deux lignes;* mais inclinaison est tout simplement un synonyme d'angle. La définition reviendrait donc à dire : un angle est un angle (1).

La géométrie, aussi bien que l'arithmétique, est une science déductive. Or une science déductive ne doit admettre que le plus petit nombre possible de notions élémentaires et indéfinissables : elle doit définir et déduire les notions qu'elle emploie, dès qu'elle peut trouver les éléments de ces définitions dans les premières notions non définies.

Faisons une application au cas qui nous occupe. Les notions élémentaires, en aussi petit nombre que possible, avec lesquelles nous avons affaire, peuvent être diversement exposées par diverses personnes. Mais on ne peut se tromper beaucoup pour les notions suivantes : point ou marque de position, ligne ou longueur, droit par opposition à courbe, angle, surface, solide. Les trois notions : — ligne, ligne droite, angle, — ne sont en réalité que trois aspects

(1) Les définitions géométriques sont de trois sortes: 1° celles qui expriment nos idées élémentaires d'espace, telles que les définitions de la ligne droite, d'un angle, d'un plan, etc.; 2° celles qui, employant les définitions de la première classe, définissent certaines *figures* simples, le *triangle*, le *carré*, le *cercle* : c'est des propriétés de ces figures que dérive tout calcul sur les positions relatives et les grandeurs de surface; 3° enfin les définitions des autres figures, comme le rhombe, le trapèze, l'hexagone, l'ellipse, etc.; les propriétés de ces figures sont déterminées par l'application des théorèmes auxquels avait donné lieu l'étude des figures simples. (Challis. *Sur le Calcul*, p. 61.)

La dernière classe nous fournit des exemples de ce que nous avons appelé les définitions déductives (p. 188).

d'une même expérience, et l'on pourrait croire qu'il serait possible de condenser les trois expressions en deux, ou même en une seule : car incontestablement la ligne (en tant qu'elle entraîne avec elle sa longueur) implique la ligne droite, qui elle-même suppose son opposé la ligne courbe, et aussi la direction; et de la direction nous ne pouvons distinguer le changement ou la diversité de direction, c'est-à-dire l'angle. Malgré cette implication inévitable, on peut maintenir comme vraie l'énumération déjà faite des notions primitives et élémentaires : — *point*, *ligne* ou *longueur*, *ligne droite* (avec la ligne *courbe*), *angle*, *surface*, *solide*. Ce serait un raffinement inutile de considérer la surface et le solide comme dérivés de la longueur, ou *vice versâ*. Mais, ces quelques notions une fois posées, il est possible, par une définition purement analytique, de rendre compte de toutes les autres notions géométriques. Il est cependant nécessaire auparavant de suivre jusqu'au bout les conséquences impliquées dans chacune de ces notions, et de déterminer quelle est la propriété qui, dans les démonstrations subséquentes, devra être invoquée comme la propriété essentielle, celle qui fera reconnaître la notion.

Point. — Le point n'est pas autre chose qu'une marque de position. Dans les recherches de la géométrie, nous le prenons pour le commencement, la division ou la fin d'une longueur ou d'une ligne : toutes choses dont nous ne pouvons nous rendre compte que par une expérience réelle.

Ligne ou *longueur*. — Il est impossible de donner un sens défini à la ligne sans distinguer en même temps la ligne droite de la ligne courbe : c'est la ligne droite seule qui est synonyme de longueur. Les notions corrélatives de longueur et de ligne droite ne sauraient être suggérées en aucune façon par des mots ; la discussion même ne saurait les rendre plus claires. Nous pouvons cependant choisir un *caractère*, un trait, qui sera comme le point de repère, auquel on aura recours dans la suite des démonstrations. Ce sera, par exemple, cette affirmation que « deux lignes droites, qui coïncident en deux points, coïncideront dans toute leur étendue », et ne laisseront entre elles aucun intervalle : notions que l'esprit doit tirer de son expérience personnelle. Un autre aspect de la ligne droite, donné souvent comme sa définition, c'est que « la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre » ; ceci, il est vrai, peut être établi par une véritable démonstration, puisque c'est le corollaire de cette autre proposition que deux côtés d'un triangle sont plus grands que le troisième. En même temps cette proposition est suffisamment impliquée dans notre connaissance expérimentale des lignes, pour que nous puissions l'accepter sans preuve.

Angle. — Cette notion aussi est empruntée à l'expérience. Nous devons avoir vu de nos propres yeux deux lignes droites qui se rencontrent en laissant entre elles une ouverture plus ou moins grande. Cette expérience complète notre connaissance de la « *direction* », et aussi de la « *divergence* » et de la « *convergence* » dans leurs différents degrés. Il y a une notion plus compliquée encore, celle de deux lignes qui marchent côte à côte, sans se rapprocher, ni s'éloigner : c'est à ce fait que nous donnons la désignation de « parallélisme », autre notion qui ne peut être transmise par le langage.

Il faut donc se représenter un angle, comme deux lignes droites qui se rencontrent en un point, avec une divergence plus ou moins grande. Il n'y a là simplement qu'un rappel de notre expérience ; et, dans le cours des démonstrations, c'est à ce point de vue qu'il conviendra le mieux d'envisager les angles.

A l'angle se rattache naturellement la notion de direction. En tant que toute direction est relative, il faut pour l'indiquer deux lignes droites, et l'angle qu'elles enferment nous donne le rapport des deux directions. La direction une fois comprise, nous pouvons définir une ligne courbe, comme une ligne qui change perpétuellement de direction ; ce qui est un équivalent de la phrase d'Euclide, une ligne

dont aucune partie n'est droite. Les deux expressions méritent l'une et l'autre d'être retenues.

Parallèles. — Cette notion est inévitablement comprise, grâce aux notions déjà établies. Quant à la définition formelle des parallèles, l'expression originale d'Euclide : « deux lignes qui, dans le même plan, suivent aussi loin que possible deux routes sans se rencontrer jamais » est une négation de la convergence et de la divergence ; c'est une définition suffisante.

Surface plane. — Ceci est encore une notion indéfinissable. Il serait superflu de vouloir la définir en employant la notion des lignes, car, en apprenant à connaître les lignes, nous apprenons aussi à connaître les surfaces. Il faut seulement trouver une particularité qui les distingue et permette de les reconnaître, comme, par exemple, la proposition d'Euclide : deux points quelconques étant pris dans une surface plane, la ligne droite qui les joint est tout entière contenue dans le plan. Ces notions dérivent encore de notre expérience journalière des corps étendus.

Solide. — Il n'y a pas de notions plus simples qui puissent servir à définir le solide. Nous ne ferions qu'une tautologie en combinant pour le définir les notions de « plan », de « direction », etc. : car, ces notions elles-mêmes, nous ne les avons acquises que par un grand nombre d'expériences qui impliquaient l'idée du volume ou du solide.

Lorsqu'on a une fois obtenu par expérience les notions élémentaires qui ont été énumérées, on définira les autres notions de la géométrie en les rapportant à ces notions élémentaires. Aucun appel à l'expérience n'est absolument nécessaire pour définir un angle droit, un cercle, un triangle, un carré : bien que nous soyons constamment aidés par les représentations concrètes, dans l'intelligence de ces notions abstraites.

Axiomes des mathématiques.

6. Les axiomes des mathématiques se conforment aux conditions de tout axiome :
1° Ce sont des propositions fondamentales qui ne peuvent dériver d'aucune autre proposition de la même science.

En premier lieu, un axiome est une proposition réelle, et non une proposition verbale ou essentielle. Les axiomes sont le fondement de tous les raisonnements d'une science ; mais aucun raisonnement ne peut être fondé sur des propositions purement verbales.

En second lieu, l'axiome doit être fondamental; il ne doit pas y avoir dans la même science de principe plus primitif d'où il dérive. Ce serait supprimer la caractéristique des axiomes que de les considérer comme des principes déduits. Les axiomes sont les principes indéductibles de toute déduction.

Ce n'est pas une bonne définition de l'axiome que de le donner pour une proposition *évidente par elle-même*, et à laquelle l'esprit adhère sitôt qu'il la connaît. Il n'en est pas toujours ainsi. Quelques axiomes sont évidents par eux-mêmes, d'autres ne le sont pas. Et beaucoup de principes qui sont évidents par eux-mêmes ne doivent pas être pris pour des axiomes.

Axiomes des mathématiques en général. Les axiomes des mathématiques en général, axiomes qui doivent être exposés au début de l'arithmétique, sont au moins au nombre de deux : « Des choses égales à la même chose sont égales entre elles » ; — « Les sommes de quantités égales sont égales ». Ce sont là des propositions réelles, des inductions de l'expérience, des vérités qui ne peuvent être déduites d'aucune autre. Nous verrons plus tard si ces axiomes suffisent pour tous les cas. Mais ils sont tous au moins nécessaires pour les opérations de l'arithmétique.

Axiomes de géométrie. L'habitude ayant été prise d'enseigner l'arithmétique aux commençants, non pas comme une science rationnelle ou déductive, mais comme une série de règles fondées sur l'autorité, et confirmées par leurs résultats, les axiomes mathématiques se présentent pour la première fois à l'étudiant au début de la géométrie, qui a de tout temps aspiré à être, non pas seulement un ensemble de règles correctes, destinées à mesurer les grandeurs, mais un type parfait de science déductive. Présentés à cette place, les axiomes généraux des mathématiques sont à tel point mêlés à des objets qui concernent la géométrie qu'ils paraissent exclusivement géométriques. Ces axiomes, qu'Euclide a rendus familiers, doivent être choisis d'après les deux caractères essentiels de tout axiome, tels que nous les avons déjà indiqués.

Dans le texte original d'Euclide, nous trouvons une énumération de *douze* axiomes (ou notions communes, κοιναὶ ἔννοιαι). D'autres ont été ajoutés par les éditeurs modernes. Il suffit d'en indiquer quinze. Les deux premiers axiomes de cette liste sont ceux que nous avons déjà mentionnés comme des axiomes indiscutables et conformes à toutes les règles. Les cinq qui viennent après sont les suivants :

3° Si des quantités égales sont retranchées de quantités égales, les restes sont égaux ;

4° Si des quantités égales sont ajoutées à des quantités inégales, les sommes sont inégales ;

5° Si de sommes inégales on retranche des sommes égales, les restes sont inégaux ;

6° Les doubles de la même quantité sont égaux ;

7° Les moitiés de la même quantité sont égales.

Ces axiomes sont sans doute des propositions réelles ; ils satisfont par là à la première condition des axiomes. Mais il est facile de les déduire des deux premiers, et par suite ils ne remplissent pas la seconde condition. Ce ne sont pas à vrai dire des axiomes ; ce sont seulement des corollaires, déduits des axiomes fondamentaux, et qui peuvent être démontrés. Si nous persistons à les appeler axiomes, il n'y a pas de raison pour que nous n'appelions pas axiome toute proposition réelle. Il est contraire à l'essence d'une science déductive de prendre pour accordées sans preuve des propositions qui peuvent être prouvées par une déduction des autres principes de cette même science.

Le huitième axiome : « Les quantités qui coïncident et ont les mêmes limites sont égales, » viole la première règle de tout axiome. Il est impossible de le prendre pour une proposition réelle : ce n'est qu'une définition de l'égalité. « Coïncider » et « être égal », ce ne sont pas deux faits, c'est le même fait sous deux formes différentes, l'une étant donnée pour l'explication de l'autre. L'égalité appliquée aux grandeurs étendues n'est pas autre chose que la coïncidence sensible : pour prouver l'égalité, nous prouvons la coïncidence. Aucune définition véritable ne peut être donnée de l'égalité. L'égalité, c'est l'impression de la similarité ou de l'identité appliquée à la quantité. Seulement, quand on a affaire à cette espèce de quantité, qui est l'objet de la géométrie, il convient de spécifier la nature de l'égalité qui est propre à cet objet; à savoir la coïncidence visible des limites des deux quantités comparées, et qui sont des lignes ou des surfaces. L'axiome prétendu est donc l'expression géométrique, l'adaptation à la géométrie de la notion fondamentale et indéfinissable de l'égalité.

Le neuvième axiome est : « Le tout est plus grand que la partie. » Ici encore la première condition n'est pas remplie. La proposition n'est pas réelle, le prédicat étant contenu dans le sujet. Ce prédicat est une propriété impliquée dans la notion fondamentale qui donne un sens à l'*addition*, à la *soustraction,* au *tout,* à la *partie.* L'expérience concrète que supposent tous ces mots ne constitue qu'une expérience unique, et cette expérience implique le fait que ce qu'on appelle *somme* est plus grand qu'aucun des éléments qui la composent, ou, en d'autres termes, que le tout est plus grand que la partie. Nous ne pouvons pas avoir la notion du tout et de la partie, sans avoir conçu en même temps le fait que le tout est une quantité plus grande que la partie. Si, par conséquent, il y a quelque nécessité de mettre spécialement en relief cet aspect particulier de la

notion fondamentale de l'addition, il faudra exprimer cette proposition au début de l'arithmétique, quand on parlera pour la première fois de l'addition, dont elle est une forme.

Le dixième axiome : « Tous les angles droits sont égaux, » est impliqué dans la définition d'un angle droit et peut être donné comme un appendice de cette définition.

Le onzième axiome, dans le texte d'Euclide, est un théorème d'une assez grande difficulté, et qui prépare aux propositions concernant les parallèles. On le donne ordinairement sous une forme plus simple. De Morgan s'exprime ainsi : « Si l'on prend une ligne droite et un point extérieur à cette ligne, de toutes les lignes droites qui peuvent être tirées par ce point une *seule* sera parallèle à la ligne droite. » Sous quelque forme qu'on exprime cette vérité, elle constitue, non pas un axiome, mais une proposition qui peut être déduite de la définition des lignes parallèles; en fait, elle devrait être comprise parmi les théorèmes du premier livre, bien qu'elle se rapproche de si près de la définition des parallèles qu'elle peut être donnée pour une autre forme de cette définition.

Le douzième axiome (le dernier) est fameux dans l'histoire de la philosophie. C'est la proposition : « Deux lignes droites ne peuvent enfermer un espace. » Il n'y a point là de proposition réelle, il n'y a qu'une pure expression nouvelle de la *ligne droite.* La définition *pro formâ* de cette notion indéfinissable est que : « Deux lignes sont appelées lignes droites quand elles ne peuvent coïncider en deux points sans coïncider dans tous les autres. » Or dire qu'elles ne peuvent enfermer un espace, n'est pas autre chose qu'une expression synonyme pour dire qu'elles coïncident entièrement. Que deux lignes droites enferment un espace, ce serait une contradiction évidente. L'axiome doit donc être rejeté comme axiome; l'expression de « lignes qui n'enferment pas d'espace » sera ajoutée à la définition de la ligne droite comme une autre manière de dire « lignes qui coïncident entièrement l'une avec l'autre ». Nous dirons alors : Lorsque deux lignes ne peuvent coïncider en deux points sans coïncider entièrement, c'est-à-dire sans enfermer un espace, on les appelle lignes droites.

Dans les textes modernes d'Euclide, on ajoute à la liste des axiomes des propositions comme les suivantes : « Si deux choses sont égales et une troisième plus grande que l'une d'entre elles, elle est aussi plus grande que l'autre. » Ceci est une vérité qu'il est facile de démontrer en se fondant sur les axiomes proprement dits, et en y ajoutant la notion du plus ou du moins.

Plus important est l'argument *à fortiori*, que par occasion on a introduit dans la logique, mais qui est, à proprement parler, mathématique. Si A est plus grand que B, et B plus grand que C, à plus forte raison A est plus grand que C. Il n'est personne qui n'accorde son assentiment à ce principe comme à une induction tirée des faits qu'il a observés lui-même. Si l'on ne peut le faire sortir déductivement des deux axiomes fondamentaux, il faudra le considérer comme un troisième axiome. Il est probable cependant que les mathématiciens peuvent le démontrer, sinon directement, au moins par une réduction à l'absurde, en se fondant sur ces axiomes.

Un autre prétendu axiome est la proposition suivante : « De toutes les lignes qui unissent deux points il doit y en avoir une qui soit telle qu'il n'y en ait pas de plus courte ; s'il y en a une, c'est celle-là qui est la plus courte. » S'il est nécessaire d'énoncer cette circonstance, on voit qu'elle est impliquée dans notre expérience des lignes ; le contraire de cette affirmation serait une contradiction dans les termes : le sens de *la plus courte* étant qu'il n'y a pas de ligne plus courte.

Il est tout à fait contraire au caractère d'une science déductive, telle que la géométrie, d'exposer des axiomes nouveaux à chaque nouveau progrès qu'elle fait. Sans doute il peut être nécessaire de recourir à une classe intermédiaire de principes, qui ne sont ni des axiomes proprement dits, ni des théorèmes susceptibles de démonstration ; mais ces

principes ne doivent pas être confondus avec les principes fondamentaux de la science ; ils doivent être distingués des axiomes par le nom qu'on leur donne. Si cependant il y avait quelque inconvénient à leur enlever un nom qui a l'avantage d'exprimer leurs rapports avec les principes premiers, il faudrait recourir à quelque désignation expressive qui fît ressortir le caractère des vérités fondamentales : par exemple, « axiomes principaux, données indémontrables, inductions finales ».

Les postulats. — Les postulats sont les fondements de la partie constructive de la géométrie, c'est-à-dire des problèmes, qu'il faut distinguer des théorèmes. Le plan d'Euclide était de présenter côte à côte une série de problèmes de construction et une série de théorèmes : les constructions étant elles-mêmes nécessaires pour la démonstration des théorèmes. Ces constructions néanmoins ont une valeur indépendante des applications pratiques. L'arpenteur suit la méthode d'Euclide en abaissant une perpendiculaire sur le côté d'un champ. Mais en construisant, comme en démontrant, il y a au début certaines données à admettre, et ces données doivent être aussi peu nombreuses que possible. Ainsi Euclide demande en commençant trois opérations : tirer une ligne droite d'un point à un autre, prolonger une ligne droite, et décrire un cercle ; en fait, il veut que l'étudiant ait à sa disposition une règle et un compas (1).

(1) « Les postulats placés en tête du livre Ier exigent qu'on admette que certaines opérations géométriques peuvent être accomplies, sans qu'on s'inquiète de savoir comment elles le sont. En fait ils font appel à nos conceptions, et peuvent être exprimés ainsi pour tous les objets du raisonnement :

Deux points quelconques peuvent être unis par une ligne droite.

Une ligne droite terminée peut être conçue comme susceptible d'une extension illimitée.

Un cercle peut être supposé comme ayant un centre, et un rayon d'une certaine grandeur.

Voici un autre postulat du même genre, sur lequel nous aurons occasion de revenir : —

Une ligne droite qui passe par un point peut être conçue comme parallèle par rapport à une autre ligne droite. » (CHALLIS, *Sur le Calcul*, p. 63, etc.)

Il est certain que dans la suite des démonstrations d'Euclide on trouve quelquefois des suppositions tacites qui devraient être placées parmi les axiomes. Ainsi la quatrième proposition implique cette supposition qu'une figure peut être soulevée et retournée sans qu'elle change de forme. Mais ce n'est là, à vrai dire, qu'une partie du procédé général, le premier qu'il faille employer en géométrie, et qui consiste à réaliser la comparaison de deux figures planes. Dans la première proposition, de Morgan note deux postulats qui auraient dû être exposés explicitement avec les autres; pour la douzième proposition, deux autres postulats encore sont nécessaires.

Branches principales des mathématiques : Arithmétique.

7. Les principes de l'arithmétique sont les deux axiomes essentiels des mathématiques, les définitions des opérations fondamentales, — addition, etc., — et les définitions des nombres. Les *propositions* dérivent par déduction de la combinaison des axiomes et des définitions.

Une fois qu'on a posé les axiomes, compris les opérations et défini les nombres, la déduction ou la démonstration des propositions découle aisément de ces principes.

Les propositions de l'arithmétique affirment ou nient l'*équivalence en quantité des nombres différemment combinés*. En voici des exemples : Six et sept égalent neuf et quatre, dix et trois, etc. : en d'autres termes, une rangée de six et une rangée de sept formeront le même agrégat total qu'une rangée de neuf et une rangée de quatre. Ce sont là des propositions d'addition. Comme il y a une méthode générale pour exprimer les combinaisons de nombres, — le système décimal, — les propositions arithmétiques prennent habituellement la forme qui consiste à établir que d'autres modes de combinaisons égalent ou non une combinaison décimale donnée : neuf et cinq égalent quatorze (combinaison décimale de dix et de quatre).

Il y a des propositions correspondantes de soustraction : neuf ôtés de quatorze, reste cinq.

Pour prouver ces propositions, il s'agit d'appliquer les axiomes à la définition des nombres : les axiomes constituent les majeures, les définitions des nombres les mineures. Ainsi, pour prouver que quatre et trois font sept, nous procéderons ainsi qu'il suit :

Par définition : 3 est $2+1$ (ou $1+1+1$)
Par suite $4+3$ est la même chose que $4+1+1+1$
Or $4+1=5$; $5+1=6$; et $6+1=7$.

Ce qui garantit le système de ces substitutions, c'est la loi que les sommes de quantités égales sont égales, loi qui donne l'égalité suivante :

$$1+1+1=3$$
Par conséquent $4+1+1+1\,(7)=4+3$.

La preuve arithmétique, au début, procède donc par l'addition d'une unité à chaque fois : mais, lorsqu'on a pris l'habitude de faire de plus larges enjambées, les déductions deviennent beaucoup plus courtes. Par exemple, nous pouvons construire et confier à la mémoire une table pour l'addition de deux nombres jusqu'à dix (2 et 3, 2 et 4, etc.).

Les propositions de multiplication (six fois huit font 48) sont une pure extension des procédés de l'addition. La célèbre table de multiplication renferme 144 de ces propositions et, implicitement, un nombre égal de propositions de division.

Ainsi, pendant que l'affirmation « 3 et 1 font 4 » est une proposition verbale (qui n'a d'autre portée que d'exprimer le sens de 4), « 2 et 2 font 4 » constitue une proposition réelle, déduite de la loi inductive : « les sommes des quantités égales sont égales. » Cette proposition est quelquefois appelée nécessaire : elle n'est pas cependant nécessaire, dans le sens d'une vérité identique impliquée dans une autre; elle n'est vraie que si l'axiome ci-dessus est vrai. On l'apréels. Nous pouvons supposer deux quantités négatives multipliées l'une par l'autre, opération qui, en fait, ne peut être accomplie. On s'éloigne encore plus de la réalité quand on place une quantité négative sous le signe qui exprime l'extraction de la racine carrée, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a}$.

Il est nécessaire de déterminer les règles auxquelles sont soumises les opérations essentielles de l'arithmétique, lorsqu'on les applique aux quantités algébriques, en éclaircissant les conditions de l'usage des signes ; il faut exposer, par exemple, et démontrer des règles comme les suivantes : « Moins, multiplié par plus, donne moins » ; « moins, multiplié par moins, donne plus. » Bien que ces règles et leur démonstration soient un objet de discussion logique, ce n'est pas ici le cas de nous en occuper. Les mathématiciens, en général, se satisfont sur ce point par un appel à la vérification expérimentale, à laquelle ils ajoutent quelques preuves déductives. Mais les preuves déductives, en pareil cas, ne doivent jamais être acceptées pour elles-mêmes, en l'absence de toute vérification. Ainsi, la proposition que « moins, multiplié par moins, donne plus » sera prouvée par l'examen du produit de deux différences, comme $a - b$, par $c - d$; nous nous convaincrons par cet examen que nous ne pouvons obtenir un résultat correct qu'en acceptant la règle citée.

11. La forme l. plus élevée des problèmes algébriques est la *résolution des équations*.

Cette opération comprend toutes les opérations déjà indiquées, et les applique utilement à débrouiller les relations compliquées des nombres.

Dans une équation, deux expressions connues pour être égales sont placées l'une en face de l'autre, comme, par exemple, $13\,x + 2\,a - b = 6\,x - c$. En appliquant les axiomes fondamentaux de l'égalité et un petit nombre de propositions déduites de ces axiomes (les différences de quantités égales sont égales, les multiples et les quotients égaux sont égaux, les carrés, les racines carrées, etc., de

quantités égales, sont égales), l'équation peut être traitée de façon qu'à la fin il n'y ait plus d'un côté que la quantité x (dont la valeur est cherchée), et de l'autre une fonction composée de a, b, c, à l'exclusion de x, l'égalité stricte ayant été assurée à chaque pas de la transformation. Aucune difficulté logique n'est impliquée dans ce mécanisme ingénieux et puissant, et on peut le citer comme une illustration heureuse de la méthode qui associe l'intervention des axiomes à l'emploi des propositions dérivées de l'égalité.

—

Géométrie.

13. On a déjà examiné quelques-unes des questions les plus difficiles auxquelles donne lieu la logique de la géométrie, par exemple les questions relatives aux définitions, aux axiomes, aux postulats : il reste à indiquer l'*ordre des matières*.

Toute science repose sur des définitions et des axiomes, qu'il est, par conséquent, nécessaire d'établir au début de la science. En général, les définitions sont placées les premières, les axiomes au second rang. Mais les axiomes de la géométrie, qui sont aussi le fondement de l'arithmétique, se trouvent avoir été exposés avant qu'on arrivât à la géométrie; il suffira de les rappeler brièvement, en indiquant ceux de leurs corollaires qu'exige surtout l'étude de la géométrie.

Il serait peut-être bon de placer au premier rang, et avant tout le reste, les principes concrets de la géométrie, c'est-à-dire les notions géométriques qui ne peuvent être saisies que par l'expérience seule. Ces notions ont déjà été énumérées. Pour établir une séparation nette entre ces notions ultimes, indéfinissables, et celles qui sont véritablement susceptibles de définition, le savant pourra intercaler une revue des axiomes, en insistant surtout sur leur caractère inductif, et en distinguant les axiomes fondamentaux des axiomes dérivés. A cet endroit, le maître peut se permettre un grand nombre d'exemples concrets.

Ce qui viendra après, ce sera l'ensemble des autres définitions, dans leur ordre de dérivation ou de dépendance. Souvent, on donne en même temps les corollaires, mais ces corollaires ne sont pas de véritables inférences, des inférences médiates; ils représentent uniquement des équivalents de la définition, équivalents qu'on ne pourrait nier sans se mettre en contradiction avec soi-même. Telles sont les propositions : « On ne peut tirer qu'une seule ligne droite d'un point à un autre. » « Tous les angles droits sont égaux. » Aucune inférence médiate ne peut sortir d'une définition sans l'interventiou d'un axiome : dans ce cas seulement, on a une véritable déduction qui aboutit à un théorème.

Les trois premières propositions d'Euclide sont des problèmes ou des constructions. Le premier théorème nous est fourni par la quatrième proposition; c'est là vraiment le premier anneau de la chaîne de la géométrie. Cette proposition établit l'égalité de deux triangles qui ont deux côtés égaux et l'angle, compris entre les côtés, égal. C'est là le seul fondement de la *comparaison* géométrique, le premier pas qui rend possibles toutes les démarches futures, toutes les affirmations subséquentes sur l'égalité et l'inégalité des triangles, des parallélogrammes, etc. La preuve de cette proposition est tout à fait spéciale : nulle part ailleurs ne reparaît l'opération mise en usage, à savoir, la superposition idéale d'un triangle sur l'autre. Il y a ici, en fait, un appel nécessaire à l'expérience concrète : tout comme dans les définitions et les axiomes, nous devons prendre nos premières leçons de la considération des objets réels. Euclide, par sa manière de présenter la démonstration, la donne en apparence pour une pure déduction; mais, en réalité, il nous demande de concevoir une preuve expérimentale. Il semble ne vouloir demander aux faits qu'un exemple et une illustration; mais, si ses lecteurs n'ont pas fait des expériences réelles de la chose

indiquée (précisément les mêmes expériences qui nous ont fourni les notions originelles de ligne, d'angle et de surface), ils ne pourraient être convaincus par les raisonnements employés dans la démonstration.

Si une proposition est prouvée sans l'intervention d'un axiome (soit directement, soit indirectement), cela suffit pour nous assurer que la proposition n'est pas réelle. Le sujet et le prédicat sont identiques. La preuve, dans ce cas, s'appuie uniquement sur des définitions; mais la définition par elle-même ne nous fait pas avancer d'un pas. La quatrième proposition d'Euclide, dans ce cas, ne doit être que le pur équivalent des notions de ligne, de surface, d'angle, d'égalité, un fait qui ressort de l'intelligence de ces notions. Elle est donc impliquée dans l'expérience requise pour saisir les éléments indéfinissables de la géométrie, et doit, par conséquent, se fonder exclusivement sur l'expérience (1).

La cinquième proposition est bien réellement la première qui constitue une démonstration véritable. Nous y trouvons une déduction légitime des axiomes communs à toutes les mathématiques, associée à l'*induction* qu'on appelle faussement démonstration, et qui forme le quatrième théorème. Les axiomes appliqués ici sont l'axiome fondamental « les sommes des quantités égales sont égales », et l'axiome dérivé « les différences des quantités égales sont égales. »

(1) M. Challis remarque que la preuve de la quatrième proposition ne s'appuie pas sur des propositions antérieures, et qu'elle se fonde seulement sur les plus simples conceptions de l'espace. Cette proposition est prouvée d'après le principe de *superposition*, qui ne requiert ni n'admet de preuve directe. L'effort que fait Euclide pour démontrer cette donnée fondamentale donne raison à la remarque de M. de Morgan : la conversion d'une proposition identique au moyen du syllogisme est un cercle vicieux.

14. C'est le trait caractéristique de la géométrie élémentaire de recourir sans cesse à des figures, dont l'emploi donne à la science l'apparence, mais seulement l'apparence, d'une science expérimentale et inductive.

Tous les raisonnements fondés sur des symboles sont exposés à des erreurs. Sans parler des faux pas que le raisonnement peut faire sans le savoir, il arrive souvent que les lois des symboles ne peuvent pas s'adapter exactement aux lois de l'objet réel qu'on étudie. On remédie à cette difficulté par une vérification constante des résultats. C'est pour cela qu'en géométrie on a toujours devant les yeux une figure, de sorte qu'on peut apprécier par un examen réel l'effet de chaque construction et vérifier la valeur de chaque nouveau raisonnement. Lorsqu'il s'agit, par exemple, de joindre les deux angles opposés d'un quadrilatère, l'œil voit tout de suite qu'il s'agit de diviser la figure en deux triangles. Le plus souvent, Euclide ne donne pas d'autres preuves pour cette catégorie de conséquences. Quelquefois il emploie la *réduction à l'absurde,* pour prouver, par exemple, que la tangente à un cercle tombe en dehors du cercle.

Tant qu'on étudie la géométrie d'une façon concrète, en nommant les lignes, les angles, les cercles, l'esprit doit concevoir ces objets d'une façon concrète, ce qu'il ne pourrait faire sans le secours des figures. Dans la géométrie algébrique, au contraire, la forme concrète est remplacée par des équivalents numériques, qui doivent être traités d'après les lois de l'arithmétique et de l'algèbre : un rectangle, alors, est non plus une forme de l'espace, mais un produit de nombres et de symboles ; une courbe est une équation. M. de Morgan fait observer aux étudiants que les expressions de carré et de cube, bien qu'elles aient été appliquées aux quantités algébriques, comme a^2, a^3, y signifient tout autre chose que les carrés et les cubes géométriques.

Géométrie algébrique.

15. L'emploi de l'algèbre pour exprimer les quantités géométriques prive l'esprit du secours des figures, mais facilite singulièrement les démonstrations et les inférences.

Comparez le deuxième livre d'Euclide avec l'expression algébrique des mêmes propositions : les démonstrations d'Euclide sont laborieuses, les autres sont relativement aisées.

La grande innovation de Descartes, pour exprimer algébriquement les courbes par des coordonnées, dont les relations dans chaque cas peuvent être exprimées par une formule, a ouvert de nouveaux horizons aux mathématiques. Grâce à cette invention, les sections coniques devenaient relativement faciles : les courbes même plus compliquées que celles qui déjouaient les efforts de la géométrie ordinaire pouvaient être aisément étudiées. Cette méthode était aussi un prélude essentiel au calcul différentiel

16. La géométrie algébrique donne des règles spéciales pour l'expression et l'interprétation des formules. Le reste n'est que de l'algèbre.

Il est facile d'exprimer un rectangle par des termes qui représentent ses côtés ; un produit algébrique est suffisant pour le but qu'on poursuit. Les angles peuvent être exprimés par leurs proportions par rapport au cercle, c'est-à-dire par l'arc qu'ils soutendent, et aussi par leurs sinus, par leurs tangentes, etc. Les courbes sont exprimées par des coordonnées d'après la méthode de Descartes. Les règles de l'expression sont en même temps les règles de l'interprétation. Mais, comme on risque fréquemment de dépasser par les opérations symboliques de l'algèbre les conditions réelles de la géométrie, il faut constamment vérifier l'interprétation. Les mathématiques sont les plus périlleuses des sciences. Leurs opérations analytiques sont, pour ainsi dire, semées à chaque pas de trappes ; mais, en revanche, il n'y a pas de science qu'il soit plus facile de redresser par une vérification. Les symboles arithmétiques 0 et 1 sont employés avec une latitude qui les rend ambigus, mais on peut remédier à ce défaut, en leur donnant, dans chaque cas, un sens précis, auquel on s'attache fermement.

Des hautes mathématiques.

17. La représentation de la quantité continue, au moyen des nombres, dans certains cas, ne donne pas un résultat net ni bien défini.

La quantité continue, telle que nous la trouvons représentée par les lignes et les mouvements, doit être considérée comme divisée en portions égales, afin qu'on puisse l'exprimer numériquement et la soumettre par suite au calcul arithmétique. Dans certains cas, la division ne peut pas être accomplie sans laisser un reste. De là dérive une difficulté particulière.

C'est dans les fractions ordinaires que se montre d'abord le cas particulier des quantités *incommensurables,* c'est-à-dire des quantités qui n'ont pas de commune mesure. En géométrie, le côté et la diagonale d'un carré sont incommensurables : si le côté est divisé en parties égales, peu importe en combien, ces divisions ne peuvent pas être appliquées à la diagonale sans laisser un reste. Il en est de même du diamètre et de la circonférence d'un cercle.

18. La solution des incommensurables, et l'appropriation des nombres aux quantités continues en général, ne peuvent être qu'*approximatives*. On a imaginé un certain nombre de procédés, qui au fond sont tous les mêmes, pour réaliser cette approximation.

Les mathématiciens ont fait de longs efforts pour échapper à la difficulté, avant de se décider à reconnaître le vrai caractère de la solution. Un grand nombre de personnes refusaient de croire que le diamètre et la circonférence d'un cercle dussent rester toujours incommensurables.

On admire à juste titre pour son ingéniosité la définition des proportionnelles telle que la donne Euclide, en s'efforçant d'y comprendre les quantités incommensurables. Mais cette définition n'est pas satisfaisante. Un juge compétent (de Morgan) remarque d'abord qu'il n'y a pas de rapport entre cette définition et les idées ordinairement bien déterminées de la proportion ; secondement, qu'elle implique l'idée de l'infini, enfin qu'il est invraisemblable qu'aucune quantité puisse satisfaire à cette définition. On ne peut triompher de toutes ces difficultés que par la méthode de l'approximation, sur laquelle est fondée la construction entière de l'analyse transcendantale.

La première application des méthodes d'approximation est la quadrature du cercle, telle qu'elle est donnée par Euclide. Le procédé employé est communément appelé la méthode d'*exhaustion.* Le sort de la question est attaché à ce principe : « Un cercle étant donné, deux polygones semblables peuvent être construits, l'un autour du cercle, l'autre en dedans, tels qu'ils soient séparés par un espace *plus petit que tout espace donné.* » Ces derniers mots expriment l'idée fondamentale de tous les procédés qu'on appelle la théorie des limites, les quantités infinitésimales, les premières et dernières raisons. Une ligne courbe ne peut jamais être une ligne droite, mais, en diminuant l'arc, l'approximation des deux lignes augmente jusqu'à nous faire passer au-delà, non-seulement de toute erreur sensible, mais de toute erreur qui puisse être déterminée. Ainsi un arc est la limite de sa corde ; l'aire d'un cercle est identique avec un polygone inscrit ou circonscrit d'un nombre infini de côtés. Or, comme le polygone consiste en une série de triangles avec un sommet commun au centre, l'aire du polygone est égale à la moitié du produit du rayon, et de la somme des bases ou des cordes ; en diminuant ces cordes sans limites, elles deviennent identiques à la circonférence du cercle.

La méthode d'exhaustion a été appliquée par Archimède à la quadrature de la parabole, et à la mesure du cône, de la sphère, du cylindre : toutes ces opérations donnent des solutions nettes ou des expressions définies. Les progrès subséquents étaient réservés aux temps modernes, après la découverte de l'algèbre. Ces progrès ont marché à proportion que l'algèbre et ses applications à la géométrie ont elles-mêmes avancé. Les fluxions de Newton et le calcul différentiel de Leibniz étaient de grandes applications algébriques. Ces méthodes contenaient un ordre nouveau de quantités, appelées fluxions par Newton, et coefficients différentiels par Leibniz; quantités engendrées avec les quantités ordinaires, d'après des considérations empruntées à la théorie des limites et de nouveau ramenées à leurs principes d'après les mêmes lois. Les quantités une fois créées, les opérations n'étaient qu'une pure algèbre; les mathématiciens laissaient les opérations se justifier elles-mêmes par leurs résultats, n'essayant que rarement de rendre compte des hypothèses que ces opérations supposent. De là des attaques vives contre le système, telles que le fameux sarcasme de Berkeley qui disait que le calcul des fluxions opérait sur les fantômes des quantités défuntes. Lagrange a porté au comble ce défaut qui consiste à ne pas déterminer le véritable principe du calcul, et à le traiter depuis le commencement jusqu'à la fin comme une hypothèse purement algébrique. Whewel et de Morgan ont réclamé, et ils ont assuré la réconciliation nécessaire de l'algèbre avec les conditions des divers problèmes à résoudre, en montrant que l'approximation doit être considérée comme essentielle à ces opérations.

CHAPITRE II.

LOGIQUE DE LA PHYSIQUE.

1. On a vu (dans l'introduction) que la branche de la science qu'on appelle la philosophie naturelle ou la PHYSIQUE se subdivise en deux parties, — la *physique mécanique* et la *physique moléculaire*.

L'ensemble de connaissances qu'on appelle *philosophie naturelle* ne peut guère être défini, à moins qu'on n'y distingue deux parties : la *physique mécanique*, ou le mouvement par masses, et la *physique moléculaire*, ou le mouvement dans les molécules.

La physique des masses, la *physique mécanique*, comprend les phénomènes du mouvement et de la force, en tant qu'ils appartiennent à des corps pris dans leur masse. Tels sont les phénomènes des mouvements planétaires, des corps graves, des rivières, des vents, etc.

La physique des molécules, la *physique moléculaire*, traite des mouvements et des forces qui agissent entre les particules ou les molécules dont la petitesse échappe à la portée de nos sens. Les phénomènes qui dérivent de ces mouvements et de ces forces sont les phénomènes d'agrégation, de cohésion et d'adhésion : la chaleur, l'électricité, la lumière. On réserve la force moléculaire, qu'on appelle la force chimique, parce qu'elle a un caractère spécial et des conséquences propres.
