autant pour 100 *que le tableau lui avait coûté. On demande quel a été le prix d'achat.*

(Réponse : 60 fr. et 40 fr.)

III. *Partager* 12 *en deux parties telles que le carré de la première soit inférieur d'une unité au double du carré de la seconde.*

(Réponse : la première partie est 7; par suite la seconde est 5. De plus une solution inadmissible, 41 pour la première partie, ce qui donnerait pour la seconde —29. (Voy. le nº **130**.)

IV. *On a payé* 96 *fr. à* 14 *ouvriers, hommes et femmes; chaque homme a reçu autant de francs qu'il y avait de femmes, et chaque femme autant de francs qu'il y avait d'hommes. Combien y avait-il d'hommes et combien y avait-il de femmes?*

(Réponse : 8 hommes et 6 femmes, ou bien 6 hommes et 8 femmes.)

V. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant que la raison est* 3, *que la somme des antécédents est* 5, *et que la somme des carrés des quatre termes est* 130.

(Réponse : 2 : 6 :: 3 : 9 ou 3 : 9 :: 2 : 6.)

VI. *Deux ouvriers ont un ouvrage à faire. Si chacun d'eux en faisait la moitié, il leur faudrait en tout* 25 *heures de travail pour le terminer; mais s'ils travaillent ensemble, l'ouvrage sera fait en* 12 *heures. Combien d'heures chacun d'eux emploierait-il à faire l'ouvrage entier s'il travaillait seul?*

(Réponse : L'un des ouvriers emploierait 30 heures, et l'autre 20 heures.)

CHAPITRE VI.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES DU SECOND DEGRÉ, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1. Des quantités irrationnelles et des quantités imaginaires du second degré.

133. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, on sait que sa racine carrée ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire; mais que l'on peut en approcher aussi près qu'on le désire. Ainsi une expression telle que $\sqrt{2}$ représente une quantité dont la valeur ne peut être assignée exactement en nombres, mais qui a néanmoins une existence réelle, puisqu'on peut toujours trouver deux quantités numériques, différant entre elles d'aussi peu qu'on le voudra, et entre lesquelles elle soit comprise. Une pareille quantité est ce qu'on appelle une quantité *incommensurable*, si on la considère sous le rapport de son évaluation numérique, ou une quantité *irrationnelle*, si l'on ne s'attache qu'au signe $\sqrt{}$ par lequel elle est représentée.

Une quantité telle que $\sqrt{3ab}$, dans laquelle a et b sont des quantités numériques quelconques, est encore une quantité *irrationnelle*. On pourrait bien, à la vérité, trouver pour a et b des valeurs numériques telles que $3ab$ devînt un carré parfait, auquel cas $\sqrt{3ab}$ deviendrait rationnel et commensurable; mais comme cela n'a pas lieu pour toutes les valeurs qu'on pourrait attribuer à a et à b, il convient de traiter l'expression $\sqrt{3ab}$ comme si le radical (**12**) ne pouvait jamais disparaître, c'est-à-dire qu'il convient de la traiter comme si elle devait rester irrationnelle pour toutes les valeurs de a et de b.

Généralement, toutes les fois qu'un radical du second degré porte sur une quantité algébrique qui n'est point un carré parfait, *algébriquement parlant*, c'est-à-dire indépendamment des valeurs particulières qu'on peut attribuer aux lettres qui y entrent, l'expression doit être regardée comme irrationnelle, bien que pour certaines valeurs particulières attribuées aux lettres, elle puisse cesser de l'être. C'est ainsi que $\sqrt{a^2+b^2}$ doit être considérée comme une quantité irrationnelle, attendu que a^2+b^2 ne peut être ni le carré d'un monome, ni celui d'un polynome; et cela, quoique certaines valeurs particulières, attribuées à a et à b, ou à l'une des deux seulement, puissent rendre a^2+b^2 un carré parfait, ce qui arriverait, par exemple, pour $b=\frac{3}{4}a$, auquel cas a^2+b^2 se réduirait à $\frac{25a^2}{4}$ et serait le carré de $\frac{5a}{2}$.

134. La première chose à faire, dans le calcul des quantités irrationnelles, est de simplifier les radicaux s'il y a lieu. Cette simplification repose sur le principe suivant :

La racine carrée d'un produit équivaut au produit des racines carrées de ses facteurs.

Soient, par exemple, a, b, c, d les facteurs du produit; je dis qu'on a

$$\sqrt{a.b.c.d}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.$$

En effet, le premier membre élevé au carré, donne $a.b.c.d$ par définition. Voyons ce qu'on obtient en élevant au carré le second membre. Ce carré se présente d'abord sous la forme

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d})(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}).$$

En admettant, pour les quantités irrationnelles les règles de multiplication établies pour les quantités rationnelles, on pourra l'écrire :

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d},$$

ou bien $\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{d},$

ou encore

$$(\sqrt{a}.\sqrt{a})\times(\sqrt{b}.\sqrt{b})\times(\sqrt{c}.\sqrt{c})\times(\sqrt{d}.\sqrt{d}).$$

Mais, par définition, $\sqrt{a}.\sqrt{a}$ est égal à a; de même $\sqrt{b}.\sqrt{b}$ est égal à b, et ainsi des autres. Le produit obtenu peut donc s'écrire

$$a.b.c.d.$$

Ainsi le carré du second membre de l'égalité ci-dessus revient au carré du premier membre. Donc ces deux membres sont égaux eux-mêmes en valeur absolue. Et comme, quel que soit le signe qu'on prenne pour chacun des radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, etc., le produit aura nécessairement le signe $+$ ou le signe $-$, c'est-à-dire l'un des deux signes que l'on peut donner au premier membre; il s'ensuit que les deux membres sont égaux pour la valeur absolue et pour les signes.

135. Supposons maintenant qu'il s'agisse de simplifier un radical; par exemple,

$$\sqrt{75a^3b^4x}.$$

On décomposera la quantité placée sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait; on pourra écrire ainsi

$$\sqrt{25a^2b^4 \times 3ax}.$$

Or, en vertu du principe précédent, on peut extraire séparément (ou indiquer si l'on ne peut l'extraire) la racine de chacun des deux facteurs, ce qui donnera

$$\sqrt{25a^2b^4} \times \sqrt{3ax}.$$

La première racine s'extrait exactement (**121**); il vient donc

$$5ab^2\sqrt{3ax},$$

et le signe radical porte maintenant sur une quantité plus simple.

On trouvera de même que les quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2}, \quad \sqrt{363a^3b^3x^4}, \quad \sqrt{864a^5b^2x^3},$$

peuvent s'écrire respectivement

$$6b^2x\sqrt{3ab}, \quad 11abx^2\sqrt{3ab}, \quad 12a^2bx\sqrt{6ax}.$$

Remarque. On nomme quantités irrationnelles *semblables* celles qui, lorsqu'elles ont été simplifiées, présentent la même quantité sous le radical.

Telles sont les deux quantités $6b^2x\sqrt{3ab}$ et $11abx^2\sqrt{3ab}$ obtenues ci-dessus.

136. On peut, au contraire, dans certains calculs, avoir intérêt à faire passer sous le radical un facteur placé devant; il est clair qu'il faut alors élever ce facteur au carré.

Si l'on a, en effet, l'expression $a\sqrt{b}$, on peut l'écrire

$$\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b},$$

ou, en vertu du principe démontré au n° **134**,

$$\sqrt{a^2b}.$$

137. Ce que nous venons de dire d'un facteur peut se dire d'un dénominateur, car diviser une quantité par m, par exemple, revient à la multiplier par $\frac{1}{m}$.

Soit l'expression

$$\sqrt{\frac{a}{m^2}}, \text{ qui revient à } \sqrt{\frac{1}{m^2} \cdot a} \text{ ou à } \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 \cdot a}.$$

En vertu de ce qui précède (**134**), on pourra l'écrire

$$\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2} \cdot \sqrt{a}, \text{ ou } \frac{1}{m}\sqrt{a}, \text{ ou enfin } \frac{\sqrt{a}}{m}.$$

On a donc
$$\sqrt{\frac{a}{m^2}} = \frac{\sqrt{a}}{m},$$

ce qui permet de faire passer un dénominateur hors d'un radical en en extrayant la racine, ou de l'y faire entrer en l'élevant au carré.

138. Nous pouvons maintenant passer en revue les différentes opérations qu'on peut avoir à effectuer sur les radicaux du second degré.

L'addition et la soustraction ne peuvent que s'indiquer, si les radicaux sont dissemblables. Ainsi, la somme de $\sqrt{a}$ et de $\sqrt{b}$, s'écrira simplement $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; leur différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Si les radicaux sont semblables, on opère l'addition ou la soustraction des quantités placées devant le radical; ce radical est un facteur commun dont on affecte le résultat. Ainsi la somme des quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{363a^3b^3x^4},$$

qui reviennent à

$$6b^2x\sqrt{3ab} \quad \text{et} \quad 11abx^2\sqrt{3ab},$$

est $$(6b^2x + 11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

Leur différence est

$$(6b^2x - 11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

139. MULTIPLICATION. *Pour faire le produit de deux radicaux du second degré, on peut faire le produit des quantités placées sous chacun d'eux et affecter le produit du radical commun.*

On a, en effet (**134**),

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

Cette règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Il peut arriver que le produit soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le produit de $\sqrt{5a^3b}$ par $\sqrt{15ab^2x}$ est $\sqrt{75a^4b^3x}$; qui revient à $5a^2b\sqrt{3bx}$.

Le produit de $\sqrt{2a^3x}$ par $\sqrt{18ab^4x^5}$ est $\sqrt{36a^4b^4x^6}$, qui revient à $6a^2b^2x^3$.

DIVISION. *Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on peu diviser l'une par l'autre les quantités placées sous chacun d'eux et affecter le quotient du radical commun.*

Désignons, en effet, par q le quotient des radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$; en sorte qu'on ait

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=q \quad \text{ou} \quad \sqrt{a}=\sqrt{b}.q$$

En élevant les deux membres au carré, il viendra

$$a=b.q^2,$$

d'où $$q^2=\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad q=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Par conséquent $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Il peut arriver que le quotient soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le quotient de $\sqrt{15a^3bx^2}$ par $\sqrt{10ab^2x^3}$ est $\sqrt{\frac{15a^3bx^2}{10ab^2x^3}}$, ou, en simplifiant la fraction (**47**), $\sqrt{\frac{3a^2}{2bx}}$.

Le quotient de $\sqrt{21ab^3x}$ par $\sqrt{12a^3x^3}$ est $\sqrt{\frac{21ab^3x}{12a^3x^3}}$, ou $\sqrt{\frac{7b^3}{4a^2x^2}}$, ou $\frac{b\sqrt{7b}}{2ax}$.

Le quotient de $\sqrt{18a^3bx^4}$ par $\sqrt{8ab^3x^2}$ est $\sqrt{\frac{18a^3bx^4}{8ab^3x^2}}$, ou $\sqrt{\frac{9a^2x^2}{4b^2}}$, ou $\frac{3ax}{2b}$.

140. Lorsqu'une fraction algébrique contient un ou plusieurs radicaux du second degré à son dénominateur, on peut les faire passer à son numérateur.

1. Soit d'abord l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}}$. En multipliant ses deux termes par $\sqrt{b}$, on obtient $\frac{a\sqrt{b}}{mb}$, expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, on obtiendra, en multipliant ses deux termes par $\sqrt{3}$,

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\times 3} \quad \text{ou} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

II. Soit, en second lieu, l'expression $\frac{a}{b+m\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $b-m\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(b-m\sqrt{c})}{b^2-m^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{5}{4+2\sqrt{3}}$; en multipliant ses deux termes par $4-2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{5(4-2\sqrt{3})}{16-4\times 3}, \quad \text{ou} \quad \frac{5(4-2\sqrt{3})}{4} \quad \text{ou encore} \quad \frac{5(2-\sqrt{3})}{2}.$$

III. Soit l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $m\sqrt{b}-n\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; en multipliant les deux termes par $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{9\times 2-4\times 3}, \quad \text{ou} \quad \frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6},$$

ou encore $$\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{2}.$$

141. Nous avons fait remarquer, au commencement du paragraphe précédent, que la racine carrée d'une quantité positive, qu'elle soit commensurable ou non, a toujours une existence réelle, puisqu'on peut toujours assigner deux limites numériques, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles elle soit comprise. Il n'en serait plus de même si la quantité dont on veut extraire la racine était une quantité négative. Non-seulement la racine carrée d'une quantité négative ne saurait être assignée en nombres, mais elle n'a même aucune existence réelle; car il résulte de la règle des signes (**94**) qu'aucune quantité réelle, soit positive, soit négative, ne peut, lorsqu'on la multiplie par elle-même, donner un produit négatif.

Ainsi $+2$, multiplié par lui-même, donne $+4$; et -2, multiplié par lui-même, donne également $+4$. Mais il n'existe aucune quantité réelle qui, multipliée par elle-même, puisse donner pour produit -4. La racine carrée de -4 n'a donc pas d'existence réelle; et l'expression $\sqrt{-4}$ n'est que le symbole d'une opération impossible.

Les expressions de cette espèce sont ce que l'on appelle des quantités *imaginaires*.

Toute racine de degré pair d'une quantité négative est encore une quantité *imaginaire*; car, d'après la règle des signes, toute puissance paire d'une quantité réelle, soit positive, soit négative, est nécessairement positive. Mais nous nous occuperons spécialement dans ce qui va suivre des imaginaires du second degré.

On donne ordinairement à ces quantités une forme plus commode. Reprenons comme exemple l'expression $\sqrt{-4}$. On regarde la quantité -4, placée sous le radical, comme le produit de $+4$ par -1; et pour extraire la racine carrée du produit on convient d'appliquer encore la règle du n° **134**, c'est-à-dire qu'on extrait, ou que du moins on indique la racine carrée de chaque facteur. On obtient ainsi $2.\sqrt{-1}$. De même l'expression $\sqrt{-a^2}$ pourrait s'écrire $a\sqrt{-1}$; l'expression $\sqrt{-3}$ s'écrirait $\sqrt{3}.\sqrt{-1}$. En un mot, la racine d'une quantité négative s'écrit en multipliant par $\sqrt{-1}$ la racine de la même quantité prise positivement.

142. Toute expression algébrique dans laquelle il entre des quantités de la forme $a\sqrt{-1}$ est une expression imaginaire. Celles qui sont les plus importantes à considérer, et auxquelles on peut ramener toutes les autres, sont les expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui se composent d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. On étend aux quantités imaginaires de cette forme les règles établies pour le calcul des quantités réelles.

§ 2. Discussion des problèmes du second degré.

143. Nous avons vu (**126**, **128**) qu'une équation du second degré peut toujours être ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, ou à la forme plus générale $ax^2+bx+c=0$. Pour cela nous avons dit qu'il fallait faire disparaître les dénominateurs, effectuer les calculs et transposer. Nous pouvons ajouter à présent que, si l'équation contenait un ou deux radicaux du second degré, sous lesquels l'inconnue fût engagée, il faudrait les faire disparaître.

A cet effet, s'il n'y a qu'un seul radical, on l'isole dans un membre; et, en élevant les deux membres au carré, on

le fait disparaître. Soit, par exemple, l'équation

$$2x+3\sqrt{x-5}=24,$$

on en tirera successivement

$$3\sqrt{x-5}=24-2x, \quad \text{d'où} \quad 9(x-5)=(24-2x)^2,$$

où il n'y aura plus qu'à effectuer les calculs et à transposer.

S'il y a deux radicaux, on les isole dans un membre; on élève au carré; le membre qui contenait les radicaux ne contient plus alors que leur double produit. On isole le double produit dans un seul membre; et en élevant une seconde fois au carré, on obtient une équation débarrassée de radicaux. Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{13-x}=5,$$

on en tirera successivement

$$x+13-x+2\sqrt{x(13-x)}=25 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x(13-x)}=6;$$

puis $$x(13-x)=36,$$

où il n'y aura plus que les calculs à effectuer.

Cela posé, reprenons l'équation du second degré sous la forme

$$x^2+px+q=0 \qquad [1].$$

Nous avons vu (**126**) qu'en la résolvant on obtient les deux valeurs

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ces valeurs, que nous désignons par x' et x'', sont ce que l'on a l'habitude d'appeler les *racines* de l'équation du second degré. Il est important de ne pas les confondre avec le *radical* qu'elles renferment.

Si on les ajoute on obtient

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p,$$

et si on les multiplie, on trouve pour produit

$$x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Ainsi : 1° *la somme des racines d'une équation du second degré, de la forme* $x^2 + px + q = 0$, *est égale au coefficient de la première puissance de* x, *pris en signe contraire; et*, 2° *le produit de ces mêmes racines est égal au terme indépendant de* x.

Réciproquement : si deux quantités a et b remplissent ces conditions, en sorte qu'on ait à la fois

$$a + b = -p \quad \text{et} \quad ab = q;$$

ces quantités sont racines de l'équation [1], c'est-à-dire que, mises à la place de x, elles satisfont à l'équation. Car, on tire de la première relation

$$b = -p - a,$$

et, en mettant pour b cette valeur dans la seconde, il vient

$$-pa - a^2 = q \quad \text{ou} \quad a^2 + pa + q = 0.$$

On démontrerait, en éliminant a au contraire, qu'on a aussi

$$b^2 + pb + q = 0.$$

144. Remplaçons, dans l'équation [1], p et q par leurs

valeurs $-(x' + x'')$ et $x'x''$; il viendra

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0,$$

ou $$x^2 - x'x - x''x + x'x'' = 0,$$

ou encore $$x(x - x') - x''(x - x') = 0,$$

ou enfin $$(x - x')(x - x'') = 0 \qquad [2].$$

Ainsi, *le premier membre de l'équation* $x^2 + px + q = 0$ *se décompose en deux facteurs du premier degré, formés de l'inconnue* x *diminuée alternativement des deux racines.*

Si, par exemple, on a l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui a pour racines 2 et 3; son premier membre pourra se mettre sous la forme $(x - 2)(x - 3)$, ce qu'il est facile de vérifier.

Pareillement, le premier membre de l'équation

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

qui a pour racines $+2$ et -3, pourra se mettre sous la forme

$$(x - 2)(x + 3),$$

attendu que la différence entre x et -3 est $x + 3$.

Remarque. Le théorème que nous venons de démontrer fait comprendre pourquoi une équation du second degré peut être satisfaite de deux manières; c'est que, son premier membre pouvant se décomposer en deux facteurs du premier degré, on peut annuler ce premier membre en égalant à zéro l'un ou l'autre des deux facteurs.

Si, par exemple, on a l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, et qu'on la mette sous la forme

$$(x - 2)(x - 3) = 0,$$

on voit qu'elle peut être satisfaite, soit en posant $x-2=0$, d'où $x=2$; soit en posant $x-3=0$, d'où $x=3$.

145. Discutons maintenant les valeurs tirées de l'équation $x^2+px+q=0$, savoir

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{et} \quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

I. Faisons d'abord l'hypothèse $q>0$.

En même temps, il peut arriver que la quantité placée sous le radical soit positive, nulle ou négative.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles ; et comme $\frac{p^2}{4}-q$ est alors moindre que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est moindre que $\frac{p}{2}$; c'est-à-dire que le radical est alors moindre, en valeur absolue, que le terme $-\frac{p}{2}$; c'est donc ce terme qui donne son signe aux deux racines ; ainsi elles sont de même signe ; toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif. (On ne peut supposer $p=0$, puisque $\frac{p^2}{4}-q$ est positif.)

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, le radical disparaît ; les deux racines se réduisent à $-\frac{p}{2}$; elles sont donc égales ; négatives si p est positif ; nulles, si p est nul ; positives, si p est négatif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, le radical porte sur une quantité négative ; les deux racines sont donc imaginaires. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

II. Faisons, en second lieu, l'hypothèse $q=0$.

Dans ce cas,

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0,$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

Ainsi, l'une des racines est nulle, l'autre est de signe contraire à p ; elle serait nulle aussi si l'on avait, en même temps, $p=0$.

III. Faisons, enfin, l'hypothèse $q<0$.

Dans ce cas, $-q$ est positif ; la quantité placée sous le radical est donc positive ; les deux racines sont réelles. Mais comme $\frac{p^2}{4}-q$ est alors plus grand que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est plus grande que $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que le radical est alors plus grand, en valeur absolue, que le terme $\frac{p}{2}$; c'est donc le radical qui donne son signe à chaque racine ; l'une d'elles est donc positive et l'autre négative, quel que soit le signe de p. La plus grande, en valeur absolue, est celle où le radical est de même signe que $-\frac{p}{2}$, c'est-à-dire celle qui est de signe contraire à p. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

146. Cette discussion peut être présentée d'une autre manière, fondée sur les théorèmes du n° **143**, et plus facile à retenir.

I. Soit $q>0$. Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles. De plus, elles sont de même signe, puisque leur