On entend par là, déterminer sur AB un point I, divisant cette droite en deux parties telles que la plus grande AI soit moyenne proportionnelle entre la plus petite partie IB et la ligne entière AB.

Pour y parvenir, élevons au point B une perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence. Par les points A et O faisons passer une droite, qui coupera la circonférence aux points C et D. Du point A comme centre, avec AC pour rayon, décrivons l'arc CI qui coupera AB en un point I. Ce point sera le point de division demandé.

En effet : remarquons d'abord que le rayon OB étant la moitié de AB, le diamètre CD est égal à AB. Remarquons en second lieu que la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB est tangente à la circonférence. Or, en vertu de la proposition du n° 96 on a

$$AD : AB :: AB : AC \qquad (1);$$

d'où l'on tire

$$AD - AB : AB :: AB - AC : AC \qquad (2).$$

Mais AD — AB est égal à AD — CD, c'est-à-dire à AC ou à son égal AI. D'un autre côté AB — AC est égal à AB — AI ou à IB. Enfin, le dernier terme AC peut être remplacé par AI. La proportion (2) peut donc s'écrire

$$AI : AB :: IB : AI$$

ou, en mettant les moyens à la place des extrêmes *et vice versâ*,

$$AB : AI :: AI : IB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

DEUXIÈME SECTION.

DES FIGURES PLANES.

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles.

§ I. — Propriétés principales des triangles.

106. — On donne le nom de *figure plane* à toute portion de plan terminée par des lignes.

On donne le nom de *triangle* à toute portion de plan terminée par trois lignes droites. Ainsi ABC (fig. 89) est un triangle. Les trois droites AB, AC, BC qui terminent ce triangle sont ses *côtés*; les sommets A, B, C de ses trois angles sont ce qu'on appelle les *sommets* du triangle.

107. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle équivaut à deux angles droits.*

Soit ABC (fig. 89) un triangle quelconque. Prolongeons le côté AC, et par le sommet C menons CE parallèle à AB.

Les angles ABC et BCE seront égaux comme alternes-internes; les angles BAC et ECD seront égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des trois angles BCA, BCE, ECD formés au point C d'un même côté de AD. Or, cette dernière somme équivaut à deux angles droits; donc la somme des trois angles du triangle équivaut à deux angles droits.

Corollaire I. Étant donnés deux angles d'un triangle, on peut obtenir le troisième. Car si l'on fait la somme des deux angles donnés, le supplément de cette somme sera le troisième angle cherché.

Si les deux angles sont donnés en degrés, en retranchant leur somme de 180° on aura le troisième angle. Si, par exemple, les deux angles donnés ont pour valeurs 25° 38′ 13″ et 132° 17′ 49″, leur somme sera 157° 56′ 2″; l'excès de 180° sur cette somme étant 22° 3′ 58″, ce sera la valeur de l'angle demandé.

COROLLAIRE II. Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit, ou plus d'un angle obtus; car dans l'un ou l'autre cas la somme de ses trois angles surpasserait deux angles droits.

Un triangle qui a un angle droit est dit *rectangle*. Ainsi ABC (fig. 90) est un triangle rectangle. Le côté BC, opposé à l'angle droit, se nomme l'*hypoténuse* du triangle. La somme des deux angles B et C équivaut à un angle droit : on dit alors que ces angles sont *complémentaires* ou que chacun d'eux est le *complément* de l'autre.

COROLLAIRE III. On appelle angle *extérieur* à un triangle, un angle tel que BCD (fig. 89) formé par un côté BC et par le prolongement CD de l'un des deux autres.

Tout angle extérieur à un triangle équivaut à la somme des deux intérieurs opposés.

Car l'angle BCD étant la somme des deux angles ECD et BCE, équivaut à la somme des angles A et B.

108. — THÉORÈME. *Dans tout triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

La première partie de cet énoncé est évidente, d'après la définition de la ligne droite. La seconde est une conséquence de la première.

Car si a, b, c, désignent les trois côtés, supposés rangés par ordre de grandeur, le plus grand le premier, on aura :

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b.$$

De la première inégalité on tire

$$a - c < b \quad \text{et} \quad a - b < c.$$

La seconde donne, à son tour,

$$b - c < a.$$

Ces trois dernières inégalités démontrent la seconde partie du théorème.

109. — On nomme triangle *isocèle* un triangle qui a deux côtés égaux. Le troisième côté se nomme la *base* du triangle.

THÉORÈME. *Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit ABC (fig. 91) un triangle isocèle, et soient CA et CB les côtés égaux. Joignons le sommet C au milieu I de la base; la droite CI ayant deux de ses points, C et I, également distants des extrémités de AB, sera perpendiculaire sur AB. Faisons tourner CIB autour de CI comme charnière; les angles en I étant droits, la droite IB viendra s'appliquer sur IA, et, comme I est le milieu de AB, le point B tombera en A; d'ailleurs, le point C n'aura point changé de place; les droites CB et CA ayant ainsi les mêmes extrémités, coïncideront. Il en sera de même des angles CBI et CAI; donc ces angles sont égaux.

110. — RÉCIPROQUE DE LA PROPOSITION PRÉCÉDENTE. *Si, dans un triangle* ABC (fig. 91), *deux angles*, A et B, *sont égaux, les côtés* CB, CA, *opposés à ces angles, sont égaux, et le triangle est isocèle.*

Pour le prouver, élevons au milieu I de AB une perpendiculaire à cette droite, et ployons la figure le long de cette perpendiculaire. Les angles en I étant droits, IB prendra la direction de IA; et le point I étant le milieu de AB, le point B tombera en A. Les angles B et A étant égaux par hypothèse, le côté Bb prendra la direction du côté Aa; ces deux droites coïncidant, rencontreront la perpendiculaire en un même point C; or, ce point est à égale distance des extrémités de AB : donc les côtés CB et CA sont égaux.

111. — Un triangle *isocèle* peut être en même temps *rectangle*. L'angle A (fig. 92) opposé à la base est l'angle droit; les deux autres, B et C, étant égaux et complémentaires, valent chacun la moitié d'un angle droit ou 45°.

112. — On nomme triangle *équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux (fig. 93). Il résulte du théorème du n° 109 que les trois angles sont alors égaux, et que chacun d'eux vaut le tiers de 2 angles droits, ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit, ou 60°.

La proposition du n° 110 prouve que si un triangle est *équiangle*, c'est-à-dire s'il a ses trois angles égaux, il est aussi *équilatéral*.

113. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.*

Soient ABC et DEF (fig. 94) deux triangles qui ont AB=DE, AC=DF et BC=EF.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que EF coïncide avec son égal AC. Les côtés BA et ED étant égaux, les points A et D seront également distants du point B, et se trouveront par conséquent sur la circonférence que l'on décrirait du point B comme centre avec BA pour rayon. Les côtés CA et FD étant égaux, les points A et D se trouveront de même sur la circonférence que l'on décrirait du point C comme centre avec CA pour rayon. Or, deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus d'un point commun d'un même côté de la ligne des centres : il faudra donc que les

points D et A coïncident. Par suite, les deux triangles coïncideront, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît ses trois côtés.

Problème. *Construire un triangle, connaissant ses trois côtés.*

Désignons par m, n, p, les trois côtés donnés. Tirez une droite BC (fig. 94) égale à m. Des points B et C comme centres, avec des rayons respectivement égaux à n et à p, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point A. Joignez AB et AC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

Remarque. Ces deux arcs de cercle se couperont; car, si le triangle est possible, on aura (108) : $m < n + p$ et $m > n - p$, c'est-à-dire que la distance des centres BC, sera plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.

114. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal.*

Soient (fig. 94) AB = ED, BC = EF et l'angle B = E.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que les angles B et E coïncident; à cause des égalités ci-dessus, le point D tombera en A, et le point F en C : donc DF coïncidera avec AC. Les deux triangles coïncideront donc dans toute leur étendue, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît deux de ses côtés et l'angle qu'ils comprennent.

Problème. *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.*

Faites l'angle ABC (fig. 94) égal à l'angle donné; prenez BA et BC, respectivement égaux aux deux côtés donnés, et joignez AC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

115. — Théorème. *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, celui des deux dans lequel l'angle compris est le plus grand, est aussi celui où le troisième côté est le plus grand.*

Soient ABC et ABD (fig. 94 *bis*) les deux triangles proposés, dans lesquels nous supposerons $AC = AD$ et l'angle $BAC > BAD$. On pourra toujours les placer, comme l'indique la figure, de manière que deux des côtés égaux coïncident.

Menons la bissectrice AI de l'angle total DAC; elle tombera nécessairement dans le plus grand angle BAC, et coupera le côté BC en un point I. Joignons DI. Les triangles DAI et IAC seront égaux, comme ayant un angle égal, $DAI = IAC$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir AI commun, et $DA = AC$. On aura donc $DI = IC$.

Mais on a évidemment :

$$BD < DI + IB, \quad \text{ou} \quad BD < IC + IB,$$

ou enfin
$$BD < BC;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. De cette proposition et de celle du n° 114 résulte immédiatement cette réciproque : *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, celui des deux dans lequel le troisième côté est le plus grand, est aussi celui où l'angle compris entre les deux premiers est le plus grand.*

116. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, aboutissant à deux angles égaux chacun à chacun.*

Soient (fig. 94) $BC = EF$, l'angle $B = E$ et l'angle $C = F$. Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que EF coïncide avec son égal BC. Les angles B et E étant égaux, le côté ED prendra la direction BA, et le point D tombera quelque part sur BA. Les angles F et C étant égaux, le côté FD prendra la direction de CA, et le point D tombera quelque part sur CA. Le point D devant tomber à la fois sur BA et sur CA, ne pourra tomber qu'au point A : donc les deux triangles coïncideront, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît un de ses côtés et les angles auxquels il aboutit.

Problème. *Construire un triangle, connaissant un côté et les deux angles auxquels il aboutit.*

Tirez une droite AC (fig. 94) égale au côté donné. Au point B, faites l'angle CBA égal à l'un des deux angles donnés; au point C, faites l'angle BCA égal au second angle donné. Les droites BA et CA se couperont en un point A qui déterminera le triangle ABC demandé.

Remarque. Les droites menées ainsi par les points B et C se rencontreront; car, si le triangle est possible, la somme des deux angles donnés sera moindre que deux angles droits.

117. — Théorème. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Soient ABC et DEF (fig. 90) les deux triangles rectangles en A et en D; et soient $BC = EF$ et $AB = DE$.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que DE et AB coïncident. Les angles D et A étant droits, le côté DF prendra la direction de AC. Je dis, de plus, que le point F tombera en C; car, si cela n'était pas, les droites EF et BC seraient des obliques s'écartant inégalement du pied A de la perpendiculaire BA : ces obliques seraient donc inégales, ce qui est contraire à la supposition.

Corollaire. Un triangle rectangle est déterminé quand on connaît l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.

Problème. *Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.*

Faites l'angle droit BAC (fig. 90). Sur l'un d'eux, prenez AB égal au côté donné; du point B comme centre, avec un rayon égal à l'hypoténuse donnée, décrivez un arc de cercle qui coupera AC en un certain point C. Joignez BC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

Remarque. L'arc de cercle ainsi décrit coupera la ligne AC; car, si le triangle est possible, l'hypoténuse sera une oblique plus grande que le côté donné.

§ II. — Des triangles semblables.

118. — Deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun sont dits *équiangles entre eux*, et sont ce que l'on appelle des triangles *semblables*. Les côtés opposés aux angles égaux sont les *côtés homologues* de ces triangles; les sommets des angles égaux sont les *sommets homologues*.

THÉORÈME. *Deux triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels.*

Soient ABC et abc (fig. 95) deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, savoir : $A=a$, $B=b$, et $C=c$.

Portons le triangle abc sur ABC, de manière que les angles égaux, A et a, coïncident, et que les autres angles égaux se correspondent. Le côté ab prendra la position AD, le côté ac la position AE, et le côté bc la position DE. Les angles abc et ABC étant égaux par hypothèse, il en sera de même des angles ADE et ABC. Or, ces derniers sont correspondants; il en résulte que les droites DE et BC sont parallèles. On a donc (92, 94) :

$$AD : AB :: AE : AC \quad \text{ou} \quad ab : AB :: ac : AC$$
$$\text{et} \quad DE : BC :: AD : AB \quad \text{ou} \quad bc : BC :: ab : AB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

119. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont semblables.*

Supposons, en effet, que l'on ait (fig. 95) les proportions :

$$(1) \quad ac : AC :: ab : AB \quad \text{et} \quad bc : BC :: ab : AB \quad (2).$$

Prenons sur AB une longueur AD égale à ab, et par le point D menons DE parallèle à BC. Les triangles ADE et ABC seront semblables, car ils ont l'angle A commun, et de plus les angles ADE et ABC égaux comme correspondants, ainsi que les angles AED et ACB.

Mais, à cause des parallèles, on a

$$(3) \quad AE : AC :: AD : AB \quad \text{et} \quad DE : BC :: AD : AB \quad (4).$$

Les proportions (1) et (3) ont les trois derniers termes égaux, donc le premier terme est le même, et l'on a $AE = ac$.

De même, les proportions (2) et (4) ont les trois derniers termes égaux; on a donc $DE = bc$.

Il en résulte que les triangles ADE et abc sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Mais ADE est semblable à ABC; donc il en est de même de abc.

120. — THÉORÈME. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels.*

Supposons, en effet, que l'on ait (fig. 95) l'angle $A=a$, et la proportion

$$ac : AC :: ab : AB.$$

Prenons, comme dans la démonstration précédente, une longueur AD égale à ab, et menons DE parallèle à BC. Les triangles ADE et ABC seront semblables, puisqu'ils ont l'angle A commun et les angles ADE et ABC égaux comme correspondants.

On aura ainsi :

$$AE : AC :: AD : AB.$$

Cette proportion et la précédente ayant les trois derniers termes égaux, il s'ensuit que le premier terme est le même, et qu'on a $AE = ac$.

Les deux triangles ADE et *abc* sont donc égaux, comme ayant un angle égal $A = a$, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Mais ADE est semblable à ABC; donc il en est de même de *abc*.

121.—Théorème. *Si du sommet* A (fig. 96) *de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse, on forme deux triangles partiels* ADB, ADC *semblables au triangle total.*

Car les triangles ADB et ABC, par exemple, sont tous deux rectangles, l'un en D, l'autre en A, et de plus ils ont l'angle B commun; par suite (107), le troisième angle BAD de l'un est égal au troisième angle ACB de l'autre. Ces deux triangles sont donc équiangles entre eux, ou semblables.

On démontrerait de même que ADC est semblable à ABC.

Corollaire I. *Les triangles partiels sont semblables entre eux*, comme semblables tous deux au triangle total.

122.—Corollaire II. *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et la partie de cette hypoténuse qui lui est adjacente.*

En effet: si l'on considère les triangles ABD et ABC, et qu'on leur applique le théorème du n° 118, on pourra écrire

$$BD : AB :: AB : BC.$$

Car BD et AB étant opposés aux angles égaux BAD, ACB, sont homologues, et il en est de même des hypoténuses AB et BC.

123.—Corollaire III. *La perpendiculaire* AD *est*

moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypoténuse.

En effet: la similitude des triangles partiels donne la proportion

$$BD : AD :: AD : DC.$$

Car BD et AD sont homologues, comme étant opposés aux angles égaux BAD et ACD; de même AD et DC sont homologues, comme étant opposés aux angles égaux ABD et DAC.

§ III. — Application à la mesure des distances inaccessibles.

124.—Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer la distance de deux points A et B (fig. 97), séparés par un obstacle qu'on ne peut franchir. On choisit sur le terrain un troisième point C, tel que la distance BC soit directement mesurable. Cette distance est ce qu'on nomme la *base* de l'opération. On mesure au graphomètre les angles ABC et ACB formés par la base BC avec les rayons visuels menés de ses extrémités au point inaccessible A.

On tire ensuite sur le papier une droite indéfinie sur laquelle on prend une longueur *bc* qui ait avec BC un rapport connu; qui contienne, par exemple, autant de millimètres que BC contient de mètres. Aux points *b* et *c*, on fait, à l'aide du rapporteur, des angles respectivement égaux à ceux qui ont été mesurés au graphomètre. On forme ainsi un petit triangle *abc* semblable à ABC, car ces triangles ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont équiangles entre eux. On mesure *ab*, et le nombre de millimètres contenus dans cette ligne, exprime le nombre de mètres contenus dans la distance inaccessible AB.

Car, en vertu de la similitude des deux triangles, on a (118)

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Or, BC vaut 1000 fois bc; donc AB vaut 1000 fois ab.

125. — Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de mesurer la distance de deux points inaccessibles A et B (fig. 98).

On trace sur le terrain une base CD que l'on mesure avec soin ; on trace sur le papier une droite cd qui ait avec CD un rapport connu ; qui contienne, par exemple, autant de millimètres que CD contient de mètres.

On mesure au graphomètre les angles ACD, ADC, et l'on fait sur le papier les angles acd, adc, respectivement égaux aux angles mesurés ; on forme ainsi un triangle acd semblable à ACD, et l'on a, comme on vient de le voir,

$$ac : AC :: 1 : 1000.$$

On mesure les angles BDC, BCD, et l'on fait sur le papier les angles bdc, bcd, respectivement égaux à ces deux nouveaux angles mesurés ; on forme ainsi un triangle bcd semblable à BCD ; et l'on a

$$bc : BC :: 1 : 1000.$$

De ces deux proportions on déduit

$$ac : AC :: bc : BC.$$

D'ailleurs l'angle acb, qui est la différence des angles acd et bcd, est égal à l'angle ACB, qui est la différence des angles ACD et BCD. Les deux triangles acb, ACB ont donc un angle égal, compris entre côtés proportionnels, et sont, par conséquent, semblables (120). On a donc

$$ab : AB :: ac : AC \quad \text{ou} \quad :: 1 : 1000.$$

Si donc on mesure ab, le nombre de millimètres contenus dans cette ligne exprimera le nombre de mètres contenus dans la distance inaccessible AB.

CHAPITRE II.

Des quadrilatères.

126. — On donne le nom de *quadrilatère* à une surface plane terminée par quatre lignes droites. La figure 99 représente un quadrilatère. Les quatre lignes AB, BC, CD, DA, qui le terminent, sont ses *côtés*. Leur ensemble forme le *périmètre* ou *contour* du quadrilatère.

Une droite, telle que AC, joignant deux sommets A et C qui ne sont pas les extrémités d'un même côté, est ce que l'on nomme une *diagonale*. On pourrait mener une seconde diagonale du point B au point D. Chaque diagonale divise le quadrilatère en deux triangles.

Un quadrilatère est dit *convexe*, lorsqu'une même droite ne peut rencontrer son contour en plus de deux points, sans se confondre avec l'un des côtés. Le quadrilatère ne serait point convexe, si, comme ABCD (fig. 100), il présentait un angle *rentrant* BCD ; une même droite XY pourrait, dans ce cas, rencontrer les quatre côtés. On ne s'occupe dans la Géométrie élémentaire que des quadrilatères convexes.

127. — Théorème. *Dans tout quadrilatère la somme des quatre angles équivaut à quatre angles droits.*

Car si, dans le quadrilatère ABCD (fig. 99), par exemple, on tire la diagonale AC, la somme des angles du quadrilatère sera celle des six angles ABC, BCA, ACD, CDA, DAC, CAB, c'est-à-dire la somme des angles des deux triangles ABC et ADC. Or, la somme des angles de chacun de ces triangles équivaut à deux angles droits ; donc la somme de leurs six angles, ou, ce qui revient au même, la somme des quatre angles du quadrilatère, équivaut à quatre angles droits.