XY, les perpendiculaires mA′ et m A coïncideront; il en sera de même des perpendiculaires nB′ et nB; et ainsi de suite. Les sommets du polygone A′B′C′D′E′ viendront donc se placer sur les sommets correspondants du polygone ABCDE; ces deux polygones sont donc composés d'éléments égaux chacun à chacun; d'ailleurs, il est évident que l'ordre de ces éléments est inverse dans les deux polygones; donc, d'après la définition, ces polygones sont symétriques entre eux.

148. — Dans la figure 111, les deux polygones ABCDE et A′B′C′D′E′ sont en même temps symétriques de forme et de position : de forme, parce que leurs éléments sont égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse; de position, parce que leurs sommets correspondants sont situés de part et d'autre de XY sur une même perpendiculaire à cette ligne et à des distances égales.

La ligne XY est un axe de symétrie par rapport à l'ensemble des deux polygones. On dit encore que ces polygones sont placés *symétriquement* par rapport à cette ligne.

Si l'on conçoit un polygone quelconque, que nous désignerons par P pour abréger le discours, et qui soit symétrique de forme par rapport à ABCDE, on pourra toujours l'amener à être en outre symétrique de position par rapport à ce même polygone. Car puisque les polygones P et ABCDE ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse, il s'ensuit que les polygones P et A′B′C′D′E ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, c'est-à-dire qu'ils sont superposables. On pourra donc faire coïncider le polygone P avec A′B′C′D′E′; et alors les polygones P et ABCDE, qui sont déjà symétriques de forme, seront en même temps symétriques de position.

CHAPITRE IV.

Des polygones réguliers et de la mesure des circonférences.

§ I. — Propriétés principales des polygones réguliers.

149. — Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

Connaissant le nombre des côtés d'un polygone régulier, on peut en déduire la valeur commune de ses angles.

Car, si n désigne le nombre des côtés ou des angles du polygone proposé, la somme de ses angles aura pour valeur 2 droits multipliés par n—2 (136); et puisque tous les angles sont égaux, chacun d'eux vaudra la $n^{\text{ième}}$ partie de leur somme, ou

$$\frac{2\,(n-2)}{n}$$

en prenant l'angle droit pour unité. On trouve ainsi que l'angle du triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit;

du carré	1 angle droit;
du pentagone rég.	$\frac{6}{5}$ d'angle droit;
de l'hexagone rég.	$\frac{4}{3}$
de l'octogone rég.	$\frac{3}{2}$
du décagone rég.	$\frac{8}{5}$
du dodécagone rég.	$\frac{5}{3}$
etc.	etc.

150. — Théorème. *Tout polygone régulier* ABCDEFG (fig. 112) *est inscriptible au cercle.*

Par trois sommets consécutifs A, B, C, faisons passer une circonférence, et soit O son centre; je dis que cette circonférence passera par tous les autres sommets du polygone.

Pour le démontrer, abaissons du point O sur BC la perpendiculaire OI qui divisera la corde BC en deux parties égales; puis joignons OA et OD. Si l'on ploie la figure le long de OI, les angles en I étant droits, IC prendra la direction de IB; et comme ces deux parties de BC sont égales, le point C tombera en B. Les angles B et C étant égaux puisque le polygone est régulier, le côté CD prendra la direction de BA, et comme ces côtés sont égaux, le point D tombera en A. Il en résulte que les droites OD et OA sont égales, et que, par conséquent, la circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon doit passer par le point D.

On démontrerait de la même manière que cette circonférence passe par le point E, et par les autres sommets du polygone.

151. — RÉCIPROQUEMENT : *Si l'on divise une circonférence en parties égales et que l'on joigne les points de division consécutifs par des droites, le polygone ainsi obtenu sera régulier.*

En effet : il aura ses côtés égaux, comme cordes soustendant des arcs égaux; et il aura ses angles égaux, comme inscrits dans des segments égaux (ABC, BCD, CDE, etc., fig. 112).

Remarques. I. Le centre O de la circonférence *circonscrite* à un polygone, c'est-à-dire qui passe par tous ses sommets, est ce qu'on nomme le *centre* du polygone. Le rayon OA de cette circonférence est le *rayon* du polygone. La perpendiculaire OI, abaissée du centre sur un côté, se nomme l'*apothème* du polygone.

II. L'angle AOB formé par deux rayons consécutifs OA, OB, est ce qu'on nomme l'*angle au centre* du polygone. Tous les angles au centre AOB, BOC, COD, etc., d'un même

polygone, sont égaux comme interceptant sur la circonférence des arcs égaux.

La somme de tous ces angles étant 4 angles droits, on voit que, pour obtenir la valeur de l'angle au centre, il suffit de diviser 4 droits par le nombre des angles au centre, ou par le nombre des côtés du polygone. On trouve de cette manière que la valeur de l'angle au centre est :

pour le triangle équilatéral	$\frac{4}{3}$	d'angle droit;
le carré	1	angle droit;
le pentagone	$\frac{4}{5}$	d'angle droit;
l'hexagone	$\frac{2}{3}$	
l'octogone	$\frac{1}{2}$	angle droit;
le décagone	$\frac{2}{5}$	d'angle droit;
le dodécagone	$\frac{1}{3}$	
etc.	etc.	

III. Les rayons OA, OB, OC, etc., divisent le polygone en autant de triangles isocèles égaux qu'il y a de côtés.

152. — PROBLÈME. *Inscrire un carré dans un cercle.*

Tirez deux diamètres à angle droit, AC et BD (fig. 113), et joignez leurs extrémités par les droites AB, BC, CD, DA.

Les quatre angles en O étant égaux, il en est de même des quatre arcs AB, BC, CD, DA. La circonférence étant divisée en quatre parties égales aux points A, B, C, D, le polygone ABCD est régulier.

COROLLAIRE. Si l'on divise en deux parties égales chacun des arcs AB, BC, etc., la circonférence sera divisée en 8 parties égales, et les 8 points de division pourront servir de sommets à l'octogone régulier inscrit. En doublant toujours le nombre des divisions, on obtiendrait de même les polygones réguliers de 16, 32, 64 côtés, et ainsi de suite.

153. — PROBLÈME. *Inscrire au cercle un hexagone régulier.*

Soit AB (fig. 114) le côté de l'hexagone. Joignons OA et OB; l'angle au centre AOB vaudra $\frac{2}{3}$ d'angle droit (151, Rem. II). La somme des angles OAB et OBA vaudra donc 2 droits moins $\frac{2}{3}$ de droit, c'est-à-dire $\frac{4}{3}$ de droit; et comme ces angles sont égaux, puisque le triangle AOB est isocèle, chacun d'eux vaudra la moitié de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Il en résulte que les trois angles du triangle AOB sont égaux; il en est donc de même de ses trois côtés, et l'on a $AB = AO$; c'est-à-dire que le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.

Pour diviser une circonférence en 6 parties égales, il suffit donc de porter successivement sur cette circonférence 6 ouvertures de compas égales à son rayon.

En joignant les points de division consécutifs on obtiendra l'hexagone régulier inscrit.

Corollaires. I. La circonférence est divisée en 3 parties égales aux points A, C, E; si donc on joint AE on aura le côté du triangle équilatéral inscrit.

II. Si l'on double au contraire successivement le nombre des divisions, on obtiendra les polygones réguliers de 12, 24, 48 côtés, et ainsi de suite.

154. — Problème. *Inscrire au cercle un décagone régulier.*

Soit AB (fig. 115) le côté du décagone régulier; joignons OA et OB; l'angle au centre AOB vaudra $\frac{2}{5}$ d'angle droit (151, Rem. II). La somme des angles OAB et OBA vaudra donc 2 droits moins $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire $\frac{8}{5}$ d'angle droit; et comme ces angles sont égaux puisque le triangle AOB est isocèle, chacun d'eux vaut la moitié de $\frac{8}{5}$, c'est-à-dire $\frac{4}{5}$ d'angle droit.

Divisons l'angle OAB en deux parties égales par la droite AM; chacun des angles partiels OAM, BAM, vaudra $\frac{2}{5}$ d'angle droit. Il en résulte d'abord que le triangle OMA est isocèle, et qu'on a $AM = OM$. Il en résulte en second lieu que les triangles MAB et AOB sont équiangles entre eux, car ils ont l'angle B commun; et l'angle $MAB = AOB = \frac{2}{5}$ d'angle droit. Ces triangles sont donc semblables; et puisque AOB est isocèle, il en est de même de MAB, et l'on a $MA = AB$; par suite $OM = AB$. De plus, cette même similitude donne la proportion

$$MB : AB :: AB : OA$$

ou bien

$$MB : OM :: OM : OB;$$

c'est-à-dire que le rayon OB est divisé au point M en moyenne et extrême raison, et que le côté AB du décagone est égal à la plus grande partie OM du rayon.

Pour diviser une circonférence en 10 parties égales, on divisera donc son rayon en moyenne et extrême raison, et l'on portera sur cette circonférence 10 ouvertures de compas consécutives égales à la plus grande partie du rayon, ainsi divisé.

En joignant les points de division consécutifs de la circonférence, on obtiendra le décagone régulier inscrit.

Corollaires. I. La circonférence se trouve divisée en 5 parties égales aux points A, C, E, G, I; si donc on joint AI, on aura le côté du pentagone régulier inscrit.

II. En doublant au contraire successivement le nombre des divisions, on obtiendrait les polygones réguliers de 20, 40, 80 côtés, et ainsi de suite.

155. — Théorème. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

En effet, leurs angles sont égaux, puisque la valeur de chacun d'eux ne dépend que du nombre des côtés (149); et leurs côtés homologues forment une suite de rapports identiques, puisque ces côtés sont égaux dans chaque polygone. Ces polygones sont donc semblables en vertu de la proposition du n° 139.

156. — THÉORÈME. *Les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme leurs rayons.*

Soient en effet AOB et aob (fig. 116) deux des triangles isocèles dans lesquels les deux polygones se divisent. Les angles au centre AOB et aob sont égaux, puisque les deux polygones ont le même nombre de côtés; d'ailleurs, puisque les triangles sont isocèles, les côtés qui comprennent ces angles sont identiquement proportionnels; ces triangles sont donc semblables, et l'on a la proportion

$$AB : ab :: AO : ao.$$

Soit n le nombre des côtés de chaque polygone; on ne troublera pas la proportion ci-dessus en multipliant les deux termes du premier rapport par n, et l'on pourra écrire

$$AB \times n : ab \times n :: AO : ao;$$

mais $AB \times n$ c'est le périmètre du premier polygone, et $ab \times n$ c'est le périmètre du second; en désignant ces périmètres par P et par p, on aura donc

$$P : p :: AO : ao;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — Applications au parquetage.

157. — On emploie fréquemment les polygones réguliers dans le carrelage et le parquetage des appartements.

La somme de tous les angles formés autour d'un même point étant égale à 4 angles droits, pour pouvoir couvrir un parquet avec des polygones réguliers égaux, il faut que

l'angle de chacun de ces polygones soit une partie aliquote de 4 angles droits.

C'est ce qui a lieu pour le triangle équilatéral; car son angle, qui vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, est la 6^{me} partie de 4 droits. Cela a lieu également pour le carré, puisque son angle étant droit, est le quart de 4 angles droits. Cela a lieu encore pour l'hexagone régulier, parce que son angle, qui vaut $\frac{4}{3}$ d'angle droit, est le tiers de 4 angles droits.

On peut donc former un parquet avec des triangles équilatéraux assemblés 6 à 6 (fig. 117), avec des carrés assemblés 4 à 4 (fig. 118 et 119), ou avec des hexagones réguliers assemblés 3 à 3 (fig. 120).

On ne pourrait pas employer des pentagones réguliers, parce que l'angle de ces polygones, qui vaut $\frac{6}{5}$ d'angle droit, n'est pas une partie aliquote de 4 angles droits. On pourrait encore moins employer des polygones d'un nombre de côtés supérieur à 6, parce qu'alors 3 des angles de ces polygones feraient une somme plus grande que 4 angles droits.

158. — Mais on obtient de nouvelles dispositions, en employant conjointement plusieurs espèces de polygones réguliers.

Ainsi l'on recouvre un parquet :

Avec des octogones et des carrés (fig. 121);
des hexagones et des triangles équilatéraux (fig. 122);
des dodécagones et des triangles équilatéraux (fig. 123).

§ III. — Propriétés du cercle qui dépendent des polygones réguliers.

159. — Le périmètre d'un polygone régulier inscrit à une circonférence, est toujours moindre que cette circonférence; car chacun de ses côtés est moindre que l'arc qu'il sous-tend.

Si le nombre des côtés du polygone inscrit devient double, son périmètre augmente et se rapproche par conséquent de la circonférence. Car soit AB (fig. 124) le côté d'un polygone régulier inscrit, soit n le nombre de ses côtés, en sorte que son périmètre soit $AB \times n$.

Prenons le milieu I de l'arc sous-tendu par le côté AB, et joignons IA et IB; ces droites seront des côtés du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double, et le périmètre de ce polygone sera $IA \times 2n$ ou $(IA + IB) \times n$.

Or, on a, d'après la définition de la ligne droite,

$$IA + IB > AB,$$

par conséquent

$$(IA + IB) \times n > AB \times n,$$

c'est-à-dire que le nouveau périmètre est plus grand que le premier, et se rapproche par conséquent davantage de la circonférence dans laquelle les deux polygones sont inscrits.

Cette circonférence est une limite vers laquelle tend le périmètre du polygone inscrit à mesure que le nombre de ses côtés augmente; et, dans la pratique, il arrive en effet bientôt un moment où ce périmètre se confond sensiblement avec la circonférence, parce que l'arc sous-tendu par chaque côté devient assez petit pour se confondre avec sa corde.

Il est donc permis de considérer une circonférence comme le périmètre d'un polygone régulier dont les côtés sont extrêmement petits et en nombre extrêmement grand.

160. — Théorème. *Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs rayons.*

Car, d'après ce que nous venons de dire, on peut considérer deux circonférences comme les périmètres de deux polygones réguliers semblables dont les côtés sont en nombre extrêmement grand; et dès lors, on peut leur appliquer la proposition du n° 156.

Corollaire I. Les diamètres étant le double des rayons, on peut dire que *deux circonférences sont entre elles comme leurs diamètres.*

Corollaire II. Pour tracer une circonférence qui soit le double, le triple, etc., d'une circonférence donnée, il suffit d'employer un rayon double, triple, etc.

161. — Il résulte encore de la proposition précédente, que *le rapport entre une circonférence et son diamètre, est constant pour tous les cercles.*

Car si l'on désigne par C et C′ deux circonférences, et par D et D′ leurs diamètres, on aura, en vertu de cette proposition :

$$C : C' :: D : D',$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$C : D :: C' : D'.$$

On représente par la lettre grecque π (prononcez *pi*) ce rapport constant de la circonférence au diamètre, et l'on pose en conséquence

$$\frac{C}{D} = \pi,$$

d'où $C = \pi D$ ou $C = 2\pi R$,

si R est le rayon.

On voit que pour obtenir l'expression numérique d'une circonférence quand on a celle de son diamètre, D ou 2R, il suffit de multiplier cette dernière par π.

Par des méthodes que nous ne pouvons exposer ici (*),

(*) Voir notre *Géométrie théorique et pratique*, 2e édition, nos 299 à 304.

on trouve que le nombre π a pour valeur 3,1415926... ou à peu près 3,1416. Ce nombre diffère peu de $\frac{22}{7}$, nombre donné par Archimède pour la valeur approchée de π. On voit par cette valeur, qu'une circonférence équivaut au triple de son diamètre, plus une quantité un peu moindre que le 7^{me} de ce diamètre.

162. — La connaissance du rapport π, permet de résoudre divers problèmes numériques; nous en donnerons quelques exemples.

I. — *Un bassin circulaire a 24^{m} de diamètre; on demande son contour.*

Multipliez le diamètre 24^{m} par le rapport de la circonférence au diamètre, ou par 3,1416; ce qui donne 75^{m},3984, ou environ 75^{m},40.

II. — *Quel est le rayon du méridien de Paris, supposé parfaitement circulaire?*

La longueur de ce méridien étant de 40 000 000^{m}, on aura son diamètre en divisant ce nombre par le rapport de la circonférence au diamètre, ou par 3,1415 926; ce qui donne, en négligeant les fractions de mètre, 12732395^{m}. La moitié de ce nombre, ou 6366197^{m}, sera le rayon demandé.

III. — *Le diamètre d'une roue de voiture est de 1^{m},80; on demande combien elle fait de tours par kilomètre.*

La circonférence de cette roue est $1^{m},80 \times \pi$; pour avoir le nombre de tours demandé, il faut donc diviser 1 kilomètre ou 1000^{m} par cette circonférence, ou par

$$\frac{1^{m},80 \times 22}{7}; \text{ ce qui donne } \frac{1000 \times 7}{1^{m},80 \times 22},$$

ou 176,7...; ou environ 177 tours.

163. — Nous avons vu au n° 29 comment on peut comparer un arc à la circonférence dont il fait partie. Nous pouvons montrer maintenant comment on peut obtenir l'expression numérique de la longueur de cet arc.

Soit A la longueur d'un arc, N le nombre de degrés dont il se compose, R le rayon de la circonférence dont il fait partie, et que nous désignerons par C. On aura

$$A : C :: N : 360$$

ou

$$A : 2\pi R :: N : 360, \qquad (1)$$

d'où

$$A = 2\pi R.\ \frac{N}{360};$$

c'est-à-dire que : *pour obtenir la longueur d'un arc, il faut multiplier celle de la circonférence entière par le rapport entre le nombre de degrés dont l'arc se compose et 360°.*

Exemple : *Sur une circonférence dont le rayon a 0^{m},60, quelle est la longueur d'un arc de 48°?*

La formule donne

$$A = 2 \times 3,1416 \times 0^{m},6 \times \tfrac{48}{360} = 0^{m},502...$$

164. — La proportion établie au numéro précédent résout aussi le problème inverse; savoir : étant donnée l'expression numérique de la longueur d'un arc dont on connaît le rayon, trouver son expression en degrés. Pour cela, on tire de la proportion (1)

$$N = 360° \times \frac{A}{2\pi R},$$

c'est-à-dire que : *pour obtenir cette expression, il faut multiplier 360° par le rapport entre la longueur de l'arc et la circonférence entière.*

Exemple : *Sur une circonférence quelconque, quel est l'arc dont la longueur équivaut au rayon?*

On a, dans ce cas, $A = R$; par suite

$$N = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ \times 7}{22}$$

ou $$N = 57^\circ\, 16' \text{ environ.}$$

CHAPITRE V.

De la mesure des aires.

§ I. — Théorèmes sur la mesure des aires.

165. — Mesurer l'aire d'une figure, c'est la comparer à une autre aire prise pour unité.

On prend habituellement pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Si, par exemple, l'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire est l'aire du carré qui a un mètre de côté, et qu'on appelle *mètre carré*. Si l'on prend pour unité de longueur le décimètre, l'unité d'aire sera le *décimètre carré*; et ainsi de suite.

166. — Théorème. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés du rectangle, ordinairement à celui qui occupe le bas de la figure; l'un quelconque des côtés adjacents à la base est ce qu'on nomme la *hauteur*.)

L'énoncé ci-dessus signifie que, pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie du rectangle, il faut déterminer le nombre d'unités de longueur contenues dans sa base, le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur, et multiplier ces deux nombres l'un par l'autre.

Soit, en effet, ABCD (fig. 125) un rectangle, AB sa base et AD sa hauteur. Supposons, pour fixer les idées, que

AB contienne 5 fois l'unité de longueur, et que AD la contienne 3 fois. Divisons la base en 5 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la hauteur. Divisons la hauteur en 3 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la base. La figure totale se trouvera ainsi divisée en figures partielles qui seront des rectangles, car tous les angles de la figure sont droits, et qui de plus sont des carrés, car leurs côtés sont égaux, soit aux divisions de AB (89), soit aux divisions de AD, c'est-à-dire à l'unité de longueur. Ces figures partielles sont donc des unités d'aire, et il ne reste plus qu'à en déterminer le nombre.

Or, le rectangle ABCD se trouve divisé en autant de bandes horizontales qu'il y a d'unités de longueur dans AD, c'est-à-dire en 3 bandes; chacune de ces bandes se compose d'autant de carrés ou d'unités d'aire qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire de 5. Le nombre total de ces unités d'aire est donc 5×3 ou 15.

Les raisonnements qui précèdent sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans AB et dans AD.

Remarque. Si la base et la hauteur ne contenaient pas un nombre exact de fois l'unité de longueur adoptée, on pourrait toujours recourir à une unité de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle fût contenue un nombre exact de fois dans AB et dans AD, ce qui finira toujours par arriver dans la pratique, attendu que le reste, s'il y en a un, finira par devenir inappréciable.

Corollaire. Dans le cas où le rectangle proposé est un carré, la base et la hauteur sont égales; et pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie de ce carré, il faut multiplier par lui-même le nombre d'unités de longueur que contient l'un de ses côtés. C'est pour cela qu'en