CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS ET DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Notions générales sur les égalités.

55. On a vu au n° **14** que pour exprimer que deux quantités sont égales, on les écrit à la suite l'une de l'autre en les séparant par le signe $=$. Deux expressions algébriques séparées par ce signe forment ce qu'on appelle, en général, une *égalité;* et les quantités placées de part et d'autre du signe sont les deux *membres* de l'égalité. Par exemple :

$$a+b=c-d;\quad (x-a)(x+a)=x^2-a^2;\quad \frac{3x-1}{8}=4$$

sont des égalités. La quantité $a+b$ est le premier membre de la première; $c-d$ en est le second membre; et ainsi des autres.

Mais ces égalités sont, comme on va le voir, d'espèces très-différentes.

I. Il peut arriver que, dans un problème où figurent des quantités données a, b, c, d auxquelles on n'attribue pas de valeurs particulières, ces quantités soient néanmoins assujetties, par la nature même de la question, à satisfaire à la condition

$$a+b=c-d;$$

cette condition serait plus particulièrement une *égalité*, ou une simple *relation.*

II. L'égalité $(x-a)(x+a)=x^2-a^2$

se distingue de la précédente en ce que, si l'on effectue les calculs indiqués, le premier membre devient identiquement égal au second

$$x^2-a^2=x^2-a^2.$$

Elle jouit, en conséquence, de la propriété caractéristique d'être satisfaite, quelles que soient les valeurs qu'on attribue aux lettres qui y entrent. Si, par exemple, on remplace x par 2 et a par 1, elle donne :

$$(2-1)(2+1)=2^2-1^2 \text{ ou } 1\times3=4-1 \text{ ou } 3=3.$$

Si l'on remplace x par 5 et a par 2, elle donne :

$$(5-2)(5+2)=5^2-2^2 \text{ ou } 3\times7=25-4 \text{ ou } 21=21.$$

Si l'on remplace x par $\frac{4}{3}$ et a par 1, elle donne :

$$\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2-1^2 \text{ ou } \frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{16}{9}-1 \text{ ou } \frac{7}{9}=\frac{7}{9};$$

et ainsi de suite.

Les égalités de cette espèce portent le nom d'*identités*.

III. L'égalité $\frac{3x-1}{8}=4$

est satisfaite lorsqu'on y remplace x par 11; car 3 fois 11 font 33; $33-1$ font 32; 32 divisé par 8 donne bien 4. Mais cette égalité cesserait d'être vérifiée si l'on y mettait à la place de x toute autre valeur que le nombre 11.

On donne le nom d'*équation* à toute égalité de cette espèce, exprimant une relation entre une quantité inconnue et des quantités données, et qui ne peut être satisfaite que par certaines valeurs déterminées de l'inconnue.

(Nous considérerons plus tard le cas où il y a plusieurs inconnues.)

Remarque. On peut remarquer que les simples relations d'égalité deviennent des équations lorsqu'on y regarde comme inconnue l'une des lettres qui y entrent. Si, par exemple, dans la relation

$$a + b = c - d$$

trois seulement des quantités a, b, c, d étant supposées données b, c, d, par exemple, on se proposait d'en déduire la quatrième, a, cette simple relation d'égalité deviendrait une équation où a serait l'inconnue.

56. On peut faire subir aux égalités toutes les transformations qui n'empêchent pas les deux membres de rester égaux; ainsi, on peut ajouter une même quantité aux deux membres, soustraire une même quantité des deux membres, multiplier les deux membres par une même quantité, diviser les deux membres par une même quantité.

I. Les deux premières propriétés servent à *faire passer un terme d'un membre dans un autre,* transformation qui est très-fréquemment employée. Pour l'effectuer, il suffit d'effacer du membre où il était le terme que l'on veut changer de membre, et de l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait.

Prenons pour exemple l'égalité

$$a + b = c - d,$$

et supposons qu'on veuille faire passer le terme b dans le second membre. Si, d'abord, on l'efface dans le premier,

comme il était additif, on diminue ce membre de la quantité b; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc diminuer aussi le second membre de b, ce qui se fera en y écrivant $-b$. On aura ainsi :

$$a = c - d - b.$$

Supposons maintenant qu'on veuille faire passer le terme d du second membre dans le premier. Si d'abord on l'efface dans le second, comme il était soustractif, on augmente ce second membre de la quantité d; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc augmenter aussi le premier membre de d, ce qui se fera en y écrivant $+d$; et l'on aura :

$$a + d = c - b.$$

Ainsi, *pour faire passer un terme d'un membre dans un autre, il faut changer son signe.*

Remarque. Cette faculté de faire passer un terme d'un membre dans un autre, permet de réduire entre eux les termes semblables qui se trouvent dans les deux membres. Ainsi l'égalité

$$3a^2 - 6ab + b^2 = 2a^2 + 2ab - 15b^2$$

peut s'écrire $3a^2 - 6ab + b^2 - 2a^2 - 2ab + 15b^2 = 0$,

ou, plus simplement, $a^2 - 8ab + 16b^2 = 0$.

Lorsqu'un même terme se trouve dans les deux membres avec le même signe, on peut le supprimer de part et d'autre, car cela revient à retrancher une même quantité aux deux membres si ce terme est additif, ou à l'ajouter aux deux membres s'il est soustractif.

Ainsi l'égalité $a^2 - 4ab + b^2 = b^2 - 4ab + c^2$.

revient à $a^2 = c^2$.

57. II. La troisième propriété, qui permet de multiplier les deux membres par une même quantité, sert à *faire disparaître les dénominateurs* lorsqu'il y en a. Pour cela, on commence par réduire tous les termes de l'égalité, tant entiers que fractionnaires, au même dénominateur (**48**, **49**); il est alors permis de supprimer ce dénominateur, car cette suppression revient à multiplier tous les termes de l'égalité, et par conséquent les deux membres, par ce dénominateur même (**51**, Rem.).

Soit, par exemple, l'égalité

$$a-\frac{b^2}{a}=c+\frac{d^2}{c},$$

en réduisant tous les termes au même dénominateur ac, on a d'abord

$$\frac{a^2c}{ac}-\frac{b^2c}{ac}=\frac{ac^2}{ac}+\frac{ad^2}{ac},$$

et, en supprimant le dénominateur commun, ce qui revient à multiplier tous les termes par ac, il vient

$$a^2c-b^2c=ac^2+ad^2.$$

Ainsi, *pour faire disparaître les dénominateurs d'une égalité, il suffit de réduire tous les termes au même dénominateur, et de supprimer ensuite le dénominateur commun.*

58. III. La quatrième propriété, qui permet de diviser les deux membres par une même quantité, sert à supprimer les facteurs communs aux deux membres, quand il s'en trouve. Cette suppression simplifie les calculs. Soit pour exemple l'égalité

$$4a^3-8a^2b+4ab^2=6a^2b-6b^3,$$

si l'on met en évidence (**42**), dans chaque membre, les facteurs communs à tous les termes, il vient

$$4a(a^2-2ab+b^2)=6b(a^2-b^2)$$

ou

$$4a(a-b)^2=6b(a+b)(a-b).$$

Sous cette forme, on voit que les deux membres sont divisibles par $2(a-b)$. Effectuant cette division, il reste l'égalité plus simple.

$$2a(a-b)=3b(a+b)$$

ou

$$2a^2-2ab=3ab+3b^2.$$

59. Les équations à une seule inconnue se distinguent les unes des autres par leur *degré;* on nomme degré d'une équation, le plus haut exposant de l'inconnue lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, effectué les calculs indiqués, et opéré la réduction des termes semblables (**56**).

L'équation $3x+1=4-2x$ est du *premier degré*, parce que le plus haut exposant de x est l'unité.

L'équation $ax^2-bx=cx-d$ est du *second degré*, parce que le plus haut exposant de x est 2.

L'équation $ax^2+bx^4=c$ est du *quatrième degré*, parce que le plus haut exposant de x est 4. Et ainsi de suite.

L'équation $$(x-a)^2-x^2=b^2$$

qui paraît du second degré au premier abord, n'est réellement que du premier, parce que, lorsqu'on a développé $(x-a)^2$ et fait la réduction des termes semblables, il reste

$$a^2-2ax=b^2.$$

L'équation $$ax+\frac{b}{x}=c$$

au contraire, dans laquelle x n'entre qu'à la première puissance, est réellement du second degré, parce que, lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, elle devient

$$ax^2 + b = cx$$

où x entre avec l'exposant 2.

Nous ne nous occuperons d'abord que des équations du premier degré.

On distingue encore les équations en équations *numériques* et en équations *littérales*, suivant que les quantités données qui y entrent sont exprimées par des *nombres* ou représentées par des *lettres*.

§ 2. De la résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

60. *Résoudre* une équation, c'est déterminer les valeurs qui, mises à la place de l'inconnue, rendent le premier membre égal au second, et changent par conséquent l'équation en identité.

Pour résoudre une équation, on cherche à la transformer en une autre, dans laquelle l'inconnue soit seule et à la première puissance dans un membre, l'autre membre ne contenant que des quantités connues. Si, par exemple, en opérant de cette manière, on arrive à une équation telle que $x=4$, comme cette équation est évidemment satisfaite quand on y remplace x par 4, il s'ensuit que le nombre 4 est une valeur de l'inconnue.

Si, de même, on parvient à une équation telle que $x=a-b$, il s'ensuit que $a-b$ est la valeur de l'inconnue.

Pour résoudre une équation quelconque du premier degré à une seule inconnue, on suit une marche uniforme que l'on peut résumer de cette manière :

1° Faire disparaître les dénominateurs (**57**).

2° Effectuer les multiplications indiquées, s'il y en a.

3° Faire passer dans un même membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre membre tous les termes qui en sont indépendants (**56**).

4° Opérer la réduction des termes semblables (**22**).

Il convient de choisir le membre où l'on réunit les termes affectés de l'inconnue, de manière que, si les facteurs qui multiplient l'inconnue sont numériques, l'ensemble des termes positifs l'emporte sur l'ensemble des termes négatifs, et que, si ces facteurs sont littéraux, il y ait au moins un terme positif, ce qui sera toujours possible.

5° Mettre l'inconnue en facteur commun (**42**) dans le membre où elle se trouve (s'il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue qui n'aient pu se réduire).

6° Diviser les deux membres par la quantité qui multiplie l'inconnue (**58**).

De cette manière, on aura passé par une suite d'équations équivalentes, dont la dernière présentera l'inconnue seule dans un membre et des quantités connues dans l'autre; c'est-à-dire que l'on aura obtenu la valeur de l'inconnue.

Soit pour premier exemple l'équation numérique :

$$\frac{2x-1}{5} - 3 = \frac{x+3}{8}.$$

Faisant disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$2x \times 8 - 8 - 3 \times 5 \times 8 = x \times 5 + 3 \times 5.$$

Effectuons les multiplications, l'équation deviendra

$$16x - 8 - 120 = 5x + 15.$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes en x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$16x - 5x = 15 + 8 + 120;$$

ou, en faisant la réduction des termes semblables,

$$11x = 143.$$

Divisons les deux membres par le nombre 11 qui multiplie x, nous aurons enfin

$$x = \frac{143}{11}, \text{ ou, en effectuant la division, } x = 13.$$

On peut vérifier, en effet, que si dans l'équation proposée on met 13 à la place de x, chacun des deux membres se réduit à 2; en sorte que l'équation est satisfaite.

Soit pour second exemple l'équation littérale

$$\frac{2x + 8b}{a + b} = \frac{x - 2a}{a - b} + 5.$$

Faisons disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$(2x + 8b)(a - b) = (x - 2a)(a + b) + 5(a + b)(a - b),$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$2ax + 8ab - 2bx - 8b^2 = ax - 2a^2 + bx - 2ab + 5a^2 - 5b^2.$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes affectés de x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$2ax - 2bx - ax - bx = -2a^2 - 2ab + 5a^2 - 5b^2 - 8ab + 8b^2,$$

ou, en opérant la réduction des termes semblables,

$$ax - 3bx = 3a^2 - 10ab + 3b^2.$$

Mettons x en évidence dans le premier membre, l'équation prendra la forme

$$(a - 3b)x = 3a^2 - 10ab + 3b^2.$$

Divisons enfin les deux membres par la quantité $a-3b$ qui multiplie x, nous obtiendrons

$$x = \frac{3a^2 - 10ab + 3b^2}{a - 3b},$$

ou, en effectuant la division indiquée,

$$x = 3a - b.$$

La valeur de l'inconnue est donc $3a-b$; et, en effet, il est facile de vérifier que si l'on remplace x par cette valeur, les deux membres de l'équation proposée se réduisent tous deux à 6.

Exemples. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$\frac{5x - 2}{3} - 6 = \frac{4x - 3}{5} \quad (\text{d'où } x = 7);$$

$$\frac{2x + 7b}{2a + b} - 1 = \frac{x + a}{2a - b} \quad (\text{d'où } x = 3a - 2b).$$

§ 3. Problèmes qui conduisent à une équation du premier degré à une seule inconnue.

61. La résolution d'un problème d'Algèbre se compose nécessairement de deux parties. Dans la première on cherche à exprimer les relations que l'énoncé établit entre les inconnues et les données, ce qui conduit toujours à un certain nombre d'équations, si le problème est réellement du ressort de l'Algèbre. Dans la seconde on cherche à déduire de ces équations les valeurs des inconnues.

L'Algèbre donne des règles certaines pour la résolution des équations ; quant à la première partie, qu'on appelle la *mise en équations*, elle ne saurait être astreinte à des lois aussi certaines, vu l'immense variété des problèmes qu'on peut avoir à résoudre. Il existe cependant une sorte de *marche à suivre* qu'on peut formuler de cette manière : INDIQUER *sur les lettres qui représentent les inconnues et sur les données numériques ou littérales les opérations* QUE L'ON EFFECTUERAIT, *si, après avoir trouvé les valeurs des inconnues, on se proposait de les vérifier.* L'usage que nous ferons de cette règle en fera comprendre l'esprit et la portée.

Nous ne nous occuperons dans ce paragraphe que des problèmes qui conduisent à une seule équation du premier degré à une seule inconnue.

62. PREMIER PROBLÈME. *Un père a* 37 *ans ; son fils en a* 12 *; on demande dans combien d'années l'âge du père sera le double de celui du fils.*

Désignons par x le nombre d'années cherché. Si ce nombre d'années était connu, et que l'on voulût le vérifier, on dirait :

Le père ayant 37 ans, dans x années il en aura $37+x$; à la même époque, le fils en aura $12+x$; d'après l'énoncé, le double de cet âge, c'est-à-dire $(12+x)\times 2$ doit valoir l'âge du père ; on doit donc avoir l'égalité

$$(12+x)\times 2=37+x.$$

On a ainsi obtenu l'équation du problème. En la résolvant (**60**), on trouve

$$x=13.$$

Et, en effet, dans 13 ans, le fils aura $12+13$ ou 25 ans ; le père en aura $37+13$ ou 50, qui est bien le double de 25.

63. DEUXIÈME PROBLÈME. *On a* 60 *hectolitres de blé à* 30 *fr. l'hectolitre ; combien faut-il y joindre de blé à* 22 *fr. pour faire un mélange valant* 25 *fr. l'hectolitre ?*

Désignons par x le nombre d'hectolitres cherché, et opérons comme si nous voulions vérifier ce nombre. Le prix des 60 hectolitres à 30 fr. est $30^f\times 60$ ou 1800 fr. ; le prix des x hectolitres à 22 fr. est $22^f\times x$ ou $22x$; le prix total est donc $1800+22x$. Pour avoir le prix d'un hectolitre du mélange, il faut diviser le prix total par le nombre total d'hectolitres, qui est $60+x$. Mais, d'après l'énoncé, ce prix doit être de 25 fr. ; on a donc l'égalité

$$\frac{1800+22x}{60+x}=25.$$

C'est l'équation du problème. En la résolvant, on trouve $x=100$. Il faut donc prendre 100 hectolitres à 22 fr.

Le même problème, traité généralement, donnera une *formule* pour résoudre toutes les questions analogues. Soient n le nombre d'hectolitres donné, à a francs l'hectolitre, x le nombre d'hectolitres cherché à b francs l'hectolitre, soit enfin c le prix d'un hectolitre du mélange. Le prix total du blé sera $na+bx$ et le nombre total d'hectolitres $n+x$; on aura donc

$$\frac{na+bx}{n+x}=c,$$

d'où l'on tire $$x=\frac{n(a-c)}{c-b},$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier le nombre n d'hectolitres donnés par la différence $a-c$, entre le premier prix et le prix moyen, et diviser le produit par la différence $c-b$, entre le prix moyen et le second prix.

Si, par exemple, on suppose $n=40$; $a=24$, $b=19$; $c=21$, on trouvera

$$x=\frac{40\times 3}{2}=60.$$

64. Troisième problème. *Un ouvrier peut faire un certain ouvrage en* 18 *heures de travail; un second ouvrier ferait le même ouvrage en* 24 *heures de travail; un troisième le ferait en* 36 *heures. On demande combien d'heures les trois ouvriers travaillant ensemble emploieront à faire ce même ouvrage.*

Soit x le nombre d'heures cherché. Le premier ouvrier faisant l'ouvrage proposé en 18 heures, fera en 1 heure $\frac{1}{18}$ de cet ouvrage. En x heures il en fera donc une fraction marquée par $\frac{x}{18}$. Par une raison analogue, le second ouvrier, en x heures, fera $\frac{x}{24}$ de l'ouvrage proposé; et le troisième ouvrier en fera $\frac{x}{36}$. Or, la somme de ces fractions de l'ouvrage doit faire l'ouvrage entier, qui est pris ici pour unité; on doit donc avoir

$$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}+\frac{x}{36}=1,$$

ou
$$\frac{x(4+3+2)}{72}=1, \text{ d'où } x=\frac{72}{9}=8.$$

Les trois ouvriers emploieront donc 8 heures.

On voit, en effet, qu'en 8 heures, le premier ouvrier fera les $\frac{8}{18}$ ou les $\frac{4}{9}$ de la tâche; le second en fera les $\frac{8}{24}$ ou le tiers, qui revient à $\frac{3}{9}$; le troisième en fera les $\frac{8}{36}$ ou les $\frac{2}{9}$. Or, la somme

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9} \text{ fait } \frac{9}{9} \text{ ou } 1,$$

c'est-à-dire la tâche tout entière.

65. Le lecteur pourra s'exercer sur quelques-uns des problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Partager* 24 *en deux parties telles que le* 5^me^ *de la première, plus le* 7^me^ *de la seconde, fassent* 4. (Réponse : 10 et 14.)

II. *Un enfant, interrogé sur son âge, répond : « Dans* 16 *ans mon âge sera le triple de ce qu'il était il y a* 2 *ans.» On demande l'âge actuel de l'enfant.* (Réponse : 11 ans.)

III. *Une fontaine peut remplir un bassin en* 6 *heures, une autre peut le remplir en* 8 *heures, une troisième en* 10 *heures. Lorsqu'elles coulent ensemble pendant* 2 *heures, il s'en faut de* 26 *hectolitres que le bassin ne soit rempli. Quelle est sa capacité?* (Réponse : 120 hectolitres.)

IV. *Une personne charitable partage* 50 *fr. entre* 20 *pauvres, parmi lesquels il y a un certain nombre d'hommes et de femmes, et un seul enfant; elle donne* 3 *fr. à chaque homme,* 2 *fr. à chaque femme, et* 1 *fr. à l'enfant. On demande combien il y avait d'hommes et combien il y avait de femmes.* (Réponse ; 11 hommes et 8 femmes.)

§ 4. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

66. Lorsque, dans un problème, il y a deux inconnues, il faut que l'énoncé fournisse deux équations entre ces inconnues. Si, en effet, il n'en fournissait qu'une, on pourrait attribuer à l'une des inconnues une valeur arbitraire; on n'aurait plus alors qu'une équation ne contenant que la seconde inconnue, pour laquelle on trouverait un nombre limité de valeurs (une seule, par exemple, si l'équation était du premier degré par rapport à cette inconnue); et, comme on pourrait répéter ce calcul pour toutes les valeurs arbitraires attribuées à la première inconnue, on voit qu'il y aurait, en général, un nombre illimité de systèmes de valeurs propres à vérifier l'équation. On dit, dans ce cas, que le problème est *indéterminé*.

Si, par exemple, on n'avait entre deux inconnues x et y que l'équation unique

$$x-y=1,$$

on pourrait attribuer à y une valeur quelconque, la valeur correspondante de x serait

$$x=y+1,$$

ou la valeur attribuée à y, augmentée d'une unité. Il y aurait donc une infinité de solutions, et le problème serait indéterminé.

Nous supposerons donc dans ce paragraphe que l'énoncé du problème fournit deux équations du premier degré à deux inconnues.

67. Une équation à deux inconnues est dite du *premier degré* lorsqu'après y avoir fait disparaître les dénominateurs et effectué les multiplications indiquées, s'il y en a, les inconnues n'y entrent qu'à la première puissance, et n'y sont point multipliées entre elles. D'après cela : une équation du premier degré à deux inconnues, x et y, ne peut renfermer que trois espèces de termes; savoir : des termes contenant x à la première puissance, des termes contenant y à cette même puissance, et des termes indépendants de x et de y. Concevons qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs (57), on ait réuni dans un même membre tous les termes qui contiennent les inconnues, et dans l'autre membre les termes qui en sont indépendants; puis, qu'après avoir opéré les réductions, on ait mis x en évidence parmi tous les termes qui le contiennent, et qu'on en ait fait autant pour y; l'équation se présentera sous la forme

$$ax+by=c,$$

dans laquelle a, b et c peuvent être des quantités numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

La quantité a se nomme ordinairement le *coefficient* de x, et la quantité b se nomme le coefficient de y.

Nous admettrons donc que le problème fournisse deux équations de cette forme. *Résoudre* ces équations c'est trouver les valeurs qu'il faut attribuer aux inconnues pour satisfaire à la fois aux deux équations. Pour y parvenir on remarque d'abord que, si l'une des deux équations proposées ne renfermait que l'une des deux inconnues, les valeurs des deux inconnues s'obtiendraient immédiatement. Soit, en effet, une équation à deux inconnues

$$5x+2y=33 \qquad [1]$$

et une équation à une seule inconnue, qu'on peut toujours supposer résolue; par exemple

$$x = 5 \qquad [2]$$

si l'on met pour x la valeur 5 dans l'équation [1], elle devient

$$25 + 2y = 33 \qquad [3],$$

d'où $$2y = 33 - 25 = 8 \text{ et } y = 4.$$

Et ces valeurs $x=5$, $y=4$ sont les seules qui puissent satisfaire aux équations proposées [1] et [2]; car la seconde exige que x soit égal à 5; et si x est égal à 5, l'équation [1] se change en l'équation [3], qui revient à $y=4$, et n'est satisfaite que quand on y met 4 à la place de y.

On voit donc que si l'une des équations proposées ne contenait que l'une des inconnues, x par exemple, cette équation donnerait immédiatement la valeur de x; et en substituant cette valeur à la place de x dans l'équation à deux inconnues, on en tirerait la valeur correspondante de y; et l'on aurait ainsi le système de valeurs de x et de y propre à satisfaire à la fois aux deux équations.

Tout l'artifice de la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, consiste donc à déduire de ce système d'équations un système équivalent de deux autres équations, telles que l'une d'elles ne contienne que l'une des deux inconnues. C'est ce que l'on appelle *éliminer* une inconnue. Il y a pour cela plusieurs méthodes que nous allons exposer, en traitant d'abord des exemples particuliers.

68. Soient les deux équations :

$$5x + 2y = 33 \qquad [1]$$

$$7x - 3y = 23 \qquad [2];$$

proposons-nous d'éliminer l'inconnue y. Observons pour cela qu'il est toujours permis d'ajouter ou de soustraire deux équations membre à membre; car si deux quantités sont respectivement égales à deux autres quantités, la somme ou la différence des deux premières est évidemment égale à la somme ou à la différence des deux dernières. Or, si y avait le même coefficient dans les deux équations, on ferait disparaître cette inconnue en retranchant ces deux équations membre à membre; et si y avait dans les deux équations des coefficients égaux et de signe contraire, on atteindrait le même but en ajoutant ces deux équations membre à membre.

Dans l'exemple qui nous occupe, y n'a pas le même coefficient dans les deux équations; mais il est facile de faire en sorte qu'il en soit ainsi : il suffit pour cela de multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient 3 de y dans la seconde, et tous les termes de la seconde par le coefficient 2 de y dans la première, ce qui est permis (56).

On obtient ainsi les équations :

$$15x + 6y = 99 \qquad [3]$$

$$14x - 6y = 46 \qquad [4],$$

et, en les ajoutant membre à membre, puisque y a maintenant, dans les deux équations, des coefficients égaux et de signe contraire, il vient

$$29x = 145,$$

d'où $$x = \frac{145}{29} \text{ ou } x = 5 \qquad [5].$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas du numéro précédent, et nous avons vu que les valeurs qui satisfont aux équations [1] et [5] sont

$$x=5 \text{ et } y=4.$$

e là cette règle :

Lorsqu'on a deux équations du premier degré à deux inconnues, pour éliminer l'une de ces inconnues, il faut multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient de cette inconnue dans la seconde, et tous les termes de la seconde, par le coefficient de cette même inconnue dans la première. On soustrait alors, ou bien l'on ajoute les deux équations membre à membre, selon que l'inconnue à éliminer se trouve avoir dans les deux équations des coefficients de même signe ou de signe contraire.

Remarque I. Cette règle, qui a beaucoup d'analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur, est aussi susceptible des mêmes simplifications; si les coefficients de l'inconnue à éliminer avaient des facteurs communs, il suffirait de multiplier tous les termes de chaque équation par les facteurs non communs du coefficient de l'inconnue à éliminer dans l'autre.

Remarque II. Si l'inconnue à éliminer n'avait dans l'une des équations d'autre coefficient que l'unité, il suffirait de multiplier tous les termes de cette équation par le coefficient de cette inconnue dans l'autre; ce qui rentre au reste dans la règle générale.

69. Nous donnerons ici deux exemples de ce mode d'élimination.

I. Soient d'abord les équations numériques

$$7x+9y=140,$$
$$5x+6y=97.$$

On remarque que les coefficients de y ont le facteur commun 3, et que les facteurs non communs sont 3 et 2; multipliant donc tous les termes de la première équation par 2 et tous ceux de la seconde par 3, il vient

$$14x+18y=280,$$
$$15x+18y=291;$$

retranchant, membre à membre, la première de la seconde, puisque les coefficients de y ont le même signe, on obtient

$$x=11.$$

Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$77+9y=140; \quad \text{d'où} \quad 9y=63$$

et

$$y=7.$$

II. Soient maintenant les deux équations littérales :

$$ax-by=a^2+b^2$$
$$bx+ay=a^2+b^2.$$

Multiplions tous les termes de la première par a, et tous ceux de la seconde par b, nous aurons

$$a^2x-aby=a^3+ab^2$$
$$b^2x+aby=a^2b+b^3.$$

Ajoutons membre à membre, puisque les coefficients de y ont des signes contraires ; il viendra

$$a^2x+b^2x=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

ou

$$(a^2+b^2)x=a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$

d'où

$$x=\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad x=a+b.$$