Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$a^2 + ab - by = a^2 + b^2, \quad \text{d'où} \quad by = ab - b^2,$$

puis
$$y = \frac{ab - b^2}{b} \quad \text{ou} \quad y = a - b.$$

Remarque III. Le lecteur pourra s'exercer sur les deux exemples suivants :

$$12x - 5y = 6; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4}{3}.$$
$$9x + 4y = 20 \qquad y = 2.$$
$$(2a + b)x - (2a - b)y = 8ab \quad \text{d'où} \quad x = 2a + b$$
$$(2a - b)x + (2a + b)y = 8a^2 - 2b^2 \qquad y = 2a - b.$$

70. Nous avons exposé la première la méthode d'élimination qui offre dans la pratique le plus de commodité. On lui donne ordinairement le nom de *méthode par réduction* (au même coefficient). Mais l'élimination peut s'opérer de plusieurs autres manières.

I. Soient les deux équations traitées plus haut (68).

$$5x + 2y = 33 \qquad [1],$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [2].$$

Supposons, pour un instant, que la valeur de x ait été déterminée par un procédé quelconque; en la mettant pour x dans l'une des deux équations proposées, dans la première, par exemple, on en tirerait la valeur correspondante de y. Or, si l'on tire de la première équation la valeur de y, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y = \frac{33 - 5x}{2} \qquad [3].$$

Cette valeur, jointe à la valeur qu'on suppose avoir trouvée

pour x, doit satisfaire à la seconde équation proposée. Si donc on met dans l'équation [2], à la place de y, la valeur [3], l'égalité

$$7x - 3\left(\frac{33 - 5x}{2}\right) = 23 \qquad [4],$$

à laquelle on parvient, sera une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition, traitée comme une équation où l'inconnue est x, donnera donc la valeur de x. En la résolvant, on trouve $x = 5$, comme on l'a trouvé par une autre méthode; et cette valeur, mise pour x dans l'équation [3], donne de même $y = 4$.

On voit que cette méthode consiste à prendre la valeur de l'une des inconnues dans l'une des deux équations, en y regardant l'autre inconnue comme déterminée, et à *substituer* cette valeur dans la seconde équation, qui ne contient plus alors qu'une seule inconnue. En conséquence on a donné à cette méthode le nom de méthode *par substitution*.

71. II. Reprenons encore les équations [1] et [2] du numéro précédent. Nous avons vu que, si l'on y regarde x comme déterminé, et qu'on tire de la première la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{33 - 5x}{2}.$$

Si l'on tire de même de la seconde la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{7x - 23}{3}.$$

Or, ces deux valeurs de y doivent être égales, puisque les mêmes valeurs de x et de y doivent satisfaire à la fois aux deux équations; en les égalant, on aura donc une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition

$$\frac{7x-23}{3}=\frac{33-5x}{2},$$

traitée comme une équation où l'inconnue est x, donne encore $x=5$; et cette valeur, mise pour x dans l'une quelconque des deux valeurs de y ci-dessus, donne $y=4$.

Cette méthode est connue sous le nom de méthode *par comparaison.*

72. III. Enfin, reprenons une dernière fois les équations [1] et [2] du nº **70**. Si l'on multiplie la première par une quantité indéterminée m, et qu'on les ajoute membre à membre, on obtient

$$5mx+7x+2my-3y=33m+23 \qquad [5].$$

Les valeurs qui vérifieront les équations [1] et [2] vérifieront aussi l'équation [5] qui en est une conséquence; et cela, quelle que soit la valeur qu'on attribue à l'indéterminée m. Or, on peut en disposer de manière à faire disparaître de l'équation [5] tous les termes en y. Pour cela, il suffit de poser $2m=3$, d'où $m=\frac{3}{2}$. Cette valeur, mise pour m dans l'équation [5], la réduit à

$$\frac{15}{2}x+7x=\frac{99}{2}+23,$$

d'où l'on tire encore $x=5$; et par suite $y=4$.

Si les coefficients de y dans les deux équations proposées avaient eu le même signe, il eût été préférable de soustraire les équations au lieu de les ajouter.

Cette méthode est connue sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés*.

§ 5. Problèmes qui conduisent à deux équations du premier degré à deux inconnues.

73. Parmi les problèmes qui présentent plusieurs inconnues, il en est un grand nombre qu'on peut résoudre en n'employant qu'une seule inconnue.

Prenons pour exemple ce problème : *Partager* 15 *en deux parties telles que la première surpasse d'une unité les $\frac{4}{3}$ de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $15-x$, et l'énoncé du problème fournit immédiatement l'équation

$$x=\frac{4}{3}(15-x)+1 \qquad [1],$$

d'où l'on tire $x=9$. Les deux parties sont donc 9 et 6, et, en effet, 9 surpasse d'une unité le nombre 8 qui est les $\frac{4}{3}$ de 6.

Mais lorsqu'on traite ainsi, à l'aide d'une seule inconnue, un problème qui en comporte plusieurs, c'est qu'on opère mentalement une véritable élimination. Dans le problème qui précède, par exemple, si l'on désigne par x la première partie et par y la seconde, on a les deux équations

$$x+y=15$$

$$x=\frac{4}{3}y+1,$$

et si l'on tire de la première la valeur de y pour la substituer dans la seconde, c'est-à-dire si l'on élimine y entre les deux équations, on retombe sur l'équation [1]. C'est cette élimination de y qu'on a opérée mentalement quand on a traité le problème avec la seule inconnue x.

Ces éliminations tacites, qui abrégent évidemment le calcul écrit, compliquent en revanche les opérations mentales que nécessite la mise en équation du problème; en sorte que, hors des cas très-simples, comme celui qui précède, ou ceux des problèmes I, IV, proposés au nº **65**, on perd plus qu'on ne gagne à diminuer le nombre des inconnues.

Nous croyons donc devoir donner comme conseil général d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte; si, parmi les équations qui les lient il y en a de très-simples, comme l'équation $x+y=15$ de tout à l'heure, on opérera par écrit les éliminations très-simples qu'on eût opérées mentalement; voilà toute la différence.

Quant à la mise en équation, elle est soumise à la seule règle générale que nous avons donnée au nº **61**. Il ne nous reste donc qu'à donner quelques exemples de problèmes conduisant à deux équations du premier degré à deux inconnues.

74. Premier problème. *Deux espèces de pièces de monnaie sont telles : que 2 pièces de la première, plus 5 pièces de la seconde font 13 fr.; et que 18 pièces de la seconde surpassent de 1 fr. 5 c. la valeur de 5 pièces de la première. Quelle est la valeur, en francs et centimes, de chacune de ces deux espèces de pièces de monnaie?*

Désignons par x la valeur d'une des pièces de la première espèce, et par y la valeur d'une des pièces de la seconde. Nous aurons, d'après l'énoncé, les deux équations :

$$2x+5y=13^{\text{f}},$$

$$18y=5x+1^{\text{f}},05.$$

On éliminera x en multipliant la première équation par 5, la seconde par 2 et ajoutant; on trouve ainsi :

$$36y+25y=65^{\text{f}}+2^{\text{f}},10,$$

ou $$61y=67^{\text{f}},10,\quad \text{d'où}\quad y=1^{\text{f}},10.$$

Cette valeur, mise pour y dans la première équation, donne

$$2x+5^{\text{f}},50=13^{\text{f}},\quad \text{d'où}\quad x=3^{\text{f}},75.$$

Chaque pièce de la première espèce vaut donc $3^{\text{f}},75$, et chaque pièce de la seconde espèce $1^{\text{f}},10$.

75. Deuxième problème. *Trouver une fraction telle que si l'on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devienne égale à $\frac{3}{4}$; et que si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devienne égale à $\frac{2}{3}$.*

Soient x le numérateur et y le dénominateur; l'énoncé fournit sur-le-champ les deux équations suivantes :

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{4}\quad \text{et}\quad \frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3},$$

ou $$3y-4x=1\quad \text{et}\quad 3x-2y=1,$$

qui donnent $x=5$ et $y=7$. La fraction demandée est donc $\frac{5}{7}$. Si, en effet, on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devient $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$; et si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devient $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$.

76. Troisième problème. *Un nombre est composé de deux chiffres dont la somme absolue est* 14; *et si on le retourne, il augmente de* 36; *quel est ce nombre?*

Soient x le chiffre des dizaines, et y celui des unités; on aura d'abord

$$x+y=14 \qquad [1].$$

Maintenant, le nombre demandé a pour valeur $10x+y$, et le nombre retourné a pour valeur $10y+x$. Or, d'après l'énoncé, ce second nombre surpasse le premier de 36, on a donc

$$10y+x=10x+y+36,$$

ou

$$9y-9x=36,$$

ou encore

$$y-x=4 \qquad [2].$$

On connaît donc la somme et la différence des deux chiffres; en vertu du théorème démontré au nº 3 (Rem.), le plus grand, y, est égal à la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7+2$ ou 9; et le plus petit, x, est égal à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7-2$ ou à 5; c'est ce qu'on verrait d'ailleurs en résolvant le système des équations [1] et [2].

Le nombre demandé est donc 59; en effet, la somme de ses chiffres est 14; et lorsqu'on le retourne, en obtient 95 qui surpasse 59 de 36.

77. Quatrième problème. *Une personne qui possède* 60000 *fr., en a placé une partie à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et l'autre à* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100; *ce qui lui fait un revenu de* 2500 fr. *On demande combien elle a placé au taux de* $4\frac{1}{2}$, *et combien au taux de* $3\frac{1}{2}$.

Soient x et y les deux sommes placées; on aura d'abord

$$x+y=60000^{f}.$$

Maintenant, le capital x, au taux de $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{x\times\frac{9}{2}}{100}$ ou $\frac{9x}{200}$. Le capital y, au taux de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{y\times\frac{7}{2}}{100}$ ou $\frac{7y}{200}$. La somme de ces revenus partiels doit faire le revenu total 2500 fr.; on a donc pour seconde équation

$$\frac{9x}{200}+\frac{7y}{200}=2500 \text{ fr.},$$

ou bien

$$9x+7y=500000 \text{ fr.}$$

Mettant pour y sa valeur $60000^{f}-x$ tirée de la première équation, et effectuant la multiplication par 7, il vient

$$9x+420000-7x=500000^{f},$$

d'où

$$x=40000^{f},$$

par suite

$$y=20000^{f}.$$

En effet, 40000 fr. à $4\frac{1}{2}$ pour 100, rapportent 1800 fr.; et 20000 fr. à $3\frac{1}{2}$ pour 100 rapportent 700 fr.; la somme de ces deux revenus fait bien 2500 fr.

78. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 5 *on ait pour reste* 2; *qu'en le divisant par* 8 *on ait pour reste* 5; *et que le quotient de la première division surpasse de* 3 *unités le quotient de la seconde.* (Réponse : Les quotients sont 7 et 4; le nombre demandé est 37.)

II. *L'âne dit un jour au mulet : « Si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait le double de la tienne. — Et moi, lui répondit le mulet, si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait triple de la tienne. » On demande la charge de chacun.* (Réponse : L'âne portait 110 kilogrammes et le mulet 130 kilogrammes.)

III. *La distance de Paris à Tours est de* 225 *kilomètres. Un convoi de wagons part de Paris pour Tours avec une vitesse de* 25 *kilomètres à l'heure;* 1 *heure* 48 *minutes après, un convoi part de Tours pour Paris avec une vitesse de* 35 *kilomètres à l'heure. On demande au bout de quel temps et à quelle distance de Paris les deux convois se croiseront.* (Réponse : Au bout de 3 heures à partir du second départ, et à 120 kilomètres de Paris.)

IV. *Deux joueurs conviennent que celui qui perdra la première partie doublera l'argent de son adversaire; que celui qui perdra la seconde triplera l'argent de son adversaire, que celui qui perdra la troisième quadruplera l'argent de son adversaire; et ainsi de suite. Au bout de trois parties, la perte ayant été alternative, ils se retirent chacun avec* 48 *francs. On demande ce qu'ils avaient en commençant le jeu.* (Réponse : Le premier perdant avait 62 fr. et son adversaire 34 francs.)

§ 6. Résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues; et en général d'un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

79. Supposons d'abord qu'on ait à résoudre les trois équations

$$4x - 7y + 6z = 10 \qquad [1],$$
$$5x + 2y = 33 \qquad [2],$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [3],$$

dont la première seule renferme les trois inconnues x, y, z, les deux dernières ne renfermant que les deux inconnues x et y.

Les deux dernières équations pourront être remplacées par les valeurs

$$x = 5,$$
$$y = 4,$$

qu'on en tire (**68**); et ces deux valeurs, mises pour x et y dans l'équation [1], la réduisent à

$$20 - 28 + 6z = 10 \qquad [4],$$

ou $$6z = 38 - 20 = 18,$$

d'où l'on tire $$z = 3.$$

Et ces valeurs des inconnues sont les seules qui puissent satisfaire au système des trois équations proposées; car les deux dernières n'admettent pas d'autres solutions que $x = 5$ et $y = 4$; et si x et y ont respectivement ces valeurs, l'équation [1] se change en l'équation [4] qui n'admet pas d'autre solution que $z = 3$.

Pour résoudre un système quelconque de trois équations du premier degré à trois inconnues, il faut donc tâcher d'en déduire un système équivalent, dans lequel deux des trois équations ne renferment que deux des inconnues.

80. Soient les trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 27 \qquad [1],$$
$$3x + 6y - 4z = 2 \qquad [2],$$
$$5x + 4y + 2z = 40 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2]; pour cela multiplions l'équation [1] par 4, l'équation [2] par 5, et ajoutons membre à membre; nous trouverons :

$$23x + 18y = 118 \qquad [4].$$

Éliminons de même z entre les équations [1] et [3]; pour cela multiplions l'équation [1] par 2, l'équation [3] par 5, et retranchons la première de la dernière; nous obtiendrons :

$$21x + 26y = 146 \qquad [5].$$

Les équations [4] et [5] ne renfermant plus que x et y, on sait en tirer les valeurs de ces inconnues. Si, par exemple, on multiplie l'équation [4] par 13, l'équation [5] par 9, et qu'on retranche la seconde de la première, y disparaîtra, et il restera

$$110x = 220, \quad \text{d'où} \quad x = 2.$$

Cette valeur, mise pour x dans l'équation [4], donne

$$46 + 18y = 118 \quad \text{ou} \quad 18y = 72,$$

d'où $y = 4$.

Si maintenant dans l'une des trois équations proposées, dans l'équation [1] par exemple, on remplace x par 2 et y par 4, cette équation devient

$$4 - 12 + 5z = 27 \quad \text{ou} \quad 5z = 35,$$

d'où $z = 7$.

On voit, par cet exemple, que *pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues* x, y, z, *il faut éliminer l'une des trois inconnues*, z *par exemple*, *deux fois, savoir : entre la première équation et la seconde, par exemple, puis entre la première et la troisième; on obtient ainsi deux équations entre les deux inconnues* x *et* y; *on en tire les valeurs de ces inconnues; on substitue ces valeurs dans l'une des trois équations proposées, et l'on en tire la valeur de la troisième inconnue* z.

Remarque. C'est pour plus de symétrie dans le choix des lettres que nous avons d'abord éliminé z; il eût été plus simple et plus commode d'éliminer d'abord y; savoir, entre les équations [1] et [2], puis entre les équations [2] et [3], à cause des facteurs communs que présentent les coefficients de cette inconnue. On aurait eu ainsi à résoudre les deux équations plus simples :

$$7x + 6z = 56,$$
$$9x + 14z = 116;$$

qui donnent $x = 2$ et $z = 7$. Ces valeurs mises dans l'équation [1], donnent ensuite $y = 4$.

81. Comme exemple d'équations littérales, nous traiterons les suivantes :

$$ax + by + cz = a^2 + c^2 \qquad [1],$$
$$bx + cy - az = b^2 + c^2 \qquad [2],$$
$$+ cx + ay + bz = a^2 + b^2 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2], nous trouverons

$$(a^2 + bc)x + (c^2 - ab)y = a^3 + ac^2 + b^2c + c^3 \qquad [4].$$

Éliminons z entre les équations [2] et [3], il viendra

$$(b^2 - ac)x + (a^2 + bc)y = a^3 + ab^2 + bc^2 + b^3 \qquad [5].$$

L'élimination de y entre ces deux dernières, donne

$$(a^4+a^2bc+ab^3+ac^3)x=a^5+a^4b+a^3bc+a^2b^3+a^2b^2c+a^2c^3 \\ +ab^4+abc^3,$$

ou $$(a^3+abc+b^3+c^3)x=a^4+a^3b+a^2bc+ab^3+ab^2c \\ +ac^3+b^4 \quad +bc^3,$$

d'où, en divisant les deux membres par $a^3+abc+b^3+c^3$,

$$x=a+b.$$

Cette valeur mise pour x dans l'équation [5] donne

$$(a^2+bc)y=a^3+a^2c+abc+bc^2,$$

d'où, en divisant les deux membres par a^2+bc,

$$y=a+c.$$

Mettant pour x et y leurs valeurs dans l'équation [1], elle devient

$$a^2-bc+cz=a^2+c^2 \quad \text{ou} \quad cz=bc+c^2;$$

d'où $$z=b+c.$$

82. Il est facile maintenant de généraliser la marche que nous avons suivie. Supposons qu'on ait 5 équations du premier degré entre les 5 inconnues x, y, z, u, t. On éliminera t quatre fois; par exemple entre la première équation et chacune des quatre autres; on obtiendra ainsi 4 équations entre les inconnues x, y, z, u. On éliminera u trois fois : par exemple entre la première de ces quatre équations, et chacune des trois autres; on obtiendra ainsi 3 équations entre les 3 inconnues x, y, z. On éliminera z deux fois : par exemple entre la première de ces trois équations et chacune des deux autres; on obtiendra ainsi 2 équations entre les 2 inconnues x et y.

On éliminera y entre ces deux équations, et l'on obtiendra une équation qui ne contiendra plus qu'une seule inconnue x. On en tirera la valeur de cette inconnue. On portera cette valeur à la place de x dans l'une des deux équations entre x et y; et l'on en tirera la valeur de y. On portera les valeurs de x et de y dans l'une des trois équations entre x, y et z; et l'on en tirera la valeur de z. On portera les valeurs de x, y et z dans l'une des quatre équations entre x, y, z et u; et l'on en tirera la valeur de u. On portera enfin les valeurs de x, y, z et u dans l'une des cinq équations proposées entre x, y, z, u et t; et l'on en tirera la valeur de t.

On suivrait une marche analogue pour un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

83. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

I. $$2x-6y+3z=5, \quad \text{d'où} \quad x=10,$$
$$x+2y-12z=4, \qquad y=3,$$
$$8y+6z-3x=0, \qquad z=1.$$

II. $$ax+by-cz=b^2, \quad \text{d'où} \quad x=c,$$
$$bx-cy+az=a^2, \qquad y=b,$$
$$cx+ay-bz=c^2, \qquad z=a.$$

III. $$6x+3y-3z+u=5, \quad \text{d'où} \quad x=0,$$
$$3x+5y+2z-2u=4, \qquad y=2,$$
$$5x-2y-2z+2u=2, \qquad z=2,$$
$$2x+5y+3z-3u=1, \qquad u=5.$$

§ 7. Problèmes qui conduisent à un nombre quelconque d'équations du premier degré, renfermant le même nombre d'inconnues.

84. La mise en équations de ces problèmes est soumise à la règle générale donnée au n° **61**. Nous rappellerons ici le conseil que nous avons donné au n° **73**, d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte. Sans doute, quand le nombre d'inconnues est grand, il semblerait qu'on doit chercher à le restreindre; mais l'avantage qu'il en pourrait résulter pour le calcul serait presque toujours compensé, et au delà, par l'embarras que la suppression de quelques inconnues introduirait dans la mise en équations.

Cela dit, il ne nous reste qu'à donner quelques exemples.

PREMIER PROBLÈME. *On a trois lingots qui contiennent :*

Le premier,	20 *gr. d'or,*	30 *d'argent,*	40 *de cuivre*
Le second,	30	40	50
Le troisième,	40	50	90

Combien faut-il prendre de chacun d'eux pour former un quatrième lingot qui contienne :

75 gr. d'or, 100 d'argent et 149 de cuivre?

Soient x, y, z les nombres de grammes de chacun des trois premiers lingots, qu'il faut prendre pour former le quatrième. On remarquera que, dans le premier lingot, il y a 20^{gr} d'or, sur $20+30+40$ ou 90; c'est-à-dire que l'or y entre pour $\frac{2}{9}$. Dans le second lingot, il entre pour $\frac{3}{12}$, et dans le troisième, pour $\frac{4}{18}$. Ce métal entrera en mêmes proportions dans les parties x, y, z qu'on prendra des

trois lingots, et, comme la somme des quantités d'or contenues dans ces parties doit faire 75^{gr}, on devra avoir l'équation :

$$\tfrac{2}{9}x+\tfrac{3}{12}y+\tfrac{4}{18}z=75^{gr}.$$

L'argent, dans le premier lingot, entre pour $\frac{3}{9}$, dans le second, pour $\frac{4}{12}$, dans le troisième, pour $\frac{5}{18}$; on verrait donc, par un raisonnement analogue au précédent, qu'on doit avoir :

$$\tfrac{3}{9}x+\tfrac{4}{12}y+\tfrac{5}{18}z=100^{gr},$$

et, en opérant de même pour les quantités de cuivre, on trouverait de même l'équation

$$\tfrac{4}{9}x+\tfrac{5}{12}y+\tfrac{9}{18}z=149^{gr}.$$

Telles sont les équations du problème. En faisant disparaître les dénominateurs et simplifiant, elles deviennent :

$$8x+9y+8z=2700 \qquad [1],$$
$$12x+12y+10z=3600 \qquad [2],$$
$$16x+15y+18z=5364 \qquad [3].$$

Éliminant d'abord x entre [1] et [2], puis entre [1] et [3], on obtient :

$$3y+4z=900 \qquad [4],$$
$$3y-2z=36 \qquad [5].$$

Éliminant ensuite y entre ces deux dernières on trouve

$$6z=864,\quad \text{d'où}\quad z=144^{gr}.$$

Cette valeur, mise dans [5], donne

$$3y-288=36,\quad \text{d'où}\quad y=108^{gr},$$

et ces valeurs, mises dans [1], donnent

$$8x+972+1152=2700,\quad \text{d'où}\quad x=72^{gr}.$$

85. Deuxième problème. *Un nombre est tel : que, si on le divise par* 7, *on a pour reste* 4; *que, si on le divise par* 9, *on a pour reste* 6; *que, si on le divise par* 13, *on a pour reste* 8; *et de plus la somme des trois quotients surpasse de* 3 *unités le quart du nombre lui-même. On demande quel est ce nombre?*

Soit x le nombre cherché, et soient y, z et u les quotients respectifs qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13; on aura en vertu de la division même :

$$x = 7y + 4,$$
$$x = 9z + 6,$$
$$x = 13u + 8,$$

et, en vertu de la dernière partie de l'énoncé,

$$y + z + u = \frac{1}{4}x + 3.$$

Si l'on tire des trois premières équations les valeurs de y, z, u, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y = \frac{x-4}{7}, \quad z = \frac{x-6}{9}, \quad u = \frac{x-8}{13};$$

et, si l'on met pour y, z, u ces valeurs dans la quatrième équation, on obtient

$$\frac{x-4}{7} + \frac{x-6}{9} + \frac{x-8}{13} = \frac{1}{4}x + 3,$$

équation qui ne contient plus que l'inconnue x. On en tire, en faisant disparaître les dénominateurs :

$$468x - 1872 + 364x - 2184 + 252x - 2016 = 819x + 9828,$$

ou $\quad 265x = 15900, \quad$ d'où $\quad x = 60.$

Tel est le nombre demandé. Les quotients qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13, sont 8, 6 et 4, dont la somme 18 dépasse de 3 unités le nombre 15 qui est le quart de 60.

Remarque. Ce problème offre un exemple d'une question qui comporte réellement quatre inconnues, bien que l'énoncé semble n'en admettre qu'une.

86. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Un homme chargé de transporter des vases de trois grandeurs, est convenu de payer pour chaque vase cassé par lui autant qu'il aurait reçu s'il l'eût rendu en bon état. On lui donne* 3 *grands vases,* 5 *moyens et* 9 *petits. On apprend qu'en route il a cassé tous les vases de l'une des trois grandeurs, mais l'on ne sait laquelle. Si ce sont les grands ou les petits, le porteur touchera* 10 *fr.; mais si ce sont les moyens, il ne touchera que* 8 *fr. On demande ce qu'il doit toucher pour un vase de chaque espèce rendu en bon état.*

(Réponse : 3 fr. pour un grand vase, 2 fr. pour un moyen, 1 fr. pour chaque petit.)

II. *On demande quel est le nombre de quatre chiffres qui jouit des propriétés suivantes :* 1° *que la somme des deux premiers chiffres, soit à sa droite, soit à sa gauche, est égale à* 7; 2° *que le chiffre de ses unités est le triple de celui des centaines;* 3° *enfin que si l'on écrit ses quatre chiffres dans un ordre contraire, le nombre augmente de* 909. (Réponse : 5216.)

III. *Une personne a divisé son capital en trois parties qu'elle a placées, la première à* 5 *pour* 100, *la seconde à*

4 pour 100, la troisième à 3 pour 100. Elle se fait ainsi un revenu annuel de 4000 fr., comme si tout son capital eût été placé à 4 pour 100. On sait de plus que la partie placée à 5 pour 100 rapporte annuellement 600 fr. de plus que celle qui est placée à 3 pour 100. On demande quel est le capital entier et quelles sont les trois parties.

(Réponse : le capital entier est de 100000 fr. ; les trois parties sont 30000 fr., 40000 fr. et 30000 fr.)

CHAPITRE IV.

DES QUANTITÉS NÉGATIVES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Des quantités négatives.

87. Jusqu'ici, lorsque nous avons eu à considérer des expressions algébriques polynomes, nous avons toujours supposé que l'ensemble des termes positifs l'emportait en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs; et quant aux monomes isolés, nous les avons toujours supposés positifs. Nous avons à examiner maintenant, dans l'hypothèse contraire, le sens qu'il convient d'attacher aux expressions algébriques, et ce que deviennent les règles du calcul littéral, qui n'ont été établies, on se le rappelle, que dans la supposition où les quantités sur lesquelles on opère ont une valeur positive.

Considérons un polynome, dans lequel la partie négative soit supposée l'emporter en valeur absolue sur la positive; et pour plus de simplicité, choisissons le binome $a - b$. Si l'on attribue à b une valeur plus grande qu'à a, ce binome n'offre plus en apparence d'autre sens à l'esprit que celui d'une opération impossible.

On peut, à la vérité, donner une forme plus simple à l'expression $a - b$; car, si l'on désigne par d l'excès de la valeur absolue b sur la valeur absolue a, en sorte que b soit égal à $a + d$, on aura à retrancher de a la somme $a + d$; et si l'on en retranche d'abord a, ce qui donne *zéro* pour reste, on n'aura plus à indiquer que la soustrac-