produit q est positif. Elles sont positives si leur somme $-p$ est positive, c'est-à-dire si p est négatif; elles sont négatives si leur somme $-p$ est négative, c'est-à-dire si p est positif. On ne peut, dans ce cas, supposer $p=0$.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, les deux racines sont égales; chacune vaut la moitié de leur somme, c'est-à-dire $-\frac{p}{2}$; elles sont positives, nulles ou négatives, selon que p est négatif, nul ou positif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, les deux racines sont imaginaires. Elles sont égales et de signe contraire si leur somme $-p$ est nulle, c'est-à-dire si $p=0$.

II. Soit $q=0$. Le produit des deux racines étant nul, il faut que l'une d'elles le soit. L'autre est alors égale à leur somme $-p$, et est positive, nulle ou négative, suivant que p est négatif, nul ou positif.

III. Soit $q<0$. Les deux racines sont réelles. Elles sont de signe contraire puisque leur produit q est négatif. La plus grande en valeur absolue est de même signe que leur somme $-p$, c'est-à-dire positive si p est négatif, et négative si p est positif. Si p était nul, les deux racines étant de signe contraire devraient être égales en valeur absolue.

147. On peut, à l'aide de ces remarques, reconnaître la nature des racines d'une équation du second degré avant de l'avoir résolue.

Soit par exemple, l'équation

$$x^2-7x+12=0.$$

Ici $\frac{p^2}{4}-q$ est égal à $\frac{49}{4}-12$ ou à $\frac{49}{4}-\frac{48}{4}$, quantité positive. Les deux racines sont donc réelles. Elles sont de même signe, puisque leur produit est $+12$; elles sont positives, puisque leur somme est $+7$.

Soit l'équation $x^2+7x+12=0$.

Les deux racines sont encore réelles et de même signe; mais elles sont négatives, puisque leur somme est -7.

Soit l'équation $x^2+7x-12=0$.

Les deux racines sont réelles; elles sont de signe contraire, puisque leur produit est -12. La plus grande est négative, puisque leur somme est -7.

148. Remarque I. Lorsque les racines sont égales, le premier membre est un carré parfait. Cela résulte du théorème du n° **144**, puisque ce premier membre revient alors à $(x-x')(x-x')$ ou à $(x-x')^2$. Mais il est bon de le voir directement. On a alors $\frac{p^2}{4}-q=0$ ou $q=\frac{p^2}{4}$. Si, dans l'équation proposée, on remplace q par cette valeur, on obtient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Remarque II. Lorsque les racines sont imaginaires, le premier membre est la somme de deux quantités positives, et ne saurait par conséquent devenir nul pour aucune valeur réelle de x, ce qui rend l'impossibilité manifeste. On a, en effet, dans ce cas, $\frac{p^2}{4}-q<0$ ou $q>\frac{p^2}{4}$. On peut donc poser $q=\frac{p^2}{4}+\alpha^2$, en désignant par α^2 une quantité essentiellement positive. Mettant pour q cette valeur dans l'équation, elle devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+\alpha^2=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\alpha^2=0.$$

Sous cette forme, on voit bien qu'aucune valeur réelle mise à la place de x ne saurait satisfaire à l'équation; car que $x+\frac{p}{2}$ soit positif ou négatif, son carré est toujours positif.

149. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on pouvait mettre l'équation sous la forme $x^2+px+q=0$, c'est-à-dire que dans l'équation plus générale $ax^2+bx+c=0$, a n'était pas nul, et qu'alors on pouvait diviser par a. Il s'agit de voir maintenant ce qui arriverait si des hypothèses particulières faites sur les données du problème venaient à annuler a.

Pour cela, changeons d'abord x en $\frac{1}{y}$; aux plus grandes valeurs de y correspondront les plus petites valeurs de x, *et vice versa.* On obtient ainsi

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$a+by+cy^2=0.$$

Faisons maintenant l'hypothèse $a=0$; l'équation se réduit à

$$by+cy^2=0 \quad \text{ou} \quad y(b+cy)=0.$$

On satisfait à cette équation, soit en posant $y=0$, soit en posant

$$b+cy=0, \quad \text{d'où} \quad y=-\frac{b}{c};$$

mais puisque $x=\frac{1}{y}$, on déduit de ces valeurs de y

$$x=\frac{1}{0} \quad \text{et} \quad x=-\frac{c}{b}.$$

La première de ces valeurs est une valeur *infinie* (**102**), que l'on n'aurait pas soupçonnée si l'on se fût contenté de faire $a=0$ dans l'équation proposée, puisqu'elle se réduit alors à

$$bx+c=0,$$

et ne donne pour x que la seconde valeur $-\frac{c}{b}$.

Si l'on fait en même temps $a=0$ et $b=0$, l'équation en y ci-dessus se réduit à

$$cy^2=0,$$

et donne pour y deux valeurs nulles. Il en résulte pour x deux valeurs infinies, et c'est ce qu'on pouvait prévoir, puisque la seconde valeur $-\frac{c}{b}$ se réduit alors à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini.

150. On aurait pu faire les mêmes hypothèses dans les valeurs générales tirées de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Ces valeurs sont (**128**),

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si l'on suppose $a=0$, on trouve

$$x'=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0} \quad \text{et} \quad x''=\frac{-2b}{0}=\text{l'infini}.$$

On trouve bien une valeur infinie, mais l'autre se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour faire voir que cette indétermination n'est qu'apparente, on multiplie les deux termes de x' par

$$-b-\sqrt{b^2-4ac},$$

ce qui donne

$$x'=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=-\frac{4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Sous cette forme, on voit que, si l'on fait $a=0$, la valeur de x' se réduit à $\frac{0}{0}$; mais que si, avant de faire cette hypothèse, on supprime le facteur $2a$ commun aux deux termes (**103**, Remarque), on obtient

$$-\frac{2c}{b+b} \quad \text{ou} \quad -\frac{c}{b},$$

qui est bien la valeur finie et déterminée qu'on devait obtenir.

Si l'on fait à la fois $a=0$ et $b=0$, les deux valeurs de x se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Quant à la première, on vient de voir que l'indétermination n'est qu'apparente, et que la véritable valeur est $-\frac{c}{b}$, qui, pour $b=0$, se réduit à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini. Pour la seconde, multiplions ses deux termes par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, ce qui donne

$$x''=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})}=-\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})},$$

ou, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x''=-\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si maintenant on fait $a=0$ et $b=0$, cette valeur se réduit à $-\frac{2c}{0}$, c'est-à-dire à l'infini.

Ainsi, pour $a=0$ et $b=0$, les deux racines sont infinies, comme cela devait être, d'après ce qui a été dit au numéro précédent.

Enfin, si l'on faisait à la fois $a=0$, $b=0$ et $c=0$, les deux valeurs de x se présenteraient encore toutes les deux sous la forme $\frac{0}{0}$; mais dans ce cas l'indétermination serait réelle. Car il est évident que l'équation pourrait alors être satisfaite par une valeur quelconque de x.

151. Nous allons appliquer cette discussion à quelques exemples particuliers.

PROBLÈME I. *Trouver le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est* a, *sachant que, si l'on ajoute* b *à chacun des deux termes, la fraction augmente de* m.

Soit x le dénominateur demandé. On devra avoir

$$\frac{a+b}{x+b}-\frac{a}{x}=m,$$

ou

$$mx^2-(1-m)bx+ab=0,$$

d'où

$$x=\frac{(1-m)b\pm\sqrt{(1-m)^2b^2-4mab}}{2m}.$$

1° Ces deux valeurs seront réelles et positives si l'on a :

$$(1-m)^2b^2>4mab \quad \text{et} \quad 1-m>0.$$

Soient, par exemple, $a=3$, $b=2$, $m=\frac{1}{12}$, on trouvera

$$x=\frac{\frac{11}{12}.2\pm\sqrt{\left(\frac{11}{12}\right)^2.4-4.\frac{1}{12}.3.2}}{2.\frac{1}{12}}=11\pm7,$$

d'où $x'=18$ et $x''=4$.

Si l'on adopte la première valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{18}$, et se change en $\frac{5}{20}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{20}-\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ vaut effectivement $\frac{1}{12}$.

Si l'on adopte la seconde valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{4}$, et se change en $\frac{5}{6}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$.

2° Les deux valeurs deviendraient égales si l'on avait

$$(1-m)^2b^2=4mab.$$

Soient, par exemple, $a=1$, $b=8$, $m=\frac{1}{2}$; on trouvera pour ces deux valeurs $x=4$. La fraction demandée est alors $\frac{1}{4}$, et se change en $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ quand on ajoute 8 à chacun de ses termes. Or, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

3° Les deux valeurs seraient imaginaires si l'on avait :

$$(1-m)^2b^2<4mab.$$

C'est ce qui arriverait si l'on avait, par exemple, $a=1$, $m=\frac{1}{3}$, $b=2$.

Dans ce cas le problème serait impossible.

4° On trouverait une racine positive et une négative, si l'on supposait b négatif; c'est-à-dire si l'on supposait qu'au lieu d'ajouter un même nombre aux deux termes de la fraction on en retranchât un même nombre.

Soient, par exemple, $a=11$, $b=-2$, $m=\frac{5}{12}$; on trouvera

$$x=\frac{-\frac{7}{12}.2\pm\sqrt{\frac{49}{144}.4+4.\frac{5}{12}.11.2}}{2.\frac{5}{12}}=\frac{-7\pm37}{5},$$

d'où $x'=6$ et $x''=-8\frac{4}{5}$.

La seconde solution est purement algébrique; la première donne pour la fraction demandée $\frac{11}{6}$. Cette fraction, quand on retranche 2 à chacun de ses termes, devient $\frac{9}{4}$. Or, $\frac{9}{4}-\frac{11}{6}$ égale en effet $\frac{5}{12}$.

5° On trouverait une solution infinie si l'on faisait $m=0$, c'est-à-dire si l'on demandait que la seconde fraction fût équivalente à la première.

Les deux valeurs de x sont alors

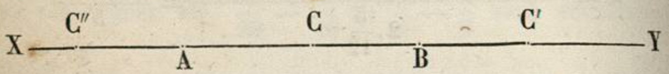
$$x'=\frac{b}{0} \quad \text{et} \quad x''=a.$$

La seconde solution est évidente : car si le dénominateur est égal au numérateur, auquel cas la fraction équivaut à l'unité, en ajoutant un même nombre aux deux termes on ne change pas sa valeur.

La première solution s'explique avec la même facilité; car si le dénominateur x est infini, il en est de même du dénominateur $x+b$; les deux fractions $\frac{a+b}{x+b}$ et $\frac{a}{x}$ sont donc nulles toutes les deux, et, par conséquent, leur différence est également nulle.

152. Problème II. *Trouver sur la droite* XY, *qui joint deux points lumineux* A *et* B, *le point qui reçoit de chacun d'eux la même quantité de lumière.*

(On suppose connu ce principe de physique : que la quantité de lumière reçue est en raison inverse du carré de la distance au point lumineux.)



Prenons pour inconnue la distance AC du point cherché à l'un des deux points lumineux, et désignons-la par x; soit d la distance AB des deux lumières. Représentons par α^2 la quantité de lumière que recevrait un point situé à 1 mètre du point A, et par β^2 celle qu'il recevrait à 1 mètre du point B.

Si l désigne pour un moment la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point A, on devra avoir, d'après le principe cité :

$$l : \alpha^2 :: 1 : x^2 \quad \text{d'où} \quad l = \frac{\alpha^2}{x^2}.$$

En raisonnant de même, on trouvera que la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point B est

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2}.$$

Ces deux quantités de lumière reçue par le point cherché C devant être égales d'après l'énoncé, on doit avoir l'équation :

$$\frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\beta^2}{(d-x)^2} \qquad [1].$$

On pourrait la traiter comme à l'ordinaire, et nous conseillons cet exercice aux élèves ; mais il est plus simple de remarquer que les deux membres étant des carrés parfaits, on peut en extraire la racine, ce qui donne les deux équations du premier degré

$$\frac{\alpha}{x} = \pm \frac{\beta}{d-x} \qquad [2].$$

Si l'on prend le signe $+$ devant le second membre, on trouve, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$\alpha d - \alpha x = \beta x, \quad \text{d'où} \quad x' = d \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Si l'on prend le signe $-$ devant le second membre, on trouve, de la même manière,

$$\alpha d - \alpha x = -\beta x, \quad \text{d'où} \quad x'' = d \cdot \frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

valeurs réelles qu'il s'agit de discuter.

1° Supposons d'abord la première lumière plus intense que la seconde, ou $\alpha > \beta$. Dans ce cas les deux valeurs x' et x'' sont toutes deux positives.

Considérons d'abord la valeur x'. Comme $\alpha+\beta$ est plus grand que α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est moindre que 1 ; la valeur x' est donc moindre que d, et répond à un point C compris entre les points lumineux A et B. De plus, comme $\alpha+\beta$ est moindre que $\alpha+\alpha$ ou 2α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est plus grande que $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\frac{1}{2}$; ainsi x' est plus grand que la moitié de d. Le point C est donc plus près du point B que du point A.

Considérons, en second lieu, la valeur x''; comme $\alpha-\beta$ est moindre que α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ est plus grande que 1; ainsi x'' est plus grand que d, et répond à un point C′, situé au delà du point lumineux B qui a la moindre intensité. On conçoit, en effet, qu'on puisse trouver de ce côté un point pour lequel la différence d'intensité des deux lumières soit compensée par la différence des distances au point éclairé.

2° Supposons que l'intensité de la seconde lumière aille en augmentant et que par conséquent β augmente en se rapprochant ainsi de α, la valeur x' ira en diminuant et la valeur x'' ira en augmentant. Ainsi le point C se rapprochera du milieu de AB, et le point C′ s'éloignera de plus en plus de la lumière B.

Si l'on suppose maintenant $\alpha=\beta$, ou les deux lumières d'égale intensité, on aura $x'=\frac{d}{2}$ et $x''=\frac{\alpha d}{0}$, c'est-à-dire que le point C se trouvera alors au milieu de AB, et que le point C′ se sera éloigné à une distance infinie à droite du point B. On conçoit, en effet, que pour compenser la différence d'intensité des deux lumières, il faut éloigner le point C′ d'autant plus que cette différence est moindre; et que si enfin elle devient nulle, ce n'est qu'à une distance infinie que la différence due aux distances devient insensible.

3° Supposons que β, continuant à croître, devienne plus grand que α, ou que la lumière B soit plus intense que la lumière A.

La valeur x' reste positive et moindre que d, c'est-à-dire qu'elle répond toujours à un point compris entre A et B. Mais comme β est plus grand que α, il s'ensuit

que $\alpha+\beta$ est plus grand que 2α, et que, par conséquent, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est moindre que $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\frac{1}{2}$; ainsi x' est moindre que $\frac{d}{2}$, c'est-à-dire que le point C est alors plus près de la lumière A que de la lumière B.

Quant à la valeur x'', elle devient négative; et, puisqu'on a regardé comme positives les distances comptées à droite du point A, on devra, pour la généralité des formules (90), regarder comme négatives celles qui sont comptées à gauche de ce point. La valeur négative trouvée pour x'' correspondra donc à un point C″, situé à gauche du point lumineux A qui a la moindre intensité, et à une distance de ce point d'autant plus grande que la différence absolue $\beta-\alpha$ sera plus petite.

4° Si l'on faisait maintenant décroître l'intensité de la lumière B jusqu'à ce qu'on en fût revenu à l'hypothèse $\beta=\alpha$, on trouverait pour x'' des valeurs négatives de plus en plus grandes, et enfin une valeur infinie qu'on devrait regarder comme négative, puisqu'elle serait la limite vers laquelle tend une quantité négative de plus en plus grande en valeur absolue. Ainsi, pour $\alpha=\beta$ la solution infinie répond à un point que l'on peut supposer placé indifféremment à droite ou à gauche des deux lumières, ce qui doit être.

Il ne faudrait pas en conclure que l'équation du second degré a, dans ce cas, trois racines; elle n'en a que deux; mais la valeur infinie peut être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'on la considère comme limite de quantités croissantes positives, ou de quantités croissantes en valeur absolue, mais négatives.

5° Si l'on fait en même temps les deux hypothèses $\alpha=\beta$

et $d=0$, c'est-à-dire si l'on suppose que les deux lumières soient de même intensité, et placées en outre au même point A, on trouve

$$x'=0 \quad \text{et} \quad x''=\frac{0}{0}.$$

La première valeur donne le point A, cela devrait être, puisque le point C, qui est au milieu de AB pour $\alpha=\beta$, se confond alors avec A et B.

La seconde est indéterminée ; et, en effet, en quelque point de la droite XY qu'on place alors le point éclairé, il recevra des deux points lumineux la même quantité de lumière.

6° Si, sans faire aucune hypothèse sur d, on fait les deux suppositions $\alpha=0$ et $\beta=0$, on trouve pour x' et x'' deux valeurs indéterminées. Et, en effet, si les deux lumières sont éteintes, un point quelconque situé soit entre A et B, soit en deçà ou au delà, reçoit de chacun de ces points une quantité de lumière nulle et par conséquent une quantité égale.

155. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que la somme de leurs racines carrées soit égale à un nombre* b.

II. *Un voyageur a* n *kilomètres à faire, et marche d'une manière régulière. S'il faisait chaque jour* a *kilomètres de plus, il emploierait à son voyage* b *jours de moins. Quelle serait alors la durée de son voyage?*

III. *Partager* a *en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit égale à* b.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.