de le multiplier par $\frac{9}{10}$, puisque 90 degrés font 100 grades, ou 9 degrés 10 grades. Par exemple : $16^{gr},25$ multipliés par $\frac{9}{10}$ donnent $14^o,625$ ou $\frac{14625}{1000}$ de degré, ou enfin $14^o 37' 30''$.

Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés en grades, il suffit de le multiplier par $\frac{10}{9}$. Par exemple : $14^o 37' 30''$ reviennent à $14^o\ 2250''$ ou à $14^o\ \frac{2250}{3600}$, puisqu'un degré vaut 3600 secondes. Réduisant cette fraction en décimales, on trouve $14^o,625$, qui, multipliés par $\frac{10}{9}$, donne $16^{gr},25$.

CHAPITRE II.

Des angles.

31. — Lorsque deux droites ont deux points communs, nous avons vu qu'elles coïncident (13). Lorsque deux droites n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles se rencontrent, qu'elles concourent, qu'elles se coupent; et le point commun se nomme leur point de rencontre, de concours ou d'intersection.

On appelle *angle* le plus ou moins d'écart de deux droites qui se rencontrent; ces droites sont les *côtés* de l'angle, et leur point commun en est le *sommet*.

Pour désigner un angle, on se contente quelquefois de nommer son sommet; on dirait ainsi l'angle A (fig. 11). Mais comme il arrive fréquemment que plusieurs angles aient le même sommet, on convient de désigner chaque angle par trois lettres, dont l'une est celle du sommet, et dont les deux autres sont prises sur ses côtés; mais on a soin que celle du sommet soit au milieu. On dira ainsi l'angle BAC ou CAB indifféremment.

Il est important de remarquer que dans la considération des angles on n'a point égard à la longueur des côtés.

Les angles sont des quantités susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres quantités. Ainsi l'angle AOC (fig. 12) est la *somme* des angles AOB et BOC; l'angle AOB est la *différence* des angles AOC et BOC; si les angles AOB et BOC sont égaux, l'angle AOC est le *produit* de AOB par 2; et AOB est au contraire le *quotient* de AOC par 2.

32. — Théorème. *Deux angles quelconques* AOB, CO'D (fig. 13) *sont entre eux comme les arcs* AB *et* CD, *décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon.*

Évaluons les arcs AB et CD à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact; ce qui finira toujours par arriver dans la pratique. Pour fixer les idées, supposons que AB contienne 5 fois l'unité, et que CD la contienne 3 fois : ces arcs seront entre eux comme 5 est à 3.

Après avoir divisé ces arcs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division m, n, p, q, r, s, les rayons mO, nO, pO, qO, rO′, sO′. Je dis d'abord que tous les angles partiels AOm, mOn, etc., CO′r, rO′s, etc., ainsi formés, seront égaux. Considérons, en effet, les deux angles mOn et rO′s, par exemple. Si l'on fait coïncider les circonférences O et O′ qui ont même rayon, et qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de leur centre devenu commun, jusqu'à ce que les arcs égaux mn et rs coïncident, les rayons mO et rO′ coïncideront aussi, puisqu'ils auront les mêmes extrémités; il en sera de même des rayons nO et sO′; donc les angles mOn et rO′s coïncideront et sont par conséquent égaux. On démontrerait de même que l'un quelconque des angles partiels qui forment AOB est égal à l'un quelconque de ceux qui forment C O′ D ; donc tous ces angles partiels sont égaux.

Or, A O B contient 5 de ces angles partiels, et C O′ D en contient 3 ; les angles A O B et C O′ D sont donc entre eux comme 5 est à 3, c'est-à-dire dans le même rapport que les arcs A B et C D ; et l'on peut écrire :

$$AOB : CO'D :: AB : CD.$$

Remarque. Les angles tels que A O B et C O′ D, qui ont leur sommet au centre d'une circonférence, sont nommés pour cette raison *angles au centre;* et la proposition précédente s'énonce habituellement en disant que : *dans un même cercle* (*ou dans des cercles égaux*) *les angles au centre sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés.*

33.—On déduit du même théorème que : *tout angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés ;* c'est-à-dire que si l'on prend pour unité d'angle, l'angle au centre qui correspond à l'unité d'arc, un angle au centre quelconque est à l'unité d'angle, comme l'arc compris entre ses côtés est à l'unité d'arc.

On prend pour unité d'angle, l'angle au centre qui correspond au quadrans; on lui donne le nom d'angle *droit.* On subdivise l'angle droit en 90 parties appelées *degrés,* dont chacun correspond par conséquent à l'arc d'un degré. Chaque angle d'un degré se divise en 60 *minutes*, dont chacune correspond à l'arc d'une minute; et enfin chaque angle d'une minute se divise en 60 *secondes*, dont chacune correspond à l'arc d'une seconde. D'après cela, un angle de $68^\circ\,17'\,30''$ est l'angle au centre qui comprend entre ses côtés un arc de $68^\circ\,17'\,30''$.

34.— Pour mesurer les angles sur une surface de peu d'étendue, on emploie un instrument appelé *rapporteur.* Il se

compose d'un demi-cercle en cuivre, en corne ou en bois (fig. 14), dont la circonférence, nommée *limbe*, est divisée en degrés.

Soit X O Y l'angle à mesurer. On porte l'instrument sur cet angle, de manière que son centre tombe au sommet O, et que le diamètre A B coïncide avec la direction O Y de l'un des côtés de l'angle. Le côté O X vient alors couper la circonférence extérieure du rapporteur en un certain point M, et l'on note le nombre de degrés compris entre les points A et M. Ce nombre de degrés est la mesure de l'arc A M, et par suite celle de l'angle proposé.

Sur le terrain, on fait usage d'un grand rapporteur qui porte le nom de *graphomètre* (fig. 15). Il repose sur un support à trois branches, auquel il est articulé au moyen d'un genou, ce qui permet de donner au limbe telle position que l'on désire. Le diamètre A B, que l'on nomme *ligne de foi*, est muni à ses extrémités de deux petites fenêtres appelées *pinnules*, qui sont partagées dans le sens de leur hauteur par un fil très-fin. Au centre O est un pivot sur lequel tourne, à frottement doux, une règle C D, semblable à la règle A B, et munie comme elle de deux pinnules ; cette règle mobile se nomme *alidade.*

Pour mesurer un angle à l'aide du graphomètre, on place son centre au-dessus du sommet de l'angle, et l'on dispose le plan du limbe de manière à ne pencher dans aucun sens. (Nous verrons plus tard comment on peut remplir ces conditions.) On dirige la ligne de foi suivant un des côtés de l'angle, et l'alidade suivant l'autre côté, les fils des pinnules faisant ici l'office de jalons. On n'a plus qu'à lire sur le limbe la valeur de l'arc compris entre la ligne de foi et l'alidade.

Quand on doit opérer sur une grande étendue de terrain, on remplace les pinnules par deux lunettes, dont l'une est dirigée suivant la ligne de foi, et dont l'autre, dirigée suivant l'alidade, est mobile avec elle.

35. — PROBLÈME. *Faire un angle égal à un angle donné,* CID (fig. 16).

Soit XY une droite donnée, et O le point où l'on doit faire un angle égal à CID.

Du point I comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez l'arc CD.

Du point O comme centre, avec le même rayon, décrivez l'arc indéfini AM. Sur cet arc, à partir du point A, portez une ouverture de compas AB, égale à la corde de l'arc CD; et joignez OB. L'angle AOB sera l'angle demandé. Car les arcs AB et CD sont égaux, comme ayant leurs cordes égales; les angles au centre AOB et CID correspondants à ces arcs, sont donc égaux aussi.

Remarque. En répétant cette construction, il est facile de faire un angle égal à la somme ou à la différence de deux angles donnés; ou encore, de répéter un angle donné un certain nombre de fois.

36. — Lorsqu'une droite OC (fig. 17) en rencontre une autre AB, de manière à faire avec cette droite, et d'un même côté, deux angles AOC, BOC, ces angles sont dits *adjacents.*

THÉORÈME. *La somme de deux angles adjacents équivaut à deux angles droits.*

En effet : du sommet O de ces angles, comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une demi-circonférence ACB : ces angles auront pour mesure les arcs AC et BC, dont la somme équivaut à deux quadrans. La somme des angles proposés équivaut donc à deux angles droits (33).

COROLLAIRE. *Lorsque deux angles adjacents sont égaux, ils sont droits.*

Tels sont AOD et BOD.

Remarques. I. Lorsque deux angles adjacents sont inégaux, l'un d'eux est plus grand qu'un angle droit, et l'autre plus petit. Le premier s'appelle un angle *obtus,* le second un angle *aigu.*

II. Deux angles dont la somme vaut deux droits sont dits *supplémentaires;* et chacun est dit *supplément* de l'autre. Deux angles adjacents sont supplémentaires.

Étant donné un angle, il est facile de trouver son supplément. Si l'on demandait, par exemple, le supplément de BOC, il suffirait de prolonger le côté BO, et l'angle AOC ainsi obtenu serait le supplément demandé.

Si c'est la mesure de l'angle qui est donnée, on en déduit la mesure de l'autre, en remarquant que la somme de leurs mesures doit faire 180°. Si l'un des angles est, par exemple, de $31^{\circ}\,47'$, l'autre sera de 180° moins $31^{\circ}\,47'$, c'est-à-dire de $148^{\circ}\,13'$.

37. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Si deux angles* AOC, BOC (fig. 17), *ayant même sommet* O *et un côté commun* OC, *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AO *et* BO *sont en ligne droite.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon quelconque, on décrit un arc ACB, cet arc équivaudra à une demi-circonférence, puisque la somme des angles AOC et BOC équivaut à deux droits. Donc la corde qui joindrait les points A et B serait un diamètre (22), et passerait conséquemment par le centre O. Donc AO et OB sont en ligne droite.

38. — THÉORÈME. *La somme de tous les angles successifs* AOB, BOC, COD, DOE (fig. 18), *formés d'un même* *côté d'une droite* AE, *et ayant pour sommet un même point* O *de cette droite, est égale à deux angles droits.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une demi-circonférence ABCDE, les angles AOB, BOC, COD, DOE, auront respectivement pour mesure les arcs AB, BC, CD, DE, dont la somme équivaut à deux quadrans. La somme de ces angles équivaut donc à deux angles droits.

39. — Théorème. *La somme de tous les angles successifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 19), *formés autour d'un même point* O, *équivaut à quatre angles droits.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence, ces angles auront respectivement pour mesure les arcs AB, BC, CD, DE, EA, dont la somme équivaut à quatre quadrans. La somme de ces angles équivaut donc à quatre angles droits.

40. — Théorème. *Lorsque deux droites* AB, CD (fig. 20), *se coupent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet : la somme des angles AOC et COB équivaut à deux angles droits (36). Il en est de même de la somme des angles COB et BOD. Ces deux sommes sont donc égales, et l'on peut écrire

$$AOC + COB = COB + BOD.$$

Retranchant de part et d'autre COB, il reste

$$AOC = BOD.$$

On démontrerait de même que COB égale AOB.

CHAPITRE III.

§ I. — Des perpendiculaires.

41. — Deux droites sont dites *perpendiculaires* entre elles, lorsqu'elles font un angle droit. Telles sont les droites AB et CD (fig. 21).

On peut remarquer que, dans ce cas, les trois autres angles formés par ces droites sont droits aussi. Car si AOC, par exemple, est droit, BOC, qui en est le supplément (36), est droit aussi ; et les angles BOD et AOD sont respectivement égaux aux deux premiers, comme leur étant opposés par le sommet (40).

42. — Nous indiquerons plus loin un moyen rigoureux de tracer des droites perpendiculaires entre elles. Dans la pratique, on emploie à cet usage l'instrument qui porte le nom d'*équerre*. Il se compose de deux règles dont les bords se rencontrent à angle droit (fig. 22). Lorsqu'on veut, à l'aide de cet instrument, mener une perpendiculaire à une droite par un point donné hors de cette droite, ou sur la droite même, on fait affleurer contre la droite le bord d'une bonne règle, on appuie contre ce bord l'un des côtés de l'équerre, et on la fait glisser contre la règle jusqu'à ce que son autre côté vienne passer par le point donné ; on se sert alors de ce côté comme règle pour tracer la perpendiculaire demandée.

A défaut d'équerre on pourra, surtout pour un dessin de petites dimensions, employer une feuille de papier pliée soigneusement en quatre.

On peut aussi tracer les perpendiculaires à l'aide du rapporteur, puisque cet instrument permet de faire des angles de 90°.

43. — Sur le terrain, on pourrait aussi déterminer les perpendiculaires à l'aide du graphomètre, mais on se sert plus communément de l'*équerre d'arpenteur* (fig. 23). La partie essentielle de cet instrument consiste en quatre pinnules placées aux extrémités de deux droites qui se coupent à angles droits; ces pinnules sont le plus souvent pratiquées dans une sorte de boîte ronde ou octogone. Cette boîte se visse sur une tige, terminée par un piquet de fer, au moyen duquel on plante l'instrument sur le terrain.

Si l'on veut, à l'aide de cet instrument, en un point O d'une droite AB (fig. 21), lui *élever* une perpendiculaire, on plante l'équerre au point O, et on la fait tourner de manière que la direction de deux pinnules opposées soit celle de la ligne AB; la direction des deux autres pinnules est alors celle de la perpendiculaire demandée, et il n'y a plus qu'à faire planter un jalon dans cette direction.

Si l'on veut, au contraire, *abaisser* d'un point donné C une perpendiculaire sur une droite AB, on fait d'abord planter un jalon au point C, si toutefois il n'y a rien en ce point qui puisse servir de mire. On place l'équerre sur la direction AB, de manière que deux pinnules opposées soient dans cette direction; puis on transporte l'instrument le long de AB, dans cette position, jusqu'à ce qu'en regardant par les deux autres pinnules on aperçoive le jalon C coupé longitudinalement par les fils réunis de ces pinnules. Le point O, où se trouve alors l'équerre, appartient à la perpendiculaire demandée, qui se trouve dès lors déterminée par deux points, C et O.

44. — Théorème. *Par un même point on ne peut mener à une même droite qu'une seule perpendiculaire.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un point O (fig. 17) pris sur une droite AB. Du point O comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons une demi-circonférence. Si OD est une droite perpendiculaire à AB, les angles AOD et BOD seront égaux; par suite les arcs AD et BD le seront, et le point D sera le milieu de la demi-circonférence ADB. Or, il n'y a qu'un point D qui puisse être le milieu de cette demi-circonférence, et du point D au point O on ne peut mener qu'une seule droite.

Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'un point O (fig. 24) pris hors d'une droite AB; et soient, s'il est possible, OC et OD deux perpendiculaires à cette droite. Faisons tourner la figure COD autour de AB jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre en CO'D. L'angle O'CD sera égal à OCD, et par conséquent droit, puisque OC est supposé perpendiculaire sur AB. Ces deux angles étant dès lors supplémentaires, leurs côtés extérieurs O'C et OC sont en ligne droite (37). Et comme on en pourrait dire autant de O'D et de OD, on pourrait du point O au point O' mener deux lignes droites, ce qui est impossible. Donc on ne peut mener par le point O qu'une seule perpendiculaire à AB.

45. — Toute droite telle que OD est dite *oblique*, par rapport à la perpendiculaire OC.

Théorème. *Si par un point* O (fig. 24), *extérieur à une droite* AB, *on lui mène une perpendiculaire* OC *et une oblique* OD, *la perpendiculaire sera plus courte que l'oblique.*

Car si l'on répète le mouvement indiqué dans la démonstration précédente, on verra comme ci-dessus que $O'C = OC$, que $O'D = OD$, et que OCO' est une ligne droite. Or, cette droite OO' est plus courte que la ligne brisée $OD + DO'$; donc OC, qui est la moitié de OO', est plus court que OD, qui est la moitié de $OD + DO'$.

Corollaire I. Réciproquement, *Si une droite* OC *est* *la plus courte de celles que l'on peut mener d'un point* O *à une droite* AB, *elle est perpendiculaire à* AB.

Car, dans le cas contraire, on pourrait toujours mener par le point O une perpendiculaire à AB, et, en vertu du théorème précédent, cette perpendiculaire serait plus courte que OC; ce qui est contraire à la supposition.

COROLLAIRE II. *La plus courte distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.*

Remarque. Le point C se nomme le *pied* de la perpendiculaire OC; le point D est pareillement le *pied* de l'oblique OD.

46. — THÉORÈME. *Si par un point* O (fig. 25) *extérieur à une droite* AD, *on mène deux obliques* OB, OD, *telles que le pied de la perpendiculaire* CO *soit également distant du pied de chaque oblique, ces obliques sont égales.*

Car si l'on fait tourner la figure OCD autour de OC, les angles OCD et OCB étant droits, la droite CD viendra s'appliquer sur CB; et comme $CD = CB$ par hypothèse, le point D tombera en B. Les droites OD et OB ayant alors les mêmes extrémités coïncideront; donc elles sont égales.

47. — THÉORÈME. *Si par un point* O (fig. 25) *extérieur à une droite* AD, *on mène deux obliques quelconques, celle dont le pied s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est la plus longue.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse des obliques OA et OB situées d'un même côté de la perpendiculaire OC. Faisons tourner la figure autour de AD jusqu'à ce que le point O vienne se rabattre en O'; on aura $O'B = OB$ et $O'A = OA$. Or, la ligne brisée enveloppante $OA + AO'$ est plus longue que la ligne brisée enveloppée $OB + BO'$ (19); donc OA, moitié de $OA + AO'$, est plus grand que OB, moitié de $OB + BO'$.

Supposons en second lieu qu'il s'agisse des obliques OA et OD situées de part et d'autre de la perpendiculaire; et admettons que CA soit plus grand que CD. Prenons $CB = CD$ et joignons OB, qui sera égal à OD, en vertu de la proposition précédente. Mais, en vertu de la première partie de la proposition actuelle, OA sera plus grand que OB; donc OA est aussi plus grand que OD.

48. — Du rapprochement des deux propositions précédentes résultent ces deux réciproques :

I. *Si par un point extérieur à une droite, on lui mène deux obliques égales, le pied de la perpendiculaire sera également distant du pied de chaque oblique.*

II. *Si par un point extérieur à une droite, on lui mène deux obliques inégales, le pied de la plus longue sera plus éloigné du pied de la perpendiculaire, que ne le sera le pied de la plus courte.*

49. — THÉORÈME. *Chaque point de la perpendiculaire* CD (fig. 26) *élevée sur le milieu d'une droite* AB, *est également distant des extrémités de cette droite.*

Car, soit O un de ces points; joignons OA et OB; ces droites seront deux obliques égales (46), puisque $CA = CB$. Donc le point O est à égale distance des extrémités de AB.

50. — THÉORÈME. *Tout point* K (fig. 26), *pris hors de la perpendiculaire* CO *élevée sur le milieu d'une droite* AB, *est inégalement distant des extrémités de cette droite.*

Car si l'on joint KA et KB, l'une de ces droites coupera la perpendiculaire, en un point O. Joignons OB. Nous aurons $KB < KO + OB$. Mais OB est égal à OA en vertu du théorème qui précède; on peut donc écrire $KB < KO + OA$ ou $KB < KA$.

51. — Du rapprochement des deux propositions qui précèdent résultent ces deux réciproques :

I. *Tout point également distant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.*

II. *Tout point inégalement distant des extrémités d'une droite est situé hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.*

Les propositions directes (49, 50) et leurs réciproques (51) se résument ordinairement en disant que : *la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points du plan qui sont également éloignés des deux extrémités de cette droite.*

52. — THÉORÈME. *Si une droite* CD (fig. 21) *a deux de ses points,* C *et* D, *également distants des extrémités d'une autre droite* AB, *la première droite est perpendiculaire sur le milieu de la seconde.*

En effet : chacun des points C et D étant également distant des extrémités de AB, appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite (51); or, deux points suffisent pour déterminer une droite; cette perpendiculaire n'est donc autre chose que la droite CD elle-même.

§ II. — Propriétés du cercle qui dépendent des perpendiculaires.

53. — THÉORÈME. *Le milieu d'un arc, le milieu de sa corde et le centre du cercle sont toujours sur une même perpendiculaire à cette corde.*

Soit C (fig. 27) le milieu d'un arc AB. Puisque les arcs CA et CB sont égaux, leurs cordes sont égales ; le point C est donc à égale distance des points A et B. De même, le point O étant le centre du cercle, est également distant des deux points A et B. Si l'on mène OC, cette droite aura donc deux de ses points à égale distance des extrémités de la corde AB, et sera par conséquent perpendiculaire sur le milieu I de cette corde (52).

COROLLAIRE. Par un même point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une même droite (44); il en résulte :

1° Que, *si du centre* O *d'une circonférence on abaisse une perpendiculaire sur une corde* AB, *elle divisera cette corde et l'arc sous-tendu chacun en deux parties égales;*

2° Que, *si l'on élève une perpendiculaire sur le milieu* I *d'une corde* AB, *cette perpendiculaire passera par le centre, et par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde.*

54. — PROBLÈME. *Par trois points* A, B, C (fig. 28), *non en ligne droite, faire passer une circonférence du cercle.*

Joignez AB et BC; ces droites seront des cordes de la circonférence demandée. Sur les milieux de ces cordes élevez les perpendiculaires mm' et nn' ; ces perpendiculaires devant toutes deux passer par le centre (53, coroll. 2°), se couperont au centre même. Du point de rencontre O, avec un rayon égal à OA, décrivez une circonférence, elle passera par les trois points A, B, C.

On peut s'en rendre compte *à posteriori* en observant que le point O, appartenant à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, est également distant des points A et B; et qu'appartenant à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC, il est également distant des points B et C; d'où il suit qu'il est également distant des trois points A, B, C.

COROLLAIRE. Pour trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné, prenez à volonté trois points sur ce cercle ou sur cet arc, et cherchez le centre de la circonférence qui passe par ces trois points.

Remarque. Si les trois points donnés étaient en ligne droite, les perpendiculaires mm' et nn' ne pourraient se rencontrer; car si elles se rencontraient, on pourrait, du point de rencontre, abaisser deux perpendiculaires sur une même droite, ce qui est impossible (44).

Ainsi donc : *on ne peut pas faire passer une circonférence par trois points situés en ligne droite.*

En d'autres termes : *une droite ne peut avoir plus de deux points communs avec une circonférence.*

55. — THÉORÈME. *Une droite* AB (fig. 29) *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *ne peut avoir qu'un point commun avec la circonférence.*

Car, soit OD une droite quelconque menée du centre O à un point D de la droite AB; cette droite OD sera une oblique, plus longue que la perpendiculaire OC. Le point D est donc plus éloigné du centre que le point C, et est par conséquent situé hors du cercle. Et comme on en pourrait dire autant de tout autre point de AB, il s'ensuit que cette droite ne peut avoir avec la circonférence d'autre point commun que le point C.

Remarques. I. Une droite qui *touche* ainsi une circonférence, c'est-à-dire qui n'a et ne peut avoir avec elle qu'un point commun, est dite *tangente* à cette circonférence; et le théorème précédent peut s'énoncer ainsi : *toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.*

La circonférence, à son tour, est dite *tangente* à la droite. Leur point commun se nomme point de *tangence* ou de *contact.*

II. Une droite qui rencontre une circonférence en deux points, ou en d'autres termes une corde prolongée, est dite *sécante* par rapport à cette circonférence, qui, à son tour, est dite *sécante* par rapport à la droite. On dit aussi que la droite *coupe* la circonférence, et *vice versâ.*

56. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Toute tangente* AB (fig. 29) *à une circonférence* O, *est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *qui aboutit au point de contact.*

Car, tout point D de cette droite, différent du point C, étant situé hors du cercle, le rayon OC mesure la plus courte distance du centre à la droite, et est par conséquent perpendiculaire sur cette droite (45, coroll. II).

COROLLAIRE. Les deux propositions précédentes démontrent que, *par un point pris sur une circonférence on ne peut lui mener qu'une seule tangente;* c'est la perpendiculaire élevée à l'extrémité du rayon qui aboutit au point donné.

57. — PROBLÈME. *Par un point* A (fig. 30) *pris hors d'une circonférence* O, *mener une tangente à cette circonférence.*

Par le point A et par le centre O menons la droite AC. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, décrivons un arc indéfini OE. Portons sur cet arc, à partir du point O, une ouverture de compas OD égale au diamètre BC de la circonférence donnée (ce qui sera toujours possible, car OB étant moindre que OA, BC qui est le double de OB est moindre que le double de OA, ou moindre que le diamètre du cercle OA (23)). Joignons DO, qui coupera la circonférence donnée en un point I. Enfin, tirons AI, qui sera la tangente demandée.

En effet : DO étant égal à BC, le rayon OI est la moitié de DO; la droite AI, menée du centre A de la seconde circonférence au milieu I de la corde DO, est donc perpendiculaire sur cette corde (53); par conséquent perpendiculaire à l'extrémité du rayon OI de la circonférence donnée, et enfin tangente à cette circonférence.

Remarque. On aurait pu faire au-dessous de AC une construction pareille, en sorte que le problème admet deux solutions.

§ III. — Des circonférences sécantes et tangentes.

58. — Deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs sans coïncider; car lorsqu'elles ont trois points communs, la construction du n° 54 montre qu'elles ont même centre et même rayon. Deux circonférences qui n'ont que deux points communs sont dites *sécantes;* si elles n'ont qu'un point commun, elles sont *tangentes* l'une à l'autre, et le point commun est le point de *tangence* ou de *contact*.

59. — THÉORÈME. *Si deux circonférences* O *et* C (fig. 31) *ont un point commun* A *hors de la ligne* OC *qui joint leurs centres, elles en ont nécessairement un second.*

En effet : faisons tourner la figure OAC autour de OC, jusqu'à ce que le point A vienne se rabattre en A' ; on aura évidemment $A'O = AO$, ainsi le point A' appartiendra à la circonférence O; on aura de même $A'C = AC$, ainsi le point A' appartiendra aussi à la circonférence C. Le point A' sera donc un second point commun aux deux circonférences.

REMARQUE. *Lorsque deux circonférences* O *et* C *se coupent, la ligne des centres* OC *est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune* AA'.

Car la droite OC a deux de ses points, O et C, à égales distances des extrémités de AA' (52).

COROLLAIRE. *Lorsque deux circonférences se touchent, le point de contact est sur la ligne des centres.*

Car si le point commun était situé hors de la ligne des centres, il y aurait un second point commun; les circonférences seraient donc sécantes et non tangentes.

60 — De ce qui précède résultent des caractères simples pour apprécier la position relative de deux circonférences.

I. *Si deux circonférences sont* EXTÉRIEURES *l'une à l'autre* (fig. 32), *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

On a en effet : $OC = OA + AB + BC$, et par conséquent : $OC > OA + BC$.

II. *Si deux circonférences sont* TANGENTES EXTÉRIEUREMENT (fig. 33), *la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

Car le point de contact A étant situé sur la ligne des centres (59, coroll.), on a : $OC = OA + AC$.

III. *Si deux circonférences sont* SÉCANTES (fig. 31), *la distance des centres est moindre que la somme des rayons, mais plus grande que leur différence.*

Car on a 1° :	$OC < OA + AC$ (4).
On a aussi 2° :	$OA < OC + AC$;
d'où l'on tire	$OA - AC < OC$.

IV. *Si deux circonférences sont* TANGENTES INTÉRIEUREMENT (fig. 34), *la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

Car le point de contact A étant situé sur la ligne des centres, on a $OC = OA - AC$.

V. *Si l'une des deux circonférences est* INTÉRIEURE *à l'autre* (fig. 35), *la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

On a en effet : $OC = OA - AB - BC$,
et par conséquent : $OC < OA - BC$.

§ IV. — Problèmes relatifs aux perpendiculaires.

61. — PROBLÈME I. *Par un point* O (fig. 36) *donné sur une droite* AB, *lui élever une perpendiculaire.*

Prenons sur AB, de part et d'autre du point O, deux longueurs égales OB et OB′ ; des points B et B′ comme centres, avec un même rayon plus grand que OB, décrivons deux arcs de cercle qui se couperont en un point C (60); joignons CO, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car si l'on joignait CB et CB′, ces distances seraient égales; le point C appartient donc à la perpendiculaire élevée sur le milieu O de la droite BB′ (51); donc CO est cette perpendiculaire.

62. — PROBLÈME II. *D'un point* O (fig. 37) *donné hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Du point A comme centre, avec AO pour rayon, décrivons une circonférence. Du point B comme centre, avec BO pour rayon, décrivons une seconde circonférence. Ces deux circonférences, qui ont un point commun O, hors de la ligne des centres, se couperont en un second point O′ (59). Joignons OO′, qui sera la perpendiculaire demandée. Car la droite AB a deux de ses points, A et B, à égales distances des extrémités de OO′ (52).

63. — PROBLÈME III. *Diviser une droite donnée* AB (fig. 38) *en deux parties égales.*

Des points A et B comme centres, avec un même rayon, plus grand (à vue d'œil) que la moitié de AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point C (60). Des mêmes centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB, décrivez deux autres arcs qui se couperont en un point C′. Joignez CC′, qui coupera AB en un point I, milieu de AB.

Car chacun des deux points C ou C′ étant également distant des extrémités de AB, appartient à la perpendiculaire qu'on élèverait sur le milieu de cette droite (51). Donc CC′ est cette perpendiculaire; et le point I où elle coupe AB est le milieu de cette droite.

COROLLAIRE. La même construction sert à *élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée*, sans qu'il soit nécessaire de déterminer préalablement ce milieu.

64. — PROBLÈME IV. *Diviser un arc donné* AMB (fig. 39) *en deux parties égales.*

Tirez la corde AB, et sur le milieu de cette corde élevez la perpendiculaire CC′ (63, coroll.); cette perpendiculaire passera par le milieu M de l'arc donné (53, coroll. 2°).

Remarque. On peut, dans l'exécution, se dispenser de tirer la corde AB.

65. — PROBLÈME V. *Diviser un angle donné* MON (fig. 40) *en deux parties égales.*

Du sommet O comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez l'arc AB; des points A et B comme centres, avec un même rayon, plus grand (à vue d'œil) que la corde de l'arc AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point C. Joignez OC, qui divisera l'angle MON en deux parties égales MOC, CON.

En effet : par construction les points O et C sont chacun à égale distance des points A et B; la droite OC serait donc perpendiculaire sur le milieu de la corde AB (52). Donc elle passe par le milieu I de l'arc AB. Les arcs AI et IB étant égaux, il en est de même des angles au centre AOI et IOB (32).

Remarque. La droite OC qui divise un angle en deux parties égales, se nomme la *bissectrice* de cet angle.

CHAPITRE IV.

§ I. — Des parallèles.

66. — THÉORÈME. *Deux droites* AC, BD (fig. 41), *perpendiculaires à une troisième* XY, *ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, si elles pouvaient se rencontrer en un certain point, il y aurait de ce point deux perpendiculaires abaissées sur une même droite; ce qui est impossible (44).

Remarque. Deux droites qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sont ce que l'on appelle des droites *parallèles.*

Le théorème précédent peut donc s'énoncer comme il suit: *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.*

67. — POSTULATUM. *Si sur une même droite* XY (fig. 41) *on élève une perpendiculaire* BD *et une oblique* AE, *l'oblique et la perpendiculaire suffisamment prolongées se rencontreront.*

Cette proposition, qui, sans avoir l'évidence d'un axiome, peut être admise sans démonstration, est connue sous le nom de *Postulatum d'Euclide*, et sert de base à la théorie des parallèles.

68. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME 66. *Si deux droites* AC, BD (fig. 41) *sont parallèles, toute droite* XY, *perpendiculaire à l'une d'elles*, BD, *est perpendiculaire à l'autre* AC.

Car, si XY n'était pas perpendiculaire à AC, cette droite AC serait une oblique, qui, en vertu du postulatum, rencontrerait la perpendiculaire BD, et ne lui serait par conséquent point parallèle; ce qui est contraire à la supposition.

69. — PROBLÈME. *Par un point* A (fig. 41) *donné hors d'une droite* BD, *mener une parallèle à cette droite.*

Du point A abaissez sur BD la perpendiculaire AB; au point A élevez AC perpendiculaire à AB; la droite AC sera parallèle à BD (66).

Remarque. Au point A on ne peut élever sur AB qu'une seule perpendiculaire AC; toute autre droite, telle que AE, serait une oblique qui rencontrerait BD; ainsi donc: *par un point donné hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle.*

70. — THÉORÈME. *Deux parallèles sont partout également distantes.*

En d'autres termes: si des points C et D (fig. 42), pris où l'on voudra sur l'une des deux droites parallèles AB, CD, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre, ces perpendiculaires CA, DB seront égales.

Pour le démontrer, élevons par le milieu I de AB la perpendiculaire IH. La droite IH étant perpendiculaire à AB, le sera aussi à sa parallèle CD (68). Cela posé, faisons tourner la figure IBDH autour de IH, pour la rabattre sur IACH. Les angles en I étant droits, la droite IB prendra la direction de IA; et comme IB est égal à IA, le point B tombera au point A. Les angles en B et en A étant droits, la ligne BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC. Les angles en H étant droits, la ligne HD prendra la direction de HC, et le point D tombera quelque part sur HC. Mais déjà le point D doit tomber sur AC; il tombera donc à l'intersection des droites AC et HC,