Si A prenait une valeur plus petite encore, par exemple, 0,000000001, on aurait

$$x = \frac{B}{0{,}000000001} \quad \text{ou} \quad x = 1000000000B.$$

On voit qu'à mesure que le dénominateur A acquiert des valeurs de plus en plus petites, la valeur $\frac{B}{A}$ prend au contraire des valeurs de plus en plus grandes. Si donc on attribue à A la valeur zéro, c'est-à-dire une valeur moindre que toute quantité assignable, la fraction $\frac{B}{A}$ prendra au contraire une valeur plus grande que toute quantité assignable; c'est ce qu'on appelle une valeur *infiniment grande*, ou *infinie*. On dit, en conséquence, que l'expression $\frac{B}{0}$ est le *symbole de l'infini*.

Si, par exemple, dans le problème du n° **100**, on fait l'hypothèse $a = b$, on trouve $x = \frac{m}{0}$. Or, si l'on remonte à l'énoncé du problème, il est facile d'interpréter ce résultat. Au lieu de supposer $a = b$, c'est-à-dire au lieu de supposer que les deux ouvriers font chaque jour le même nombre de mètres, supposons d'abord que a surpasse b d'une très-petite quantité, c'est-à-dire que la quantité d'ouvrage faite journellement par le premier ouvrier ne surpasse que de très-peu celle que fait journellement le second; il est clair qu'il faudra au premier ouvrier un temps considérable pour rattraper le second. Si donc l'excès de a sur b est plus petit que toute quantité assignable, il faudra au premier ouvrier pour rattraper le second un temps plus long que toute quantité donnée; c'est-à-dire que si $a = b$, le temps cherché sera *infini*.

Une solution *infinie*, ou de la forme $\frac{B}{0}$, est donc un caractère d'impossibilité.

REMARQUE I. Il est utile de remarquer que les solutions infinies peuvent être en même temps négatives. Si, par exemple, dans le problème du n° **100**, on fait l'hypothèse $a < b$, on a vu que la valeur de x devenait négative; c'est-à-dire que si l'on suppose que le premier ouvrier travaille moins vite que le second, ce n'est qu'à une époque *antérieure* qu'ils ont pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre. Or, cette époque antérieure sera d'autant plus éloignée que l'excès de b sur a sera plus petit; si donc on suppose cet excès nul, ou $a = b$, les deux ouvriers n'auront pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre qu'à une époque antérieure *infiniment éloignée*. En sorte que la solution est à la fois négative et infinie. On trouve, en effet,

$$x = -\frac{m}{0}.$$

Ce caractère d'impossibilité est de même nature que l'infini positif; il n'y a de différence que dans le sens.

REMARQUE II. On représente quelquefois l'infini positif par le signe $+\infty$ et l'infini négatif par $-\infty$.

103. V. Il peut arriver enfin que les hypothèses faites sur les données représentées par des lettres, annulent à la fois le numérateur B et le dénominateur A de la valeur de l'inconnue x, auquel cas cette valeur prend la forme

$$x = \frac{0}{0}.$$

Comme on ignore ce que peut signifier un pareil symbole, et qu'on ne sait d'ailleurs s'il pourrait être légitimement déduit de l'équation $Ax = B$, puisqu'il faudrait diviser ses deux membres par *zéro*, il faut remonter à l'équation même.

Or, dans le cas où A et B sont nuls, cette équation est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur qu'on attribue à x, puisque les deux membres sont égaux à *zéro*. Le problème admet donc autant de solutions qu'on voudra; et par conséquent *l'expression* $\frac{0}{0}$ *est un symbole d'indétermination*.

Si, par exemple, dans le problème du n° **100**, on fait en même temps les deux hypothèses $m = 0$ et $a = b$, la valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$. Or, il est clair en effet que si aucun des deux ouvriers n'a d'avance sur l'autre, et s'ils font chaque jour le même nombre de mètres, le nombre total de mètres fait par chacun d'eux sera continuellement le même, et que par conséquent toute valeur imaginable de x sera une solution du problème.

On peut, en étudiant l'expression $\frac{0}{0}$ en elle-même, reconnaître également une quantité indéterminée. Concevons en effet une fraction algébrique $\frac{B}{A}$ dont les deux termes décroissent en conservant entre eux le même rapport. Ce rapport restant, par hypothèse, le même, quelque petits que soient ses deux termes en valeur absolue, on doit admettre qu'il restera encore le même à la limite, c'est-à-dire quand les deux termes seront nuls et que la fraction sera réduite à la forme $\frac{0}{0}$. Cette forme peut donc représenter le rapport dont nous parlons. Mais, comme ce rapport est quelconque d'ailleurs, on voit que $\frac{0}{0}$ peut représenter telle quantité que l'on voudra.

Remarque. Il faut observer toutefois que la valeur de x peut prendre la forme $\frac{0}{0}$, sans qu'il y ait indétermination réelle, lorsqu'on a négligé de supprimer les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Supposons, par exemple, qu'un problème ait conduit à la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 9b^2},$$

et qu'on fasse les hypothèses particulières $a = 6$ et $b = 2$, on trouvera

$$x = \frac{0}{0},$$

ce qui semble indiquer, dans ce cas, une indétermination du problème. Mais si l'on observe, que les deux termes de la valeur de x sont divisibles par $a - 3b$, et qu'on effectue cette division, il restera

$$x = \frac{a + b}{a + 3b},$$

et si l'on fait, dans cette valeur ainsi simplifiée, les hypothèses $a = 6$ et $b = 2$, qui avaient donné $\frac{0}{0}$, on trouve

$$x = \frac{8}{12} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3},$$

valeur parfaitement déterminée.

On voit combien il est important de supprimer les facteurs qui peuvent être communs aux deux termes de la valeur de l'inconnue, puisque, indépendamment d'une plus grande complication dans l'expression de cette valeur, ils peuvent induire en erreur dans certains cas particuliers de la discussion du problème.

§ 3. Discussion des problèmes du premier degré à deux inconnues.

104. Soient les deux équations

$$ax + by = c \quad [1],$$

$$a'x + b'y = c' \quad [2].$$

Pour en tirer les valeurs de x et de y, nous allons employer la méthode des coefficients indéterminés, déjà indiquée au nº **72**. Multiplions la première équation par une indéterminée m et retranchons-en la seconde membre à membre, il viendra

$$(ma - a')x + (mb - b')y = mc - c' \quad [3].$$

Or, on peut profiter de l'indétermination de m pour tirer à volonté de l'équation [3], soit la valeur de x, soit celle de y.

Si, par exemple, on égale à zéro le coefficient de y, et qu'on pose

$$mb - b' = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{b'}{b},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(ma - a')x = mc - c', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{mc - c'}{ma - a'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{b'}{b}$,

$$x = \frac{\frac{b'c}{b} - c'}{\frac{b'a}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad [4].$$

Si, au contraire, on égale à zéro le coefficient de x, et qu'on pose

$$ma - a' = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{a'}{a},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(mb - b')y = mc - c', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{mc - c'}{mb - b'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{a'}{a}$,

$$y = \frac{\frac{a'}{a}c - c'}{\frac{a'}{a}b - b'} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad [5],$$

en changeant les signes au numérateur et au dénominateur, afin de donner à la valeur de y le même dénominateur qu'à celle de x.

105. Il y a un moyen mnémonique très-simple de se rappeler ces valeurs générales, ou de les reformer directement au besoin. On écrit sur une même ligne les deux combinaisons ab et ba; on les sépare par le signe —, et dans chaque terme on accentue la seconde lettre, ce qui donne $ab' - ba'$; on a ainsi le dénominateur commun aux deux valeurs.

Pour former le numérateur de la valeur de x, il suffit de remplacer, dans ce dénominateur, les lettres a et a', par les lettres c et c'; c'est-à-dire chaque coefficient de x par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient en effet, ainsi, $cb' - bc'$, qui est bien le numérateur de la valeur de x.

Pour former le numérateur de la valeur de y, il faut remplacer dans le dénominateur les lettres b et b' par les lettres c et c', c'est-à-dire chaque coefficient de y par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient ainsi, en effet, $ac' - ca'$, qui est bien le numérateur de la valeur de y.

106. On peut se servir de ces valeurs générales pour résoudre deux équations particulières. Il suffit pour cela d'y remplacer les lettres a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs.

Soient, par exemple, les deux équations

$$5x + 2y = 33,$$
$$7x - 3y = 23,$$

déjà traitées au nº **68**. On aura, dans cet exemple,

$$a = 5,\ b = 2,\ c = 33,\ a' = 7,\ b' = -3,\ c' = 23.$$

Par suite, en substituant dans les valeurs générales [4] et [5], on trouvera

$$x = \frac{33 \times (-3) - 2 \times 23}{5 \times (-3) - 2 \times 7} = \frac{-99 - 46}{-15 - 14} = \frac{-145}{-\ 29} = 5,$$

$$y = \frac{5 \times 23 - 33 \times 7}{5 \times (-3) - 2 \times 7} = \frac{115 - 231}{-15 - 14} = \frac{-116}{-\ 29} = 4,$$

comme au numéro cité.

Mais il sera, presque toujours, préférable de traiter directement chaque exemple particulier. Le principal usage

des valeurs générales est dans la discussion que nous allons faire.

107. Cette discussion a pour but d'examiner les formes les plus remarquables que peuvent prendre ces valeurs lorsqu'on vient à faire des hypothèses particulières sur la valeur des lettres qui y entrent.

I. D'abord, si les hypothèses particulières donnent pour x et y des valeurs positives, ces valeurs sont une réponse directe à la question, et ne donnent lieu à aucune remarque.

II. Si les valeurs particulières attribuées aux lettres donnent pour l'une des inconnues ou pour chacune d'elles une valeur négative, il pourra arriver que ce soit le signe d'une impossibilité dans le problème; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit n'est susceptible par sa nature d'être comptée que dans un seul sens. Dans ce cas on suivra la marche déjà indiquée à l'occasion des problèmes à une seule inconnue : on changera dans les équations du problème le signe de l'inconnue pour laquelle on aura trouvé une valeur négative, et l'on cherchera le changement qu'il faut introduire dans l'énoncé pour qu'il conduise aux équations ainsi modifiées au lieu de conduire aux équations primitives. Il pourra arriver aussi que la valeur négative trouvée puisse être admise comme réponse à la question; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit est susceptible d'être comptée indifféremment dans deux sens opposés.

Nous allons donner des exemples de ces deux cas.

108. PROBLÈME. *Un ouvrier a travaillé une première fois dans une maison pendant* 7 *jours, sur* 3 *desquels il a eu avec lui un apprenti, et il a touché* 29 *francs. Une se-*

conde fois, le même ouvrier a travaillé pendant 11 *jours, sur* 4 *desquels il a eu avec lui son apprenti, et il a touché* 47 *francs. On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour et ce que lui rapportait le travail de son apprenti.*

La traduction de cet énoncé conduit immédiatement aux deux équations

$$7x + 3y = 29$$
$$11x + 4y = 47,$$

dans lesquelles x représente le gain journalier de l'ouvrier, et y ce que lui rapporte par jour le travail de son apprenti.

En éliminant y on trouve $x = 5$; et cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$35 + 3y = 29; \quad \text{d'où} \quad y = -2,$$

résultat inadmissible.

Changeons donc le signe de y dans les équations du problème, qui deviendront

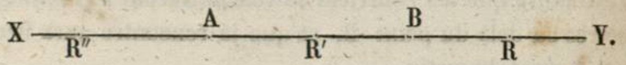
$$7x - 3y = 29,$$
$$11x - 4y = 47.$$

On voit que les quantités $3y$ et $4y$, qu'on avait d'abord regardées comme additives, doivent être au contraire regardées comme soustractives; c'est-à-dire que l'apprenti, au lieu de rapporter chaque jour à son maître une somme y, lui coûte au contraire une certaine somme. Il faudra donc poser la question de cette manière : *On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour, et ce que lui coûtait son apprenti.*

Avec cette modification, on trouve $x = 5$ et $y = 2$, qui répondent alors directement à l'énoncé.

109. Problème. *Deux courriers parcourent la même*

route; l'un fait a *kilomètres par heure, l'autre fait* b *kilomètres dans le même temps; le premier a passé à minuit en un point* A *situé sur la route; le second,* h *heures après, a passé en un point* B *situé à* d *kilomètres au delà du point* A. *On demande le lieu et l'heure de leur rencontre.*



Nous supposerons d'abord que les deux courriers marchent dans le même sens, de X vers Y. Soit R le lieu de la rencontre, supposé situé au delà du point B. Désignons par x la distance BR, et par y le nombre d'heures écoulées depuis minuit jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le premier courrier aura parcouru la distance AR ou $d + x$ en y heures; et comme il fait a kilomètres par heure, on aura l'équation

$$ay = d + x \qquad [1].$$

Le second courrier aura parcouru la distance BR ou x en $y - h$ heures; et comme il fait b kilomètres par heure, on aura pour seconde équation

$$b(y - h) = x \qquad [2].$$

Éliminant x, on obtient

$$ay = d + b(y - h), \quad \text{d'où} \quad y = \frac{d - bh}{a - b} \qquad [3].$$

Par suite $y - h = \dfrac{d - bh - ah + bh}{a - b} = \dfrac{d - ah}{a - b}$;

et enfin $$x = \frac{b(d - ah)}{a - b} \qquad [4].$$

Si l'on a $a > b$ et $d > ah$, on aura à plus forte raison

$d > bh$; les termes des valeurs de x et de y étant positifs, ces valeurs seront positives elles-mêmes, et répondront directement à la question. Si, par exemple, on suppose $a = 12^k$, $b = 9^k$, $d = 63^k$ et $h = 4$ heures, on trouve

$$x = 45^k \quad \text{et} \quad y = 9^h.$$

C'est-à-dire que les courriers se rencontreront à 45 kilomètres au delà du point B, et que la rencontre aura lieu à 9 heures du matin.

Supposons, au contraire, que l'on ait $a > b$ et $d > bh$; mais en même temps $d < ah$, on trouvera pour y une valeur positive, mais pour x une valeur négative. Comme la distance BR est susceptible d'être comptée indifféremment à droite ou à gauche du point B, c'est-à-dire comme x est une quantité *algébrique*, nous savons que les valeurs négatives n'ont rien d'absurde et peuvent s'interpréter; ayant admis comme positives les valeurs comptées vers la droite, nous admettrons comme négatives celles qui seront comptées vers la gauche. La solution s'interprétera donc en disant que la rencontre, au lieu de se faire *au delà* du point B, se fera *en deçà* de ce point, en R′ par exemple.

C'est ce qui doit être, en effet; car ah étant le chemin parcouru par le premier courrier dans h heures, la condition $d < ah$ indique que, à h heures après minuit, il aura parcouru une distance plus grande que d, et dépassé par conséquent le point B au moment où le second courrier y arrive; et comme il va plus vite que celui-ci, la rencontre ne pourra avoir lieu au delà du point B.

Soient, par exemple, $a = 12^k$, $b = 9^k$, $d = 42^k$ et $h = 4$, on trouvera

$$y = 2^h \quad \text{et} \quad x = -18^k;$$

c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre aura lieu à 2 heures du matin, et à 18 kilomètres en deçà du point B.

On arriverait aux mêmes résultats en traitant la question directement dans l'hypothèse d'une rencontre entre A et B. Soit, en effet, R′ le point de rencontre, et faisons $BR' = x$. Le chemin parcouru par le premier courrier sera AR′ ou $d - x$; on aura donc pour première équation

$$ay = d - x.$$

Le chemin parcouru par le second courrier sera BR′ ou x; quant au temps employé, ce ne sera plus $y - h$, mais bien $h - y$; car pour que la rencontre ait lieu entre A et B, il faut nécessairement que l'instant de la rencontre précède celui où le second courrier arrive en B, c'est-à-dire que y doit être moindre que h. On aura donc l'équation

$$b(h - y) = x.$$

Or, ces deux équations pourraient se déduire des équations primitives [1] et [2], en y changeant x en $-x$; elles conduiront donc aux mêmes valeurs, sauf le signe de x.

Si l'on faisait les hypothèses $a > b$ et $d < bh$, on aurait à plus forte raison $d < ah$, et les valeurs de x et de y seraient toutes deux négatives. On trouvera l'interprétation de ce résultat en regardant à son tour y comme une quantité algébrique, c'est-à-dire en supposant que y désigne un nombre d'heures susceptible d'être compté indifféremment avant ou après minuit; la rencontre aurait lieu alors un certain nombre d'heures avant minuit, et à gauche du point B; le point de rencontre serait même situé à gauche du point A, en R″, par exemple. Cela résulte de ce que la valeur absolue de x, qui est alors

$$\frac{b(ah-d)}{a-b} \quad \text{ou} \quad \frac{bah-bd}{a-b},$$

est plus grande que $\dfrac{ad-bd}{a-b}$, puisqu'on a $bh>d$; c'est-à-dire qu'elle est plus grande que $\dfrac{(a-b)d}{a-b}$ ou que d.

C'est ce qu'on voit encore en remarquant que bh est le chemin parcouru dans h heures par le second courrier; et que, puisque bh est plus grand que d, le second courrier était, à minuit, à gauche du point A, et que, par conséquent, la rencontre n'a pu avoir lieu que de ce côté.

Si, par exemple, on a $a=12^{\mathrm{k}}$, $b=9^{\mathrm{k}}$, $d=30^{\mathrm{k}}$ et $h=4$; on trouve $y=-2$ et $x=-54^{\mathrm{k}}$, c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre a eu lieu 2 heures avant minuit, et à 54 kilomètres à gauche du point B (ou à 24 kilomètres à gauche du point A).

On peut encore vérifier ces résultats en traitant directement le problème pour le cas où la rencontre serait supposée avoir lieu en un point R″, situé à gauche du point A.

En effet, soient x la distance BR″, et y le nombre d'heures écoulées depuis l'instant de la rencontre jusqu'à l'arrivée du premier courrier en A, c'est-à-dire jusqu'à minuit. Le chemin parcouru par le premier courrier en y heures sera AR″ ou $x-d$; on aura donc pour première équation

$$ay=x-d.$$

Le chemin R″B ou x aura été parcouru par le second courrier dans un temps qui se compose de $y+h$, puisque le second courrier n'arrive en B que h heures après que le premier est arrivé en A; on aura donc pour seconde équation

$$a(y+h)=x.$$

Or, ces deux équations se déduisent des deux équations primitives [1] et [2] en y changeant à la fois x en $-x$ et y en $-y$. Elles donneront donc les mêmes valeurs avec des signes contraires.

110. Remarque I. Nous avons supposé jusqu'ici que le second courrier passait en B, un nombre h d'heures *après* que le premier a passé en A; on pourrait supposer que cela a lieu au contraire h heures *avant*. On va voir qu'il suffit pour introduire cette hypothèse nouvelle de changer partout h en $-h$; en sorte que les formules primitives resteraient applicables si l'on regardait h comme une quantité algébrique susceptible d'être comptée indifféremment en plus ou en moins. En effet, reprenons le premier cas où la rencontre a lieu en R; on aura comme plus haut

$$ay=d+x.$$

Le temps employé par le second courrier à parcourir l'espace BR ou x, sera alors $h+y$, puisque le second part de B un nombre h d'heures avant que le premier parte du point A; on aura donc pour seconde équation

$$b(y+h)=x,$$

équation qui ne diffère de celle obtenue dans le numéro précédent qu'en ce que $-h$ est remplacé par $+h$, ou que h est changé en $-h$. Il suffira donc pour obtenir les valeurs de x et y de changer, dans celles obtenues plus haut, le signe des termes où entre h, ce qui donnera

$$y=\frac{d+bh}{a-b} \quad \text{et} \quad x=\frac{b(d+ah)}{a-b}.$$

111. Remarque II. Nous avons supposé jusqu'à présent que le premier courrier va plus vite que le second, ou qu'on a $a > b$; on pourrait faire l'hypothèse contraire. Le dénominateur des valeurs de x et de y devenant alors négatif, les valeurs positives trouvées plus haut deviendraient négatives et les négatives deviendraient positives. On trouverait d'ailleurs facilement l'interprétation de tous ces résultats; nous ne nous y arrêterons point.

Mais nous avons admis jusqu'ici que les deux courriers marchaient dans le même sens; voyons si les formules primitivement obtenues seraient encore applicables au cas où les deux courriers marcheraient à la rencontre l'un de l'autre.

Admettons, par exemple, que, le premier courrier allant de A vers B et le second de B vers A, la rencontre se fasse en R', entre A et B. Soit x la distance BR'; et supposons que le second courrier arrive en B, un nombre h d'heures après que le premier est arrivé en A. Soit enfin, comme ci-dessus, y le nombre d'heures écoulées depuis le passage du premier courrier en A, c'est-à-dire depuis minuit, jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le chemin parcouru en y heures par le premier courrier sera AR' ou $d-x$; on aura donc

$$ay = d - x.$$

Le chemin x sera parcouru par le second courrier dans un temps marqué par $y-h$, comme dans le premier cas; on aura donc pour seconde équation

$$b(y-h) = x.$$

De ces deux équations, on tire

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b}.$$

Or, ces valeurs pourraient se déduire des valeurs primitives en y changeant le signe de b et celui de x; car elles donnent alors

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad -x = \frac{-b(d-ah)}{a+b} \quad \text{ou} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b}.$$

On voit donc que les valeurs primitives seraient applicables au cas qui nous occupe, si, d'une part, on continuait à regarder x comme négatif lorsque cette distance est comptée à gauche du point B, et si, de l'autre, ayant regardé b comme positif lorsque ce nombre de kilomètres parcourus dans une heure par le second courrier représentait un chemin fait vers la droite, on convenait de regarder b comme négatif lorsqu'il représente un chemin fait vers la gauche.

Il résulte de tout ce que nous avons dit dans ces trois derniers numéros que les formules établies pour un cas particulier du problème que nous avons en vue deviennent applicables à tous les cas de ce problème, lorsqu'on y regarde les quantités x, y, h, b, etc., comme des quantités algébriques, c'est-à-dire comme susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés. Et toutes les fois que les quantités considérées sont effectivement de cette nature, les formules établies dans un cas particulier deviennent applicables à tous; c'est là une vérité qui ne peut être directement démontrée, mais qui a été vérifiée un assez grand nombre de fois pour qu'on puisse la regarder comme bien établie.

Nous allons maintenant reprendre la discussion des valeurs générales du n° **104** :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

112. III. Nous venons d'examiner, dans ce qui précède, tous les cas où aucun des deux termes de ces valeurs générales ne devient nul. Il nous reste à examiner ceux dans lesquels l'un de ces termes ou tous deux à la fois prennent la valeur zéro.

Si l'un des numérateurs prend seul la valeur zéro, celui de x par exemple, il en résulte une valeur nulle pour x, ce qui n'offre aucun caractère d'impossibilité.

Si les deux numérateurs sont nuls, sans que le dénominateur commun le soit, x et y sont nuls en même temps. C'est ce qui a lieu quand on fait les hypothèses $c=0$ et $c'=0$. Il est clair d'ailleurs que cela ne peut avoir lieu que dans ce cas. Car les valeurs $x=0$ et $y=0$ rendant nuls les premiers membres des équations

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c',$$

ces équations ne peuvent être satisfaites par ces valeurs qu'autant que les seconds membres sont nuls.

113. IV. Si le dénominateur commun prend la valeur zéro, sans que les numérateurs soient nuls, les valeurs de x et de y prennent la forme $\frac{\text{B}}{0}$ que nous avons déjà rencontrée (**102**) dans la discussion des problèmes à une seule inconnue, et qui s'est présentée à nous comme le symbole de l'infini ou d'une impossibilité.

Remontons aux équations mêmes :

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c'.$$

Pour les mieux comparer, multiplions la première par b' et la seconde par b; elles deviennent

$$ab'x+bb'y=cb' \quad \text{et} \quad a'bx+bb'x=bc' \qquad [\text{A}].$$

Or, si le dénominateur des valeurs de x et de y est nul, on a

$$ab'-ba'=0 \quad \text{ou} \quad ab'=ba';$$

dans les deux équations [A] les premiers membres sont donc identiques sans que les seconds le soient; ces deux équations et par conséquent les deux proposées sont donc *incompatibles*.

114. Prenons pour exemple le problème des courriers.

Si l'on suppose $a=b$ dans les valeurs de x et de y du n° **109**, on trouve

$$y=\frac{d-bh}{0} \quad \text{et} \quad x=\frac{b(d-ah)}{0};$$

si l'on fait la même hypothèse dans les équations primitives

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad b(y-h)=x,$$

elles deviennent

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad a(y-h)=x \quad \text{ou} \quad ay=ah+x;$$

sous cette forme, l'incompatibilité est manifeste, puisque l'on a les mêmes premiers membres et des seconds membres différents.

En considérant le problème en lui-même, l'impossibilité n'est pas moins évidente. Car, si la vitesse du premier courrier surpasse de très-peu celle du second, il lui faudra un temps considérable pour le rattraper, et la rencontre n'aura lieu qu'à une distance très-grande. Si donc les deux vitesses deviennent égales, on peut dire qu'il faudra au premier courrier un temps infini pour rattraper le second, et que la rencontre aura lieu à une distance infinie.

115. V. Si les deux termes de la valeur de l'une des inconnues deviennent nuls, il en sera en général de même des deux termes de la valeur de la seconde, et ces deux valeurs se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, qui, dans les problèmes à une seule inconnue, est un caractère d'indétermination (**103**).

Supposons, par exemple, que la valeur générale de x se présente sous cette forme, et qu'on ait a la fois

$$cb' - bc' = 0 \quad \text{et} \quad ab' - ba' = 0,$$

ou

$$cb' = bc' \quad \text{et} \quad ab' = ba'.$$

En divisant ces relations membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on en tire

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \text{ou} \quad ac' = a'c, \quad \text{ou} \quad ac' - a'c = 0,$$

c'est-à-dire que le numérateur de la valeur de y est nul; et comme elle a le même dénominateur que celle de x, il s'ensuit qu'elle prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Remontons aux équations mêmes, ou plutôt aux équations [A] que nous en avons déduites.

En comparant ces équations, on reconnaît qu'elles sont identiques, puisque ab' est égal à $a'b$, et cb' à bc'. Ces deux équations, et par conséquent les deux proposées, rentrent donc l'une dans l'autre; on n'a, pour résoudre le problème, qu'une même équation sous deux formes différentes; il est donc indéterminé.

116. Prenons encore pour exemple le problème des courriers. Si l'on suppose à la fois $a = b$ et $d = bh$, auquel cas la valeur de y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on

déduit de ces relations cette autre relation très-simple $d = ah$. Par suite, la valeur de x prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Si l'on remonte aux équations mêmes

$$ay = d + x \quad \text{et} \quad b(y - h) = x,$$

elles deviennent, en ayant égard aux hypothèses ci-dessus,

$$ay = d + x \quad \text{et} \quad ay = bh + x \quad \text{ou} \quad ay = d + x,$$

c'est-à-dire qu'elles sont identiques.

On se rend également compte de l'indétermination en considérant le problème en lui-même. On suppose, en effet, $a = b$, c'est-à-dire que les deux courriers ont la même vitesse. On suppose de plus $d = bh$, c'est-à-dire qu'il faut h heures au second courrier pour parcourir la distance d; en d'autres termes, il était en A, un nombre h d'heures avant d'arriver en B. Il se trouvait donc en A à minuit, en même temps que le premier courrier; et comme ils ont la même vitesse, ils doivent se trouver et s'être trouvés ensemble en tous les points de la route, c'est-à-dire que le problème qui consiste à trouver le lieu et l'heure de la rencontre est un problème indéterminé*.

---

* Voir, pour le cas de trois équations à trois inconnues, notre *Algèbre élémentaire*.