CHAPITRE II.

DES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES, ET DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

25. Nous ne nous occuperons dans ce chapitre et dans le suivant que des expressions algébriques rationnelles, en commençant par celles qui sont entières. Nous supposerons de plus, si elles sont monomes, qu'elles sont positives, ou que, si elles sont polynomes, l'ensemble des termes positifs l'emporte en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs.

Nous verrons plus tard (chap. IV) le sens qu'il faut attribuer aux opérations algébriques et aux quantités mêmes sur lesquelles elles s'effectuent, lorsque la condition dont nous venons de parler n'est pas remplie.

§ 1. De l'addition.

26. En ayant égard à la restriction exprimée dans le numéro précédent, additionner deux expressions algébriques, c'est ajouter à la valeur absolue de la première, la valeur absolue de la seconde.

1° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes semblables (**22**), on additionnera les coefficients, et l'on écrira à la suite de la somme la partie littérale commune. Par exemple, les deux expressions $5a^2x^3$ et $7a^2x^3$ ont pour somme $12a^2x^3$.

2° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes dissemblables, il suffira d'écrire le second à la suite

du premier en les séparant par le signe $+$; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification. Par exemple, la somme des expressions $5a^2x^3$ et $7a^3x^2$ est

$$5a^2x^3 + 7a^3x^2.$$

27. Supposons maintenant que les expressions à additionner soient polynomes; et qu'à $a - b$, par exemple, on se propose d'ajouter $c - d$.

Si à la suite de $a - b$ on écrivait le premier terme de $c - d$ en le faisant précéder du signe $+$, ce qui donnerait $a - b + c$, on aurait ajouté à $a - b$ une quantité trop grande de d; le résultat serait donc lui-même trop grand de d. Pour lui donner sa véritable valeur, il faut donc le diminuer de d, ce qui se fera en écrivant à sa suite $-d$; et l'on aura

$$a - b + c - d.$$

On voit qu'il a suffi d'écrire à la suite de $a - b$ chacun des termes de $c - d$, avec le signe qu'il avait; car le terme c qui n'était précédé d'aucun signe, devait être regardé comme précédé du signe $+$ (**19**).

En répétant les raisonnements qui précèdent pour des polynomes composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que les termes positifs du second polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $+$, et que les termes négatifs de ce même polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $-$. En d'autres termes : *Pour additionner deux polynomes, on écrit le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe.*

Remarque. La règle serait évidemment la même pour ajouter un polynome à un monome.

28. Si la somme présente alors des termes semblables, il faut en opérer la réduction (**22**), ce qui simplifie le résultat.

Soient, par exemple, à additionner les polynomes

$$4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 7ax^4 - 9x^5$$

et $$5a^3x^2 + 2a^2x^3 - 11ax^4 + 10x^5,$$

on trouvera $$9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5.$$

Soient de même, les polynomes :

$$a^2b + 3ab^2 - 4b^3$$

et $$5a^2b - 3ab^2 + b^3,$$

on trouvera $$6a^2b - 3b^3.$$

§ 2. De la soustraction.

29. D'après l'hypothèse admise dans ce chapitre, soustraire deux expressions algébriques l'une de l'autre, c'est retrancher de la valeur absolue de la première la valeur absolue de la seconde.

1° Si les deux expressions sont deux monomes semblables, on retranchera le coefficient de la seconde du coefficient de la première, ce que nous supposerons possible, et l'on écrira à la suite de la différence la partie littérale commune. Par exemple, la différence entre $7a^2bx$ et $4a^2bx$ est évidemment $3a^2bx$.

2° Si les expressions à soustraire sont deux monomes dissemblables, on écrira le second à la suite du premier en les séparant par le signe —; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification. Ainsi la différence des monomes $5ax^4$ et $3a^2x^3$ est $5ax^4 - 3a^2x^3$.

30. Supposons maintenant que l'expression à soustraire

soit polynome, celle dont on soustrait pouvant être polynome ou monome. Par exemple, supposons que de $a - b$ on veuille soustraire $c - d$.

Si à la suite de $a - b$ on écrivait le terme c avec le signe —, c'est-à-dire si de $a - b$ on retranchait c, ce qui donnerait $a - b - c$, on aurait évidemment retranché une quantité trop grande de d; le résultat serait donc trop petit de d. Pour lui rendre sa vraie valeur il faudra donc lui ajouter d, ce qui se fera en écrivant $+d$ à la suite, et l'on aura $a - b - c + d$.

On remarquera que le terme c qui avait, ou était censé avoir, le signe + dans le polynome à soustraire, a le signe — au résultat; et que le terme d, qui avait le signe — dans le polynome à soustraire, a le signe + au résultat.

En répétant les mêmes raisonnements et les mêmes observations pour des polynomes composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que tout terme ayant le signe + dans le polynome à soustraire devra être écrit au résultat avec le signe —, et que tout terme ayant le signe — dans le polynome à soustraire, devra être écrit au résultat avec le signe +. De là cette règle : *Pour soustraire un polynome d'un autre, on l'écrit à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes.*

Si la différence ainsi obtenue présente des termes semblables, il faut, pour simplifier le résultat, opérer la réduction (**22**) de ces termes.

Exemples. I. Du polynome $9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5$

on veut soustraire $4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 7ax^4 - 9x^5$,

on aura d'abord pour résultat

$$9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5 - 4a^3x^2 + 6a^2x^3 - 7ax^4 + 9x^5,$$

ou, en réduisant,

$$5a^3x^2 + 2a^2x^3 - 11ax^4 + 10x^5.$$

II. Si de $a^2 + 2ab + b^2$ on soustrait $a^2 - 2ab + b^2$, on trouvera pour reste

$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2,$$

ou, en réduisant, $4ab$.

31. *Remarque sur l'usage des parenthèses.* Il arrive souvent que l'on a intérêt à regarder un polynome, soit comme la somme, soit comme la différence de deux autres polynomes. Pour cela, on réunit entre parenthèses tous les termes qu'on regarde comme composant le polynome ajouté ou soustrait, et l'on fait précéder ces parenthèses du signe $+$ dans le premier cas, ou du signe $-$ dans le second. Mais, afin d'avoir égard aux règles données (**27**, **30**) pour l'addition ou pour la soustraction des polynomes, si l'on met $+$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses chacun avec le signe qu'il avait; tandis que si l'on met $-$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses, chacun avec un signe contraire. Si, dans la suite des calculs ou des raisonnements, on vient à supprimer les parenthèses, c'est-à-dire à effectuer l'opération indiquée sur le polynome qu'elle renfermait, ses termes conservent leur signe si les parenthèses étaient précédées du signe $+$, et chacun d'eux en change au contraire si les parenthèses étaient précédées du signe $-$. Dans un cas, comme dans l'autre, on reproduit ainsi le polynome total, tel qu'il était avant l'introduction des parenthèses.

Soit, par exemple, le polynome

$$a + b - c + d - e + f - g + h.$$

On pourra l'écrire de chacune des manières suivantes :

$$a + (b - c + d - e + f - g + h),$$
$$a + b - (c - d + e - f + g - h),$$
$$a + b - c + (d - e + f - g + h),$$
$$a + b - c + d - (e - f + g - h),$$

etc.,

et, en supprimant les parenthèses, c'est-à-dire en effectuant l'addition ou la soustraction indiquées, on reproduira le polynome primitif

$$a + b - c + d - e + f - g + h.$$

§ 3. De la multiplication.

32. D'après les restrictions établies au commencement de ce chapitre, le but que nous nous proposons dans la multiplication algébrique sera le même qu'en arithmétique; c'est-à-dire qu'étant données deux expressions algébriques, monomes ou polynomes, nous chercherons à en former une troisième dont la valeur numérique ou absolue soit le produit des valeurs absolues des deux premières.

Supposons donc d'abord que les deux facteurs soient deux monomes; par exemple $5a^3b^2x$ et $3a^2by^2$.

Le premier monome $5a^3b^2x$ représente le résultat qu'on obtiendrait en multipliant 5 par le produit de trois facteurs égaux à a, puis en multipliant le résultat de cette première multiplication par le produit de deux facteurs égaux à b, et en multipliant enfin le résultat de cette seconde multiplication par le facteur x. Or, on a vu en arithmétique que multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier ce nombre successivement par chacun de ces facteurs; et ce principe subsiste pour les quantités fractionnaires comme pour les nombres entiers. Le monome $5a^3b^2x$ pourra donc s'écrire

$$5\times a\times a\times a\times b\times b\times x.$$

De même, le monome $3a^2by^2$ pourra s'écrire

$$3\times a\times a\times b\times y\times y.$$

Et, en vertu du principe déjà invoqué ci-dessus, on obtiendra le produit demandé en multipliant le premier monome successivement par chacun des facteurs du second; ce qui donnera

$$5\times a\times a\times a\times b\times b\times x\times 3\times a\times a\times b\times y\times y.$$

Mais dans un produit de plusieurs facteurs, entiers ou fractionnaires, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit. On pourra donc, en rapprochant les facteurs égaux, écrire le produit de la manière suivante :

$$5\times 3\times a\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times x\times y\times y.$$

Le produit de 5 par 3 est 15. Ce produit doit être multiplié successivement par cinq facteurs égaux à a, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces cinq facteurs, ou par a^5. On aura donc ainsi $15\times a^5$. Ce produit doit donc être multiplié à son tour successivement par trois facteurs égaux à b, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces trois facteurs, ou par b^3. On aura ainsi $15\times a^5\times b^3$. Multipliant par x, il vient $15\times a^5\times b^3\times x$. Multipliant enfin successivement par deux facteurs égaux à y, ou, ce qui revient au même, par le produit effectué de ces deux facteurs, ou par y^2, il vient

enfin $15\times a^5\times b^3\times x\times y^2$; ou en supprimant les signes de multiplication :

$$15a^5b^3xy^2.$$

On voit 1° que le coefficient 15 du produit est le produit des coefficients 5 et 3 des deux facteurs monomes: 2° que toutes les lettres qui entrent dans l'un des facteurs entrent au produit; 3° que l'exposant 5 de la lettre a au produit est la somme des exposants 3 et 2 qu'elle avait dans les deux monomes; 4° que l'exposant 3 de la lettre b au produit est la somme des exposants 2 et 1 qu'elle avait dans les deux monomes; 5° que le facteur x, qui n'entre qu'au multiplicande, entre au produit avec le même exposant 1; 6° enfin que le facteur y^2, qui n'entre qu'au multiplicateur, entre au produit avec le même exposant 2.

De là cette règle : *Pour multiplier l'un par l'autre deux monomes positifs, il faut faire le produit des deux coefficients, écrire à la suite toutes les lettres qui entrent dans les deux facteurs monomes, et affecter chacune d'elles d'un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans ces deux facteurs*. (En appliquant cette règle, on voit que toute lettre qui n'entre que dans l'un des deux monomes entre au produit avec le même exposant.)

Exemple. Le produit de $7a^5b^3cd^2$ par $4ab^2dx^3$ est $28a^6b^5cd^3x^3$.

Remarque. Il résulte de la règle de la multiplication des monomes, que le degré (**21**) du produit est la somme des degrés des deux monomes facteurs. Ainsi le degré de $5a^3b^2x$ étant 6, et le degré de $3a^2by^2$ étant 5, le degré de leur produit $15a^5b^3xy^2$ est $6+5$ ou 11. De même, le degré de $7a^5b^3cd^2$ étant 11, et le degré de $4ab^2dx^3$ étant 7, le degré de leur produit $28a^6b^5cd^3x^3$ est $11+7$ ou 18.

33. Soit maintenant à multiplier un polynome par un monome, par exemple $a+b-c$ par m. Les lettres a, b, c, m représentent des quantités numériques entières ou fractionnaires. Pour fixer les idées et faciliter le discours, supposons que le multiplicateur monome m ait pour valeur $\frac{4}{3}$; la multiplication aura pour but de prendre les $\frac{4}{3}$ du multiplicande. Si celui-ci se réduisait à $a+b$, on obtiendrait évidemment le produit en prenant les $\frac{4}{3}$ de a, puis les $\frac{4}{3}$ de b, et faisant la somme des produits partiels obtenus; c'est-à-dire que le produit total s'obtiendrait en multipliant séparément a et b par m et faisant la somme de ces produits partiels, ce qui donnerait $am+bm$. Mais en opérant ainsi on a pris les $\frac{4}{3}$ d'un polynome trop grand de c, puisque ce n'était pas $a+b$ qu'il fallait multiplier, mais bien $a+b-c$, ou $a+b$ diminué de c. Le produit obtenu $am+bm$ est donc trop grand des $\frac{4}{3}$ de c ou du produit cm; pour lui rendre sa véritable valeur il faut donc en retrancher cm, ce qui donnera

$$am+bm-cm.$$

Comme on pourrait répéter le même raisonnement pour chaque terme soustractif, on voit que *pour faire le produit d'un polynome par un monome* (positif), *il faut multiplier séparément chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur, en donnant à chaque terme du produit le signe du terme du multiplicande qui l'a fourni.*

Ainsi le produit de $5ax^2+3a^2x-4a^3$ par $6a^2bx$ serait

$$30a^3bx^3+18a^4bx^2-24a^5bx.$$

De même, le produit de $3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4$ par $4ab^2c$ serait

$$12a^4b^3c-8a^3b^4c+20a^2b^5c-4ab^6c.$$

34. Soit enfin à multiplier un polynome par un polynome, par exemple $a-b$ par $c-d$ pour plus de simplicité. Faisons d'abord le produit du multiplicande $a-b$ par le terme c du multiplicateur, ce qui donnera, d'après ce que l'on vient de voir, $ac-bc$.

En opérant ainsi, on a multiplié le multiplicande par une quantité trop grande de d, puisque ce n'était pas par c qu'il fallait multiplier, mais bien par c diminué de d. Il s'ensuit que le résultat est lui-même trop grand du produit de $a-b$ par d, c'est-à-dire de $ad-bd$.

Pour lui rendre sa véritable valeur, il faut donc en retrancher $ad-bd$, ce qui donne, d'après les règles de la soustraction, c'est-à-dire en changeant le signe de chaque terme du polynome à soustraire,

$$ac-bc-ad+bd.$$

En examinant ce résultat, on voit qu'il contient les produits partiels de chaque terme du multiplicande $a-b$ par chaque terme du multiplicateur $c-d$. Quant au signe dont chaque produit partiel est affecté, on remarque 1° que les termes a et c, qui avaient (ou étaient censés avoir) le signe $+$, ont donné un produit ac qui figure au résultat avec le signe $+$; 2° que les termes b et c, dont l'un avait le signe $-$ et l'autre le signe $+$, ont fourni au résultat le terme négatif $-bc$; 2° que les termes a et d, dont l'un avait le signe $+$ et l'autre le signe $-$, ont fourni au résultat le terme négatif $-ad$; 4° enfin que les termes b et d, qui avaient tous deux le signe $-$, ont fourni au résultat le terme positif $+bd$.

En résumant, on voit que deux termes de même signe ont donné un produit positif, et que deux termes de signe contraire ont donné un produit négatif.

Les mêmes raisonnements appliqués à deux polynomes quelconques montreraient que ces règles sont générales, et que *deux termes de même signe donnent toujours un produit affecté du signe* $+$, *et que deux termes de signe contraire donnent un produit affecté du signe* $-$. C'est en cela que consiste ce qu'on appelle la *règle des signes* dans la multiplication.

On l'énonce quelquefois en disant d'une manière abrégée que

$+$	multiplié par	$+$	donne	$+$
$+$		$-$		$-$
$-$		$+$		$-$
$-$		$-$		$+$

On dira donc que, *pour multiplier deux polynomes l'un par l'autre, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en ayant égard à la règle des signes.*

Si le résultat présente des termes semblables, on en opère la réduction.

35. Soit, par exemple, à multiplier

$$5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \text{ par } 6ax^2 - 2a^2x + 3a^3.$$

On disposera ces calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrrrrrr}
\text{Multiplicande} & 5ax^3 & -3a^2x^2 & -4a^3x & +a^4 & & \\
\text{Multiplicateur} & 6ax^2 & -2a^2x & +3a^3 & & & \\
\hline
1^{\text{er}} \text{ produit partiel} & 30a^2x^5 & -18a^3x^4 & -24a^4x^3 & +6a^5x^2 & & \\
2^{\text{e}} \quad \text{»} & & -10a^3x^4 & +6a^4x^3 & +8a^5x^2 & -2a^6x & \\
3^{\text{e}} \quad \text{»} & & & +15a^4x^3 & -9a^5x^2 & -12a^6x & +3a^7 \\
\hline
\text{Produit total réduit} & 30a^2x^5 & -28a^3x^4 & -3a^4x^3 & +5a^5x^2 & -14a^6x & +3a^7
\end{array}$$

On écrit d'abord le multiplicande; on écrit au-dessous le multiplicateur; on tire un trait horizontal au-dessous du multiplicateur. On fait le produit du multiplicande par le premier terme du multiplicateur; c'est le premier produit partiel qu'on écrit au-dessous du trait horizontal. On fait le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur; c'est le second produit partiel qu'on écrit au-dessous du premier. On obtient ainsi autant de produits partiels qu'il y a de termes au multiplicateur. Au-dessous du dernier produit partiel on tire un second trait horizontal, et au-dessous de ce trait on écrit le produit total, qui est la somme des produits partiels, somme dans laquelle on effectue, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Il convient d'ordonner (**24**) le multiplicande, le multiplicateur et le produit total par rapport aux puissances d'une même lettre; les calculs ayant alors plus de symétrie sont plus faciles à vérifier. Il convient aussi d'écrire chaque terme d'un produit partiel au-dessous du terme semblable, s'il y en a, dans le produit partiel précédent; la réduction des termes semblables se trouve ainsi facilitée; il est aussi plus facile d'ordonner le produit total.

36. Nous placerons ici trois produits dont on fait un fréquent usage en Algèbre, et qui fournissent autant de théorèmes du calcul.

I.
$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le carré de la somme de deux quantités renferme le carré de la première, plus le double produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

(On se rappelle qu'en arithmétique on nomme *carré* d'une quantité le produit de cette quantité par elle-même.)

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

II.
$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le carré de la différence de deux quantités renferme le carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

III.
$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 -b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le produit de la somme de deux quantités, par leur différence, équivaut à la différence de leurs carrés.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

37. Remarque I. Si le multiplicande et le multiplicateur sont homogènes (**25**), le produit est lui-même homogène; car chaque terme du produit s'obtenant en multipliant un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur, le degré de ce terme du produit est la somme des degrés des deux termes qui l'ont fourni (**32**), c'est-à-dire la somme des degrés du multiplicande et du multiplicateur, puisque ceux-ci sont homogènes. Tous les termes du produit sont donc du même degré, c'est-à-dire qu'il est homogène.

On voit de plus que son degré est la somme des degrés des deux polynomes facteurs.

Ainsi, dans l'exemple donné au n° **35**, le multiplicande est homogène et du 4ᵉ degré, le multiplicateur est homogène et du 3ᵉ degré, le produit est homogène et du 7ᵉ degré.

38. Remarque II. Par suite des réductions qui s'opèrent entre les termes semblables, certains termes du produit peuvent disparaître; c'est ce qu'on voit dans l'exemple III du n° **36**. Mais il y a toujours au moins deux termes qui ne disparaissent pas : ces termes sont, si le multiplicande et le multiplicateur ont été ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

En effet : si, pour fixer les idées, on suppose ces polynomes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, le premier terme du multiplicande et le premier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance plus élevée qu'aucun des termes qui suivent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance plus élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra conséquemment se réduire avec aucun autre. De même : le dernier terme du multiplicande et le dernier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance moins élevée qu'aucun des termes qui précèdent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance moins élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra en conséquence se réduire avec aucun autre. Tels sont, dans la multiplication du n° 35, le premier terme $30a^2x^5$ du produit et le dernier $+3a^7$.

Quelles que soient les réductions qui s'opèrent, il restera donc au moins deux termes au produit. La multiplication suivante offre un exemple du cas où il ne reste que ces deux termes :

$$\begin{array}{l} a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ a-b \\ \hline a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\ \quad -a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5 \\ \hline \qquad\qquad a^5-b^5 \end{array}$$

§ 4. De la division.

39. La division, en Algèbre comme en arithmétique, est une opération par laquelle, étant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, on se propose de trouver le second facteur. Le produit donné est le dividende, le facteur donné est le diviseur, le facteur cherché est le quotient.

Soit d'abord à diviser un monome (positif) par un autre monome (également positif), par exemple, $15a^5b^3xy^2$ par $5a^3b^2x$.

D'après les règles de la multiplication des monomes (**32**) le coefficient 15 du dividende a été formé en multipliant le coefficient 5 du diviseur par le coefficient inconnu du quotient; on obtiendra donc ce coefficient inconnu en divisant 15 par 5, ce qui donne 3. Le quotient ne peut contenir aucune lettre qui ne soit pas au dividende. Or, l'exposant 5 de la lettre a au dividende est la somme de l'exposant 3 de la même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 3 de 5, ce qui donne pour reste 2 et montre que le quotient doit contenir le facteur a^2. De même, l'exposant 3 de la lettre b au dividende est la somme de l'exposant 2 de cette même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 2 de 3, ce qui donne pour reste 1, et montre que le quotient contiendra le facteur b. La lettre x entrant avec le même exposant au dividende et au diviseur, ne saurait entrer au quotient. La lettre y n'entrant pas au diviseur, doit entrer au quotient avec le même exposant qu'au dividende. Le quotient sera donc $3a^2by^2$. Et, en effet, en multipliant $5a^3b^2x$ par $3a^2by^2$ on retrouve bien $15a^5b^3xy$.

De là cette règle : *Pour diviser deux monomes* (positifs) *l'un par l'autre, divisez le coefficient du monome dividende par le coefficient du monome diviseur, vous obtiendrez le* *coefficient du monome quotient. Examinez successivement chaque lettre du dividende. Si elle est commune au dividende et au diviseur, et que son exposant au dividende surpasse son exposant au diviseur, écrivez-la au quotient avec un exposant égal à la différence de ces exposants. Si elle a le même exposant au dividende et au diviseur, dispensez-vous de l'écrire au quotient. Si elle n'entre qu'au dividende, écrivez-la avec le même exposant au quotient.*

EXEMPLE. Le quotient de $28a^6b^5cd^3x^3$ par $7a^5b^3cd^2$ est $4ab^2dx^3$.

40. REMARQUE I. La division serait impossible : 1° si le diviseur contenait une lettre qui n'entrât pas au dividende; 2° si une lettre avait au diviseur un exposant plus élevé qu'au dividende; 3° si le coefficient du dividende n'était pas exactement divisible par le coefficient du diviseur.

REMARQUE II. Lorsqu'une lettre entre au dividende et au diviseur avec le même exposant, si on lui appliquait la même règle qu'aux autres lettres, on devrait l'écrire au quotient avec un exposant égal à la différence des exposants qu'elle a au dividende et au diviseur, c'est-à-dire avec l'exposant *zéro*. Ainsi, le quotient de $15a^3b^2x$ par $3a^3b$ serait $5a^0bx$.

Or, nous avons vu que le quotient doit être $5bx$; le facteur a^0 représente donc un facteur qui n'altère pas le produit, c'est-à-dire qu'il représente l'unité.

On se sert quelquefois de ce symbole pour conserver au quotient la trace d'un facteur du dividende qui disparaîtrait sans cela. Mais il faut bien se rappeler qu'une expression telle que a^0 est le symbole de l'unité, ou que a^0 est égal à 1.

41. Soit maintenant à diviser un polynome par un monome (positif), par exemple $30a^3bx^3 + 18a^4bx^2 - 24a^5bx$ par $6a^2bx$.

Le quotient sera un polynome, car le produit d'un monome par un monome serait un monome. Or, on a vu (33) que le produit d'un polynome par un monome est un polynome composé du même nombre de termes affectés des mêmes signes, et qu'ils s'obtiennent en multipliant respectivement chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur. On formera donc le quotient demandé en divisant chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affectant chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.

Le quotient de $30a^3bx^3$ par $6a^2bx$ est $5ax^2$; on l'écrira au quotient total, où il sera censé avoir le signe $+$, attendu qu'il sera le premier. Le quotient de $18a^4bx^2$ par $6a^2bx$ est $3a^2x$; on l'écrira avec le signe $+$ à la suite du premier terme du quotient total. Le quotient de $24a^5bx$ par $6a^2bx$ est $4a^3$; on l'écrira avec le signe $-$ à la suite des deux premiers termes du quotient total. Le quotient total sera ainsi $5ax^2 + 3a^2x - 4a^3$. On peut vérifier, en effet, qu'en multipliant ce quotient par le diviseur $6a^2bx$ on reproduirait le polynome dividende.

On voit que *pour diviser un polynome par un monome* (positif), *il faut diviser chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affecter chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.*

Ainsi, le quotient de $12a^4b^3c - 8a^3b^4c + 20a^2b^5c - 4ab^6c$ par $4ab^2c$ est $3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4$.

REMARQUE. La division serait impossible si un terme quel-