4 pour 100, la troisième à 3 pour 100. Elle se fait ainsi un revenu annuel de 4000 fr., comme si tout son capital eût été placé à 4 pour 100. On sait de plus que la partie placée à 5 pour 100 rapporte annuellement 600 fr. de plus que celle qui est placée à 3 pour 100. On demande quel est le capital entier et quelles sont les trois parties.

(Réponse : le capital entier est de 100000 fr. ; les trois parties sont 30000 fr., 40000 fr. et 30000 fr.)

CHAPITRE IV.

DES QUANTITÉS NÉGATIVES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Des quantités négatives.

87. Jusqu'ici, lorsque nous avons eu à considérer des expressions algébriques polynomes, nous avons toujours supposé que l'ensemble des termes positifs l'emportait en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs; et quant aux monomes isolés, nous les avons toujours supposés positifs. Nous avons à examiner maintenant, dans l'hypothèse contraire, le sens qu'il convient d'attacher aux expressions algébriques, et ce que deviennent les règles du calcul littéral, qui n'ont été établies, on se le rappelle, que dans la supposition où les quantités sur lesquelles on opère ont une valeur positive.

Considérons un polynome, dans lequel la partie négative soit supposée l'emporter en valeur absolue sur la positive; et pour plus de simplicité, choisissons le binome $a-b$. Si l'on attribue à b une valeur plus grande qu'à a, ce binome n'offre plus en apparence d'autre sens à l'esprit que celui d'une opération impossible.

On peut, à la vérité, donner une forme plus simple à l'expression $a-b$; car, si l'on désigne par d l'excès de la valeur absolue b sur la valeur absolue a, en sorte que b soit égal à $a+d$, on aura à retrancher de a la somme $a+d$; et si l'on en retranche d'abord a, ce qui donne *zéro* pour reste, on n'aura plus à indiquer que la soustraction de d, ce qui conduira à l'expression plus simple $-d$. On peut même remarquer que cette simplification revient à soustraire a de b et à affecter le reste d du signe $-$; c'est ainsi, par exemple, que $7-12$ reviendrait à $7-7-5$, et se réduirait par conséquent à -5.

Mais ces expressions négatives isolées, $-d$, -5, n'en sont pas moins des symboles d'impossibilité, si l'on s'en tient aux notions et aux conventions de l'arithmétique. Or, on va voir que, dans un autre ordre d'idées, ces expressions deviennent susceptibles d'une interprétation parfaitement rationnelle; et que, bien loin d'être les symboles d'une opération impossible, elles deviennent quelquefois la seule réponse raisonnable que puisse comporter une question.

Concevons, par exemple, qu'un thermomètre marquant 10^0 au-dessus de *zéro*, la température vienne à baisser de 6^0; pour avoir la température nouvelle, il faudra retrancher 6^0 de 10^0, ce qui donnera 10^0-6^0 ou 4^0. Point de difficulté jusqu'ici.

Mais, le thermomètre marquant toujours 10^0 au-dessus de *zéro*, supposons que la température vienne à baisser de 14^0; si l'on veut, comme tout à l'heure, retrancher de la température primitive le nombre de degrés dont elle s'est abaissée, on est conduit à l'expression 10^0-14^0 ou -4^0, d'après la simplification indiquée ci-dessus. D'un autre côté, si partant du $10^{\text{ième}}$ degré au-dessus de zéro, on compte 14 degrés en descendant l'échelle thermométrique, on arrive à zéro quand on en a compté 10, et les 4 restants se trouvent comptés *au-dessous de zéro*. Remarquons cette correspondance entre le symbole -4^0 et le résultat réel 4^0 *au-dessous de zéro*.

Prenons un second exemple. Un lieu est situé sous le $40^{\text{ième}}$ degré de latitude nord, un second lieu est situé à 30 degrés au sud du premier, sur le même méridien pour plus de clarté. Si l'on veut connaître à quelle latitude répond ce second lieu, on retranchera les 30^0 de la latitude 40^0, ce qui donnera 40^0-30^0 ou 10^0 *de latitude nord*. Point de difficulté.

Mais si le second lieu était à 50^0 au sud du premier, et que, pour obtenir sa latitude, on retranchât encore les 50^0 de la latitude 40^0, on arriverait à l'expression 40^0-50^0 ou -10^0. D'un autre côté, si, en partant du $40^{\text{ième}}$ degré de latitude nord on descend vers le sud en comptant 50 degrés, quand on en aura compté 40, on sera sur l'équateur, et les 10 qui restent seront comptés vers le sud; la latitude demandée sera donc 10^0 *de latitude sud*. Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -10^0 et le résultat réel 10^0 *de latitude sud*.

Pour dernier exemple, imaginons qu'un événement ait eu lieu 600 ans après J. C., et qu'un autre événement ait eu lieu 400 ans auparavant. Pour avoir la date de celui-ci, il faudra retrancher 400 ans de 600 ans, ce qui donnera $600-400$ ou 200 ans après J. C. Mais si l'on suppose que le deuxième événement considéré ait eu lieu 800 ans avant celui dont on a parlé d'abord, et que pour avoir sa date on retranche encore les 800 ans des 600 ans, on arrive à l'expression $600-800$ ou -200 ans. D'un autre côté, il est facile de voir que l'événement en question a eu lieu 200 ans *avant J. C.* Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -200 ans, et le résultat réel 200 ans *avant J. C.*

Dans les exemples que nous venons de prendre, et il serait facile de les multiplier, on trouve cette circonstance commune que la quantité cherchée est, par sa nature, susceptible d'être comptée dans deux sens opposés. Et l'on remarque que, l'un de ces deux sens étant celui qui est le plus ordinaire, et dans lequel on compte habituellement les quantités regardées comme positives, il arrive que si la quantité cherchée doit être comptée en sens contraire, le calcul de cette quantité, effectué d'après les mêmes règles que si elle devait être positive, conduit à un résultat négatif.

Il n'y a qu'un pas de cette remarque à la convention de compter dans l'un des deux sens opposés les quantités positives, et dans le sens contraire les quantités négatives. De cette manière, toutes les fois qu'une quantité sera ainsi susceptible d'être comptée dans deux sens contraires, il sera aussi rationnel de lui attribuer des valeurs négatives que des positives; et les monomes négatifs isolés ne seront des symboles d'impossibilité absolue que lorsqu'ils représenteront une quantité qui, par sa nature, ne peut être comptée que dans un sens. Si, par exemple, il s'agit de la longitude d'un lieu, comme elle peut être comptée vers l'est ou vers l'ouest, on pourra admettre pour cette quantité des valeurs indistinctement positives ou négatives. S'il s'agit au contraire du nombre des côtés d'un polygone, comme il ne peut être compté que dans un sens, il n'admettra pas de valeurs négatives; et une valeur négative, dans ce cas, serait un symbole d'impossibilité absolue.

88. La convention dont on vient de parler peut être justifiée par une autre considération qui nous servira en même temps à montrer sous son véritable jour le calcul des quantités négatives et l'Algèbre en général,

Reprenons l'exemple du thermomètre. Supposons qu'il marque 6^0 *au-dessus de zéro*, et que la température vienne à s'élever de 10 degrés; pour savoir le nombre de degrés que l'instrument marquera, il faudra *ajouter* aux 10 degrés d'élévation, les 6 degrés que le thermomètre marquait d'abord, ce qui donnera $10+6$ ou 16^0 *au-dessus de zéro*.

En général, si t désigne dans ce cas la température primitive, a l'accroissement, et T la température finale, on aura la relation

$$T = a + t \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la température primitive soit de 6^0 *au-dessous de zéro*, et qu'elle s'élève encore de 10^0; la température finale s'obtiendra en remarquant que, si elle s'élève d'abord de 6 degrés, le thermomètre marquera zéro, et que les 4 degrés d'élévation restants seront comptés *au-dessus de zéro*. C'est-à-dire que pour avoir la température finale, il faudra des 10 degrés d'élévation *retrancher* les 6 degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre; ce qui donne en effet $10^0 - 6^0$ ou 4^0 *au-dessus de zéro*.

En général, si t désigne alors la température primitive ou le nombre de degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre, si a désigne toujours l'accroissement de température et T la température finale, on aura la relation

$$T = a - t \qquad [2].$$

On voit que les relations [1] et [2] ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe qui précède la température initiale t. Cette remarque suffirait pour justifier la convention qui consiste à regarder comme *positives* les températures comptées *au-dessus* de zéro, et comme *négatives* celles qui sont comptées *au-dessous*.

Mais il y a plus, c'est que cette convention permet de réunir les deux formules [1] et [2] en une seule, qui comprendra tous les cas, et donnera ainsi la réponse la plus générale à la question proposée. Il suffit pour cela d'étendre la signification des mots *quantité* et *addition*. Nous appellerons *quantités algébriques* celles qui, comme la température, la latitude, le temps, etc., sont susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés; ces quantités étant positives si on les compte dans l'un de ces deux sens, et négatives si on les compte dans l'autre. Nous appellerons *addition algébrique* une opération ayant pour but de réunir deux ou plusieurs quantités algébriques *en conservant à chacune son signe*; de telle sorte que la *somme algébrique* de $+10$ et de -6 sera $10-6$, comme celle de $+10$ et de $+6$ est $10+6$. Nous pourrons alors ne conserver que la formule [1], et l'énoncer en disant : que si un thermomètre marque t degrés et que la température s'élève de a degrés, la température finale T sera la *somme algébrique* de a et de t. Cette formule répondra alors à tous les cas. Si, par exemple, la température initiale est de 10^0 au-dessous de zéro, et qu'elle s'élève de 7 degrés, pour avoir la température finale, on remplacera a par $+7$ et t par -10, et faisant la *somme algébrique*, on aura

$$T=+7-10 \quad \text{ou} \quad T=-3,$$

ce qui voudra dire que la température finale est de 3^0 *au-dessous* de zéro. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

89. Prenons un dernier exemple. Supposons que deux villes soient situées sur le même méridien : l'une à 48^0 de latitude nord, l'autre à 35^0 de latitude nord; pour avoir leur distance en latitude, on n'aura qu'à *retrancher* 35 de 48, ce qui donnera 48^0-35^0 ou 13^0 de latitude nord.

En général, si L et l désignent les deux latitudes nord, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d=L-l \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la première ville étant toujours à 48^0 de latitude nord, la seconde soit à 35^0 de latitude sud; il est clair que pour obtenir leur distance en latitude, il faudra *faire la somme* des nombres 48 et 35, ce qui donnera 48^0+35^0 ou 83^0.

En général, si L désigne le nombre de degrés de latitude nord, l le nombre de degrés de latitude sud, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d=L+l \qquad [2].$$

Les relations [1] et [2] ne diffèrent que par le signe qui précède la latitude l. Il est donc naturel de regarder la latitude comme une *quantité algébrique*, qui sera positive ou négative, suivant qu'elle sera comptée vers le nord ou vers le sud. On pourra ensuite renfermer tous les cas de la question qui nous occupe dans la formule [1], en étendant le sens du mot *soustraction*. On appellera *soustraction algébrique* une opération par laquelle on écrit une quantité algébrique à la suite d'une autre *en changeant son signe;* en sorte que la différence entre $+48$ et $+35$ sera $48-35$; mais que la différence entre $+48$ et -35 sera $48+35$. On énoncera alors la formule [1] d'une manière générale en disant : que pour obtenir la distance en latitude de deux lieux donnés, il faut faire la *différence algébrique* entre leurs latitudes.

90. En résumé, on voit qu'il existe des quantités susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés ; et que, suivant qu'elles sont comptées dans l'un ou l'autre de ces deux sens, elles figurent avec un certain signe ou avec le signe contraire dans la solution d'une même question. Les quantités de cette espèce ont reçu le nom de *quantités algébriques;* on leur attribue le signe $+$ lorsqu'elles sont comptées dans l'un des deux sens dont on vient de parler, et le signe — lorsqu'elles sont comptées dans le sens contraire. L'avantage qu'on retire de cette convention est non-seulement de trouver une interprétation pour les quantités négatives isolées que le calcul fournit quelquefois sans qu'on ait pu le prévoir, mais encore de pouvoir généraliser les formules auxquelles conduit la solution d'un problème particulier.

Cette tendance de l'Algèbre à généraliser les opérations et les résultats est un de ses caractères distinctifs. Nous aurons occasion d'y revenir. Il nous suffit pour le moment d'avoir essayé de faire comprendre l'origine des quantités négatives et des règles suivant lesquelles on les introduit dans le calcul. Nous allons maintenant exposer ces règles en détail.

91. *On appelle* QUANTITÉ ALGÉBRIQUE *une quantité qui se compose de deux éléments* : 1° *d'une valeur numérique* qui peut être entière ou fractionnaire ; 2° *d'un signe* qui peut être $+$ ou $-$.

Ainsi $+4$, -4, $+\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $+a$, $-a$, $+4a^2b$, $-4a^2b$, etc., sont des quantités algébriques. Si elles contiennent des lettres, il faut toujours imaginer que ces lettres tiennent lieu de certaines valeurs numériques entières ou fractionnaires.

Quant à l'ordre de grandeur des quantités négatives entre elles, ou comparées aux quantités positives, il faut remarquer que si d'un nombre quelconque, 5, par exemple, on retranche successivement une unité, on obtient des nombres de plus en plus petits 4, 3, 2, 1, 0. Arrivé à ce point, si l'on continue à retrancher toujours successivement une unité, on obtient les quantités négatives -1, -2, -3, -4, etc., dont la valeur absolue est croissante. Mais, comme c'est à l'aide d'une même opération, la soustraction d'une unité, qu'on a obtenu toute cette série de nombres, les uns positifs décroissants, les autres négatifs croissants en valeur absolue, l'analogie a conduit à regarder les quantités négatives comme moindres, algébriquement parlant, que les quantités positives, et comme d'autant moindres que leur valeur absolue est plus grande. Ainsi -1 est regardé comme moindre que 0 ; -2 est moindre que -1, et ainsi de suite.

Conformément à cette convention, lorsqu'on veut exprimer qu'une quantité a est positive, on écrit $a>0$; et si l'on veut exprimer qu'elle est négative, on écrit $a<0$.

92. L'ADDITION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités algébriques en conservant à chacune son signe.*

Ainsi, la somme algébrique de $+a$ et de $+b$ est $a+b$; la somme algébrique de $+a$ et de $-b$ est $a-b$; la somme algébrique de $-a$ et de $+b$ est $-a+b$; la somme algébrique de $-a$ et de $-b$ est $-a-b$.

Un polynome peut être considéré comme la somme algébrique de ses termes.

Pour additionner deux polynomes, il suffit d'écrire le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe. Cette règle a déjà été donnée au n° **27** ; mais nous avions supposé alors que, dans chaque polynome, l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs. Cette restriction devient inutile.

93. *La* SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on écrit la quantité à soustraire à la suite de la quantité dont on la soustrait, en changeant le signe de la quantité à soustraire.*

Ainsi, la différence algébrique entre $+a$ et $+b$ est $a-b$; la différence algébrique entre $+a$ et $-b$ est $a+b$; la différence algébrique entre $-a$ et $+b$ est $-a-b$; la différence algébrique entre $-a$ et $-b$ est $-a+b$.

Pour soustraire un polynome d'un autre, il faut l'écrire à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes. Cette règle a été donnée au n° **30**, en supposant que dans chaque polynome l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs; cette restriction n'est plus nécessaire.

94. *La* MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on cherche une quantité algébrique, appelée* produit, *qui soit composée avec une quantité algébrique, appelée* multiplicande, *comme une autre quantité algébrique, appelée* multiplicateur, *est composée avec l'unité positive.*

Cette définition n'est, comme on le voit, qu'une extension de la définition donnée en arithmétique; on y a introduit l'élément qui distingue les quantités algébriques des quantités purement numériques, c'est-à-dire le signe.

Soit $+A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera composée avec la valeur absolue A du multiplicande, comme la valeur absolue B du multiplicateur est composée avec l'unité; c'est-à-dire que, d'après les notations admises, cette valeur absolue du produit sera AB. Quant au signe du produit, comme le multiplicateur $+B$ a le même signe que l'unité positive, ce produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $+A$ par $+B$ est $+AB$.

Soit $+A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera, comme ci-dessus, AB. Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande, c'est-à-dire $-$.

Ainsi, le produit de $+A$ par $-B$ est $-AB$.

Soit $-A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera encore AB. Mais le multiplicateur $+B$ ayant le même signe que l'unité positive, le produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-à-dire $-$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $+B$ est $-AB$.

Soit enfin $-A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera AB. Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande $-A$, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $-B$ est $+AB$.

La *règle des signes* établie au n° **34** par la considération de deux polynomes dans chacun desquels la partie positive était supposée l'emporter sur la partie négative, se trouve donc étendue à des monomes isolés, en partant de la distinction établie entre les quantités algébriques et les quantités purement numériques, et de la définition plus générale adoptée pour la multiplication.

Quant à la multiplication des polynomes, les règles établies au n° **34**, dans la supposition où la partie positive de chaque polynome l'emporte sur la partie négative, subsisteront encore dans l'hypothèse contraire.

Soit, en effet, à multiplier $a-b$ par $c-d$, et supposons d plus grand que c en valeur absolue; le binome $c-d$ revient à $-(d-c)$; expression dans laquelle, d'après notre supposition, $d-c$ sera positif. Nous aurons donc à multiplier $+(a-b)$ par $-(d-c)$. Pour obtenir ce produit, il faudra d'abord multiplier entre elles les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ des deux facteurs, et changer ensuite le signe du résultat, puisque ces deux facteurs sont de signe contraire, car les règles démontrées ci-dessus ne supposent pas que A et B représentent des monomes plutôt que des polynomes. En multipliant d'abord les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ on obtient, d'après les règles du n° **34**, qui sont applicables ici, puisque $a-b$ et $d-c$ sont positifs l'un et l'autre :

$$ad-bd-ac+bc.$$

Et en changeant le signe du résultat, ce qui se fait en changeant le signe de chaque terme, on obtient :

$$-ad+bd+ac-bc$$

ou

$$ac-bc-ad+bd,$$

comme on l'a obtenu au n° **34**.

Les règles de la multiplication subsistent donc sans la restriction faite alors.

95. *La* DIVISION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle, étant donnés le produit de deux facteurs algébriques et l'un de ces facteurs, on cherche l'autre facteur.*

On a vu, aux n^{os} **39** à **43**, comment les règles de la division se déduisent de celles de la multiplication. Ces dernières étant maintenant établies sans restriction pour les monomes positifs ou négatifs, et pour les polynomes dans lesquels la partie positive est plus grande ou plus petite en valeur absolue que la partie négative, il en est de même des règles de la division.

96. Les règles données aux n^{os} **46** à **54** pour le calcul des fractions algébriques, n'étant fondées que sur celles des quatre opérations fondamentales, elles acquièrent la même généralité que celles-ci.

97. Deux quantités algébriques sont égales lorsqu'elles ont même valeur absolue et même signe. Si on les multiplie chacune par une même troisième, les produits seront égaux; car il est évident qu'ils auront aussi même valeur absolue et même signe.

Il suit de là qu'on peut, sans troubler une égalité, multiplier ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation indiquée au n° **57**.

On démontrerait de même qu'on peut, sans troubler une égalité, diviser ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation du n° **58**.

REMARQUE. On peut dans une égalité changer les signes de tous les termes, car cette transformation revient à multiplier ou à diviser à la fois les deux membres par -1.

§ 2. Discussion des problèmes du premier degré à une seule inconnue.

98. Lorsqu'on a résolu un problème d'une manière générale, c'est-à-dire en représentant les données par des lettres, comme nous l'avons fait, par exemple, au n° **63**, il est utile de rechercher les principales circonstances que peut présenter la solution, suivant les valeurs particulières qu'on peut attribuer à ces données. L'examen méthodique de ces circonstances est ce qu'on nomme la *discussion* du problème.

Nous nous occuperons dans ce paragraphe de la discussion des problèmes qui conduisent à une seule équation, à une seule inconnue.

Une pareille équation, lorsqu'on y a fait disparaître les dénominateurs, qu'on a rassemblé dans un membre tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre tous les termes indépendants de cette inconnue, qu'enfin on a mis l'inconnue en facteur commun parmi les termes où elle se trouve, peut toujours être ramenée à la forme

$$Ax = B \qquad [1],$$

dans laquelle A et B peuvent être des quantités quelconques, monomes ou polynomes, algébriques ou numériques.

On tire de cette équation $x = \frac{B}{A}$;

c'est cette valeur qu'il s'agit de discuter.

99. Lorsqu'on attribue aux données de la question des valeurs particulières, les quantités A et B prennent elles-mêmes diverses valeurs. Il peut arriver que A et B soient de mêmes signes, ou bien qu'ils soient de signe contraire; que l'une d'elles s'annule, ou qu'elles s'annulent toutes deux à la fois. Nous allons examiner ces divers cas.

I. Si A et B sont de même signe, leur quotient est positif; la valeur $x = \frac{B}{A}$ est alors une réponse directe à la question, et ne donne lieu à aucune remarque.

II. Si A et B sont de signes contraires, leur quotient est négatif; on peut alors distinguer deux cas.

Ou la quantité que x représente est susceptible d'être comptée dans deux sens opposés, qui correspondent, l'un à ses valeurs positives, l'autre à ses valeurs négatives. Dans ce cas, une valeur négative trouvée pour l'inconnue est encore une réponse directe à la question. Si, par exemple, l'inconnue x représentait un certain nombre de degrés du thermomètre, comptés à partir du zéro, une valeur telle que -6 n'aurait rien que de parfaitement admissible, et répondrait à 6° *au-dessous* de zéro, comme la valeur $+6$ répondrait à 6° *au-dessus* de zéro. Cela résulte des conventions dont nous avons parlé au n° **87**.

Ou la quantité que x représente n'est susceptible d'être comptée que dans un seul sens. Alors, une valeur négative trouvée pour x est un caractère d'impossibilité du problème, tel qu'il a été posé du moins. Cette valeur négative indique un vice dans l'énoncé, ou au moins dans la manière de l'entendre; elle montre qu'une quantité qu'on avait regardée comme additive devait être regardée comme soustractive, ou *vice versa;* et l'on peut, en rectifiant l'énoncé, être conduit à une valeur positive numériquement égale à la valeur négative trouvée en premier lieu.

Pour opérer cette rectification dans l'énoncé, on remarque que, si l'on a trouvé, par exemple, la valeur

$$x = -6$$

et qu'on change x en $-x$ dans l'équation du problème, les calculs demeureront les mêmes, à l'exception du signe de x; en sorte qu'on parviendra à l'équation

$$-x = -6, \text{ ce qui revient à } x = 6.$$

Ainsi donc, on changera x en $-x$ dans l'équation du problème ; il sera facile alors de reconnaître le changement qu'il faut faire subir à l'énoncé pour qu'il conduise à l'équation ainsi modifiée, au lieu de conduire à l'équation primitive.

100. Soit proposé, par exemple, ce problème :

Un ouvrier fait, par jour, a *mètres d'une certaine étoffe; un second ouvrier en fait* b *mètres dans le même temps. Le premier a déjà fait* c *mètres, et le second en a fait* m *de plus. On demande dans combien de jours les deux ouvriers en auront fait autant l'un que l'autre.*

Désignons par x le nombre de jours demandé. Le premier ouvrier faisant a mètres par jour, en fera en x jours un nombre qui sera le produit de a par x, c'est-à-dire ax; au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera donc $c+ax$. Le second ouvrier faisant b mètres par jour, en fera en x jours un nombre marqué par bx, et, au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera $c+m+bx$. Or, d'après l'énoncé, ces deux nombres doivent être égaux ; on doit donc avoir l'équation

$$c+ax=c+m+bx \qquad [1]$$

d'où l'on tire $$x=\frac{m}{a-b} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que, pour obtenir le nombre de jours demandé, il faut diviser l'avance du second ouvrier par la différence entre les nombres de mètres que les deux ouvriers font par jour; résultat auquel on aurait pu d'ailleurs parvenir directement. On remarquera de plus que la donnée c n'a servi que dans la mise en équation, et a complétement disparu du résultat, qui en est par conséquent indépendant.

Si l'on fait les hypothèses particulières $a=8$, $b=5$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x=4.$$

Mais si l'on fait, au contraire, les hypothèses $a=5$, $b=8$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{5-8} \quad \text{ou} \quad x=-4.$$

Cette valeur négative indique qu'il y a alors un vice dans l'énoncé. Et en effet, le premier ouvrier travaillant moins vite que le second, ne pourra jamais rattraper celui-ci, qui a une avance de 12 mètres. La quantité x, qu'on avait regardée comme additive, doit donc être regardée comme soustractive. Changeons donc x en $-x$ dans l'équation [1] du problème, il viendra :

$$c-ax=c+m-bx \qquad [3],$$

et l'on voit facilement que pour que l'énoncé conduise à l'équation ainsi modifiée, il faut poser la question en ces termes :

Combien s'est-il écoulé de jours depuis celui où le nombre de mètres faits par chacun des deux ouvriers était le même?

En résolvant l'équation [3] on obtient

$$x=\frac{m}{b-a} \qquad [4],$$

et, si l'on met pour a, b, m, les valeurs 5, 8, 12, qui avaient conduit tout à l'heure à une valeur négative, on trouve

$$x=\frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x=4.$$

Remarque. Si l'on avait, dès l'abord, regardé le nombre de jours x comme susceptible d'être compté indifféremment vers l'avenir ou vers le passé, c'est-à-dire si on avait considéré x comme une quantité algébrique (**91**), on aurait pu sur-le-champ admettre la valeur négative, sans être obligé de modifier l'énoncé, autrement qu'en remplaçant ces mots *dans combien de jours* par les mots *depuis combien de jours*, et le mot *sera* par les mots *a été*, ce qui est simplement une nécessité de langage. Et la valeur négative trouvée pour x eût indiqué que l'époque cherchée était *antérieure* au lieu d'être *postérieure* à l'instant que l'on prend pour point de départ.

101. III. Il peut arriver que, par suite des valeurs particulières attribuées aux données, le numérateur B de la valeur

$$x=\frac{B}{A}$$

devienne nul, sans que le dénominateur le soit, ce qui donne

$$x=\frac{0}{A}.$$

Une valeur de cette forme n'est autre que *zéro;* car *zéro* divisé par une quantité quelconque, donne évidemment pour quotient *zéro*. Si l'on conservait quelque doute à cet égard, il suffirait de remonter à l'équation

$$Ax=B,$$

qui se réduit alors à

$$Ax=0,$$

et ne peut être satisfaite que par la valeur

$$x=0,$$

car, pour annuler un produit tel que Ax, il faut annuler un de ses facteurs; et le facteur A est supposé différent de *zéro*.

Le problème précédent conduirait à une valeur nulle si l'on faisait l'hypothèse particulière $m=0$. Et, en effet, les quantités d'ouvrage faites par chaque ouvrier étant alors égales, la condition indiquée par l'énoncé se trouve remplie dès le jour même, et par conséquent le nombre de jours cherché est *zéro*.

102. IV. Il peut arriver que les hypothèses faites sur les données annulent le dénominateur A, sans annuler le numérateur, et qu'on ait

$$x=\frac{B}{0}.$$

Remarquons d'abord que l'équation $Ax=B$ se réduit alors à $0=B$, et ne saurait par conséquent être satisfaite par aucune valeur de x. L'hypothèse $A=0$ répond donc à un cas d'impossibilité.

Pour voir ce que peut signifier en lui-même le symbole $\frac{B}{0}$, supposons d'abord que A, au lieu de devenir nul, prenne seulement une valeur très-petite, par exemple, 0,001; on aura

$$x=\frac{B}{0{,}001} \quad \text{ou} \quad x=1000B.$$

Supposons en second lieu que, par de nouvelles hypothèses, le dénominateur A prenne une valeur encore plus petite, 0,000001 par exemple; il viendra

$$x=\frac{B}{0{,}000001} \quad \text{ou} \quad x=1000000B.$$