LIVRE II.

THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES; ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

XXXV.

Du carré et de la racine carrée.

1). Le prix total qu'il en a retiré sera $35^c \times 35 = 12^{fr}\ 25^c$.

2). La racine carrée seule est $29 - 13 = 16$. Le nombre demandé sera donc le carré de 16, qui est 256.

3). La racine carrée de ce nombre sera $5\frac{2}{7} : 3 = \frac{37}{21}$, et le nombre lui-même sera le carré de $\frac{37}{21}$ qui donne $3\frac{46}{441}$.

4). Le carré de ce nombre sera $32 - 7 = 25$ et, par conséquent ce nombre est la racine carrée de 25 ou 5

5). Le produit du $\frac{1}{3}$ d'un nombre par le $\frac{1}{4}$ de ce même nombre donne le $\frac{1}{12}$ de son carré, le carré du nombre cherché sera donc $48 \times 12 = 576$; et le nombre lui-même sera $\sqrt{576} = 24$.

6) Pour résoudre ce problème, il suffirait de décomposer 25 en deux parties quelconques, et de voir si le produit des deux parties est égal à 150.

On commencerait par prendre

24 et 1	dont le produit	$= 24$
23	2	$= 46$
22	3	$= 66$
21	4	$= 84$

et l'on trouverait, en continuant cette décomposition, que 15 et 10 donnent pour produit 150. Les deux parties sont donc 15 et 10.

Mais on peut abréger ce tâtonnement à l'aide du théorème suivant :

Théorème. *Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres diminuée du double de leur produit.*

Soient en effet les deux nombres 8 et 5, dont la différence est 3.

Au lieu de faire le produit de 3 par 3, je puis multiplier $8-5$ par $8-5$; or, si je multiplie $8-5$ par 8, j'obtiendrai $8\times8-5\times8$; car en multipliant 8 par 8, on obtient un produit trop grand de tout le produit de 5 par 8.

Mais ce n'était pas par 8 qu'il fallait multiplier $8-5$, c'était par 8 diminué de 5; le produit précédent est donc trop grand de tout le produit de $8-5$ par 5; c'est-à-dire de $8\times5-5\times5$.

Il faut donc du produit $8\times8-5\times8$ retrancher le produit $8\times5-5\times5$. Or, si l'on retranche seulement la première partie 8×5, ce qui donne $8\times8-5\times8-8\times5$, on aura un reste trop faible de toute la quantité 5×5. Pour rendre au résultat sa juste valeur, il faudra lui ajouter 5×5; donc $(8-5)\times(8-5)=8\times8-2(8\times5)+5\times5$.

Pour revenir au problème proposé, on remarquera que si l'on fait le carré de $25=625$, ce carré comprendra la somme des carrés des deux parties, plus le double de leur produit. Si de ce carré on retranche le quadruple de 150 qui est le produit des deux parties, d'après l'énoncé, le reste $625-150\times4=25$ renfermera la somme des carrés des deux parties diminuée du double de leur produit, et sera par conséquent le carré de leur différence.

On a donc la somme de deux nombres qui est 25
la différence 5.

La plus grande partie sera $\frac{25+5}{2}=15$, et la plus petite $\frac{25-5}{2}=10$.

7). Toute fraction divisée par cette même fraction renversée donne pour résultat une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont les carrés du numérateur et du dénominateur de la fraction elle-même. La fraction demandée est donc $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$; en effet

$$\frac{5}{8} : \frac{8}{5} = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}.$$

8). Au carré 900 de la différence 30, j'ajoute le quadruple du produit 2800, c'est-à-dire 11200, et j'obtiens 12100, qui est le carré de la somme des deux nombres demandés ; donc cette somme est égale à $\sqrt{12100} = 110$. Le plus grand nombre est donc $\frac{110+30}{2} = 70$, et le plus petit $\frac{110-30}{2} = 40$.

9). Puisque la somme des carrés des deux nombres est 130, et la différence des carrés de ces mêmes nombres 32, $130 - 32 = 98$ sera le double du carré du plus petit ; le carré du plus petit nombre sera donc $\frac{98}{2} = 49$, et ce nombre sera $\sqrt{49} = 7$; $49 + 32 = 81$ sera le carré du plus grand ; et par conséquent ce plus grand nombre sera $\sqrt{81} = 9$; les deux nombres sont 7 et 9.

Si l'on donnait la somme des carrés de deux nombres inconnus et 1° la somme ou 2° la différence de ces deux nombres, voici comment on pourrait déterminer ces deux nombres.

1° Soient 89 la somme des carrés de deux nombres et 13 la somme de ces nombres.

Le carré de $13 = 169$ renfermera la somme des carrés des deux nombres, plus le double de leur produit ; si donc on retranche 89 de 169, le reste 80 sera le double du produit de ces nombres, et par conséquent le produit de ces nombres sera 40.

Maintenant si de 169 on retranche le double de 80, c'est-à-dire le quadruple de $40 = 160$, le reste 9 sera le carré de la différence de ces nombres ; laquelle différence sera par conséquent $\sqrt{9} = 3$. Connaissant la somme 13 et la différence 3 de deux nombres, on obtiendra sur-le-champ pour le plus grand $\frac{13+3}{2} = 8$, pour le plus petit $\frac{13-3}{2} = 5$.

2° Soient 193 la somme des carrés de deux nombres et 5 la différence de ces nombres ; $193 - 25 = 168$ sera le double du produit des deux nombres demandés, et par conséquent $193 + 168 = 361$ sera le carré de la somme de ces nombres ; donc la somme des deux nombres demandés sera $\sqrt{361} = 19$. On connaît donc la somme 19 et la différence 5 de deux nombres. Ces deux nombres sont par conséquent $\frac{19+5}{2} = 12$, $\frac{19-5}{2} = 7$.

10). Avant de résoudre ce problème, nous donnerons la démonstration d'un autre théorème très-important.

Théorème. *Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres.*

On peut vérifier cette proposition sur deux nombres pris à volonté, 7 et 5 par exemple ;

$$7 + 5 = 12, \quad 7 - 5 = 2 \; ; \quad 12 \times 2 = 24.$$
$$(7)^2 = 49, \quad (5)^2 = 25 ; \quad 49 - 25 = 24.$$

En général,
$$12 = 7 + 5,$$
$$2 = 7 - 5.$$

Pour multiplier $7 + 5$ par $7 - 5$, je commence par multiplier $7 + 5$ par 7, ce qui donne $7 \times 7 + 5 \times 7$.

Or, ce n'est pas par 7 qu'il fallait multiplier, mais par 7 diminué de 5, le produit précédent est donc trop fort de tout le produit de $7 + 5$ par 5, lequel produit est $7 \times 5 + 5 \times 5$; si donc du premier produit, on retranche ce second produit, il ne restera plus que

$$7 \times 7 - 5 \times 5,$$

c'est-à-dire la différence des carrés ; donc

$$(7 + 5) \times (7 - 5) = (7)^2 - (5)^2 ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenant au problème proposé : si l'on divise la différence des carrés de deux nombres, 350, par la différence de ces nombres, 7, le quotient $\frac{350}{7} = 50$ sera la somme des deux nombres.

Connaissant la somme 50, et la différence 7 de deux nombres, on obtiendra pour le plus grand $\frac{50+7}{2} = 28\frac{1}{2}$, et pour le plus petit $\frac{50-7}{2} = 21\frac{1}{2}$.

En effet, $(28\frac{1}{2})^2 = (\frac{57}{2})^2 = \frac{3249}{4}$,

$(21\frac{1}{2})^2 = (\frac{43}{2})^2 = \frac{1849}{4}$;

$$\frac{3249}{4} - \frac{1849}{4} = \frac{1400}{4} = 350.$$

Les deux nombres demandés sont donc $28\frac{1}{2}$ et $21\frac{1}{2}$.

Si l'on donnait la somme 20 de deux nombres et la différence 180 de leurs carrés, on diviserait le second nombre par le premier, et l'on obtiendrait pour la différence des deux nombres cherchés $\frac{180}{20} = 9$.

Connaissant la somme 20 et la différence 9 de deux nombres, on aurait pour ces deux nombres

$$\frac{20+9}{2} = 14\frac{1}{2}, \quad \frac{20-9}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

Enfin si l'on donnait la différence 297 des carrés de deux nombres et le produit de ces nombres 252, voici comment on pourrait opérer :

Élevant au carré 297, on obtiendra le nombre 88209 qui renferme la somme des carrés des carrés des deux nombres diminuée du double produit des carrés; si donc on ajoute à 88209 le quadruple du carré de 252 qui est 63504, c'est-à-dire 254016 la somme 342225 sera le carré de la somme des carrés des deux nombres cherchés. Extrayant la racine, on aura pour la somme des carrés 585.

Maintenant connaissant la somme des carrés de deux nombres 585 et leur différence 297, le carré du plus grand sera $\frac{585+297}{2} = 441$. Donc $\sqrt{441} = 21$ sera le plus grand nombre.

De même le carré du plus petit nombre sera

$$\frac{585-297}{2} = 144,$$

et par suite $\sqrt{144} = 12$ sera le plus petit nombre.

On vérifie aisément que la différence des carrés de 21 et de 12 est 297 et leur produit 252.

XXXVI.

Du cube et de la racine cubique.

1). La racine cubique du nombre demandé sera $24+3=27$ et le nombre lui-même $(27)^3 = 19683$.

2). Le nombre des objets est $25 \times 25 = (25)^2$; et le prix total $25^c \times (25)^2 = (25^c)^3 = 15625^c = 156^{fr}25^c$.

3). Le produit de la moitié, du tiers et du quart d'un nombre est égal au vingt-quatrième du cube de ce nombre. Le cube du nombre demandé sera donc égal à $9 \times 24 = 216$; et le nombre demandé sera $\sqrt[3]{216} = 6$.

4). Le tiers d'un nombre multiplié par le carré de ce nombre donne le tiers du cube de ce même nombre. Le cube du nombre cherché sera donc $1944 \times 3 = 5832$, et par conséquent le nombre demandé $= \sqrt[3]{5832} = 18$.

5). La quatrième puissance d'un nombre divisé par le $\frac{1}{8}$ de ce même nombre, donne pour quotient 8 fois le cube de ce nombre; par conséquent 8 fois le cube du nombre demandé valent $2000 + 197 = 2197$; le cube de ce nombre est donc $\frac{2197}{8}$; et le nombre lui-même

$$= \sqrt[3]{\frac{2197}{8}} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

6). Le nombre d'oranges sera égal à 3 fois le carré du nombre de caisses, et le prix total à 6 fois le cube du nombre de caisses. Donc le nombre de caisses aura pour cube $\frac{16464}{6} = 2744$, et par suite le nombre de caisses sera $\sqrt[3]{2744} = 14$, et celui des oranges

$$(14)^2 \times 3 = 196 \times 3 = 588.$$

7). La somme mise en commun sera égale à 1000 fois le carré du nombre d'associés. Pour trouver l'intérêt de cette somme, d'après les conditions de l'énoncé, il faudrait la multiplier par la moitié du nombre d'associés et diviser le produit par 100, ce qui donnerait 1000 fois le cube du nombre d'associés divisé par 200; donc 1000 fois le cube du nombre d'associés égalent $2560 \times 200 = 512000$; et par suite le nombre d'associés égale $\sqrt[3]{512} = 8$. Il y avait donc 8 associés.

8). Au taux de 5 pour 100, l'intérêt de 1 fr. est de 5 cent. Au bout de la première année le capital total sera

$$30000 + 30000\,(0,05) = 30000\,(1,05).$$

Au bout de la deuxième année $= 30000\,(1,05)^2$.
Au bout de la troisième année $= 30000\,(1,05)^3$.
$(1,05)^3 = 1,157625$; $30000 \times 1,157625 = 34728,75$.

Le capital s'élève à 34728 fr. 75 cent.

9). Le cube de 130 se compose : 1° du cube de la première partie; 2° de 3 fois le carré de la première multiplié par la seconde; 3° de 3 fois le carré de la seconde multiplié par la première; 4° du cube de la seconde; autrement dit : 1° de la somme des cubes des deux parties; 2° de 3 fois le produit des deux parties multiplié par la somme des deux parties. Donc, si du cube de $130 = 2197000$, on retranche la somme des cubes 637000, la différence 1560000 sera égale à 3 fois le produit des deux parties multiplié par la somme 130. Le produit des deux parties s'obtiendra donc en divisant 1560000 par $130 \times 3 = 390$, ce qui donne 4000.

Connaissant la somme 130 de deux nombres et leur produit 4000, on obtiendra facilement chacun des deux nombres. (Voir Problème VI, *Extraction des racines carrées*).

Je fais le carré de 130 qui est 16900, j'en retranche le quadruple de 4000, c'est-à-dire 16000, et le reste 900 représente le carré de la différence des deux nombres, laquelle est $\sqrt{900} = 30$.

On a donc la somme 130 et la différence 30 de deux nombres.

Le plus grand sera $\frac{130+30}{2} = 80$.
Le plus petit sera $\frac{130-30}{2} = 50$.

es deux nombres cherchés sont 80 et 50.

10). Si l'on divise 11576,25 par 10000, le quotient 1,157625 représentera le cube du nombre formé de l'unité augmentée de l'intérêt de 1 fr. par an. Extrayant donc la racine cubique de 1,157625, on obtient pour racine 1,05, l'intérêt de 1 fr. étant 0,05, l'intérêt de 100 fr. ou le taux sera 5.

11). Le produit $112 \times 588 \times 576 = 37933056$ sera évidemment, d'après l'énoncé, le produit des cubes des trois nombres ou le cube du produit des trois nombres demandés. Le produit de ces trois nombres est donc

$$\sqrt[3]{37933056} = 336.$$

Maintenant si l'on divise 112, produit du carré du premier nombre par le second, par 336, produit des trois nombres, on aura, pour le rapport du premier nombre et du troisième, $\frac{112}{336} = \frac{1}{3}$. Le premier nombre est donc le $\frac{1}{3}$ du troisième, et par conséquent le produit du premier nombre par le carré du troisième sera égal au $\frac{1}{3}$ du cube du troisième; or ce produit est 576; donc le cube du troisième nombre est $576 \times 3 = 1728$, et le troisième nombre $= \sqrt[3]{1728} = 12$. Le premier sera par conséquent $\frac{12}{3} = 4$, et le second s'obtiendra en divisant 336, produit des trois nombres, par $4 \times 12 = 48$, produit de deux de ces nombres déjà trouvés. Le second nombre est donc $\frac{336}{48} = 7$.

Les trois nombres demandés sont 4, 7 et 12.

XXXVII.

Progressions par différence.

1). Il s'agit de trouver : 1° le 17e terme d'une progression par différence dont le 1er est 240 et la raison 36 ; 2° la somme de ces 17 termes.

1° Le 17e terme demandé sera

$$240 + 36 \times 16 = 240 + 576 = 816.$$

2° La somme des 17 termes est

$$(240 + 816)\frac{17}{2} = \frac{1056 \times 17}{2} = 528 \times 17 = 8976.$$

Le domestique a reçu la 17e année 816 fr. et en tout, pendant 17 ans, 8976 fr.

2). Le 16e terme de la progression par différence dont le 1er terme est 3,40 et la raison 0,20 est

$$3,40 + 0,20 \times 15 = 3,40 + 3 = 6,40 ;$$

et la somme des 16 termes :

$$(3,40 + 6,40) \times \frac{16}{2} = 9,80 \times 8 = 78,40.$$

3). Pour le 20e mètre, l'ouvrier aura

$$2 + 0,50 \times 19 = 2 + 9,50 = 11,50,$$

et pour les 20 mètres : $(2 + 11,50)\frac{20}{2} = 135^{fr}$.

4). L'intérêt de 3500 fr. à 4 p. 100 est $\frac{3500 \times 4}{100} = 140$,

de 300 $\frac{300 \times 4}{100} = 12$.

Ainsi pour la 1re année, l'intérêt sera	140
2e	140+12=152
3e	140+12+12=164
etc.	etc.

Il s'agit donc de déterminer le dernier terme et la somme de tous les termes d'une progression par différence dont le 1er terme est 140, la raison 12 et le nombre des termes 24.

Le 24e terme sera donc

$$140 + 12 \times 23 = 140 + 276 = 416,$$

et la somme $(140 + 416)\frac{24}{2} = 556 \times 12 = 6672.$

Les intérêts de toutes les sommes placées s'élèvent donc à 6672 fr.

5). La question revient à déterminer le dernier terme d'une progression par différence décroissante dont le premier terme est 58, la raison 1 et le nombre de termes 19 ; le dernier terme sera donc $58 - 1 \times 18 = 58 - 18 = 40$. Dès lors la somme des 19 termes sera

$$(58 + 40)\frac{19}{2} = \frac{98 \times 19}{2} = 49 \times 19 = 931.$$

Le voyageur a donc fait 40 kilomètres le premier jour et 931 kilomètres dans tout son voyage.

6). Il s'agit de déterminer le nombre de termes d'une progression par différence, dont le premier terme est 100, la raison 50 et le dernier terme 550. Si du dernier terme on retranche le premier, le reste $550 - 100 = 450$ sera le produit de la raison par le nombre de termes qui précède le dernier. Il suffira donc de diviser 450 par 50, et d'augmenter le quotient de 1, ce qui donne

$$\frac{450}{50} = 9, \quad 9 + 1 = 10.$$

Le domestique est depuis 10 ans dans la maison.

7). Dans la 20e seconde de sa chute, le corps aura parcouru $4,90 + 9,80 \times 19 = 191^{m},10$.

Et dans les 20 secondes, 1960.

8). On connaît le premier terme 20 d'une progression par différence, le dernier terme 80 et la somme 800 ; il s'agit de trouver le nombre de termes. Pour cela, il faut diviser la somme 800 par $20 + 80 = 100$, et le quotient 8 sera la moitié du nombre des termes. Le nombre des termes est donc 16.

Maintenant, connaissant le premier terme, le dernier et le nombre des termes, on calculera facilement la raison en retranchant le premier terme du dernier, et divisant le reste par le nombre des termes diminué de 1; ce qui donne $\frac{80-20}{15} = \frac{60}{15} = 4$.

La somme sera acquittée dans 16 mois, et chaque payement mensuel surpassera de 4 fr. le payement précédent.

9). Les deux courriers ont parcouru à eux deux la distance totale 420 kilomètres, et le second a parcouru 36 kilomètres de plus que le premier; on connaît donc la somme de deux nombres 420 et leur différence 36, on obtiendra facilement pour la plus petite distance parcourue par le premier $\frac{420-36}{2} = 192$; et pour la plus grande distance parcourue par le second, $\frac{420+36}{2} = 228$.

Maintenant on connaît la somme 192 des 6 termes d'une progression dont le premier terme est inconnu, et dont la raison est 8. Pour calculer ce premier terme, on divisera 192 par $\frac{6}{2} = 3$, ce qui donne 64; 64 représente la somme du premier et du dernier terme; mais le dernier terme est égal au premier, augmenté de la raison 8 multipliée par le nombre des termes 5 qui le précèdent, c'est-à-dire augmentée de $8 \times 5 = 40$, donc $64 - 40 = 24$ est le double du premier terme, et par conséquent le premier terme est $\frac{24}{2} = 12$. Pareillement $\frac{228}{3} = 76$ est la somme du premier et du dernier terme de la deuxième progression; $76 - 12 \times 5 = 76 - 60 = 16$ est le double du premier terme, $\frac{16}{2} = 8$ est le premier terme. Le premier courrier a donc parcouru 12 kilomètres le premier jour, et le second 8.

10). Avant de résoudre ce problème, nous donnerons à la formule du dernier terme et à la somme de tous les termes d'une progression dont on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes, une forme plus commode pour ce genre de calcul.

1° Un terme quelconque d'une progression dont le premier terme est donné ainsi que la raison et le rang

de ce terme, s'obtient en ajoutant au premier terme la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui. Si, par exemple, le premier terme est 5, la raison 3 et le rang du terme 10, on aura : dixième terme $= 5 + 3 \times 9$, qui peut s'écrire sous la forme

$$5 + 3 \times 10 - 3 = 5 - 3 + 3 \times 10,$$

et l'on peut dire que :

Un terme quelconque d'une progression est égal au produit de la raison multipliée par le rang du terme augmenté de l'excès du premier terme sur la raison (ou diminué de l'excès de la raison sur le premier terme, si la raison est plus grande que ce premier terme).

2° Pour obtenir la somme de tous les termes d'une proportion, il faut multiplier la somme du premier et du dernier par la moitié du nombre des termes; par conséquent le produit de la somme des termes extrêmes par le nombre des termes, donne le double de la somme.

Mais la somme du premier et du dernier terme est égale, d'après ce qui précède, à la raison multipliée par le nombre des termes, plus 2 fois le premier terme diminué de la raison; donc, *dans toute progression par différence, le produit du double de la somme des termes par la raison est égal à un produit qui a pour facteurs, 1° le nombre de termes multiplié par la raison, plus l'excès du double du premier terme sur la raison; 2° le nombre de termes multiplié par la raison.*

Revenant au problème dans lequel il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression par différence dont on connaît le premier terme 3, la raison 4 et la somme de tous les termes 1596, je double 1596, ce qui donne 3192; je multiplie ce nombre par la raison 4, et j'obtiens 12768 pour le produit de deux facteurs, dont l'un est le produit du nombre de termes par la raison, et le deuxième ce même produit augmenté du double du premier terme diminué de la raison, c'est-à-dire $3 \times 2 - 4 = 2$. Je connais donc la différence 2 des deux facteurs et leur produit 12768 ; la question est donc ramenée à un problème déjà résolu. (Problème VIII, *sur les carrés et sur les racines carrées*.)

Je fais le carré de 2 qui est 4, j'ajoute à ce carré le quadruple de 12768 qui est 51072, et la somme 51076 est le carré de la somme des deux facteurs demandés. Extrayant la racine carrée de 51076, on obtiendra pour la somme des deux facteurs 226.

Enfin, connaissant la somme 226 et la différence 2 des deux facteurs, on aura pour le plus petit des deux $\frac{226-2}{2}=112$.

Mais ce facteur est lui-même un produit de deux facteurs, dont l'un est le nombre de termes demandé, et l'autre la raison connue 4 ; divisant donc 112 par 4, on trouve pour le nombre de termes demandé 28.

L'ouvrier avait donc mis 28 mois à économiser cette somme de 1596 fr.

XXXVIII.

Progressions par quotient.

1). Le problème revient à déterminer : 1° le dernier terme d'une progression par quotient dont le premier terme est 5, la raison 3, et le nombre des termes 12; 2° la somme de ces 12 termes.

1° Pour trouver le douzième terme, il faut multiplier le premier terme 5 par la puissance de la raison 3 marquée par le nombre de termes qui précèdent, c'est-à-dire par la onzième puissance de la raison 3 ; or, $3^{11}=177147$. Le douzième terme est donc

$$177147\times 5=885735.$$

2° Pour trouver la somme des douze termes il faut multiplier le dernier 885735 par la raison 3, retrancher du produit le premier terme 5 et diviser le reste par la raison diminuée de 1, on aura donc, en effectuant les calculs,

$$\frac{885735\times 3-5}{3-1}=\frac{2657205-5}{2}=1328600.$$

Le perdant a dû donner le dernier jour 8857 francs 35 centimes, et en tout 13286 francs.

2). Le trente-deuxième terme de la progression qui commence par 1 et dont la raison est 2, est, d'après la formule, $1\times 2^{31}=2147483648$; et la somme des trente-deux termes sera

$$\frac{2\times 2147483648-1}{2}=4294967295.$$

Le prix du cheval serait donc 42949672 fr. 95 cent.

3). Prix du 1er mètre 2fr ;

du 2e $\quad 2^{fr}+\frac{1}{4}$ de $2^{fr}=$ les $\frac{5}{4}$ de $2^{fr}=2\left(\frac{5}{4}\right)$;

du 3e $\quad 2\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}$ de $2\left(\frac{5}{4}\right)=2\left(\frac{5}{4}\right)^2$;

du 4e $\quad 2\left(\frac{5}{4}\right)^3$;

. . . .

du 10e $\quad 2\left(\frac{5}{4}\right)^9$.

La suite de ces nombres forme donc une progression par quotient dont le premier terme est 2, la raison $\frac{5}{4}$ et le nombre des termes 10.

$$\text{Or } \left(\frac{5}{4}\right)^9=\frac{5^9}{4^9}=\frac{1953125}{262144}=7{,}4505805\ldots\ldots\ldots$$

Le prix du dixième mètre est donc 14 francs 90 cent.

$$\text{et le prix total } \frac{14{,}90\times 2-1}{\frac{5}{4}-1}=\frac{28{,}80}{\left(\frac{1}{4}\right)}=115{,}20.$$

Il revient à l'ouvrier 115 francs 20 centimes.

4). En désignant la somme demandée par x, on aura

$$x=(1{,}05)^{20}.\ (1{,}05)^2=1{,}1025;$$

multipliant ce nombre par lui-même, on a

$$(1{,}05)^4=1{,}2155\ldots;$$

multipliant encore ce nombre par lui-même, on a

$$(1{,}05)^8=1{,}47744\ldots$$

Procédant de la même manière, on trouve

$$(1{,}05)^{16}=2{,}1828\ldots$$

Multipliant ce nombre par $(1,05)^4=1,2155$, on trouve enfin $(1,05)^{20}=2,65319\ldots$

Ainsi la somme s'élève à 2 francs 65 centimes environ.

Pour un nombre quelconque, il suffirait de multiplier 2,65 par ce nombre pour avoir la somme à laquelle ce capital s'élève au bout de 20 années, par les intérêts composés.

5). D'après l'énoncé, c'est comme si 1 franc restait placé pendant 20, 19, 18..... 3, 2, 1 années. Il s'agit donc d'obtenir la somme de ces 20 résultats, dont les expressions sont

$(1,05)^{20}$, $(1,05)^{19}$, $(1,05)^{18}\ldots$ $(1,05)^3$, $(1,05)^2$, $(1,05)$,

et forment une progression géométrique dont le premier terme est 1,05, le dernier $(1,05)^{20}$ et la raison $(1,05)$. D'après le problème précédent $(1,05)^{20}=2,65$. La somme $\int$ de tous les termes de la progression sera exprimée par

$$\int=\frac{(1,05)\,(2,65)-(1,05)}{(1,05)-1}=\frac{1,05\times1,65}{0,05}=34,65.$$

On aurait, au bout de 20 années, en capital et intérêts composés 34 francs 65 centimes.

Pour une annuité différente de 1, il suffirait de multiplier 34,65 par l'annuité; et l'on aurait par ce moyen la somme à laquelle s'élève le capital total au bout de 20 années.

6). En désignant par x le rapport cherché, on doit avoir, d'après la formule $(1+x)^{10}=1048576$.

Remplaçant successivement x par 1, 2, 3, 4..... on trouve

$(1+1)^{10}=2^{10}=1024$, donc x est plus grand que 1;
$(1+2)^{10}=3^{10}=59049$, donc x est plus grand que 2;
$(1+3)^{10}=4^{10}=1048576$, donc $x=3$.

Le rapport cherché est donc 3.

Si le nombre d'années était un multiple des facteurs 2 et 3, on pourrait parvenir à déterminer x au moyen d'extractions successives de racines carrées et cubiques.

7). Il s'agit d'abord de trouver le premier terme d'une progression par quotient, dont la raison est 2, le nombre des termes 10 et le dernier 25,60. En désignant par x ce premier terme, on doit avoir, d'après la formule,

$$x\times2^9=25,60,$$

d'où $$x=\frac{25,60}{2^9}.$$

Le calcul direct donne $2^9=512$, $\dfrac{25,60}{512}=0,05$. Le premier pauvre a donc reçu 5 cent.

Maintenant, désignant la somme totale dépensée par $\int$, on doit avoir

$$\int=\frac{2\times25,60-0,05}{2-1}=51,15.$$

La somme dépensée est donc 51 fr. 15 cent.

8). La question revient à trouver le nombre des termes d'une progression par quotient, dont le premier est 0,05, la raison 2 et la somme de tous les termes 204,75.

Désignant par x le dernier terme, on aura, d'après la formule de la somme,

$$204,75=\frac{2\times x-0,05}{2-1}=2x-0,05,$$

d'où $2x=204,80$ et $x=102,40$.

Connaissant le dernier terme 102,40, il sera facile de déterminer le nombre des termes, car en désignant ce nombre des termes par y, on doit avoir

$$0,05\times2^{y-1}=102,40,$$

d'où $$2^{y-1}=\frac{102,40}{0,05}=2048.$$

Élevant 2 successivement aux puissances 2, 3, 4, 5, etc., on trouve

$$\begin{aligned}2^2 &= 4,\\ 2^3 &= 8,\\ 2^4 &= 16,\\ 2^5 &= 32,\\ 2^6 &= 64,\\ 2^7 &= 128,\\ 2^8 &= 256,\\ 2^9 &= 512,\\ 2^{10} &= 1024,\\ 2^{11} &= 2048;\end{aligned}$$

donc $y-1=11$, et par conséquent $y=11+1=12$.

Il y avait donc 2 pauvres de plus que dans le problème précédent.

9). On commencera par trouver le douzième terme de la progression par quotient, dont le premier terme est 50 et la raison 3, lequel terme est

$$x = 50 \times 3^{11} = 8857350.$$

Ensuite, pour trouver la somme des 12 termes, dont le premier est 50, la raison 3 et le dernier terme 8857350, on a la formule

$$S = \frac{3 \times 8857350 - 50}{3-1} = 13286000.$$

On peut parvenir directement au même résultat par un seul calcul, à l'aide de la formule suivante. En désignant

par a le premier terme d'une progression,
par q la raison,
par l le dernier terme,
par n le nombre des termes,
par S la somme de tous les termes,

on a les deux formules $l = a \times q^{n-1}$,

$$S = \frac{ql-a}{q-1}.$$

Si dans la seconde formule on remplace l par sa valeur donnée par la première, on a

$$S = \frac{q \times aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

D'après l'énoncé $a=50$, $q=3$, $n=12$, on a donc

$$S = \frac{50 \times (3^{12}-1)}{2}.$$

Or, $3^{12} = 531441$, et par suite

$$S = \frac{50 \times 531440}{2} = 13286000.$$

La dette s'élève à 13286000 fr.

10). Il s'agit de déterminer le nombre des termes x d'une progression par quotient, dont on connaît le premier terme 400, la raison 3 et la somme de tous les termes 48400.

Pour cela on se servira de la formule du numéro précédent qui devient

$$48400 = \frac{400(3^x-1)}{2} = 200(3^x-1),$$

d'où l'on tire $\quad 3^x - 1 = \frac{48400}{200} = 242$

et $\quad 3^x = 242 + 1 = 243.$

En formant les puissances successives de 3, on trouve que la cinquième puissance $=243$; donc $x=5$.

Il faudra donc 5 payements.

11). On pourrait commencer par calculer le soixante-quatrième terme de la progression, et ensuite déterminer la somme de tous les termes. La formule du n° 9 donne directement le même résultat. Comme $a=1$ et $q=2$, en désignant la somme par f, on aura $f=2^{64}-1$. On trouve $2^{64}=18446744073709551616$, et par conséquent le nombre de grains de blé est environ 184467, suivi de 14 zéros. D'après l'énoncé, il faut diviser ce nombre par $25000\times100=2500000$, pour savoir combien il y a d'hectolitres, ce qui revient à diviser 184467, suivi de 9 zéros par 25, ou, à diviser par 100, le quadruple de 184467, suivi de 9 zéros. On trouve ainsi le nombre 737868, suivi de 7 zéros. En prenant le nombre exact pour dividende, le quotient est 737869762948 mètres cubes. Enfin, multipliant ce nombre par 20, on obtient pour la somme demandée le nombre 14757360000000.

L'inventeur du jeu des échecs ne demandait pas moins que 14757360 millions de francs.

Et si l'on prend le nombre exact,

$$737869762948\times20=14757395258960 \text{ fr.}$$

XXXIX.

Mesure des longueurs, des circonférences et des angles.

1). $25{,}5+32{,}4+48=105{,}9$. Le contour du triangle est de 105 mètres 9 décimètres.

2). $185+129=314$, $314\times2=628$. Il faut 628 mètres de cordes.

3). $1080+450=1530$; $1530\times2=3060$. Le contour du champ de Mars est de 3060 mètres. $3060\times2=6120$; le cheval a parcouru 6120 mètres en 3 minutes $\frac{1}{2}$, et par conséquent sa vitesse, ou, autrement dit, l'espace parcouru en 1 minute s'obtiendra en divisant 6120 par $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$:

$$6120:\tfrac{7}{2}=6120\times\tfrac{2}{7}=\tfrac{12240}{7}=1748{,}57\tfrac{1}{7}.$$

La vitesse du cheval est de 1748 mètres $\frac{1}{2}$ environ par minute.

4). Le contour de la place est de $10^m\times240=2400^m$, dont la moitié est 1200. Le plus petit côté n'étant, d'après l'énoncé, que le quart de cette longueur, aura donc 300 et le plus grand 900 mètres. Il y a donc 90 arbres sur le grand côté et 30 sur le petit.

5). Il suffit de prendre les $\frac{22}{7}$ de 2,45; autrement dit de multiplier ce nombre par 3 et d'ajouter au produit le septième de ce même nombre, ce qui donne 7 mètres 70 centimètres.

6). $17{,}60:\frac{22}{7}=17{,}60\times\frac{7}{22}=5{,}60$. Le diamètre du bassin est de 5 mètres 60 centimètres.

7). Le contour de l'Équateur est de

$$2\times6378000\times\tfrac{22}{7}=40090285 \text{ mètres environ.}$$

Le jour renferme $60\times60\times24=86400$ secondes; par conséquent la vitesse de rotation par seconde est de $\frac{40090285}{86400}=464$ mètres environ.

8). En supposant que la terre parcourt, dans son mouvement annuel autour du soleil, une circonférence d'un rayon de 34600000 lieues, le contour de cette circonférence serait $2.34600000\times\frac{22}{7}=217485714$ lieues environ. Divisant ce nombre par 31536000, nombre de secondes contenues dans 365 jours, on aura pour la vitesse moyenne de la terre $6\frac{3}{4}$ lieues environ.

D'après l'énoncé, le contour de la terre égale $25\times360=9000$ lieues; or, le contour de la terre, exprimé en mètres, est de 40000000 de mètres; d'où l'on conclut que la lieue vaut $\frac{40000000}{9000}=4444$ mètres environ; donc la vitesse cherchée est

$$4444\times6\tfrac{3}{4}=29997 \text{ mètres par seconde.}$$

9). D'après le problème 7, le contour de l'Équateur est de 40090285 mètres. Divisant ce nombre par 360, on aura pour la longueur d'un degré à l'Équateur 111361,9 environ; divisant ce nombre par 60, on obtient pour la longueur de la minute 1856,03; enfin divisant par 60, on a pour la longueur de la seconde de degré 30,934.

Multipliant le premier nombre par 16, le deuxième par 28 et le troisième par 45, et additionnant les trois produits, on trouve pour la distance demandée 1835 kilomètres environ.

XL.

Mesure des surfaces planes.

1). $2(5+4)\times 3,60 = 64,80$; $0,45 \times 10 = 4,50$. La surface des quatre parois est de 64 mètres carrés 80 décimètres carrés; celle du rouleau, de 4 mètres carrés 50 décimètres carrés : $\frac{64,80}{4,50} = 14\frac{2}{5}$.

Il faudra donc 14 rouleaux et $\frac{2}{5}$.

2). La surface en mètres carrés est $\frac{1440 \times 840}{2} = 604800$ mètres carrés $=$ 60 hectares 48 ares.

3). Le contour du triangle $= 25 + 30 + 45 = 100$ mètres et le demi-contour 50. Retranchant successivement de ce nombre les trois nombres 25, 30, 45 qui expriment les longueurs des côtés, on obtient pour restes 25, 20, 5. Effectuant le produit des quatre nombres 50, 25, 20, 5 et extrayant la racine carrée, on trouve 353 mètres carrés environ pour la surface du triangle.

Extrayant encore la racine carrée de 353, on a enfin 18,79 environ pour le côté du carré équivalent en surface au triangle donné.

4). La surface de la chaussée est de $360 \times 4 = 1440$ mètres carrés $= 1440000000$ millimètres carrés. Divisant ce nombre par $240 \times 240 = 57600$, surface de chaque pavé exprimée en millimètres carrés, on trouve 25000.

Il entre donc 25000 pavés dans la chaussée.

5). La surface du trapèze est de

$(\frac{420+350}{2}) \times 280 = 385 \times 280 = 107800$ mètres carrés $= 10$ hectares 78 ares. $22\frac{1}{4} \times 10,78 = 242,55$.

Le champ rapporte en moyenne 242 hectolitres 55 litres de blé.

6). La circonférence du cercle est de $3,50 \times \frac{22}{7} = 11^m$.

La surface égale $11 \times \frac{3,50}{4} = 11 \times 0,875 = 9,6250$, c'est-à-dire 9 mètres carrés 62 décimètres carrés 50 centimètres carrés.

On arrive directement au même résultat par la seconde formule qui consiste à multiplier le carré du rayon 1,75 par le nombre $\frac{22}{7}$; en effet

$$1,75 \times 1,75 = 3,0625 \ ; \quad 3,0625 \times \frac{22}{7} = 9,6250.$$

Le côté du carré $= \sqrt{9,6250} = 3,1024\ldots$ et par conséquent il est de 3 mètres 10 centimètres environ.

7). Le diamètre $= 44 : \frac{22}{7} = 44 \times \frac{7}{22} = 14$.

$44 \times \frac{14}{4} = 154$. La surface du terrain circulaire est de 154 mètres carrés.

8). Le rayon du cintre étant $\frac{2,10}{2} = 1,05$, la hauteur du rectangle de la porte est $5,60 - 1,05 = 4,55$; par conséquent la surface du rectangle égale

$$4,55 \times 2,10 = 9,5550.$$

La surface du cintre, c'est-à-dire le demi-cercle de rayon 1,05 est de $(1,05)^2 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} = 1,7325$.

Donc la surface entière $= 9,5550 + 1,7325 = 11,2875$.

Multipliant enfin $2^{fr},50$ par ce nombre, on trouve pour la valeur du bois de la porte 28 francs 22 centimes environ.

9). Pour obtenir la somme des surfaces des deux cercles donnés, il faudrait multiplier le carré de 3 par $\frac{22}{7}$, ensuite le carré de 4 par $\frac{22}{7}$, et additionner les deux résultats; la somme devrait être égale au produit du carré du rayon inconnu par $\frac{22}{7}$; d'où l'on voit que le carré du rayon inconnu x doit égaler la somme des carrés de 3 et de 4, c'est-à-dire que $x^2 = 9 + 16 = 25$. Par conséquent $x = \sqrt{25} = 5$.

Le cercle équivalent aux deux cercles donnés a 5 mètres de rayon.

10. D'après l'énoncé, la longueur du côté du carré est de $37 \times 15 = 555$ millimètres, et par conséquent la surface de ce carré, de $555 \times 555 = 308025$ millimètres carrés.

D'autre part, le nombre des pièces de 5 francs rangées en carré est de $15 \times 15 = 225$. En outre la surface de chaque pièce est de $\frac{1}{4}(37)^2 \times \frac{22}{7} = 1075\frac{9}{14}$ millimètres carrés; et la surface totale couverte par les 225 pièces, de $1075\frac{9}{14} \times 225 = 242019\frac{9}{14}$ millimètres carrés. Par conséquent l'espace vide est de

$$308025 - 242019\tfrac{9}{14} = 66005\tfrac{5}{14} \text{ millimètres carrés.}$$

XLI.

Mesure des surfaces extérieures des corps.

1). La surface d'un des trapèzes égale $(\frac{45+50}{2}) \times 3$ mètres carrés, et par conséquent les deux trapèzes opposés ont en surface $(45+50) \times 3 = 95 \times 3 = 285$ mètres carrés.

De même chaque triangle a $\frac{8 \times 3}{2}$ mètres carrés de surface, et par conséquent la surface des deux triangles opposés est de $8 \times 3 = 24$ mètres carrés.

Ce qui donne en tout pour la surface du toit

$$285 + 24 = 309^{m.c} = 3090000^{c.c}.$$

La surface de chaque ardoise rectangulaire est exprimée par $30 \times 22 = 660$ centimètres carrés. Le nombre des ardoises strictement nécessaires serait donc

$$\frac{3090000}{660} = 4682 \text{ environ},$$

dont le tiers 1561, ajouté au nombre précédent, donne 6243 ardoises.

$$17,50 \times 6,243 = 109,25 \text{ environ.}$$

Le prix d'achat des ardoises est donc de $109^{fr},25$.

2). La surface externe de chaque caisse, qui a la forme d'un parallélépipède, est égale au double de la somme des produits 2 à 2 de ses trois dimensions, c'est-à-dire

$$2(3 \times 2 + 3 \times 1,50 + 2 \times 1,50) = 2(6 + 4,50 + 3)$$
$$= 2 \times 13,50 = 27 \text{ mètres carrés.}$$

Il faudra donc pour les 20 caisses $27 \times 20 = 540$ mètres carrés.

$0,35 \times 540 = 189$. Le prix de la toile est de 189 fr.

3). Le contour de la base carrée de la pyramide étant de 10 mètres, chaque côté du carré est de $\frac{10}{4} = 2,50$ mètres et la surface de la base $= 2,50 \times 2,50 = 6,25$ mètres carrés. Les quatre triangles de la surface latérale donnent pour surface totale $\frac{25 \times 2,50}{2} \times 4 = 125$ mètres carrés.

La surface totale de la pyramide est par conséquent de $6,25 + 125 = 131,25$ mètres carrés.

Chaque feuille de cuivre a pour surface

$$3 \times 0,6 = 1,80 \text{ mètres carrés.}$$

Le nombre de feuilles sera donc $\frac{131,25}{1,80} = 73$ environ.

4). La feuille de plomb a

$$2,90 \times 1,50 = 4^{m.c},20 = 4200000^{mil.c} \text{ de surface.}$$

Le diamètre du tuyau étant de 460 millimètres, la circonférence de la section circulaire aura $460 \times \frac{22}{7}$ millimètres, et la surface du tuyau

$$460 \times \tfrac{22}{7} \times 143000 = \tfrac{1447160000}{7} \text{ millimètres carrés.}$$

Le nombre de feuilles nécessaire pour couvrir la surface du tuyau sera $\frac{144716}{7 \times 420} = 49\frac{164}{735}$ environ.

5). La circonférence de la colonne est de

$$2 \times 28 \times \tfrac{22}{7} = 176 \text{ centimètres;}$$

$\frac{132000}{176} = 750$; la hauteur de la colonne est de $7^m,50$.

6). La surface extérieure du cône sera exprimée par

$$2 \times 2,3 \times \tfrac{22}{7} \times 5,8 \times \tfrac{1}{2} = 2,3 \times 5,8 \times \tfrac{22}{7} = 41,92\tfrac{4}{7}.$$

Elle a par conséquent 41 décimètres carrés 92 centimètres carrés et $\frac{4}{7}$ de centimètre carré.

7). La base inférieure du seau a pour circonférence. . . . . $8 \times \frac{22}{7}$

La base supérieure. . . . . $6 \times \frac{22}{7}$

Somme des deux circonférences. . . . . . . $14 \times \frac{22}{7} = 44$.

La surface du seau sera donc $\frac{44 \times 3}{2} = 66$ décimètres carrés.

8). Un grand cercle de cette sphère aurait pour surface $\left(\frac{2,50}{2}\right)^2 \times \frac{22}{7} = (2,50)^2 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{4}$, et par conséquent la surface de la sphère égale à 4 fois celle d'un grand cercle, sera $(2,50)^2 \times \frac{22}{7} = 19,6428\,\frac{4}{7}$ mètres carrés.

9). Le méridien terrestre étant de 4000 myriamètres, le diamètre de la terre est $4000 : \frac{22}{7} = 4000 \times \frac{7}{22}$, et la moitié du rayon $1000 \times \frac{7}{22}$.

La surface du méridien, considéré comme un grand cercle, serait par conséquent $4000 \times 1000 \times \frac{7}{22}$ myriamètres carrés.

Et par suite la surface terrestre serait de

$$4000 \times 1000 \times \frac{7}{22} \times 4 = (4000)^2 \times \frac{7}{22} = 5090909\,\frac{1}{11}{}^{\text{myr. car}}.$$

10). La surface de la sphère qui aurait pour rayon le rayon polaire, serait exprimée par $4 \,.\, \frac{22}{7} \,.\, (6356740)^2$.

La surface de la sphère qui aurait pour rayon le rayon équatorial, serait exprimée par $4 \,.\, \frac{22}{7} \,.\, (6378000)^2$; il faudrait donc ajouter ces deux résultats et en prendre la moitié, ce qui se réduit à faire la somme des carrés des deux rayons, à multiplier le résultat par $\frac{22}{7}$ et à multiplier encore le produit par 2.

$$(6356740)^2 + (6378000)^2 = 81087027427600^{\text{mèt. car}}.$$

Multipliant ce nombre par $\frac{44}{7}$, on obtient

$$509689886687771\,\frac{3}{7} \text{ mètres carrés,}$$

ou en myriamètres carrés $5096898\,\frac{4}{5}$ environ, surface plus grande que celle qui a été trouvée dans le numéro précédent, ainsi que cela devait être.

XLII.

Mesure des volumes.

1). Le volume de la grande boîte est de $5 \times 4 \times 3 = 60$ décimètres cubes $= 60000$ centimètres cubes.

Le volume de la petite boîte est de $10 \times 8 \times 6 = 480$ centimètres cubes.

La première contient donc $\frac{60000}{480} = 125$ petites boîtes.

2). La capacité de la caisse est de $1,80 \times 1,50 \times 0,90 = 2$ mètres cubes 430 décimètres cubes $= 2430$ décimètres cubes; et comme le décimètre cube d'eau distillée pèse 1 kilogramme, le poids de l'eau contenue dans la caisse est de 2430 kilogrammes.

3). x étant la hauteur et le diamètre du litre, la surface de la base sera $\frac{1}{4} \,.\, \frac{22}{7}\, x^2 = \frac{11}{14}\, x^2$.

Et le volume intérieur sera représenté par

$$\frac{11}{14}\, x^2 \times x = \frac{11}{14}\, x^3.$$

Mais le volume du litre $= 1$ décimètre cube $= 1000000$ millimètres cubes.

On a donc $x^3 = 1000000 : \frac{11}{14} = \frac{14000000}{11} = 1272727$.

Extrayant la racine cubique de ce nombre, on aura $x = 108$ millimètres environ. C'est la hauteur et le diamètre du litre.

4). Le diamètre de la base du cylindre sera $3 \times \frac{7}{22} = \frac{21}{22}$ et la moitié du rayon $\frac{21}{88}$, par conséquent la surface de la base sera $3 \times \frac{21}{88} = \frac{63}{88}$.

Les $\frac{3}{4}$ de $5 = \frac{15}{4}$; le volume de l'eau renfermée dans le cylindre sera donc $\frac{63}{88} \times \frac{15}{4} = \frac{945}{352}$ mètres cubes $= \frac{945000}{352}$ décimètres cubes $= 2684$ litres 659 millilitres environ.

Le poids de l'eau est donc de 2684 kilogrammes 659 grammes.

5). La surface de la base du cylindre sera $\frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ centimètres carrés