Remarque. La droite OC qui divise un angle en deux parties égales, se nomme la *bissectrice* de cet angle.

CHAPITRE IV.

§ I. — Des parallèles.

66. — THÉORÈME. *Deux droites* AC, BD (fig. 41), *perpendiculaires à une troisième* XY, *ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, si elles pouvaient se rencontrer en un certain point, il y aurait de ce point deux perpendiculaires abaissées sur une même droite; ce qui est impossible (44).

Remarque. Deux droites qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sont ce que l'on appelle des droites *parallèles*.

Le théorème précédent peut donc s'énoncer comme il suit: *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.*

67. — POSTULATUM. *Si sur une même droite* XY (fig. 41) *on élève une perpendiculaire* BD *et une oblique* AE, *l'oblique et la perpendiculaire suffisamment prolongées se rencontreront.*

Cette proposition, qui, sans avoir l'évidence d'un axiome, peut être admise sans démonstration, est connue sous le nom de *Postulatum d'Euclide*, et sert de base à la théorie des parallèles.

68. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME 66. *Si deux droites* AC, BD (fig. 41) *sont parallèles, toute droite* XY, *perpendiculaire à l'une d'elles*, BD, *est perpendiculaire à l'autre* AC.

Car, si XY n'était pas perpendiculaire à AC, cette droite AC serait une oblique, qui, en vertu du postulatum, rencontrerait la perpendiculaire BD, et ne lui serait par conséquent point parallèle; ce qui est contraire à la supposition.

69. — PROBLÈME. *Par un point* A (fig. 41) *donné hors d'une droite* BD, *mener une parallèle à cette droite.*

Du point A abaissez sur BD la perpendiculaire AB; au point A élevez AC perpendiculaire à AB; la droite AC sera parallèle à BD (66).

Remarque. Au point A on ne peut élever sur AB qu'une seule perpendiculaire AC; toute autre droite, telle que AE, serait une oblique qui rencontrerait BD; ainsi donc: *par un point donné hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle.*

70. — THÉORÈME. *Deux parallèles sont partout également distantes.*

En d'autres termes: si des points C et D (fig. 42), pris où l'on voudra sur l'une des deux droites parallèles AB, CD, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre, ces perpendiculaires CA, DB seront égales.

Pour le démontrer, élevons par le milieu I de AB la perpendiculaire IH. La droite IH étant perpendiculaire à AB, le sera aussi à sa parallèle CD (68). Cela posé, faisons tourner la figure IBDH autour de IH, pour la rabattre sur IACH. Les angles en I étant droits, la droite IB prendra la direction de IA; et comme IB est égal à IA, le point B tombera au point A. Les angles en B et en A étant droits, la ligne BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC. Les angles en H étant droits, la ligne HD prendra la direction de HC, et le point D tombera quelque part sur HC. Mais déjà le point D doit tomber sur AC; il tombera donc à l'intersection des droites AC et HC, c'est-à-dire au point C. Les droites BD et AC ayant dès lors les mêmes extrémités, coïncideront : donc elles sont égales.

71. — Réciproquement : *Si, sur une droite* AB (fig. 42) *on élève deux perpendiculaires égales* AC *et* BD, *la droite* CD *qui joindra leurs extrémités sera parallèle à* AB.

Sur le milieu I de AB, élevons la perpendiculaire IH, et rabattons encore la figure IBDH sur IACH. Les angles en I étant droits, IB s'appliquera sur IA; et comme ces lignes sont égales, le point B tombera en A. Les angles en B et en A étant droits, la droite BD s'appliquera sur AC; et comme ces droites sont égales par hypothèse, le point D tombera en C. Les droites DH et CH ayant alors les mêmes extrémités, coïncideront; donc les angles IHD et IHC sont égaux. Mais ces angles sont adjacents; donc ils sont droits. Les droites AB et CD étant donc toutes deux perpendiculaires à IH, sont parallèles entre elles.

Corollaire. Pour mener une parallèle à la droite AB, par un point C pris hors de cette droite, abaissez du point C la droite CA perpendiculaire sur AB; en un point quelconque B de cette dernière, élevez-lui une perpendiculaire BD égale à AC; et joignez CD, qui sera la parallèle demandée.

72. — Théorème. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Car, si l'on mène une droite perpendiculaire à la troisième, elle sera en même temps perpendiculaire aux deux premières (68); et celles-ci, étant alors perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles (66).

73. — Théorème. *Deux droites* AB, CD (fig. 43) *sont parallèles, lorsque étant coupées par une troisième* EH, *elles forment avec cette troisième des angles intérieurs* AFG, CGF *supplémentaires.*

En effet : les angles BFG et CGF, étant tous deux le supplément de AFG (36), sont égaux entre eux. De même, les angles FGD et AFG, étant tous deux le supplément de CGF (36), sont égaux entre eux. Il en résulte que les branches FB et GD sont placées par rapport à EH, d'un côté de cette droite, de la même manière que les branches GC et FA sont placées de l'autre. Si par conséquent deux de ces branches se rencontraient, les deux autres se rencontreraient aussi; et les deux droites distinctes AB et CD auraient deux points communs; ce qui est impossible (12). Donc ces droites ne se rencontrent pas, et sont conséquemment parallèles.

74. — Réciproquement : *Si deux parallèles* AB *et* CD (fig. 43) *sont coupées par une sécante* EH, *les angles intérieurs* AFG, CGF *sont supplémentaires.*

Car, si cela n'était pas, on pourrait toujours, au point F, faire avec FG un angle égal au supplément de CGF, et la droite ainsi menée serait parallèle à CD en vertu du théorème précédent. On pourrait donc par un même point F mener deux parallèles à une même droite CD; ce qui est impossible (69, rem.).

75. — *Remarques.* I. Les quatre angles qui ont leur sommet en F (fig. 43) et les quatre angles qui ont leur sommet en G, forment deux groupes qui se correspondent. On nomme *angles correspondants*, ceux qui, dans ces deux groupes, occupent une position analogue : ce sont ceux qui, étant situés d'un même côté de la sécante EH, tournent leur ouverture dans le même sens. Ainsi AFE et CGF sont correspondants; il en est de même de AFG et CGH; etc.

On appelle *angles alternes-internes* ceux qui sont situés intérieurement aux parallèles, de part et d'autre de la sécante : tels sont les angles AFG et FGD, ou encore DFG et CGF.

II. Les angles intérieurs AFG et CGF étant supplémentaires, les angles correspondants sont égaux. Car AFE et CGF, par exemple, sont alors tous deux le supplément de AFG.

Réciproquement : Si deux angles correspondants sont égaux, AFE et CGF par exemple, les angles intérieurs AFG et CGF sont supplémentaires. Car AFG étant le supplément de son adjacent AFE, est aussi le supplément de CGF égal à AFE.

III. Les angles intérieurs AFG et CGF étant supplémentaires, les angles alternes-internes, tels que AFG et FGD, sont égaux. Car ils sont tous deux le supplément de CGF.

Réciproquement : Si deux angles alternes-internes sont égaux, AFG et FGD par exemple, les angles intérieurs AFG et CGF sont supplémentaires. Car CGF étant le supplément de son adjacent FGD, est aussi le supplément de AFG égal à FGD.

IV. Les remarques précédentes et les deux théorèmes qui précèdent peuvent se résumer par ces deux propositions :

1° *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles intérieurs sont supplémentaires, et les angles correspondants sont égaux, ainsi que les angles alternes-internes.*

2° *Si les angles intérieurs sont supplémentaires, ou si les angles correspondants sont égaux, ou si les angles alternes-internes le sont, les droites coupées par la sécante sont parallèles.*

76. — Théorème. *Deux angles* ABC, DEF (fig. 44) *qui*

ont leurs côtés respectivement parallèles, et l'ouverture dirigée dans le même sens, sont égaux.

Car, si l'on prolonge DE jusqu'à sa rencontre avec BC en G, les angles ABC et EGC seront égaux comme correspondants, par rapport aux parallèles AB, DG, et à la sécante BC. Les angles EGC et DEF seront égaux comme correspondants, par rapport aux parallèles BC, EF, et à la sécante DG. Les angles ABC, DEF, tous deux égaux à EGC, sont donc égaux entre eux.

Remarque. Si les angles proposés tournaient leur ouverture en sens contraire, comme ABC′ et DEF, ils seraient supplémentaires.

77. — Théorème. *Deux angles* ABC, DEF (fig. 45) *qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont égaux* (ou supplémentaires).

Par le sommet B, menons BH parallèle à ED et BG parallèle à EF; les deux angles HBG et DEF ayant leurs côtés respectivement parallèles, seront égaux (ou supplémentaires). Or, AB étant perpendiculaire à DE, l'est à sa parallèle BH; de même, BC étant perpendiculaire à EF, l'est à sa parallèle BG. Si des deux angles ABH et CBG, égaux comme droits, on retranche la partie commune ABG, les restes HBG et ABC seront égaux. Donc ABC et DEF sont égaux (ou supplémentaires).

§ II. — Propriétés du cercle relatives aux parallèles.

78. — Théorème. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 46) *interceptent sur une circonférence des arcs égaux* AC, BD.

En effet : du centre O de cette circonférence, abaissons sur les deux parallèles une perpendiculaire commune OI; le point I où elle rencontrera la circonférence sera le milieu de l'arc AB (53, coroll. 1°); il sera aussi le milieu de l'arc CD. On aura donc :

$$AI = IB \quad \text{et} \quad IC = ID;$$

d'où résulte, en retranchant ces égalités membre à membre,

$$IC - IA = ID - IB$$

ou

$$AC = BD.$$

Remarques. I. Le théorème subsisterait, si l'une des deux parallèles était une tangente A'B'. Car, si l'on joint le centre au point de contact I, la ligne de jonction OI sera perpendiculaire à la tangente A'B' (56), et par conséquent à sa parallèle CD; le point I sera donc le milieu de l'arc CID, et l'on aura $IC = ID$.

II. Le théorème subsisterait encore, si les deux parallèles étaient toutes deux tangentes, A'B' et C'D' par exemple; car si, entre ces deux droites, on leur mène une parallèle CD, on aura, en vertu de la remarque précédente, H étant le point de contact de C'D',

$$IC = ID \quad \text{et} \quad HC = HD;$$

d'où résulte, en ajoutant ces égalités membre à membre,

$$IC + HC = ID + HD \quad \text{ou} \quad ICH = IDH.$$

On voit que, dans ce cas, chacun des deux arcs interceptés, ICH et IDH, est une demi-circonférence, et que, par conséquent, les points I et H sont les extrémités d'un même diamètre.

79. — Lorsqu'un angle, tel que ABC (fig. 47, 48 ou 49), a son sommet B sur la circonférence, et pour côtés deux cordes AB, BC, cet angle prend le nom d'*angle inscrit*.

Théorème. *Tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

1° Le centre O (fig. 47) peut être situé sur l'un des côtés BC de l'angle.

Menons le diamètre DE parallèle à AB; l'angle DOC sera égal à l'angle ABC, puisqu'ils sont correspondants (75); or, l'angle au centre DOC a pour mesure l'arc DC; l'angle ABC a donc aussi la même mesure. Mais les angles DOC et BOE étant égaux comme opposés par le sommet, l'arc DC égale l'arc BE; les droites AB et DE étant parallèles, les arcs interceptés AD et BE sont égaux. Il résulte de là, que les arcs DC et AD, tous deux égaux à BE, sont égaux entre eux, et que par conséquent DC est la moitié de AC. Donc ABC a pour mesure la moitié de AC.

2° Le centre O (fig. 48) peut être situé dans l'intérieur de l'angle inscrit ABC.

Menons le diamètre BD. L'angle ABD aura pour mesure la moitié de AD, en vertu de ce qui vient d'être démontré; de même l'angle DBC aura pour mesure la moitié de DC. Donc la somme de ces deux angles, c'est-à-dire l'angle ABC, aura pour mesure la moitié de AD *plus* la moitié de DC, c'est-à-dire la moitié de AC.

3° Le centre O (fig. 49) peut être situé hors de l'angle inscrit ABC.

Menons le diamètre BD. L'angle ABD aura pour mesure la moitié de AD; l'angle CBD aura pour mesure la moitié de CD. Donc la différence de ces deux angles, c'est-à-dire l'angle ABC, aura pour mesure la moitié de AD *moins* la moitié de CD, c'est-à-dire la moitié de AD *moins* CD, ou la moitié de AC.

Donc, dans tous les cas, l'angle inscrit ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés.

80. — On appelle *segment* d'un cercle la partie de ce cercle comprise entre un arc et sa corde. Ainsi l'espace ABB′B″CA (fig. 50) est un segment; il en est de même de AMCA.

Tout angle qui a son sommet sur un arc de cercle, et dont les côtés aboutissent aux extrémités de la corde de cet arc, est dit *inscrit dans le segment* compris entre cet arc et cette corde. Ainsi l'angle ABC est inscrit dans le segment ABB′B″CA; et l'angle AMC est inscrit dans le segment AMCA.

81. — *Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux.* Les angles ABC, AB′C, AB″C, par exemple, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AMC compris entre leurs côtés; tous ces angles sont donc égaux.

On dit le segment ABB′B″CA *capable* de l'angle ABC; ce qui exprime que tous les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle ABC.

Deux angles, tels que ABC et AMC, inscrits dans les deux segments opposés, correspondants à une même corde AC, sont supplémentaires. Car ABC a pour mesure la moitié de l'arc AMC, et l'angle AMC a pour mesure la moitié de l'arc ABB′B″C; la somme de ces deux angles a donc pour mesure la moitié de la somme de ces arcs, c'est-à-dire la moitié de la circonférence entière, ou deux quadrans. La somme de ces deux angles équivaut donc à deux angles droits.

82. — *Tout angle* ABC (fig. 51) *inscrit dans un demi-cercle, est droit.*

En effet, il a pour mesure la moitié de AMC, ou la moitié d'une demi-circonférence, c'est-à-dire un quadrans.

83. — Cette propriété fournit un nouveau moyen de *mener, par un point extérieur* A (fig. 52), *une tangente à une circonférence* O.

Pour cela, joignons AO; et sur cette droite, comme diamètre, décrivons une circonférence, qui coupera la première aux points B et B′. Tirons AB; ce sera une tangente à la circonférence O. Car, si l'on joint BO, l'angle ABO, inscrit dans une demi-circonférence, sera droit; et la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB, sera une tangente.

On aurait une seconde tangente en joignant A au point B′.

84. — Théorème. *L'angle* ABC (fig. 53) *formé par une tangente* AB, *et par une corde* BC *aboutissant au point de tangence, a pour mesure la moitié de l'arc* BmC *sous-tendu par cette corde.*

En effet : par le point C, menons CD parallèle à AB; les angles ABC et BCD seront égaux comme alternes-internes. L'angle inscrit BCD a pour mesure la moitié de BD; or, les arcs BD et BC sont égaux comme interceptés par les parallèles AA′ et CD. Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

Remarque. L'angle A′BC a pour mesure la moitié de l'arc BDC sous-tendu par la corde BC. Car les deux angles adjacents ABC et A′BC étant supplémentaires, leur somme a pour mesure deux quadrans, ou la moitié de la circonférence; le premier ABC ayant pour mesure la moitié de BmC, le second a donc pour mesure la moitié du reste de la circonférence, ou la moitié de BDC.

On voit donc que le théorème subsiste pour un angle obtus comme pour un angle aigu.

§ III. — Applications.

85. — Nous avons différé jusqu'ici d'indiquer quelques-unes des applications des perpendiculaires, des parallèles et des propriétés du cercle qui s'y rapportent : elles sont empruntées au dessin linéaire.

On emploie dans les ornements de l'architecture des parties saillantes qui ont reçu en général le nom de *moulures*, et l'on étend ce nom aux figures planes qui en représentent le profil. Les moulures sont droites, circulaires ou composées, suivant qu'on y fait usage de la ligne droite, du cercle, ou de l'un et de l'autre à la fois.

Parmi les moulures droites, on distingue :

Le *filet* ou *listel* (fig. 54). Il est limité en dessus et en dessous par deux droites parallèles, toutes deux perpendiculaires à la droite sur laquelle le filet doit faire saillie. Cette saillie est égale à l'épaisseur du filet.

La *plate-bande* (fig. 55). C'est une moulure analogue au filet, mais dont l'épaisseur est un multiple de la saillie.

86. — On distingue un plus grand nombre de moulures circulaires :

La *baguette* (fig. 56). On y remarque ce qu'en terme d'art on appelle le *raccordement* d'une demi-circonférence avec deux droites parallèles ; c'est-à-dire que cette demi-circonférence se réunit tangentiellement avec chacune des deux droites.

La *gorge* (fig. 57). On observe ici le même raccordement ; mais la demi-circonférence a une position inverse.

Le *quart de rond* (fig. 58) ; le *quart de rond renversé* (fig. 59) ; le *cavet* (fig. 60) ; le *cavet renversé* (fig. 61). L'inspection de ces figures suffit pour en faire comprendre le tracé.

Le *talon droit* (fig. 62) ; le *talon renversé* (fig. 63) ; la *doucine* (fig. 64) ; la *doucine renversée* (fig. 65). Ces moulures offrent l'exemple de deux circonférences égales, tangentes extérieurement, mais dont un quadrans seulement est employé dans la figure.

La *scotie* (fig. 66) ; la *scotie renversée* (fig. 67). On trouve dans ces moulures deux circonférences inégales qui se *raccordent* intérieurement, c'est-à-dire qui sont tangentes intérieurement. L'un des rayons est le double de l'autre, et un quart seulement de chaque circonférence est employé dans chaque moulure.

87. — La figure 68 offre un exemple de moulure composée. On y distingue successivement : 1° un filet ; 2° un quart de rond ; 3° une baguette ; 4° un *orle*, sorte de filet sans saillie ; et 5° un congé.

88. — La figure 69 représente une *arcade*. Elle offre un nouvel exemple d'une demi-circonférence qui se raccorde avec deux droites parallèles.

La courbe indiquée par la figure 70 est celle que l'on nomme *anse de panier* ou courbe à trois centres. Pour la tracer, on porte sur une droite indéfinie trois longueurs égales AB, BC, CD ; des points B et C comme centres, avec BC pour rayon, on décrit deux arcs de cercle dont la rencontre détermine le point O ; on tire les droites OB et OC, que l'on prolonge au-dessus de AD. Cela fait, des points B et C comme centres, avec le même rayon BC, on décrit les arcs AM et DN. Il est facile de voir que chacune des longueurs OM et ON ainsi obtenues est le double de BC ; si donc, du point O comme centre, avec OM ou ON pour rayon, on décrit l'arc MN, il se raccordera en M et en N avec les deux premiers.

On voit que chacune des circonférences décrites des points B et C est tangente intérieurement à celle qui est décrite du point O.

En répétant le même tracé en dessous, on obtient la courbe connue dans les arts sous le nom d'*ovale* (fig. 71).

CHAPITRE V.

Des droites coupées par des parallèles, et des lignes proportionnelles en général.

§ I. — Des droites coupées par des parallèles.

89. — THÉORÈME. *Les portions* AC *et* BD (fig. 72) *de deux parallèles, comprises entre deux autres parallèles* AB *et* CD, *sont égales.*

Pour le démontrer, abaissons des points A et B, sur CD et sur son prolongement, les perpendiculaires AI et BH. Ces perpendiculaires seront égales, puisque deux parallèles sont partout également distantes (70); de plus, elles seront parallèles entre elles (66), et les angles CAI et DBH seront égaux, comme ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun (76). Cela posé, concevons que l'on transporte la figure DBH sur la figure CAI, de manière que BH coïncide avec son égale AI. Les angles CAI et DBH étant égaux, BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC; mais les angles AIC et BHD étant égaux comme droits, HD prendra la direction de IC, et le point D tombera quelque part sur IC. Le point D devant tomber à la fois sur AC et sur IC, tombera à leur point d'intersection C. Donc les droites BD et AC coïncideront; donc elles sont égales.

Remarque. On démontrerait de la même manière que AB et CD sont égaux.

90. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Si, sur deux parallèles, on prend les longueurs égales* AC, BD (fig. 73), *les droites* AB et CD, *qui joignent les extrémités de ces longueurs, sont parallèles.*

Car si AB n'était pas parallèle à CD, soit AI cette parallèle. En vertu de la proposition précédente, on aurait AC = ID; mais, par hypothèse, on a AC = BD; il faudrait donc qu'on eût ID = BD, ce qui est impossible. Donc AB est elle-même parallèle à CD.

91. — LEMME. *Lorsque deux droites* AG, BH (fig. 74) *sont coupées par des parallèles* AB, CD, EF, GH, etc., *si les parties* AC, CE, EG, etc., *de l'une sont égales, les parties* BD, DF, FH, etc., *de l'autre sont égales aussi.*

Pour démontrer, par exemple, que BD égale DF, menons BI et DK parallèles à AG. En vertu du théorème du n° 89, on aura BI = AC, et DK = CE; mais, par hypothèse, AC = CE : donc BI = DK. Cela posé, si l'on transporte la figure BID sur la figure DKF, de manière que BI coïncide avec son égal DK, les angles IBD et KDF étant égaux comme correspondants, BD prendra la direction de DF, et le point D tombera quelque part sur DF. Mais les angles BID et DKF étant égaux, comme ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun, ID prendra la direction de KF, et le point D tombera quelque part sur KF. Le point D devant tomber à la fois sur DF et sur KF, tombera à leur intersection F. Donc les droites BD et DF coïncideront; donc elles sont égales.

On démontrerait de la même manière que DF égale FH; et ainsi de suite.

92. — THÉORÈME. *Deux droites quelconques* AE, BF (fig. 73) *sont coupées proportionnellement par des parallèles* AB, CD, DF.

Évaluons AC et CE, à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact; et, pour fixer les idées, supposons que AC contienne 3 fois l'unité, et CE 5 fois. Après avoir divisé ces longueurs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division des parallèles à AB. Ces parallèles détermineront sur BF une suite de parties qui seront égales entre elles d'après le lemme précédent; BD contiendra 3 de ces parties, et DF en contiendra 5 : ces lignes seront donc entre elles comme 3 est à 5. Mais déjà les lignes AC et CE sont entre elles comme 3 est à 5 : on aura donc la proportion

$$AC : CE :: BD : DF,$$

qui revient à l'énoncé du théorème.

COROLLAIRE I. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 76) *coupent proportionnellement les côtés d'un angle* COD.

Car, si l'on prolonge les droites AB et CD, qu'on leur mène une parallèle par le point O, et que l'on coupe les trois parallèles par une droite O′B′D′ parallèle à OBD, on aura, en vertu du théorème précédent :

$$OA : AC :: O'B' : B'D' ;$$

mais $O'B' = OB$, comme parallèles comprises entre parallèles : de même $B'D' = BD$. On peut donc écrire :

$$OA : AC :: OB : BD.$$

COROLLAIRE II. De cette proportion, on tire

$$OA : OA + AC :: OB : OB + BD ;$$

ou

$$OA : OC :: OB : OD,$$

c'est-à-dire que, *lorsque deux parallèles* AB, CD *coupent les côtés d'un angle* COD, *les distances du sommet de l'angle, aux points d'intersection de ses côtés avec les parallèles, sont dans un même rapport.*

On fait un fréquent usage de cette proposition.

93. — RÉCIPROQUE DU COROLLAIRE I DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Si deux droites* AB, CD (fig. 77) *coupent proportionnellement les côtés d'un angle* COD, *ces droites sont parallèles.*

Car si AB n'était pas parallèle à CD, soit AI cette parallèle. En vertu de la proposition directe on aurait

$$OA : AC :: OI : ID.$$

Mais on a par hypothèse

$$OA : AC :: OB : BD.$$

A cause du rapport commun on pourrait donc écrire

$$OI : ID :: OB : BD ;$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$OI : OB :: ID : BD.$$

Or, OI est moindre que OB, tandis que ID est plus grand que BD ; cette dernière proportion est donc fausse. Donc une droite AI, différente de AB, ne saurait être menée par le point A parallèlement à CD ; donc AB est elle-même cette parallèle.

94. — THÉORÈME. *Les parties* AB *et* CD (fig. 78) *de deux parallèles comprises entre les côtés d'un angle* COD, *sont entre elles comme les distances* OB *et* OD *du sommet de cet angle aux points d'intersection de l'un quelconque de ses côtés avec les deux parallèles.*

Pour le démontrer, menons BI parallèle à OC. En vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) nous aurons

$$CI : ID :: OB : BD ;$$

d'où l'on tire :

$$CI : CI + ID :: OB : OB + BD$$

ou

$$CI : CD :: OB : OD.$$

Mais AB et CI sont égaux comme parallèles comprises entre parallèles ; on peut donc écrire :

$$AB : CD :: OB : OD.$$

Remarque. On aurait de même :

AB : CD :: OA : OC.

95. — THÉORÈME. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 79) *sont coupées proportionnellement par une série de sécantes* OC, OG, OH, OD, *issues d'un même point* O.

Soient, en effet, E, F, G, H, les points où les sécantes intermédiaires rencontrent les deux parallèles. En vertu du théorème qui précède, on aura :

AE : CG :: OE : OG
EF : GH :: OE : OG, ou :: OF : OH
FB : HD :: OF : OH.

Mais, les côtés de l'angle GOH étant coupés proportionnellement par les deux parallèles (92, coroll. I), les seconds rapports des proportions qui précèdent sont égaux. Il en est donc de même des premiers, et l'on peut écrire :

AE : CG :: EF : GH :: FB : HD

ou AE : EF : FB :: CG : GH : HD;

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — Propriétés du cercle qui se rapportent aux lignes proportionnelles.

96. — THÉORÈME. *Si par un point* O (fig. 80), *pris hors d'une circonférence, on lui mène une tangente* OA *et une sécante* OC, *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière* OC *et sa partie extérieure* OB.

Joignons, en effet, AB et AC. L'angle OAB, formé par une tangente OA et une corde AB aboutissant au point de tangence, a pour mesure la moitié de l'arc AB (84); l'angle inscrit BCA a la même mesure (79); donc ces deux angles sont égaux.

Cela posé, retournons la figure OAB sur elle-même, de manière que OA vienne prendre la position OA′, et OB la position OB′. L'angle OA′B′, qui est le même que OAB, étant égal à OCA, et ces angles ayant la position de correspondants, il en résulte que les droites A′B′ et CA sont parallèles (73, 75). On a donc, en vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) :

OB′ : OA :: OA′ : OC.

Remplaçant OB′ par son égal OB, et OA′ par son égal OA, il vient :

OB : OA :: OA : OC;

c'est-à-dire que OA est moyen proportionnel entre OC et OB.

97. — THÉORÈME. *Si, par un point* O (fig. 81), *extérieur à une circonférence, on lui mène deux sécantes* OC *et* OE, *ces sécantes sont, en raison inverse de leurs parties extérieures,* OB *et* OD.

Car si l'on mène la tangente OA, on aura, d'après le théorème précédent :

OB : OA :: OA : OC

et OD : OA :: OA : OE.

Dans ces deux proportions le produit des moyens étant le même, les produits des extrêmes sont égaux ; et l'on a :

$$OB \times OC = OD \times OE;$$

d'où l'on tire la proportion

OC : OE :: OD : OB,

qui revient à l'énoncé du théorème.

98. — THÉORÈME. *Si deux cordes* AB *et* CD (fig. 82) *se coupent dans un cercle, leurs parties sont inversement proportionnelles.*

Joignons, en effet, BC et AD; les angles inscrits B et D seront égaux comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc AC (79).

Cela posé, renversons la figure COB sur AOD, de manière que les angles en O, qui sont égaux comme opposés par le sommet, coïncident; OC prendra la position OC'; OB la position OB', et BC la position B'C'. L'angle OB'C', qui n'est autre que l'angle B, étant égal à l'angle D, et ces angles ayant la position de correspondants, les droites B'C' et DA sont parallèles (73, 75); on a donc, en vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) :

$$OA : OC' :: OD : OB'.$$

Remplaçant OC' par son égal OC, et OB' par son égal OB, il vient :

$$OA : OC :: OD : OB,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

99. — Corollaire. *La perpendiculaire* CI (fig. 83) *abaissée d'un point d'une circonférence sur un diamètre quelconque* AB, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* AI *et* IB *de ce diamètre.*

Prolongeons en effet la perpendiculaire CI jusqu'en D. Le diamètre AB étant perpendiculaire sur la corde CD, la divise en deux parties égales; ainsi $CI = ID$ (53, coroll. I). Mais AB et CD étant deux cordes qui se coupent dans le cercle, on a, en vertu du théorème précédent :

$$AI : IC :: ID : IB,$$

ou, en remplaçant ID par son égal IC,

$$AI : IC :: IC : IB,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

§ III. — Problèmes sur les lignes proportionnelles.

100. — Problème I. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* a, b, c (fig. 84).

On se propose, dans ce problème, de trouver une ligne telle qu'en la représentant par x, on ait la proportion

$$a : b :: c : x.$$

Pour y parvenir, tirons deux droites indéfinies OX et OY sous un angle quelconque. Sur OX, prenons $OA = a$, et $AB = b$. Sur OY, prenons $OC = c$. Joignons AC, et menons BD parallèle à AC. La ligne CD sera la quatrième proportionnelle demandée; car les parallèles AC et BD coupant proportionnellement les côtés de l'angle BOD, on a (92, coroll. I) :

$$OA : AB :: OC : CD,$$

ou

$$a : b :: c : CD.$$

La ligne CD est donc la ligne cherchée.

101. — Problème II. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données* a *et* b.

On se propose de trouver une ligne, telle qu'en la désignant par x, on ait la proportion

$$a : b :: b : x.$$

Ce problème ne diffère du précédent, qu'en ce que c est égal à b. On tracera donc deux droites OX et OY (fig. 84) sous un angle quelconque; on prendra $OA = a$, $AB = b$, $OC = b$; on joindra AC; on mènera BD parallèle à AC, et la ligne BD sera la troisième proportionnelle demandée, puisque, à cause des parallèles AC et BD, on aura la proportion

$$OA : AB :: OC : CD,$$

ou

$$a : b :: b : CD.$$

102. — PROBLÈME III. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* a *et* b (fig. 85).

On se propose, dans ce problème, de trouver une ligne telle qu'en la désignant par x on ait la proportion

$$a : x :: x : b.$$

Pour y parvenir, portons, sur une droite indéfinie, une longueur AB égale à a, et à la suite une longueur BC égale à b. Sur AC comme diamètre décrivons une demi-circonférence. Au point B élevons sur AC la perpendiculaire BD, terminée à la circonférence. Cette perpendiculaire BD sera la moyenne proportionnelle demandée; car, en vertu de la proposition du n° 99, on aura

$$AB : BD :: BD : BC$$

ou

$$a : BD :: BD : b.$$

103. — PROBLÈME IV. *Diviser une droite en parties égales.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de diviser une droite donnée AB (fig. 86) en 5 parties égales.

Par le point A menons une droite indéfinie AX faisant avec AB un angle quelconque. Sur cette droite indéfinie portons de A en C cinq longueurs arbitraires égales entre elles. Joignons CB, et par tous les points de division de AC menons des parallèles à CB; ces parallèles diviseront la droite AB en cinq parties égales (91).

104. — PROBLÈME V. *Diviser une droite en parties proportionnelles à des lignes données.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de diviser une droite donnée AB (fig. 87) en parties proportionnelles à trois lignes données a, b, c.

Pour cela, menons par le point A une droite indéfinie AX faisant avec AB un angle quelconque. Prenons, sur cette droite, $AC = a$, $CD = b$, $DE = c$. Joignons BE; et par les points C et D menons CF et DG parallèles à BE. La droite AB sera divisée aux points F et G en parties proportionnelles aux lignes données.

Car on aura, en vertu du premier corollaire de la proposition du n° 92,

$$AF : FG :: AC : CD \quad \text{ou} \quad AF : AC :: FG : CD;$$

et, en vertu de cette proposition même,

$$FG : GB :: CD : DE \quad \text{ou} \quad FG : CD :: GB : DE;$$

et, à cause du rapport commun,

$$AF : AC :: FG : CD :: GB : DE$$

ou

$$AF : FG : GB :: AC : CD : DE$$

ou enfin

$$AF : FG : GB :: a : b : c.$$

Remarque. On pourrait demander de diviser une droite AB en parties proportionnelles à des *nombres* donnés m, n, p par exemple. Pour y parvenir on choisirait une unité de longueur arbitraire; on porterait sur AX, de A en C un nombre m d'unités de longueur, de C en D un nombre n de ces unités, et de D en E un nombre p de ces mêmes unités. On diviserait, comme ci-dessus, la ligne AB en parties proportionnelles aux lignes AC, CD, DE; ces parties seraient en même temps proportionnelles aux nombres donnés m, n, p.

105. — PROBLÈME VI. *Diviser une droite donnée* AB (fig. 88) *en moyenne et en extrême raison.*

On entend par là, déterminer sur AB un point I, divisant cette droite en deux parties telles que la plus grande AI soit moyenne proportionnelle entre la plus petite partie IB et la ligne entière AB.

Pour y parvenir, élevons au point B une perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence. Par les points A et O faisons passer une droite, qui coupera la circonférence aux points C et D. Du point A comme centre, avec AC pour rayon, décrivons l'arc CI qui coupera AB en un point I. Ce point sera le point de division demandé.

En effet : remarquons d'abord que le rayon OB étant la moitié de AB, le diamètre CD est égal à AB. Remarquons en second lieu que la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB est tangente à la circonférence. Or, en vertu de la proposition du n° 96 on a

$$AD : AB :: AB : AC \qquad (1);$$

d'où l'on tire

$$AD - AB : AB :: AB - AC : AC \qquad (2).$$

Mais AD — AB est égal à AD — CD, c'est-à-dire à AC ou à son égal AI. D'un autre côté AB — AC est égal à AB — AI ou à IB. Enfin, le dernier terme AC peut être remplacé par AI. La proportion (2) peut donc s'écrire

$$AI : AB :: IB : AI$$

ou, en mettant les moyens à la place des extrêmes *et vice versâ*,

$$AB : AI :: AI : IB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

DEUXIÈME SECTION.

DES FIGURES PLANES.

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles.

§ I. — Propriétés principales des triangles.

106. — On donne le nom de *figure plane* à toute portion de plan terminée par des lignes.

On donne le nom de *triangle* à toute portion de plan terminée par trois lignes droites. Ainsi ABC (fig. 89) est un triangle. Les trois droites AB, AC, BC qui terminent ce triangle sont ses *côtés*; les sommets A, B, C de ses trois angles sont ce qu'on appelle les *sommets* du triangle.

107. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle équivaut à deux angles droits.*

Soit ABC (fig. 89) un triangle quelconque. Prolongeons le côté AC, et par le sommet C menons CE parallèle à AB.

Les angles ABC et BCE seront égaux comme alternes-internes; les angles BAC et ECD seront égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des trois angles BCA, BCE, ECD formés au point C d'un même côté de AD. Or, cette dernière somme équivaut à deux angles droits; donc la somme des trois angles du triangle équivaut à deux angles droits.

Corollaire I. Étant donnés deux angles d'un triangle, on