PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

PREMIÈRE SECTION.

DES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

De la ligne droite, des lignes brisées, et du cercle.

§ I. — De la ligne droite.

12. — Axiome. *D'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite.* En d'autres termes, parmi les lignes que l'on peut mener d'un point à un autre, il n'y en a qu'une qui soit la plus courte.

13. — Théorème. *Deux droites qui ont deux points communs, A et B (fig. 2), coïncident dans toute leur étendue.*

Les deux droites coïncident de A jusqu'en B, en vertu de l'axiome précédent. Je dis que leurs prolongements coïncident aussi. Car si l'une d'elles avait un point C qui ne fût pas situé sur l'autre, en faisant tourner celle-ci autour du point A jusqu'à ce qu'elle vînt passer par le point C, comme tous ses points, à l'exception de A, auraient changé de place dans ce mouvement, les deux droites cesseraient de coïncider en B. On pourrait donc, de A en C, mener deux droites différentes, ce qui est impossible d'après l'axiome précédent. Donc, tout point pris sur l'une des droites appartient en même temps à l'autre; et par conséquent, elles coïncident dans toute leur étendue.

Corollaire. *Deux points suffisent pour déterminer une ligne droite.*

14. — Applications. Tout le monde sait comment on se sert de la *règle* pour mener une ligne droite par deux points donnés, sur le papier, sur un tableau, sur un mur, etc.

Les jardiniers et les terrassiers tracent une ligne droite sur le terrain en suivant, à l'aide d'un piquet, la direction d'une corde tendue, fixée par ses deux extrémités aux deux points qui servent à déterminer cette droite.

Quand il s'agit de tracer sur le terrain une droite d'une étendue considérable, on se contente de marquer un certain nombre de points sur sa direction, à l'aide de *jalons* ou piquets plantés de distance en distance. C'est ce que l'on appelle *jalonner* une direction. Chaque jalon est ordinairement surmonté d'une petite plaque peinte de deux couleurs, et qui sert à le faire distinguer dans l'éloignement. Si A et B (fig. 3) sont les jalons extrêmes, pour déterminer un jalon intermédiaire, on se place en dehors de la ligne AB, de façon que le jalon B soit caché par le jalon A, et l'on fait planter un jalon entre ces deux points, de manière à ce qu'il soit également caché par le jalon A.

15. — On a souvent besoin de prolonger une droite déjà tracée. Si l'on opère avec la règle, il suffit de la placer de manière qu'une partie de l'un de ses bords coïncide avec la droite tracée; l'autre partie du même bord détermine le prolongement de cette droite. Avec le cordeau, l'opération est analogue. S'il s'agit de prolonger une ligne jalonnée, dont A et C (fig. 3) sont les deux derniers jalons, on se place en deçà du jalon A, de façon qu'il cache le jalon C; on fait alors planter un jalon B au delà du point C, de manière que ce jalon B soit également caché par le jalon A. Le point B est sur le prolongement de AC.

16. — La *distance* de deux points est la longueur de la droite qui les joint. Les longueurs sont susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres grandeurs.

Pour faire la somme de deux longueurs, tirez une droite indéfinie XY (fig. 4), et marquez-y un point A; sur cette droite, à partir du point A, portez, à l'aide d'un *compas*, une distance AB égale à l'une des longueurs proposées, puis, à partir du point B, et dans le même sens, une distance BC égale à la seconde longueur proposée; la distance AC sera la somme demandée.

Pour faire la différence de deux longueurs données, portez sur XY, à partir du point A, une distance AC égale à la plus grande des longueurs proposées, puis, à partir du point C, mais en sens contraire, une distance CB égale à la plus petite; la distance AB sera la différence demandée.

Pour multiplier une longueur donnée par un nombre entier quelconque, par 5 par exemple, il suffirait de porter sur XY, à partir du point A, et toujours dans le même sens, 5 distances égales à la longueur donnée; la distance entre l'extrémité de la 5^e^ ouverture de compas et le point de départ A serait le produit demandé.

Nous verrons plus tard comment on divise une longueur donnée en parties égales.

17. — *Mesurer* la longueur d'une droite, c'est la comparer à une autre longueur prise pour unité. Il suffit, pour opérer cette comparaison, de porter l'unité sur la droite à mesurer autant de fois que cela est possible. S'il y a un reste, on l'évalue à l'aide d'une unité plus petite ayant avec l'unité principale un rapport simple. Si cette seconde opération donne encore un reste, on l'évalue à l'aide d'une unité encore plus petite; et ainsi de suite, jusqu'à ce que le reste, s'il y en a un, soit inappréciable, ce qui finit toujours par arriver dans la pratique.

On emploie, au contraire, des multiples de l'unité principale pour mesurer les distances considérables.

En France, l'unité linéaire principale est le *mètre*, ou la dix-millionnième partie du quart du méridien terrestre. Il se subdivise en 10 *décimètres* ou dixièmes de mètre; chaque décimètre en 10 *centimètres* ou centièmes de mètre; chaque centimètre en 10 *millimètres* ou millièmes de mètre.

Une longueur de 10 mètres forme un *décamètre;* 10 décamètres ou 100 mètres forment un *hectomètre;* 10 hectomètres ou 1000 mètres, forment un *kilomètre;* 10 kilomètres ou 10000 mètres forment un *myriamètre.* Ces deux dernières unités servent à évaluer les distances géographiques. Dans l'arpentage on fait usage de la *chaîne d'arpenteur* (fig. 5), qui se compose de 50 chaînons rectilignes ayant chacun 2 décimètres, et a par conséquent un décamètre de long. Dans les travaux de construction on emploie une règle de 2 mètres de long, divisée en décimètres et centimètres, à laquelle on donne le nom de *toise métrique.* Dans le dessin linéaire il est commode d'adopter le *double décimètre,* divisé en centimètres et millimètres, et taillé en biseau, de manière que son tranchant puisse venir affleurer la ligne à mesurer.

18. — Les longueurs évaluées en unités et parties d'unité sont des nombres concrets, sur lesquels on peut effectuer toutes les opérations de l'arithmétique. Pour obtenir graphiquement le résultat, on n'a plus qu'à porter sur une ligne indéfinie le nombre d'unités et de parties d'unité que ce résultat exprime.

Si, par exemple, on veut prendre la 5^e partie d'une longueur donnée, on mesurera d'abord cette longueur; supposons qu'on la trouve égale à $8^m,375$; on prendra le 5^e de ce nombre, qui est $1^m,675$; et l'on portera sur une droite indéfinie 1 mètre, puis 6 décimètres, puis 7 centimètres, et enfin, 5 millimètres.

Pour obtenir le rapport de deux longueurs, on les mesure et l'on cherche le rapport des deux nombres obtenus. Si, par exemple, ces deux longueurs sont exprimées par $1^m,855$ et $2^m,597$, leur rapport sera celui de 1855 à 2597, ou de 5 à 7 (en divisant les deux nombres par leur plus grand commun diviseur 371).

§ II. — Des lignes brisées.

19. — Une ligne brisée plane est dite *convexe*, lorsqu'elle ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points. Telle est la ligne brisée ABCD (fig. 6). La ligne brisée ABCDP, au contraire, n'est point convexe, parce qu'une même droite pourrait rencontrer les trois côtés AB, CD et DP.

Théorème. *Si d'un point* A *à un autre* D (fig. 6), *on mène, d'un même côté de la droite* AD, *deux lignes brisées convexes* ABCD, AMNPD, *dont l'une enveloppe l'autre, la ligne brisée enveloppante sera plus longue que la ligne brisée enveloppée.*

Pour le démontrer, prolongeons AB jusqu'en I, et BC jusqu'en O; par la définition même de la ligne droite (4), nous aurons :

$$AB+BI<AM+MI$$
$$BC+CO<BI+IN+NO$$
$$CD<CO+OP+PD.$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, ce qui est permis, puisqu'elles sont toutes dans le même sens, retranchant les termes BI et CO qui entrent chacun dans les deux membres, et observant que $MI+IN$ équivaut à MN, et $NO+OP$ à NP, il viendra :

$$AB+BC+CD<AM+MN+NP+PD;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Corollaire. La démonstration étant indépendante du nombre et de la grandeur des côtés, la proposition peut être étendue à des lignes brisées d'un nombre infini de côtés infiniment petits, c'est-à-dire à des lignes courbes, si elles sont convexes, c'est-à-dire si elles ne peuvent être rencontrées par une ligne droite en plus de deux points.

Dans ce cas, *la courbe enveloppante est plus grande que la courbe enveloppée.*

§ III. — Du cercle.

20. — *On appelle* circonférence de cercle, *une courbe plane dont tous les points sont également distants d'un point intérieur nommé* centre.

Le mot *cercle* lui-même ne s'applique rigoureusement qu'à la portion de plan limitée par la circonférence; néanmoins, on donne souvent, pour abréger, le nom de cercle à

la circonférence; le sens du discours indique toujours suffisamment si c'est de la courbe, ou de l'espace qu'elle limite que l'on veut parler.

La figure 7 représente un cercle. Le point O est son centre.

Les droites telles que OA, OB, OC, etc., menées du centre aux différents points de la circonférence, sont ce qu'on appelle des *rayons*. D'après la définition même du cercle, *tous les rayons sont égaux.*

Une ligne droite telle que AB, qui passe par le centre et se termine de part et d'autre à la circonférence, se nomme un *diamètre* du cercle. Chaque diamètre est le double du rayon, et *tous les diamètres sont égaux.*

On désigne un cercle par son rayon, par son diamètre ou par son centre; ainsi l'on dira le cercle OA, le cercle AB, ou le cercle O.

On sait comment on trace un cercle à l'aide du compas. Sur le terrain, on substitue au compas un cordeau tendu, fixé par un de ses bouts au centre, et armé à l'autre bout d'un piquet qui sert à tracer la courbe.

21. — Théorème. *Tout diamètre* AB (fig. 7) *divise la circonférence en deux parties égales.*

En effet : si l'on conçoit que la figure soit pliée le long de AB, et que la partie AmB vienne s'appliquer sur ACB, ces deux parties devront coïncider dans toute leur étendue; car, dans le cas contraire, il y aurait des points inégalement distants du centre.

22. — Toute portion de circonférence, telle que AMC, se nomme un *arc* de cercle; la droite AC, qui joint les deux extrémités de l'arc, se nomme sa *corde*. On dit que la corde *sous-tend* l'arc, et que l'arc est sous-tendu par la corde.

Toute corde, telle que AC, *qui ne passe pas par le cen-*

tre, divise la circonférence en deux parties inégales; car l'une d'elles, A*m*BC, se compose d'une demi-circonférence plus l'arc BC; et l'autre, AMC, est égale à une demi-circonférence AMCB moins le même arc BC.

Cette remarque démontre la *réciproque* de la proposition du n° 21; c'est-à-dire *que toute corde qui divise la circonférence en deux parties égales est un diamètre.*

La même corde AC sous-tend à la fois deux arcs, AMC et A*m*BC. Quand on parle de l'arc sous-tendu par une corde, c'est toujours du plus petit de ces deux arcs qu'il est question, à moins que l'on n'exprime positivement le contraire.

23. — Théorème. *Toute corde* AC (fig. 7) *est plus petite que le diamètre* AB.

Car si l'on joint OC, on aura (4)

$$AC < AO + OC.$$

Mais on peut remplacer le rayon OC par son égal OB; on aura donc :

$$AC < AO + OB \quad \text{ou} \quad AC < AB.$$

24. — Théorème. *Dans un même cercle, deux arcs égaux* AB, A'B' (fig. 8), *sont sous-tendus par des cordes égales.*

En effet : soit C le milieu de l'arc AA'; menons le diamètre CD, et concevons que la figure soit pliée le long de CD, les deux demi-circonférences coïncideront; les arcs CA' et CA étant égaux, le point A' tombera en A; et, les deux arcs A'B' et AB étant égaux, le point B' tombera en B. Les droites A'B' et AB ayant alors les mêmes extrémités, coïncideront; donc ces droites sont égales.

25. — Théorème. *Dans un même cercle, à un plus grand arc correspond une plus grande corde.*

Soit l'arc AB (fig. 9) plus grand que l'arc A'C'; je dis que la corde AB est plus grande que la corde A'C'. Pour le démontrer, soit l'arc AC égal à l'arc A'C'; sa corde AC sera égale à la corde A'C', en vertu du théorème précédent. Joignons OB et OC, qui coupera AB en un point I. On aura (4)

$$AI + IC > AC$$
$$\text{et} \quad OI + IB > OB.$$

Ajoutant ces deux inégalités membre à membre, et remarquant que AI + IB équivaut à AB, et OI + IC à OC, il viendra

$$AB + OC > AC + OB;$$

mais on peut retrancher d'une part OC, et de l'autre son égal OB; il restera donc

$$AB > AC,$$

et par conséquent

$$AB > A'C'.$$

Remarque. Dans cette proposition, on suppose essentiellement qu'il s'agit du plus petit des deux arcs sous-tendus par chaque corde. S'il s'agissait du plus grand, il est facile de voir qu'au plus grand arc correspondrait au contraire la plus petite corde.

26. — Les deux propositions précédentes démontrent leurs *réciproques*. Ainsi :

Deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux; car si les arcs étaient inégaux, les cordes seraient inégales (25).

A une plus grande corde correspond un plus grand arc; car si les arcs étaient égaux, les cordes seraient égales (24); et si à la corde qu'on suppose la plus grande correspondait le plus petit arc, la proposition du n° 25 montrerait que cette soi-disant plus grande corde est réellement la plus petite, ce qui est contraire à la supposition.

27. — Théorème. *Deux cercles de même rayon sont égaux.*

Si l'on transporte, en effet, les deux cercles l'un sur l'autre, de manière que leurs centres coïncident, les deux circonférences coïncideront, sans quoi il y aurait des points inégalement distants du centre.

Remarques. I. Quand deux circonférences de même rayon sont placées de manière à avoir même centre, elles coïncident dans toutes leurs parties, de quelque manière qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de ce centre. Le cercle est la seule courbe qui jouisse de cette propriété.

II. Les propositions des n^os 24, 25 et 26 s'appliquent à des arcs pris sur des circonférences de même rayon.

28. — On vient de voir que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, l'égalité des arcs entraîne celle de leurs cordes, et *vice versâ*. Cette considération permet d'ajouter, de soustraire les arcs d'un même rayon, comme s'il s'agissait de lignes droites.

Pour obtenir, par exemple, la différence de deux arcs donnés, ayant le même rayon, on décrira, avec ce même rayon, un arc indéfini AX (fig. 10). Sur cet arc indéfini et à partir d'un point A, on portera une ouverture de compas AB égale à la corde du plus grand des deux arcs donnés; à partir du point B, et en sens contraire, on portera une ouverture de compas BC égale à la corde du plus petit des deux arcs donnés. Les arcs AB et BC seront respectivement égaux aux deux arcs donnés, puisqu'ils ont des cordes égales à celles de ces arcs et sont d'ailleurs décrits du même rayon. L'arc AC sera donc égal à leur différence.

Pour répéter un arc donné un certain nombre de fois, il suffit de porter sur un arc indéfini, décrit du même rayon, un même nombre d'ouvertures de compas égales à la corde de l'arc donné.

Nous parlerons plus tard de la division des arcs en parties égales.

29. — On a souvent besoin de comparer un arc à la circonférence dont il fait partie. Pour cela, on suppose cette circonférence divisée en 360 parties égales, à chacune desquelles on donne le nom de *degré;* chaque degré, en 60 parties appelées *minutes;* et chaque minute, en 60 parties appelées *secondes*. Pour évaluer un arc en parties de la circonférence dont il fait partie, on énonce le nombre de degrés, minutes, secondes (et fractions de seconde) dont il se compose. On dira ainsi, par exemple : un arc de 69 degrés, 51 minutes et 28 secondes; ce qu'on écrira $69^\circ\ 51'\ 28''$; en désignant les degrés par un petit zéro, les minutes par un accent, et les secondes par deux accents.

Le quart de la circonférence, ou 90 degrés, forment ce qu'on appelle un *quadrans*.

30. — Dans le système décimal, le quadrans se divise en 100 parties appelées *grades*, chaque grade en 100 *minutes*, et chaque minute en 100 *secondes*. Un arc évalué de cette manière s'exprime immédiatement par un nombre décimal : ainsi 72 grades 16 minutes 4 secondes s'écriront $72^{gr},1604$. De plus, il suffit, pour convertir un pareil nombre en unités de l'espèce inférieure, de transporter la virgule de deux rangs vers la droite : ainsi $72^{gr},1604$ équivalent à $7216^{min},04$ ou à 721604 secondes.

Malgré ces avantages, l'ancienne division de la circonférence a prévalu.

Pour convertir un nombre de grades en degrés, il suffit de le multiplier par $\frac{9}{10}$, puisque 90 degrés font 100 grades, ou 9 degrés 10 grades. Par exemple : $16^{gr},25$ multipliés par $\frac{9}{10}$ donnent $14^o,625$ ou $\frac{14625}{1000}$ de degré, ou enfin $14^o37'30''$.

Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés en grades, il suffit de le multiplier par $\frac{10}{9}$. Par exemple : $14^o37'30''$ reviennent à $14^o\ 2250''$ ou à $14^o\ \frac{2250}{3600}$, puisqu'un degré vaut 3600 secondes. Réduisant cette fraction en décimales, on trouve $14^o,625$, qui, multipliés par $\frac{10}{9}$, donne $16^{gr},25$.

CHAPITRE II.

Des angles.

31. — Lorsque deux droites ont deux points communs, nous avons vu qu'elles coïncident (13). Lorsque deux droites n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles se rencontrent, qu'elles concourent, qu'elles se coupent ; et le point commun se nomme leur point de rencontre, de concours ou d'intersection.

On appelle *angle* le plus ou moins d'écart de deux droites qui se rencontrent ; ces droites sont les *côtés* de l'angle, et leur point commun en est le *sommet*.

Pour désigner un angle, on se contente quelquefois de nommer son sommet ; on dirait ainsi l'angle A (fig. 11). Mais comme il arrive fréquemment que plusieurs angles aient le même sommet, on convient de désigner chaque angle par trois lettres, dont l'une est celle du sommet, et dont les deux autres sont prises sur ses côtés ; mais on a soin que celle du sommet soit au milieu. On dira ainsi l'angle BAC ou CAB indifféremment.

Il est important de remarquer que dans la considération des angles on n'a point égard à la longueur des côtés.

Les angles sont des quantités susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres quantités. Ainsi l'angle AOC (fig. 12) est la *somme* des angles AOB et BOC ; l'angle AOB est la *différence* des angles AOC et BOC ; si les angles AOB et BOC sont égaux, l'angle AOC est le *produit* de AOB par 2 ; et AOB est au contraire le *quotient* de AOC par 2.

32. — Théorème. *Deux angles quelconques* AOB, CO'D (fig. 13) *sont entre eux comme les arcs* AB *et* CD, *décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon.*

Évaluons les arcs AB et CD à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact ; ce qui finira toujours par arriver dans la pratique. Pour fixer les idées, supposons que AB contienne 5 fois l'unité, et que CD la contienne 3 fois : ces arcs seront entre eux comme 5 est à 3.

Après avoir divisé ces arcs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division m, n, p, q, r, s, les rayons mO, nO, pO, qO, rO', sO'. Je dis d'abord que tous les angles partiels AOm, mOn, etc., $CO'r$, $rO's$, etc., ainsi formés, seront égaux. Considérons, en effet, les deux angles mOn et $rO's$, par exemple. Si l'on fait coïncider les circonférences O et O' qui ont même rayon, et qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de leur centre devenu commun, jusqu'à ce que les arcs égaux mn et rs coïncident, les rayons mO et rO' coïncideront aussi, puisqu'ils auront les mêmes extrémités ; il en sera de même des rayons nO et sO' ; donc les angles mOn et $rO's$ coïncideront et sont par conséquent égaux. On démontrerait de même que l'un quelconque des angles partiels qui forment AOB est égal à l'un