CHAPITRE V.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1. De la formation du carré des quantités algébriques, et de l'extraction de leur racine carrée.

117. Le *carré* d'une quantité algébrique est le produit de cette quantité par elle-même.

Pour former le carré d'un monome, il faut, d'après les règles de la multiplication des monomes, multiplier le coefficient par lui-même, et ajouter à lui-même l'exposant de chaque lettre; il faut donc, en d'autres termes, *faire le carré des coefficients et doubler tous les exposants.*

Ainsi, le carré de $5a^2b^3x$ sera $25a^4b^6x^2$.

118. On a vu (**36**) que *le carré d'un binome se compose du carré du premier terme, de deux fois le produit du premier par le second et du carré du second.*

Voyons comment se compose le carré d'un trinome.

Soit le trinome $a+b+c$. Représentons par une seule lettre x l'ensemble des deux premiers termes; nous aurons à former le carré de $x+c$, ce qui, d'après la règle rappelée ci-dessus, donnera

$$x^2+2cx+c^2,$$

ou, en remettant pour x sa valeur,

$$(a+b)^2+2c(a+b)+c^2,$$

ou encore $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$;

c'est-à-dire que *le carré d'un trinome se compose du carré*

du premier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun des deux premiers par le troisième, plus le carré du troisième.

On trouverait de même que, s'il y avait un quatrième terme, le carré contiendrait, outre les parties qu'on vient d'énumérer, *deux fois le produit de chacun des trois premiers termes par le quatrième, plus le carré du quatrième.*

119. Pour former le carré d'une fraction algébrique, il faut, d'après les règles de la multiplication des fractions (**52**) faire le carré de son numérateur et le carré de son dénominateur.

Ainsi le carré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$,

le carré de $\frac{2a-3b}{5ab}$ est $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{25a^2b^2}$,

et ainsi de suite.

120. La *racine carrée* d'une quantité algébrique est une seconde quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première.

Mais cette racine se distingue de la racine carrée considérée en arithmétique par une différence essentielle. La racine *arithmétique* d'une quantité numérique est essentiellement positive; la racine *algébrique* d'une quantité, soit numérique, soit algébrique, peut être prise indifféremment avec deux signes contraires. En effet, soit à extraire la racine carrée de 49; au point de vue arithmétique, la racine est $+7$, mais au point de vue algébrique, cette racine est aussi bien -7 que $+7$; car -7, multiplié par -7, donne, d'après la règle des signes (**94**), $+49$, aussi bien que $+7$

multiplié par $+7$. De même $+a^2$ étant aussi bien le carré de $-a$ que le carré de $+a$, la racine de $+a^2$ est donc, à volonté, $+a$ ou $-a$.

On indique cette double solution en affectant la racine du double signe $\pm$, et l'on écrit

$$\sqrt{a^2}=\pm a; \quad \sqrt{49}=\pm 7.$$

Nous pouvons toutefois, quant à présent, faire abstraction de ce double signe, sauf à nous rappeler, lorsque nous aurons extrait la racine d'une quantité algébrique, que cette racine peut être prise indifféremment telle que nous l'aurons trouvée ou en signe contraire.

121. D'après la règle donnée (**117**) pour former le carré d'un monome, on peut voir que, pour qu'un monome soit un carré parfait, il faut : 1° que son coefficient soit un carré parfait; 2° que les exposants de toutes les lettres qui y entrent soient pairs.

Si ces deux conditions sont remplies, on obtiendra la racine carrée du monome proposé en extrayant la racine de son coefficient, et en divisant par 2 les exposants de toutes les lettres. Ainsi la racine de $49a^4b^6x^2$ est $7a^2b^3x$, abstraction faite du double signe $\pm$.

Si ces conditions ne sont pas remplies, on se contente d'indiquer la racine. Soit, par exemple, le monome $24a^3b^4x$; sa racine sera indiquée par $\sqrt{24a^3b^4x}$.

122. On reconnaît qu'un trinome, ordonné par rapport aux puissances d'une certaine lettre, est un carré parfait, lorsque son premier et son dernier terme sont des carrés, et que le terme intermédiaire, considéré indépendamment de son signe, est le double produit des racines des termes extrêmes; on extrait alors la racine de ce trinome en extrayant séparément la racine du premier terme et celle du dernier, et en mettant entre ces racines le signe du terme intermédiaire dans le trinome proposé.

Soit, par exemple, le trinome

$$4a^2x^4-12a^3x^3+9a^4x^2;$$

on remarque que son premier terme $+4a^2x^4$ est le carré de $2ax^2$, que son dernier terme $+9a^4x^2$ est le carré de $3a^2x$, et que le terme intermédiaire $12a^3x^3$, considéré indépendamment de son signe, est le double du produit de $2ax^2$ par $3a^2x$. Ce trinome est donc un carré parfait; et l'on obtiendra sa racine en prenant les racines des termes extrêmes, et en les réunissant par le signe $-$ qui précède le terme intermédiaire; ce qui donnera

$$2ax^2-3a^2x.$$

On trouvera de même que le trinome

$$9a^2+30ab+25b^2$$

est le carré de

$$3a+5b.$$

123. Pour extraire la racine carrée d'une fraction algébrique, il faut extraire la racine de chacun de ses termes; cela résulte de la loi de formation du carré d'une fraction (**119**). Ainsi la racine carrée de la fraction

$$\frac{25a^2-60ax+36x^2}{144a^2} \quad \text{est} \quad \frac{5a-6x}{12a}.$$

Si l'un des deux termes n'est pas un carré parfait, on se contente d'indiquer la racine; ainsi la racine de

$$\frac{13ab}{9x^2} \quad \text{s'écrira} \quad \frac{\sqrt{13ab}}{3x}.$$

§ 2. De la résolution des équations du second degré à une seule inconnue.

124. Une équation à une seule inconnue est du *second degré* quand, après qu'on a fait disparaître les dénominateurs et effectué les calculs, elle contient un ou plusieurs termes où l'inconnue entre à la seconde puissance.

Soit d'abord l'équation très-simple

$$x^2 = 25,$$

qui ne renferme qu'un terme en x^2 et un terme indépendant de x.

Lorsque deux quantités algébriques sont égales, on ne peut pas affirmer que leurs racines carrées soient égales, car ces racines peuvent différer par le signe (**120**); mais si l'on prend la racine de l'une avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, on peut être assuré d'avoir en même temps une racine de l'autre. On peut donc, en extrayant la racine des deux membres de l'équation ci-dessus, écrire généralement

$$\pm x = \pm 5.$$

Cette équation offre quatre combinaisons de signes :

$$+x = +5,$$
$$+x = -5,$$
$$-x = +5,$$
$$-x = -5.$$

Mais les deux dernières reproduisent les deux premières quand on y change à la fois tous les signes, ce qui est permis. On aura donc toutes les combinaisons distinctes en écrivant simplement

$$x = \pm 5.$$

Si l'on avait l'équation $x^2 = \mathrm{A}$,

on en tirerait de même $x = \pm\sqrt{\mathrm{A}}$.

125. Soit maintenant l'équation

$$14x - x^2 = 40 \qquad [1],$$

ou

$$x^2 - 14x = -40 \qquad [2],$$

qui renferme un terme en x^2, un terme en x et un terme indépendant de x. Si l'on pouvait convertir le premier membre en un carré parfait, en extrayant ensuite la racine carrée des deux membres, l'équation se trouverait ramenée au premier degré; car la racine d'un polynome du second degré en x doit être du premier degré par rapport à cette lettre.

Or, on remarque que $x^2 - 14x$ peut être considéré comme formant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2, le carré du premier terme de ce binome inconnu, et $-14x$ le double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit $-14x$ des deux termes du binome inconnu par le double $2x$ du premier, ce qui donne -7. Le binome cherché est donc $x - 7$, et l'on complétera son carré en ajoutant à $x^2 - 14x$ le carré du second terme -7, c'est-à-dire 49. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra ajouter aussi 49 au second membre de l'équation [2], ce qui donnera

$$x^2 - 14x + 49 = -40 + 49$$

ou

$$(x-7)^2 = 9.$$

Extrayant alors la racine de chaque membre, en remarquant que, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, il suffit de mettre le double signe $\pm$ devant la racine du second membre, on obtient

$$x - 7 = \pm 3;$$

ou, en faisant passer le terme -7 dans le second membre,

$$x = 7 \pm 3.$$

En adoptant le signe supérieur, on trouve

$$x = 7 + 3 = 10;$$

et en adoptant le signe inférieur, on trouve

$$x = 7 - 3 = 4.$$

L'équation peut donc être satisfaite de deux manières : soit en remplaçant x par 10, soit en remplaçant x par 4. C'est ce qu'il est facile de vérifier, car on a dans le premier cas

$$14 \times 10 - 100 = 140 - 100 = 40,$$

et dans le second,

$$14 \times 4 - 16 = 56 - 16 = 40.$$

126. Généralement, quand on aura fait disparaître les dénominateurs, une équation du second degré ne pourra contenir que trois espèces de termes, savoir : des termes en x^2, des termes en x, et des termes indépendants de x. Si l'on fait passer tous les termes dans un même membre,

qu'on mettre x^2 en facteur parmi ceux qui le contiennent, et qu'on en fasse autant pour x, l'équation aura la forme générale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle a, b, c, peuvent être des quantités quelconques, numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

Divisant tous les termes par a, il vient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

ou, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par q, pour abréger l'écriture,

$$x^2 + px + q = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Faisons passer le terme q dans le second membre, et écrivons

$$x^2 + px = -q \qquad [1].$$

Le premier membre peut être considéré comme renfermant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2 carré du premier terme de ce binome inconnu, et px double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit px des deux termes du binome inconnu, par le double $2x$ du premier, ce qui donne $\frac{p}{2}$. Le binome cherché est donc $x + \frac{p}{2}$; et l'on complétera son carré en ajoutant à $x^2 + px$ le carré de $\frac{p}{2}$ ou $\frac{p^2}{4}$. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra aussi ajouter $\frac{p^2}{4}$ au second membre de l'équation [1], ce qui donnera

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=-q+\frac{p^2}{4},$$

ou $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Extrayant la racine des deux membres, en mettant le double signe $\pm$ devant la racine du second, on obtient

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

ou, en faisant passer le terme $\frac{p}{2}$ dans le second membre,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Cette expression de x est une *formule générale* qui peut servir à trouver immédiatement l'inconnue dans une équation du second degré quelconque, sans répéter les raisonnements ci-dessus, et que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans toute équation du second degré ramenée à la forme

$$x^2+px+q=\ ,$$

l'inconnue est égale à la moitié du coefficient de la première puissance de x, *plus ou moins la racine carrée du carré de cette moitié, suivi du terme indépendant de* x, *pris avec le signe qu'il a dans le second membre.*

127. I. Si on applique cette règle à l'équation

$$x^2-5x+6=0,$$

on trouvera immédiatement

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6},$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3,$$

et $$x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2;$$

en sorte que l'équation est satisfaite par les deux valeurs 3 et 2.

II. Soit encore l'équation algébrique

$$x^2-(2a+3b)x+6ab=0,$$

on trouvera, en appliquant la règle,

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2a+3b}{2}\right)^2-6ab},$$

ou bien $$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2+12ab+9b^2}{4}-6ab}.$$

Réduisant tout au dénominateur 4 sous le radical, et réduisant, il vient

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4}}.$$

Or la racine peut s'extraire exactement (**122**), ce qui donne

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\frac{2a-3b}{2}.$$

De là deux valeurs

$$x=\frac{2a+3b+2a-3b}{2}=2a$$

et $$x=\frac{2a+3b-2a+3b}{2}=3b.$$

128. Il est bon de savoir résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sans être obligé de diviser par a.

Or, si, dans les valeurs obtenues plus haut,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

on remplace p et q par leurs valeurs, il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Réduisant au même dénominateur sous le radical, on trouve

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

ou, en extrayant la racine du dénominateur $4a^2$, et mettant $2a$ en dénominateur commun,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On peut arriver à cette expression d'une manière plus simple. Multiplions par $4a$ les deux membres de l'équation proposée, après avoir fait passer le terme c dans le second membre, elle devient

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Ajoutons b^2 à chaque membre, nous aurons

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ou, en remarquant que le premier membre est un carré parfait,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extrayant la racine, on obtient

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

d'où $$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

et $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On peut énoncer cette expression en disant que : *dans toute équation du second degré de la forme* $ax^2+bx+c=0$, *l'inconnue est égale au coefficient de la première puissance de* x *pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ce coefficient, diminué de quatre fois le produit du coefficient de* x^2 *par le terme indépendant de* x; *le tout divisé par le double du coefficient de* x^2.

Soit pour exemple l'équation

$$3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

on en tirera $$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 3 \times 2}}{6},$$

ou $$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x = \frac{5+7}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$7x^2 - 22x + 15 = 0,$$

$$x^2 - (4a - 2b)x + 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0,$$

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2,$$

$$\frac{3a}{x+b} + \frac{x-2b}{a-b} = 4.$$

§ 3. Problèmes qui conduisent à une équation du second degré à une seule inconnue.

129. Quant à la mise en équation des problèmes, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit d'une manière générale au nº **61**. Nous nous bornerons donc à traiter quelques questions choisies.

PROBLÈME I. *Un banquier a escompté en dedans un billet de* 2080 *fr. payable dans* 8 *mois, et un billet de* 3150 *fr. payable dans* 10 *mois; l'escompte total a été de* 230 *fr.; on demande quel était le taux de l'escompte.*

Soit x le taux de l'escompte. Puisque 100 fr., au bout de 1 an, rapportent x, au bout de 8 mois, ils rapporteraient $\frac{8x}{12}$ ou $\frac{2x}{3}$; par conséquent, si un billet payable dans 8 mois énonçait la somme $100^f + \frac{2x}{3}$, l'escompte *en dedans* de ce billet serait $\frac{2x}{3}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 2080 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{2}{3}x : \frac{2}{3}x :: 2080^f : \text{ce quatrième terme,}$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{2080^f \times \frac{2}{3}x}{100 + \frac{2}{3}x}$$

ou, en multipliant, haut et bas, par 3,

$$\frac{4160x}{300 + 2x} \qquad [1].$$

En second lieu, 100 fr. au bout de 1 an rapportant x, au bout de 10 mois ils rapporteront $\frac{10x}{12}$ ou $\frac{5x}{6}$; par conséquent, si un billet payable dans 10 mois énonçait la somme $100^f + \frac{5x}{6}$, l'escompte en dedans de ce billet serait $\frac{5x}{6}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 3150 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{5x}{6} : \frac{5x}{6} :: 3150^f : \text{ce quatrième terme,}$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{3150^f \times \frac{5x}{6}}{100 + \frac{5x}{6}}$$

ou, en multipliant, haut et bas, par 6,

$$\frac{15750x}{600 + 5x} \qquad [2].$$

Mais, d'après l'énoncé, la somme de ces deux escomptes doit faire 230 fr.; on doit donc avoir l'équation

$$\frac{4160x}{300 + 2x} + \frac{15750x}{600 + 5x} = 230 \qquad [3].$$

Faisant disparaître les dénominateurs, transposant et réduisant, il vient

$$50000x^2 + 6600000x = 41400000,$$

ou

$$x^2 + 132x = 828 \qquad [4],$$

d'où l'on tire $\quad x = 6 \quad$ et $\quad x = -138.$

Le taux de l'escompte étant essentiellement positif, la seconde valeur doit être rejetée; le taux cherché est donc

6 pour 100. On trouvera ensuite pour l'escompte des deux billets 80 fr. et 150 fr., en mettant pour x la valeur 6 dans les expressions [1] et [2].

Remarque. En changeant x en $-x$ dans l'équation [3], il serait facile de trouver un énoncé auquel convînt la solution -138 prise positivement; mais, outre que cet énoncé serait incompatible avec la notion d'escompte, la valeur positive $+6$ se trouverait alors convertie en une valeur négative -6.

On pourra être surpris, au premier abord, de voir l'Algèbre donner ainsi une solution étrangère à la question, quel que soit le signe que l'on donne à x dans l'équation du problème. Mais il faut bien remarquer que l'Algèbre doit donner la réponse à toutes les questions qui pourraient conduire à la même équation [4], et dont le nombre est illimité.

150. Problème II. *Partager 17 en deux parties telles que le carré de la première surpasse de 2 unités le double du carré de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $(17-x)$; et en traduisant algébriquement l'énoncé, on aura

$$2(17-x)^2+2=x^2,$$

ou, en réduisant,

$$x^2-68x+580=0;$$

d'où l'on tire $x=34\pm24$,

c'est-à-dire $x=58$ et $x=10$.

La seconde valeur satisfait à la question, et donne pour les deux parties 10 et 7.

Quant à la première valeur, elle est, quoique positive,

étrangère à la question proposée, puisqu'une des parties de 17 ne saurait surpasser 17.

Remarque. L'explication de cette circonstance, en apparence singulière, est facile à trouver. Le problème que nous venons de résoudre avec une seule inconnue, en comporte réellement deux, qui sont les deux parties de 17.

En appelant x et y ces deux parties, les équations du problème seraient

$$x+y=17,$$

$$2y^2+2=x^2.$$

Or, il ne suffit pas que x soit positif pour que la solution réponde à l'énoncé, il faut encore que y le soit, ce qui ne peut avoir lieu si x surpasse 17.

Si l'on change y en $-y$, la première équation devient

$$x-y=17$$

et la seconde ne change point. Ces équations répondraient à ce problème : *Trouver deux nombres qui diffèrent de 17, et tels que le carré du plus grand surpasse de 2 unités le double du carré du plus petit.* Dans ce cas, les valeurs de x restant les mêmes, on trouve que la valeur $x=58$ satisfait et donne pour y une valeur positive $y=41$; tandis que $x=10$ donne $y=-7$.

Mais les valeurs, tant négatives que positives de y, deviendraient admissibles si l'on prenait pour énoncé : *Trouver deux quantités dont la somme algébrique soit 17, et telles que le carré de la première surpasse de 2 unités le double du carré de la seconde.*

On voit ici, comme dans le problème précédent, que l'équation à laquelle on est parvenu est plus générale que le problème qui y a conduit, et que c'est à cette plus grande généralité qu'il faut attribuer les valeurs étrangères au problème particulier que l'on a en vue, fournies par les procédés de l'Algèbre.

131. Problème III. *Une personne qui a* 120000 *fr. de capital en a fait deux parts qu'elle a placées à deux taux différents; la première lui rapporte annuellement* 2800 *fr.; la seconde, qui est placée à un taux plus élevé de* 1 *fr., lui rapporte* 2500 *fr. On demande quelles sont les deux parts, et à quels taux elles ont été placées.*

Désignons par x le taux auquel la première part est placée. Si la première part était connue, on obtiendrait son intérêt annuel en la multipliant par le taux x, et en divisant par 100; ce qui devrait donner 2800 fr. On aura donc l'expression de la première part en faisant les opérations inverses, c'est-à-dire en multipliant 2800 fr. par 100, et en divisant le produit par x; ce qui donne

$$\frac{280000}{x}.$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera pour l'expression de la seconde part

$$\frac{250000}{x+1}.$$

Et puisque la somme des deux parts doit faire le capital entier, on devra avoir

$$\frac{280000}{x}+\frac{250000}{x+1}=120000,$$

ou $$\frac{28}{x}+\frac{25}{x+1}=12,$$

ou encore $$12x^2-41x-28=0,$$

d'où l'on tire $$x=4 \quad \text{et} \quad x=-\frac{7}{12}.$$

La valeur positive $+4$, qui est seule admissible, donne $4+1$ ou 5 pour le taux auquel a été placée la seconde part. La première est alors

$$\frac{280000}{4} \quad \text{ou} \quad 70000^{f},$$

et la seconde est

$$\frac{250000}{5} \quad \text{ou} \quad 50000^{f}.$$

La somme de ces deux parts forme bien le capital 120000 fr.

Ici, comme dans le problème I, la valeur négative $-\frac{7}{12}$ ne pourrait être interprétée qu'en partant d'un énoncé incompatible avec la notion d'intérêt. Rappelons que si l'Algèbre fournit ainsi une solution étrangère, cela tient à ce que l'équation à laquelle on est parvenu a plus de généralité que le problème particulier qui y a conduit, et que l'Algèbre doit répondre à toutes les questions qui conduiraient à cette même équation, et dont quelques-unes pourraient admettre la solution négative $-\frac{7}{12}$.

132. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Une personne a acheté du drap pour* 300 *fr. Si elle avait payé le mètre* 5 *fr. de moins elle aurait eu, pour la même somme,* 2^m *de drap de plus. On demande combien elle a acheté de mètres de drap.*

(Réponse : 10^m. Solution négative -12^m).

II. *Un amateur de tableaux achète pour original une copie qu'il est obligé de revendre ensuite* 24 *fr.; à ce marché il perd* *autant pour* 100 *que le tableau lui avait coûté. On demande quel a été le prix d'achat.*

(Réponse : 60 fr. et 40 fr.)

III. *Partager* 12 *en deux parties telles que le carré de la première soit inférieur d'une unité au double du carré de la seconde.*

(Réponse : la première partie est 7 ; par suite la seconde est 5. De plus une solution inadmissible, 41 pour la première partie, ce qui donnerait pour la seconde —29. (Voy. le n° **130**.)

IV. *On a payé* 96 *fr. à* 14 *ouvriers, hommes et femmes; chaque homme a reçu autant de francs qu'il y avait de femmes, et chaque femme autant de francs qu'il y avait d'hommes. Combien y avait-il d'hommes et combien y avait-il de femmes ?*

(Réponse : 8 hommes et 6 femmes, ou bien 6 hommes et 8 femmes.)

V. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant que la raison est* 3, *que la somme des antécédents est* 5, *et que la somme des carrés des quatre termes est* 130.

(Réponse : 2 : 6 :: 3 : 9 ou 3 : 9 :: 2 : 6.)

VI. *Deux ouvriers ont un ouvrage à faire. Si chacun d'eux en faisait la moitié, il leur faudrait en tout* 25 *heures de travail pour le terminer ; mais s'ils travaillent ensemble, l'ouvrage sera fait en* 12 *heures. Combien d'heures chacun d'eux emploierait-il à faire l'ouvrage entier s'il travaillait seul?*

(Réponse : L'un des ouvriers emploierait 30 heures, et l'autre 20 heures.)

CHAPITRE VI.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES DU SECOND DEGRÉ, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. Des quantités irrationnelles et des quantités imaginaires du second degré.

133. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, on sait que sa racine carrée ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire ; mais que l'on peut en approcher aussi près qu'on le désire. Ainsi une expression telle que $\sqrt{2}$ représente une quantité dont la valeur ne peut être assignée exactement en nombres, mais qui a néanmoins une existence réelle, puisqu'on peut toujours trouver deux quantités numériques, différant entre elles d'aussi peu qu'on le voudra, et entre lesquelles elle soit comprise. Une pareille quantité est ce qu'on appelle une quantité *incommensurable*, si on la considère sous le rapport de son évaluation numérique, ou une quantité *irrationnelle*, si l'on ne s'attache qu'au signe $\sqrt{}$ par lequel elle est représentée.

Une quantité telle que $\sqrt{3ab}$, dans laquelle a et b sont des quantités numériques quelconques, est encore une quantité *irrationnelle*. On pourrait bien, à la vérité, trouver pour a et b des valeurs numériques telles que $3ab$ devînt un carré parfait, auquel cas $\sqrt{3ab}$ deviendrait rationnel et commensurable; mais comme cela n'a pas lieu pour toutes les valeurs qu'on pourrait attribuer à a et à b, il convient