PREMIERS ÉLÉMENTS

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. But de l'Algèbre.

1. L'Algèbre est la science qui a pour but de résoudre d'une manière générale les questions relatives aux nombres.

C'est-à-dire que, dans cette partie des mathématiques, on ne se contente pas de la solution particulière d'une question, on recherche encore la solution générale de toutes les questions du même genre.

Pour y parvenir, on représente par des lettres les grandeurs connues ou inconnues que l'on a à considérer, et à l'aide de signes abréviatifs on *écrit* les relations que la nature du problème établit entre ces grandeurs. L'Algèbre donne ensuite des règles pour *transformer* ces relations en d'autres plus simples, ou mieux appropriées au but qu'on se propose ; et c'est en déplaçant ainsi successivement la difficulté qu'on peut la diminuer et enfin la résoudre. On obtient alors la valeur de chaque inconnue sous la forme d'une expression *générale*, dans laquelle il n'y aura plus, dans chaque cas particulier, qu'à remplacer chaque lettre par sa valeur particulière, et à *effectuer* les calculs qui ne sont qu'indiqués. Une pareille expression générale est ce qu'on nomme une *formule algébrique*.

Un exemple éclaircira ces généralités.

2. Proposons-nous d'abord cette question particulière : *Trouver deux nombres dont la somme soit* 17 *et dont la différence soit* 5. Pour la résoudre, nous pourrons d'abord faire le raisonnement suivant :

La différence des deux nombres étant 5, le plus grand est égal au plus petit augmenté de 5; la somme des deux nombres est donc égale au plus petit nombre augmenté de 5, plus encore au plus petit nombre; ou, ce qui revient au même, à deux fois le plus petit nombre, plus 5. Mais cette somme doit faire 17 ; donc le double du plus petit nombre, plus 5, égale 17. Il en résulte que le double du plus petit nombre équivaut à 17 diminué de 5, ou à 12; et que par conséquent ce plus petit nombre lui-même est la moitié de 12, ou 6. Par suite, le plus grand nombre est égal à 6 plus 5, ou à 11.

On remarque que dans ce raisonnement certaines expressions se reproduisent un grand nombre de fois : ce sont *le plus petit nombre*, *le plus grand nombre*, *plus* ou *augmenté de*, *moins* ou *diminué de*, *égale* ou *équivaut à*. On pourra donc simplifier l'écriture de ce raisonnement en convenant, par exemple, de représenter *le plus petit nombre* par la lettre x, *le plus grand nombre* par la lettre y, les expressions *plus* ou *augmenté de* par le signe $+$, déjà employé en arithmétique, les expressions *moins* ou *diminué de* par le signe $-$, la division par 2, en mettant ce nombre 2 en

dénominateur, enfin les expression *égale* ou *équivaut à* par le signe $=$. A l'aide de ces conventions, le raisonnement ci-dessus pourra s'écrire de la manière suivante :

$$y - x = 5\,;$$

donc $\quad y = x + 5.$

Mais $\quad y + x = 17\,;$

donc $\quad x + 5 + x = 17,$

ou $\quad 2x + 5 = 17.$

De là résulte $\quad 2x = 17 - 5 = 12\,;$

donc $\quad x = \frac{12}{2}$ ou $x = 6.$

Par suite, $\quad y = 6 + 5 = 11.$

Chacune des lignes que nous venons d'écrire correspond à l'un des raisonnements partiels qui composent le raisonnement total écrit plus haut.

3. Les raisonnements seraient évidemment les mêmes si les nombres 17 et 5 étaient remplacés par des nombres quelconques. Mais les signes abréviatifs que nous avons employés ne suffisent pas pour mettre en évidence ce qu'il peut y avoir de commun dans les *résultats* des raisonnements, quelles que soient les données. Cela tient à ce que les résultats numériques auxquels on est conduit n'offrent aucune trace des opérations qui ont servi à les obtenir. Ainsi le nombre 6, qui a été obtenu en retranchant 5 de 17 et en prenant la moitié du reste, pourrait s'obtenir d'une infinité d'autres manières; et rien dans ce résultat brut 6 n'indique comment on y est parvenu.

Il n'en serait plus de même si, au lieu d'effectuer les opérations numériques au fur et à mesure qu'elles se présentent, on se contentait de les indiquer par des signes. C'est ce que nous allons montrer en reprenant le même problème ; mais afin de donner à la solution toute la généralité qu'elle comporte, nous remplacerons les données numériques par des lettres, auxquelles on pourra ensuite attribuer telles valeurs qu'on voudra. Nous désignerons donc par a la somme des deux nombres inconnus x et y, et par b leur différence, x désignant toujours le plus petit.

Cela posé, nous allons reprendre le raisonnement total ; nous le reproduirons ensuite en employant l'écriture algébrique ; et, afin de rendre la comparaison plus facile, nous aurons soin de marquer d'un numéro d'ordre commun les raisonnements partiels qui se correspondent :

[1] Le plus grand nombre, moins le plus petit, égale la différence donnée ;

[2] Donc, le plus grand nombre équivaut au plus petit, plus la différence donnée.

[3] Le plus grand nombre, plus le plus petit, égale la somme donnée ;

[4] Donc, le plus petit nombre augmenté de la différence donnée, plus encore le plus petit nombre, égale la somme donnée ;

[5] Ou bien, deux fois le plus petit nombre, plus la différence donnée, égale la somme donnée.

[6] Il en résulte que : deux fois le plus petit nombre égale la somme donnée, moins la différence donnée ;

[7] Et qu'enfin, le plus petit nombre égale la moitié de la différence donnée, moins la moitié de la somme donnée.

[8] Par suite, le plus grand nombre égale la moitié de la somme donnée, moins la moitié de la différence donnée, plus cette même différence ;

[9] Ce qui revient à la moitié de la somme donnée, plus la moitié de la différence donnée.

En écriture algébrique, les mêmes raisonnements deviendront :

[1] $y - x = b$;

[2] donc $y = x + b$.

[3] Mais $y + x = a$;

[4] donc $x + b + x = a$;

[5] ou bien $2x + b = a$.

[6] Il en résulte $2x = a - b$,

[7] et enfin $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$.

[8] Par suite $y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$,

[9] ou bien $y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Remarque. On voit que *lorsqu'on a la somme et la différence de deux nombres, on obtient le plus petit en retranchant la moitié de la différence de la moitié de la somme, et le plus grand en ajoutant la moitié de la différence à la moitié de la somme*; ce qui constitue un *théorème* de calcul.

4. Les valeurs générales

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

sont des *formules* qui donneront immédiatement les valeurs des inconnues dans chaque cas particulier; il suffira d'y remplacer a et b par les données particulières, et d'effectuer les calculs indiqués.

Si l'on demande, par exemple, de trouver deux nombres dont la somme soit 31 et la différence 13, on aura

$$x=\frac{31}{2}-\frac{13}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{31}{2}+\frac{13}{2},$$

ou $$x=\frac{18}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{44}{2},$$

ou enfin $$x=9 \quad \text{et} \quad y=22;$$

c'est-à-dire que le plus petit des deux nombres demandés est 9, et le plus grand 22. En effet, 22 diminué de 9 donne 13, et 22 augmenté de 9 donne 31.

5. La question très-simple que nous venons de traiter suffit néanmoins pour faire voir comment l'écriture algébrique, indépendamment de sa brièveté, permet de traiter un problème de la manière la plus générale, et conduit à des formules ou règles pour obtenir la solution dans chaque cas particulier.

La série des égalités [4], [5], [6], [7] du numéro (3) offre un exemple des transformations successives à l'aide desquelles on peut, d'une relation entre une inconnue et des quantités données, déduire une relation plus simple qui donne la valeur de cette inconnue.

Le but de l'Algèbre étant ainsi clairement établi, nous allons nous occuper des signes abréviatifs qu'elle emploie et des règles du calcul algébrique.

§ 2. Des signes algébriques.

6. Nous donnons dans ce paragraphe l'explication de tous les signes abréviatifs usités en Algèbre, quoique plusieurs d'entre eux ne soient pas, du moins dès à présent, indispensables à connaître. Notre but est d'éviter au lecteur, qui aurait oublié le sens d'un signe, la peine d'en chercher la définition dans le corps de l'ouvrage, en lui offrant un tableau qu'il lui sera toujours facile de consulter.

7. Le signe $+$ s'énonce *plus*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la somme. Ainsi $x+5$ signifie la somme des quantités x et 5; de même $x+a+5$ exprime la somme des quantités x, a et 5.

8. Le signe $-$ s'énonce *moins*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la différence, ou que de la première on retranche la seconde. Ainsi $x-5$ exprime la différence des quantités x et 5, ou ce qui reste de la quantité représentée par x quand on en retranche 5. De même $x-a-5$ indique ce qui reste de la quantité x quand on en retranche successivement la quantité a et le nombre 5.

9. Le signe $\times$ s'énonce *multiplié par*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait le produit. Ainsi $x\times 5$ indique le produit de x par 5. De même $x\times a\times 5$ exprime le produit des trois facteurs x, a et 5.

On remplace souvent le signe $\times$ par un simple point. Ainsi au lieu de $a\times b$ on peut écrire $a.b$.

Plus souvent encore on se contente, pour exprimer la multiplication, d'écrire les facteurs à la suite les uns des autres, sans aucune interposition de signe. Mais cela ne se fait que lorsqu'il n'y a pas plus d'un facteur numérique, et ce facteur se place alors le premier. Ainsi au lieu de $x\times a\times 5$ on peut écrire $x.a.5$, ou plus simplement $5ax$.

Le facteur numérique qui précède ainsi un produit de facteurs exprimés par des lettres, porte le nom de *coefficient*.

10. Quand un produit renferme plusieurs facteurs égaux, on se contente d'écrire l'un d'eux, et l'on place à sa droite, et un peu au-dessus, le nombre qui indique combien il y a de ces facteurs égaux. Ainsi, au lieu de 5×5 on peut écrire 5^2; au lieu de $x \times x \times x$ on peut écrire x^3.

Ce nombre qui indique combien il y a de facteurs égaux à celui qu'on n'écrit qu'une fois, porte le nom d'*exposant*, et le produit des facteurs égaux s'appelle *puissance* de l'un de ces facteurs. L'expression $5a^3b^2x$ indiquerait un produit composé du facteur 5, de 3 facteurs égaux à a, de 2 facteurs égaux à b, et enfin d'un facteur égal à x; ou bien le produit de 5 par la 3e puissance de a, par la 2e puissance de b, et par la 1re puissance de x.

11. Le signe $:$ s'énonce *divisé par;* placé entre deux quantités, il indique que la première est divisée par la seconde. Ainsi $x:5$ exprime le quotient de x par 5.

On indique encore la division en écrivant le quotient comme une fraction qui aurait pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur. Par exemple

$$x:5 \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{x}{5}.$$

Le trait horizontal qui sépare le dividende du diviseur se nomme *barre de division*.

12. Le signe $\sqrt{}$ indique la *racine carrée* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduirait la quantité placée sous le signe.

Par exemple $\sqrt{49}$ exprime la racine carrée de 49, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 49.

Le signe $\sqrt[3]{}$ indique de même la *racine cubique* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 3 fois comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe. Ainsi $\sqrt[3]{64}$ exprime la racine cubique de 64, ou le nombre qui, pris 3 fois comme facteur, donnerait pour produit 64.

Les signes $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, etc., indiqueraient de même la *racine quatrième*, la *racine cinquième*, etc., de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 4 fois, 5 fois, etc., comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe.

Ce signe porte en général le nom de *radical*, et le nombre placé au-dessus dans son ouverture est ce qu'on nomme l'*indice* du radical. Ainsi, dans $\sqrt[3]{}$, c'est 3 qui est l'indice du radical.

13. Les parenthèses ( ) expriment le *résultat* des opérations indiquées sur les quantités qu'elles enveloppent; les signes qui affectent les parenthèses indiquent les opérations à effectuer sur ce résultat. Ainsi,

$$x-(a-5)$$

indique que de la quantité x on retranche le résultat obtenu en retranchant 5 de a.

$$(x+5)\times a$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5, on multiplie le résultat, ou la somme, par a.

$$(x-2):a$$

indique qu'après avoir retranché 2 de x on divise le résultat, ou la différence, par la quantité a.

$$(x+5)^3 : (a-2)^2$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5 et formé un produit de 3 facteurs égaux à cette somme, on divise ce produit par le produit de 2 facteurs égaux à la différence entre a et 2.

14. Le signe $=$ s'énonce *égale;* placé entre des expressions numériques ou algébriques, il indique que les deux expressions sont égales en valeur.

Le signe $>$ s'énonce *plus grand que;* placé entre deux quantités, il indique que la première est plus grande que la seconde. Ainsi, $x>5$ signifie que la quantité représentée par x est plus grande que 5.

Le signe $<$ s'énonce *plus petit que;* placé entre deux quantités, il indique que la première est plus petite que la seconde. Ainsi, $x<5$ signifie que la quantité représentée par x est plus petite que 5.

15. Lorsque, dans une question, on a représenté certaines quantités par des lettres, on représente des quantités analogues par les mêmes lettres chargées d'un ou plusieurs accents. Les lettres chargées d'un accent s'énoncent en y ajoutant le mot *prime*; celles qui sont chargées de deux accents s'énoncent en y ajoutant le mot *seconde;* pour trois accents on ajoute le mot *tierce;* et ainsi de suite. Par exemple,

$$a,\ a',\ a'',\ a''',$$

s'énonceraient a, a prime, a seconde, a tierce.

L'usage que nous ferons des divers signes dont il vient d'être question, en fixera peu à peu le sens dans la mémoire du lecteur.

§ 3. Des diverses espèces d'expressions algébriques.

16. Les expressions algébriques les plus simples sont les lettres mêmes de l'alphabet destinées à représenter certaines quantités connues ou inconnues. On emploie ordinairement les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d, etc., pour représenter des quantités supposées connues, mais dont on ne particularise pas la valeur numérique. Les quantités inconnues se distinguent, au contraire, par les dernières lettres x, y, z, etc.

17. On donne, en général, le nom d'*expression algébrique* à tout ensemble de lettres, ou de lettres et de nombres, réunis par quelques-uns des signes énumérés dans le paragraphe précédent. Ainsi

$$15a^3b(x+5) : \sqrt{a-b}$$

est une expression algébrique.

Une expression algébrique est dite *rationnelle* quand elle ne contient point de signe radical. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Une expression algébrique est dite *entière* lorsque aucune division n'y est indiquée. Elle est *fractionnaire* dans le cas contraire.

Nous nous occuperons d'abord des expressions algébriques rationnelles et entières. Telle est l'expression

$$5a^3x - 4a^2x^2 + 16ax^3.$$

18. Dans une expression algébrique rationnelle et entière où il n'entre point de parenthèses, les différentes parties séparées par les signes $+$ ou $-$ sont ce que l'on appelle les différents *termes* de l'expression. Telles sont dans l'expression ci-dessus les parties $5a^3x$, $-4a^2x^2$ ou $+16ax^3$.

Une expression algébrique qui n'a qu'un terme prend le nom de *monome;* telle est l'expression $-4a^2x^3$.

Une expression algébrique qui a deux termes prend le nom de *binome;* telle est $3a-5b$.

Une expression algébrique qui a trois termes porte le nom de *trinome;* telle est $2x^2-3ax+5ab$.

En général, une expression algébrique qui a plusieurs termes porte le nom de *polynome*.

19. Dans un monome, il y a quatre éléments à distinguer :

1° Le signe dont il est précédé, et qui peut être $+$ ou $-$. Tout monome qui n'a pas de signe est censé précédé du signe $+$. Les monomes précédés (ou supposés précédés) du signe $+$ sont des monomes *additifs* ou *positifs*. Les monomes précédés du signe $-$ sont des monomes *soustractifs* ou *négatifs*.

2° Le facteur numérique, s'il y en a un. Ce facteur qu'on écrit le premier porte, ainsi que nous l'avons vu, le nom de *coefficient*.

3° Les lettres qui forment les autres facteurs.

4° Les *exposants* de ces lettres, ou les nombres écrits à droite et un peu au-dessus, qui indiquent combien de fois chaque lettre entre comme facteur dans le produit total.

Ainsi, dans $-4a^2x^3$, le signe est $-$, le coefficient est 4, les lettres sont a et x, les exposants sont 2 et 3.

20. Remarque. Si dans un monome on imagine que chaque lettre prenne une valeur numérique déterminée, le produit indiqué par ce monome prendra lui-même une

certaine valeur numérique, laquelle devra être prise *positivement* ou *négativement*, c'est-à-dire additivement ou soustractivement, suivant que le monome est affecté du signe $+$ ou du signe $-$. Si, par exemple, dans le monome $4a^2x^3$ on imagine que a ait la valeur 3 et x la valeur 5, le monome reviendra à $-4.3.3.5.5.5$ ou à -4500.

On pourrait attribuer aux lettres des valeurs numériques fractionnaires, sans que pour cela le monome cessât d'être *entier*, algébriquement parlant. Si par exemple on attribue à a la valeur $\frac{1}{2}$ et à x la valeur $\frac{1}{3}$, le monome $-4a^2x^3$ reviendra à $-\frac{1}{27}$.

C'est toujours sous cette forme numérique qu'il faut se représenter un monome; c'est-à-dire qu'on doit se le représenter comme composé d'une valeur absolue, entière ou fractionnaire, et d'un signe qui est $+$ ou $-$.

21. On nomme *degré* d'un monome la somme des exposants des lettres qui y entrent. Les lettres qui n'ont point d'exposant n'entrant qu'une fois comme facteur, sont supposées avoir pour exposant 1. Ainsi le degré du monome $5a^3b^2x$ est $3+2+1$ ou 6.

22. On nomme *termes semblables* dans un polynome ceux qui ne diffèrent que par le coefficient et par le signe. Ils contiennent par conséquent les mêmes lettres affectées des mêmes exposants. Ainsi dans le polynome

$$15a^3b^2x-6a^2b^2x^2+8a^3b^2x+7ab^2x^3-9a^3b^2x-4a^3b^2x,$$

il y a quatre termes semblables :

$$15a^3b^2x,\ +8a^3b^2x,\ -9a^3b^2x \text{ et } -4a^3b^2x.$$

On peut toujours réduire les termes semblables en un seul. Il est clair, en effet, dans l'exemple précédent, que quelle que soit la valeur numérique de a^3b^2x il faut prendre 15 fois cette valeur, ajouter encore 8 fois la même valeur, puis en retrancher d'abord 9 fois cette même valeur, et encore 4 fois cette valeur. Le résultat sera donc le même que si de $15 + 8$ ou 23 fois la valeur numérique dont il s'agit, on retranchait $9 + 4$ ou 13 fois cette même valeur, ce qui donnerait $23 - 13$ ou 10 fois cette valeur. L'ensemble des quatre termes considérés revient donc à $10a^3b^2x$.

Si l'ensemble des termes négatifs l'emportait sur celui des termes positifs, le résultat serait lui-même négatif.

On tire de là cette règle : *Pour effectuer la réduction des termes semblables, on fait la somme de tous les coefficients qui ont le signe + et la somme de tous les coefficients qui ont le signe —; on retranche la plus petite somme de la plus grande, on donne au reste le signe de la plus grande, et on écrit à la suite la partie littérale commune.*

23. Un polynome est dit *homogène* quand tous ses termes sont du même degré (**21**). Tel est le polynome

$$5ab^2x^3 - 6a^2b^2x^2 + 8a^4bx,$$

dont tous les termes sont du 6^e degré.

24. *Ordonner* un polynome, c'est écrire ses différents termes dans un ordre tel que les exposants d'une même lettre aillent toujours en augmentant ou toujours en diminuant d'un terme à l'autre. La lettre que l'on choisit pour guide prend le nom de *lettre ordonnatrice*; si l'on écrit les termes de manière que les exposants de la lettre *ordonnatrice* aillent en augmentant, on dit que le polynome est

ordonné *par rapport aux puissances croissantes* de cette lettre ; si les exposants de la lettre ordonnatrice vont en diminuant, on dit que le polynome est ordonné *par rapport aux puissances décroissantes* de cette lettre.

Ainsi le polynome, déjà considéré ci-dessus,

$$5ab^2x^3 - 6a^2b^2x^2 + 8a^4bx$$

est ordonné par rapport aux puissances croissantes de a, ou par rapport aux puissances décroissantes de x.

Dans la plupart des calculs algébriques on a soin d'ordonner ainsi les polynomes ; cette opération facilite les calculs, en leur donnant plus de symétrie. Il est clair d'ailleurs que, quel que soit l'ordre dans lequel on écrit les termes, soit additifs, soit soustractifs, d'un polynome, sa valeur demeure la même. Cette valeur se compose évidemment de la somme des valeurs numériques des termes additifs ou positifs, diminuée de la somme des valeurs numériques des termes soustractifs ou négatifs.