conque du polynome dividende n'était pas exactement divisible (**40**) par le monome diviseur.

42. Lorsque tous les termes d'un polynome admettent un facteur commun, il est souvent utile de mettre ce facteur *en évidence*, c'est-à-dire de décomposer le polynome en deux facteurs dont l'un soit le facteur monome commun à tous ses termes, et dont l'autre soit le quotient du polynome proposé par le facteur commun ; ce quotient ou ce facteur polynome se met alors entre parenthèses. Par exemple, on a vu tout à l'heure que le polynome

$$30a^3bx^3 + 18a^4bx^2 - 24a^5bx$$

était divisible par $6a^2bx$ et donnait pour quotient

$$5ax^2 + 3a^2x - 4a^3.$$

On peut donc écrire ce polynome de la manière suivante :

$$(5ax^2 + 3a^2x - 4a^3)6a^2bx$$

qui exprime le produit du quotient par le diviseur (**13**). Le facteur monome peut se mettre indifféremment à droite ou à gauche de la parenthèse.

Soit de même le polynome

$$12a^4b^3c - 8a^3b^4c + 20a^2b^5c - 4ab^6c.$$

On reconnaît que le facteur $4ab^2c$ est commun à tous ses termes ; on peut donc mettre ce facteur en évidence, en écrivant entre parenthèses le quotient du polynome proposé par le facteur mis hors parenthèses. On aura ainsi

$$4ab^2c(3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4).$$

43. Soit enfin à diviser un polynome par un polynome ; par exemple,

$$30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$$

par $$5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4.$$

On commencera par écrire le diviseur à la droite du dividende, en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre, s'ils n'étaient pas déjà ordonnés ; et on les séparera par un trait vertical. On tirera un trait horizontal au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient. Ces dispositions sont indiquées dans le tableau ci-contre, les polynomes y sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x.

Concevons que le quotient inconnu soit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Comme le dividende est le produit du diviseur par le quotient, le produit partiel du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient doit donner le premier terme du dividende ; car on a vu (**38**) que ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le premier terme du quotient

$$\begin{array}{l|l}
\text{Dividende.} & \text{Diviseur.} \\
\quad 30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7 & 5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4 \\ \cline{2-2}
\quad -30a^2x^5 + 18a^3x^4 + 24a^4x^3 - 6a^5x^2 & 6ax^2 - 2a^2x + 3a^3 \quad \text{Quotient.} \\ \cline{1-1}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste}\ldots - 10a^3x^4 + 21a^4x^3 - a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7 & \\
\qquad\qquad + 10a^3x^4 - 6a^4x^3 - 8a^5x^2 + 2a^6x & \\ \cline{1-1}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste}\ldots\ldots\ldots + 15a^4x^3 - 9a^5x^3 - 12a^6x + 3a^7 & \\
\qquad\qquad\qquad - 15a^4x^3 + 9a^5x^2 + 12a^6x - 3a^7 & \\ \cline{1-1}
\text{3}^{\text{e}}\text{ reste}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 &
\end{array}$$

en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

Mais ici il sera nécessaire d'avoir égard aux signes, car en ordonnant les deux polynomes il peut également arriver que le premier terme ait le signe $+$ ou le signe $-$. Or, la *règle des signes* donnée pour la multiplication (34) nous apprend que si le produit de deux termes est positif, ces deux termes sont de même signe ; et que si le produit est négatif, les deux termes sont de signe contraire. On peut donc former le tableau suivant :

$+$	divisé par	$+$	donne au quotient	$+$
$+$		$-$		$-$
$-$		$+$		$-$
$-$		$-$		$+$

ce qui montre que *le quotient de deux termes de même signe a le signe* $+$, *et que le quotient de deux termes de signe contraire a le signe* $-$; règle qui est la même que pour la multiplication.

Dans l'exemple actuel, le premier terme du dividende et le premier terme du diviseur étant positifs, le premier terme du quotient sera positif. On divisera donc $30a^2x^5$ par $5ax^3$, ce qui donne $6ax^2$, et l'on écrira ce premier terme du quotient au-dessous du diviseur.

Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, contient tous les produits partiels du diviseur par les différents termes du quotient. Le premier terme du quotient étant trouvé, on peut multiplier le diviseur par ce terme, et retrancher le produit ainsi obtenu du dividende ; le reste ne contiendra plus que les produits du diviseur par les termes suivants du quotient, et sera par conséquent un nouveau dividende plus simple sur lequel on pourra opérer comme sur le premier. Ce calcul se fait de la manière suivante : $+5ax^3$ multiplié par $+6ax^2$ donne $+30a^2x^5$, et, pour soustraire, $-30a^2x^5$, qu'on écrit au-dessous du premier terme du dividende; $-3a^2x^2$ par $+6ax^2$ donne $-18a^3x^4$, et, pour soustraire, $+18a^3x^4$, qu'on écrit au-dessous du dividende, à la suite du terme précédent; $-4a^3x$ par $+6ax^2$ donne $-24a^4x^3$, et, pour soustraire, $+24a^4x^3$, qu'on écrit au-dessous du dividende à la suite des deux termes précédents ; enfin $+a^4$ par $+6ax^2$ donne $+6a^5x^2$, et, pour soustraire, $-6a^5x^2$, qu'on écrit encore au-dessous du dividende à la suite des trois termes précédents. On tire un trait horizontal au-dessous du polynome soustrait ; on opère la réduction des termes semblables, et l'on obtient pour premier reste

$$-10a^3x^4+21a^4x^3-a^5x^2-14a^6x+3a^7.$$

Ce premier reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné comme le diviseur et le quotient, par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On aura donc le second terme du quotient en divisant le premier terme du premier reste, ou second dividende, par le premier terme du diviseur. Or, $-10a^3x^4$ divisé par $+5ax^3$ donne $-2a^2x$; on écrit ce quotient partiel à la suite du premier terme du quotient total.

Connaissant le second terme du quotient, on peut faire le produit du diviseur par ce second terme, et retrancher ce produit du premier reste ; le second reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient. En effectuant ces calculs de la même manière que ci-dessus, on obtient pour second reste

$$+15a^4x^3-9a^5x^2-12a^6x+3a^7.$$

Ce second reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le troisième terme du quotient en divisant le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur. Or, $+15a^4x^3$ divisé par $+5ax^3$ donne $+3a^3$; on écrit ce quotient partiel à la suite des deux premiers termes du quotient total.

Connaissant le troisième terme du quotient, on peut multiplier le diviseur par ce terme, et soustraire le produit du second reste ; le troisième reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient, s'il y en a. En effectuant ces calculs, on trouve *zéro* pour troisième reste ; il en résulte que l'opération est terminée, et que le quotient total est

$$6ax^2-2a^2x+3a^3.$$

En multipliant, en effet, le diviseur par ce quotient, on reproduirait le dividende (35).

De tout ce qui précède, on tire la règle suivante : *Pour diviser deux polynomes l'un par l'autre, on écrit le diviseur à la droite du dividende en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre; on les sépare par un trait vertical, et l'on tire un trait horizontal au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient. On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtient ainsi le premier terme du quotient, qu'on écrit au-dessous du diviseur. On multiplie le diviseur par ce terme; on soustrait le produit du dividende, et l'on obtient un premier reste. On divise le premier terme de ce premier reste par le premier terme du diviseur; on obtient ainsi le second terme du quotient; on l'écrit à la suite du premier; on multiplie le diviseur par ce second terme; on soustrait le produit du premier reste, et l'on obtient un second reste. On opère sur ce second reste et sur les suivants, comme sur le premier; on obtient ainsi les termes successifs du quotient. Si le dividende est le produit exact du diviseur par un polynome entier, on obtient* zéro *pour dernier reste, et l'opération est terminée.*

(*Dans chaque division partielle de monomes, il faut observer la* règle des signes, *qui consiste en ce que deux termes de même signe donnent un quotient positif, et deux termes de signe contraire un quotient négatif.*)

44. Remarque I. On reconnaît que la division ne peut s'effectuer exactement : 1° lorsque le diviseur contient une lettre qui n'entre pas au dividende ; 2° lorsque la plus haute puissance d'une lettre au diviseur surpasse la plus haute puissance de la même lettre au dividende ; 3° lorsque, après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport aux puissances, décroissantes par exemple, d'une même lettre, quelle qu'elle soit, le premier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur ; 4° lorsque le dernier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le dernier terme du diviseur ; 5° enfin lorsque, dans le courant de l'opération, le premier terme d'un reste n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur.

Remarque II. Lorsqu'il se manifeste une impossibilité dans le courant de l'opération, le reste auquel on est parvenu est ce qu'on appelle le *reste de l'opération*. Si l'on ajoute ce reste au produit du diviseur par l'ensemble des termes obtenus au quotient on doit reproduire le dividende.

Soit, par exemple, à diviser

$$12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5$$

par

$$4ax^2+5a^2x-6a^3.$$

En opérant comme précédemment,

$$\begin{array}{lrl}
 & 12a^2x^3+\ 7a^3x^2-\ 8a^4x+\ 2a^5 & \big|\ \underline{4ax^2+5a^2x-6a^3} \\
 & \underline{-12a^2x^3-15a^3x^2+18a^4x\qquad} & \ \ 3ax\ -2a^2 \\
1^{\text{er}}\ \text{reste} & -\ 8a^3x^2+10a^4x+\ 2a^5 & \\
 & \underline{+\ 8a^3x^2+10a^4x-12a^5} & \\
2^{\text{e}}\ \text{reste} & +20a^4x-10a^5, &
\end{array}$$

on obtient d'abord au quotient les deux termes $3ax$ et $-2a^2$; puis l'on parvient à un second reste $20a^4x-10a^5$ dont le premier terme n'est pas divisible par le premier terme du diviseur, puisqu'il contient la lettre ordonnatrice à une puissance moindre. Il en résulte que l'opération ne peut s'effectuer exactement, et que le dividende est égal au produit du diviseur par $3ax-2a^2$, augmenté du reste $20a^4x-10a^5$; ce qu'il est facile de vérifier.

§ 5. Des fractions algébriques.

45. Lorsqu'une division est impossible, on se contente de l'indiquer : pour cela on écrit le diviseur au-dessous du dividende en les séparant par un trait horizontal appelé *barre de division* (**11**). Ainsi, dans l'exemple du nº **44**, lorsque l'on est parvenu au reste $20a^4x-10a^5$, l'opération ne pouvant être continuée, on indiquerait le quotient de ce reste par le diviseur, sous la forme

$$\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3},$$

et cette expression serait ce qu'il faut ajouter au quotient déjà obtenu pour le compléter.

Une expression de cette forme est ce qu'on nomme une *fraction algébrique;* mais le sens qu'on attache ici au mot fraction n'est point le même qu'en arithmétique. Dans une fraction ordinaire, en effet, les deux termes sont nécessairement entiers ; dans une fraction algébrique, au contraire, les deux termes peuvent prendre des valeurs quelconques, entières ou fractionnaires, par suite des valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent. (Ils peuvent même prendre des valeurs négatives, mais nous faisons abstraction de ce cas dans le présent chapitre.) On ne doit donc entendre par fraction algébrique qu'un quotient dans lequel le dividende prend le nom de numérateur, et le diviseur celui de dénominateur.

Le calcul des fractions algébriques a d'ailleurs la plus grande analogie avec celui des fractions ordinaires.

46. *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant à la fois ses deux termes par une même quantité.*

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que, par suite des valeurs attribuées aux lettres qui entrent dans la fraction algébrique, son numérateur prenne la valeur $\frac{6}{5}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{11}$, la valeur de la fraction sera le quotient de ces deux expressions fractionnaires, c'est-à-dire

$$\frac{6 \times 11}{5 \times 7}.$$

Concevons maintenant que l'on multiplie les deux termes $\frac{6}{5}$ et $\frac{7}{11}$ par une même quantité qui ait la valeur $\frac{4}{3}$; ces deux termes deviendront respectivement $\frac{6 \times 4}{5 \times 3}$ et $\frac{7 \times 4}{11 \times 3}$; leur quotient deviendra donc

$$\frac{6 \times 4 \times 11 \times 3}{5 \times 3 \times 7 \times 4},$$

ou, en supprimant les facteurs communs 4 et 3,

$$\frac{6 \times 11}{5 \times 7},$$

c'est-à-dire que le quotient n'a pas changé.

On démontrerait de la même manière qu'*une fraction algébrique ne change pas de valeur quand on divise ses deux termes par une même quantité.*

Ainsi les expressions

$$\frac{2a}{3b}, \quad \frac{4a^2}{6ab}, \quad \frac{4a^2 - 2ab}{6ab - 3b^2},$$

sont des fractions équivalentes; car on obtient la seconde en multipliant les deux termes de la première par $2a$, et la troisième en multipliant les deux termes de la première par $2a - b$; ou bien on obtiendrait la première en divisant les deux termes de la seconde par $2a$, ou les deux termes de la troisième par $2a - b$.

47. Pour simplifier une fraction, il faut supprimer les facteurs communs à ses deux termes. Ces facteurs sont faciles à apercevoir si les deux termes sont monomes.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{48a^3b^2x^4}{60a^2bx^6},$$

on aperçoit sur-le-champ que les deux termes sont divisibles par $12a^2bx^4$, et, en effectuant la division, il vient

$$\frac{4ab}{5x^2}.$$

Si les deux termes sont polynomes, il faut chercher les facteurs communs à tous les termes de chaque polynome, et les mettre en évidence (**42**); on aperçoit alors facilement les facteurs monomes qui peuvent être communs aux deux termes de la fraction. Quant aux polynomes mis entre parenthèses, il arrive quelquefois qu'ils se décomposent à vue en facteurs polynomes plus simples, et que cette décomposition met en évidence des facteurs polynomes communs aux deux termes de la fraction.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{36a^5b^2 - 36a^3b^4}{54a^4b^3 - 108a^3b^4 + 54a^2b^5}.$$

Le numérateur peut se mettre sous la forme

$$36a^3b^2(a^2 - b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au n° **36**,

$$36a^3b^2(a + b)(a - b).$$

Le dénominateur peut s'écrire

$$54a^2b^3(a^2 - 2ab + b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au lieu cité,

$$54a^2b^3(a-b)(a-b).$$

La fraction proposée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{36a^3b^2(a+b)(a-b)}{54a^2b^3(a-b)(a-b)}.$$

On reconnaît alors que ses deux termes sont divisibles par $18a^2b^2$ et par $(a-b)$; supprimant ces facteurs communs, il reste

$$\frac{2a(a+b)}{3b(a-b)} \quad \text{ou} \quad \frac{2a^2+2ab}{3ab-3b^2}.$$

L'habitude de ces transformations est d'un grand secours dans les calculs algébriques.

48. Si l'on a une fraction algébrique jointe à une quantité entière, on peut réduire le tout en une seule expression fractionnaire d'après les mêmes règles qu'en arithmétique. En effet, il est clair qu'on ne change pas la valeur de la quantité entière en la multipliant et en la divisant en même temps par le dénominateur de la fraction; on obtient ainsi deux quantités fractionnaires de même dénominateur; et l'on peut les réunir en une seule, en faisant la somme des numérateurs et donnant à cette somme le dénominateur commun; car diviser une somme revient à diviser ses parties et à faire la somme des quotients.

Soit, par exemple, l'expression

$$4b + \frac{(a-b)^2}{a} \quad \text{ou} \quad 4b + \frac{a^2-2ab+b^2}{a},$$

on aura successivement

$$\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{a}$$

ou enfin (36) $\dfrac{(a+b)^2}{a}.$

Réciproquement : lorsqu'on a une expression fractionnaire dans laquelle, le numérateur et le dénominateur étant ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme du numérateur est exactement divisible par le premier terme du dénominateur, on peut opérer une ou plusieurs divisions partielles, qui fourniront un quotient partiel entier, et l'on complétera ce quotient par une fraction ayant pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur, c'est-à-dire le dénominateur de l'expression proposée.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

On a vu au n° **44** que si l'on divise le numérateur par le dénominateur on obtient pour quotient $3ax-2a^2$ et pour reste $20a^4x-10a^5$. On pourra donc mettre la fraction proposée sous la forme

$$3ax-2a^2+\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

Soit de même la fraction

$$\frac{(a-b)^2}{a-2b} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2-2ab+b^2}{a-2b}.$$

Effectuant la division, on obtient pour quotient a et pour reste b^2; on peut donc écrire la fraction proposée sous la forme

$$a + \frac{b^2}{a - 2b}.$$

Ces diverses transformations sont au nombre de celles dont l'Algèbre fait un plus fréquent usage, soit dans la solution des problèmes, soit dans la démonstration des théorèmes de calcul.

49. Pour additionner deux fractions algébriques de même dénominateur; il suffit évidemment d'additionner les numérateurs et de donner à la somme le dénominateur commun; puisque, comme nous l'avons rappelé déjà, diviser une somme est la même chose que de diviser séparément les parties et de faire la somme des quotients.

Si les fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, on les réduira au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, ce qui ne changera pas leur valeur (**46**).

Soit, par exemple, à additionner les fractions

$$\frac{a^2 - ab}{a + b}, \quad \frac{a^2 + ab}{a - b}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Multipliant les deux termes de la première par $a - b$ et par a, les deux termes de la seconde par $a + b$ et par a, et les deux termes de la troisième par $a + b$ et par $a - b$, elles deviendront :

$$\frac{a^4 - 2a^3b + a^2b^2}{a^3 - a^2b}, \quad \frac{a^4 + 2a^3b + a^2b^2}{a^3 - a^2b}, \quad \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^3 - a^2b};$$

ajoutant les numérateurs, et donnant à la somme le dénominateur commun, il viendra, après réductions,

$$\frac{3a^4 + b^4}{a^3 - a^2b}.$$

Si les dénominateurs des fractions proposées ont des facteurs communs, on peut obtenir un dénominateur commun plus simple que le produit des dénominateurs. Pour cela, on suivra la même marche qu'en arithmétique; ayant décomposé les dénominateurs en facteurs aussi simples qu'on le pourra, on fera le produit de tous ces facteurs simples, en affectant chacun de son plus haut exposant; on aura ainsi le dénominateur commun. On le divisera par le dénominateur de chaque fraction, et l'on multipliera son numérateur par le quotient obtenu. On aura ainsi les nouveaux numérateurs, sous lesquels on écrira le dénominateur commun. Les fractions étant ainsi réduites au même dénominateur, on les additionnera comme ci-dessus.

50. Pour soustraire l'une de l'autre deux fractions algébriques, on commence par les réduire au même dénominateur, on soustrait le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et l'on donne à la différence le dénominateur commun.

Soit, par exemple, à soustraire de $\frac{a + b}{a - b}$ la fraction $\frac{a - b}{a + b}$; ces fractions réduites au même dénominateur deviennent respectivement $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ et $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$.

Si du premier numérateur on retranche le second, on trouve pour reste $4ab$; donnant à cette différence le dénominateur commun, il vient

$$\frac{4ab}{a^2 - b^2}.$$

51. Pour multiplier l'une par l'autre une fraction algébrique et une quantité entière, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière et de donner au produit le dénominateur de la fraction.

Concevons, en effet, que par suite des valeurs attribuées aux lettres, le numérateur de la fraction prenne la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; concevons de même que la quantité algébrique entière prenne la valeur numérique fractionnaire $\frac{2}{9}$. La fraction algébrique aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5\times 4}{3\times 7}$; et le produit de cette quantité par $\frac{2}{9}$ sera $\frac{5\times 4\times 2}{3\times 7\times 9}$.

Multiplions maintenant le numérateur $\frac{5}{3}$ de la fraction algébrique par la quantité $\frac{2}{9}$, le produit sera $\frac{5\times 2}{3\times 9}$; si nous lui donnons pour dénominateur $\frac{7}{4}$, le résultat sera le quotient de $\frac{5\times 2}{3\times 9}$ par $\frac{7}{4}$ ou bien $\frac{5\times 2\times 4}{3\times 9\times 7}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avons obtenu d'abord, que par l'ordre des facteurs, lequel ordre est, comme on sait, indifférent.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{ab}{a^2-b^2}$ par $a-b$, le produit sera $\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}$ ou $\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\frac{ab}{a+b}$.

On aurait pu, au lieu de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière, diviser son dénominateur,

le résultat eût été le même; c'est ce qu'on démontrerait facilement comme ci-dessus.

Remarque. Pour multiplier une fraction algébrique par son dénominateur, il suffit de le supprimer. Soit, en effet, pour plus de simplicité, la fraction $\frac{a}{b}$; si on la multiplie par b, on aura, d'après la règle précédente $\frac{ab}{b}$, ou, en effectuant la division indiquée, a simplement, résultat auquel on fût parvenu en supprimant le dénominateur.

52. Pour multiplier deux fractions algébriques l'une par l'autre, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Supposons, en effet, que le numérateur de la première fraction ait la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; que le numérateur de la seconde ait pour valeur $\frac{2}{9}$ et son dénominateur $\frac{11}{8}$. La première fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5\times 4}{3\times 7}$. La seconde fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{2}{9}$ par $\frac{11}{8}$ ou $\frac{2\times 8}{9\times 11}$. Le produit des deux fractions a donc pour valeur $\frac{5\times 4\times 2\times 8}{3\times 7\times 9\times 11}$.

Multiplions maintenant entre eux les numérateurs $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{9}$ des fractions algébriques proposées, le produit sera $\frac{5\times 2}{3\times 9}$; multiplions de même leurs dénominateurs $\frac{7}{4}$ et

$\frac{11}{8}$; le produit sera $\frac{7\times 11}{4\times 8}$. La fraction algébrique qui aura pour numérateur le produit des numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur le produit de leurs dénominateurs sera donc le quotient de $\frac{5\times 2}{3\times 9}$ par $\frac{7\times 11}{4\times 8}$, ou bien $\frac{5\times 2\times 4\times 8}{3\times 9\times 7\times 11}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avions obtenu d'abord que par l'ordre des facteurs.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{6ab}{a^2-b^2}$ par $\frac{a+b}{2a}$; le produit sera $\frac{6ab(a+b)}{2a(a^2-b^2)}$ ou $\frac{6ab(a+b)}{2a(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\frac{3b}{a-b}$.

La même règle s'étendrait sans peine à un nombre quelconque de fractions.

53. On démontrerait comme ci-dessus : 1° Que pour diviser une fraction algébrique par une quantité entière, il faut multiplier son dénominateur par cette quantité entière (ou diviser son numérateur si cela est possible).

Exemple. Le quotient de $\frac{a^2-b^2}{2a}$ par $a-b$ est

$$\frac{a^2-b^2}{2a(a-b)} \text{ ou } \frac{(a+b)(a-b)}{2a(a-b)}, \text{ ou enfin } \frac{a+b}{2a}.$$

2° Que pour diviser une quantité entière par une fraction, il faut multiplier la quantité entière par le dénominateur de la fraction, et diviser le produit par le numérateur.

Exemple. Le quotient de a^2-b^2 par $\frac{ab+b^2}{2a}$ est

$\frac{(a^2-b^2)2a}{ab+b^2}$ ou $\frac{(a+b)(a-b)2a}{(a+b)b}$, ou $\frac{(a-b)2a}{b}$, ou enfin $\frac{2a^2-2ab}{b}$.

3° Que pour diviser une fraction algébrique par une autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Exemple. Le quotient de $\frac{2a^2x-2b^2x}{5ab}$ par $\frac{4ab^2-4b^2}{15ax}$ est $\frac{(2a^2x-2b^2x).15ax}{5ab(4ab^2-4b^3)}$ ou $\frac{2.3.5.ax^2.(a+b)(a-b)}{2^2.5.a.b^3(a-b)}$; ou enfin $\frac{3x^2(a+b)}{2b^3}$.

Ces règles sont faciles à retenir, puisque, comme on a pu le remarquer, elles sont exactement les mêmes qu'en arithmétique.

54. Si l'on avait à multiplier ou à diviser des expressions algébriques formées d'une partie entière et d'une fraction, on commencerait par réduire la partie entière et la fraction en une seule expression fractionnaire (48); on opérerait ensuite comme pour des fractions.

Soit, par exemple, à diviser $3a-\frac{3b^2}{a}$ par $\frac{a^2}{b}-a$. Ces deux expressions reviennent à $\frac{3a^2-3b^2}{a}$ et $\frac{a^2-ab}{b}$. Leur quotient est donc $\frac{(3a^2-3b^2)b}{a(a^2-ab)}$, ou bien

$$\frac{3b(a+b)(a-b)}{a^2(a-b)}, \text{ ou bien } \frac{3b(a+b)}{a^2}.$$