On a, dans ce cas, $A = R$; par suite

$$N = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ \times 7}{22}$$

ou $N = 57^\circ\,16'$ environ.

CHAPITRE V.

De la mesure des aires.

§ I. — Théorèmes sur la mesure des aires.

165. — Mesurer l'aire d'une figure, c'est la comparer à une autre aire prise pour unité.

On prend habituellement pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Si, par exemple, l'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire est l'aire du carré qui a un mètre de côté, et qu'on appelle *mètre carré*. Si l'on prend pour unité de longueur le décimètre, l'unité d'aire sera le *décimètre carré*; et ainsi de suite.

166. — Théorème. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés du rectangle, ordinairement à celui qui occupe le bas de la figure; l'un quelconque des côtés adjacents à la base est ce qu'on nomme la *hauteur*.)

L'énoncé ci-dessus signifie que, pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie du rectangle, il faut déterminer le nombre d'unités de longueur contenues dans sa base, le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur, et multiplier ces deux nombres l'un par l'autre.

Soit, en effet, ABCD (fig. 125) un rectangle, AB sa base et AD sa hauteur. Supposons, pour fixer les idées, que AB contienne 5 fois l'unité de longueur, et que AD la contienne 3 fois. Divisons la base en 5 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la hauteur. Divisons la hauteur en 3 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la base. La figure totale se trouvera ainsi divisée en figures partielles qui seront des rectangles, car tous les angles de la figure sont droits, et qui de plus sont des carrés, car leurs côtés sont égaux, soit aux divisions de AB (89), soit aux divisions de AD, c'est-à-dire à l'unité de longueur. Ces figures partielles sont donc des unités d'aire, et il ne reste plus qu'à en déterminer le nombre.

Or, le rectangle ABCD se trouve divisé en autant de bandes horizontales qu'il y a d'unités de longueur dans AD, c'est-à-dire en 3 bandes; chacune de ces bandes se compose d'autant de carrés ou d'unités d'aire qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire de 5. Le nombre total de ces unités d'aire est donc 5×3 ou 15.

Les raisonnements qui précèdent sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans AB et dans AD.

Remarque. Si la base et la hauteur ne contenaient pas un nombre exact de fois l'unité de longueur adoptée, on pourrait toujours recourir à une unité de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle fût contenue un nombre exact de fois dans AB et dans AD, ce qui finira toujours par arriver dans la pratique, attendu que le reste, s'il y en a un, finira par devenir inappréciable.

Corollaire. Dans le cas où le rectangle proposé est un carré, la base et la hauteur sont égales; et pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie de ce carré, il faut multiplier par lui-même le nombre d'unités de longueur que contient l'un de ses côtés. C'est pour cela qu'en

Arithmétique on donne le nom de *carré* au produit d'un nombre par lui-même.

Si, par exemple, le côté du carré contient 2 unités de longueur, sa superficie contiendra 2×2 ou 4 unités d'aire. Si le côté contient 3 unités de longueur, la superficie contiendra 3×3 ou 9 unités d'aire; et ainsi de suite.

Un centimètre valant 10 millimètres, un centimètre carré vaut 10×10 ou 100 millimètres carrés. Par la même raison, un décimètre carré vaut 100 centimètres carrés; un mètre carré vaut 100 décimètres carrés; un décamètre carré vaut 100 mètres carrés; un hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés; et ainsi de suite.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. I. *La toile d'un tableau, de forme rectangulaire, a $2^{m},62$ de largeur, sur $1^{m},94$ de hauteur; quelle est sa superficie?*

La largeur est de 262 centimètres, la hauteur de 194 centimètres; la superficie est donc de 262×194 ou 50828 centimètres carrés; ou $5^{m.c.}, 8^{d.c.}, 28^{c.c.}$.

II. *Le plancher d'une salle carrée a $6^{m},51$ de longueur; quelle est sa superficie?*

Le côté du carré est de 651 centimètres; la superficie est donc de 651×651 ou 423801 centimètres carrés, ou bien $42^{m.c.}\ 38^{d.c.}\ 1^{c.c.}$.

167. — THÉORÈME. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On nomme *base* l'un quelconque des côtés du parallélogramme, ordinairement celui qui occupe le bas de la figure; la *hauteur* est la distance de ce côté à celui qui lui est parallèle, distance qui est mesurée par leur perpendiculaire commune.)

Soit ABCD (fig. 126) un parallélogramme quelconque. Des points B et A abaissons sur CD et sur son prolonge-

ment les perpendiculaires BI et AH. La figure ABIH sera un rectangle. Les triangles rectangles AHD et BIC sont égaux; car ils ont leurs hypoténuses égales, AD=BC comme côtés opposés d'un même parallélogramme, et les côtés égaux AH=BI par la même raison.

Or, si de la figure totale on retranche d'une part le triangle AHD, il reste le parallélogramme ABCD; et si de cette même figure totale on retranche le triangle BIC, il reste le rectangle ABIH. Le rectangle est donc équivalent en surface au parallélogramme. Mais le rectangle ABIH a pour mesure $AB \times IB$; donc le parallélogramme a la même mesure, c'est-à-dire sa base AB multipliée par sa hauteur IB.

168. — THÉORÈME. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa* base *par sa* hauteur.

(Un côté quelconque d'un triangle peut être pris pour sa *base;* sa hauteur est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.)

Soit ABC (fig. 127) un triangle quelconque. Soit CH sa hauteur. Menons CD parallèle à AB, et BD parallèle à AC, la figure ABCD sera un parallélogramme. Les deux triangles ABC, DCB sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; le triangle ABC est donc la moitié du parallélogramme. Or, ce dernier a pour mesure $AB \times CH$; donc l'aire du triangle a pour mesure la moitié de ce produit, ou $\frac{1}{2}\, AB \times CH$.

Remarque. Lorsque le triangle est rectangle, on peut prendre pour base l'un des côtés de l'angle droit; l'autre côté de l'angle droit est alors la hauteur du triangle.

169. — THÉORÈME. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa* hauteur *par la demi-somme des deux* bases.

(On nomme *hauteur* d'un trapèze la distance des deux côtés parallèles, lesquels prennent le nom de *base*, ainsi que nous l'avons déjà dit.)

Soit ABCD (fig. 128) un trapèze. Désignons par h sa hauteur. Menons la diagonale AC. Le triangle ABC aura pour mesure $\frac{1}{2}AB \times h$; car sa hauteur est celle du trapèze. Par la même raison le triangle ADC aura pour mesure $\frac{1}{2}DC \times h$; car DC peut être pris pour sa base, et sa hauteur est alors celle du trapèze. L'aire de ce dernier étant la somme des aires des deux triangles, aura donc pour expression

$$\frac{1}{2}AB \times h + \frac{1}{2}CD \times h \text{ ou } h \times \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Corollaire. D'après ce qui a été démontré au n° 129, on peut dire : qu'*un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

Remarque. Quand le trapèze est rectangulaire (fig. 102), sa hauteur est le côté AD perpendiculaire aux deux bases.

170. — Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque ABCDEF (fig. 107), on peut le diviser en triangles, au moyen des diagonales menées par un même sommet; évaluer séparément l'aire de chaque triangle, et faire la somme. Nous verrons, plus loin, que dans l'arpentage on emploie une autre méthode.

171. — Théorème. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

Si du centre O d'un polygone régulier ABCDEFG (fig. 112) on mène des rayons à tous les sommets, nous avons vu qu'on divise le polygone en autant de triangles isocèles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone. Or, l'un de ces triangles, BOC

par exemple, a pour mesure la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur, c'est-à-dire par la perpendiculaire OI abaissée du centre sur le côté BC, ou, en d'autres termes, par l'apothème du polygone. Si n désigne le nombre des côtés, on aura donc pour la mesure de l'aire totale

$$\frac{1}{2}BC \times OI \times n \text{ ou } \frac{1}{2}BC \times n \times OI.$$

Or, $BC \times n$, ou l'un des côtés répété autant de fois qu'il y a de côtés, c'est le périmètre du polygone. En le désignant par P on pourra donc écrire, pour l'expression de l'aire totale

$$\frac{1}{2}P \times OI,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

Remarque. Par des méthodes tirées de la Trigonométrie, on peut calculer la surface d'un polygone régulier quand on connaît le nombre de ses côtés et la longueur de l'un d'eux. On trouve ainsi qu'en désignant par a le côté,

la surface du *triangle équilatéral* sera exprimée par	$0{,}4330.a^2$
du *carré* .	a^2
du *pentagone*	$1{,}7205.a^2$
de *l'hexagone*	$2{,}5981.a^2$
de *l'octogone*	$4{,}8284.a^2$
du *décagone*	$7{,}6942.a^2$
du *dodécagone*	$11{,}1961.a^2$
etc.	etc.

Si, par exemple, on voulait connaître la superficie d'un octogone régulier dont le côté a 12 mètres, il faudrait multiplier 12 par lui-même, et le produit par 4,8284, ce qui donnerait $695^{m.c.}\ 28^{d.c.}\ 96^{c.c.}$.

172. — Théorème. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

En effet, un cercle pouvant être considéré comme un polygone régulier dont les côtés sont infiniment petits et en nombre infiniment grand, on peut lui appliquer la mesure de ces polygones. Or, ici le périmètre n'est autre chose que la circonférence, et l'apothème se confond avec le rayon.

COROLLAIRE. Si l'on désigne par R le rayon du cercle, sa circonférence aura pour expression $2\pi R$; par conséquent, sa superficie sera exprimée par $\frac{1}{2} . 2\pi R . R$ ou par πR^2. C'est-à-dire que l'*aire d'un cercle a pour mesure le produit du carré de son rayon par le rapport de la circonférence au diamètre.*

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. I. *Un bassin circulaire a* 20^{m} *de diamètre; quelle est sa superficie?*

Le diamètre étant 20^{m}, le rayon est 10^{m}; le carré de ce rayon est $100^{m.c.}$. Multipliant par 3,1416, on trouvera pour la superficie demandée $314^{m.c.},16$.

II. *Quel rayon faut-il donner à un cercle pour que sa superficie soit d'un mètre carré?*

La superficie étant exprimée par πR^2, en la divisant par le rapport π, on obtiendra le carré du rayon. Divisons donc $1^{m.c.}$ par 3,1416, ce qui donne pour quotient $0^{m.c.},318308$. Ce nombre exprimant le carré du rayon, sa racine $0^{m},564$ exprimera le rayon lui-même.

III. *La circonférence d'un cercle est de 1 mètre; quelle est sa superficie?*

La circonférence étant 1^{m}, le diamètre est le quotient de 1^{m} par π ou par $\frac{22}{7}$, c'est-à-dire $\frac{7}{22}$; le rayon vaut donc $\frac{7}{44}$; et la superficie, qui est la moitié du produit de la circonférence par le rayon, vaudra $\frac{1}{2} . 1^{m} . \frac{7}{44}$ ou $\frac{7}{88}$ de mètre carré; c'est-à-dire environ $7^{d.c.}\ 95^{c.c.}$.

§ II. — Applications à l'arpentage.

173. — On sait que pour la mesure des terres, l'hectomètre carré prend le nom d'*hectare*, le décamètre carré le nom d'*are*, et le mètre carré le nom de *centiare*.

I. Soit à mesurer un champ de forme rectangulaire, ayant $24^{décam.},7$ de longueur, sur $13^{décam.},3$ de largeur.

La base du rectangle a 247 mètres, sa hauteur en a 133; d'après le théorème du n° 166, la superficie du champ est donc 247×133 ou 32851 mètres carrés, ou 3 hectares 28 ares et 51 centiares.

II. Soit à mesurer une pièce de terre ayant la forme d'un trapèze dont la hauteur est de 97 mètres, et dont les bases ont respectivement 231 et 145 mètres.

La demi-somme de ces bases est 188 mètres; en vertu de la proposition du n° 169, la superficie demandée sera donc $188^{m} \times 97^{m}$ ou 18236 mètres carrés; ce qui revient à 1 hectare 82 ares et 36 centiares.

174. — Soit maintenant à mesurer un polygone ABCDEFG (fig. 129) dont l'intérieur est accessible. Au lieu de le diviser en triangles, on emploie la méthode suivante, qui diminue de beaucoup le nombre des opérations à effectuer sur le terrain.

Par les deux sommets les plus éloignés, A et E, on tire la droite AE, à laquelle on donne le nom de *directrice*. De tous les sommets B, C, D, F, G, on abaisse sur cette directrice les perpendiculaires B*m*, C*n*, D*p*, F*q*, G*r*. Le polygone se trouve ainsi divisé en triangles rectangles et en trapèzes rectangulaires. Ce mode de décomposition offre, entre autres avantages, celui de n'avoir à transporter l'équerre d'arpenteur que le long de la directrice pour déterminer les points m, r, n, q, p. En outre, après la décomposition opérée, on n'a plus aucune autre ligne à tirer pour évaluer l'aire de chacune des parties qui composent le polygone.

On mesure à la chaîne les perpendiculaires Bm, Cn, Dp, Fq, Gr; et les différentes parties Am, mr, rn, nq, qp, pE, de la directrice. On a alors :

Triangle AB$m = \frac{1}{2}$Am.Bm.

Trapèze BmnC$=\frac{1}{2}mn$ (Bm+Cn); et ainsi des autres.

Si l'on suppose, par exemple, que l'on ait trouvé les valeurs suivantes :

Am=20^{m},5	Bm=27^{m},2
mn=60,3	Cn=52,0
np=57,1	Dp=43,5
pE=31,8	Fq=62,1
qE=55,7	Gr=48,9
rq=73,6	
Ar=40,4	

on aura, en effectuant successivement les opérations indiquées,

Aire ABCDEFG $= \frac{1}{2}$ [557$^{m.c.}$,60 + 4775,76 + 5353,05 + 1383,30 + 3458,97 + 8169,60 + 1975,56]
= 12 886$^{m.c.}$,92 = 1 hectare 28 ares 87 centiares.

175. — Soit enfin à évaluer l'aire d'un polygone ABCDEFG (fig. 130), dont l'intérieur est inaccessible.

On prolonge l'un des côtés, FG par exemple. Des sommets extrêmes, A et E, on abaisse sur le prolongement de FG les perpendiculaires AM et EN que l'on prolonge au delà des points A et E. Par le sommet C le plus éloigné de FG, on lui mène une parallèle PQ terminée à la rencontre

des droites MA et NE. On forme ainsi un grand rectangle MNOP, dans lequel le polygone proposé est inscrit.

La méthode consiste à évaluer l'aire de ce rectangle et à en retrancher l'aire comprise entre le contour du polygone et celui du rectangle; le reste exprime évidemment l'aire du polygone.

Pour cela, de tous les sommets du polygone qui ne sont point situés sur quelqu'un des côtés du rectangle, on abaisse des perpendiculaires Bm, Dn sur ces côtés. On mesure à la chaîne ces perpendiculaires, ainsi que les longueurs AM, Am, Pm, PC, CO, On, nE, EN, FN, FG, MG. Il est facile alors d'évaluer le rectangle MNOP, les triangles rectangles AMG, AmB, DEn, ENF, et les trapèzes rectangulaires PCBm, COnD.

Si l'on suppose qu'on ait trouvé :

mB = 20^{m} ; Dn = 22^{m},3 ; MA = 50^{m},7 ; Am = 41^{m} ;
mP = 37^{m},8 ; PC = 76^{m},9 ; CO = 75^{m} ; On = 39^{m},2 ;
nE = 48^{m},6 ; EN = 41^{m},7 ; FN = 43^{m},4 ; MG = 30^{m}.

Il en résultera :

MN = PO = 76^{m},9 + 75^{m} = 151^{m},9 ;
MP = ON = 50^{m},7 + 41^{m} + 37^{m},8 = 129^{m},5.

On trouvera pour l'aire du rectangle 19671$^{m.c.}$,05 ; et pour celle des parties extérieures au polygone

$\frac{1}{2}$ [1521$^{m.c.}$ + 820 + 3662,82 + 3814,16 + 1083,78 + 1809,78] ou 6355$^{m.c.}$,77.

Par suite, l'aire du polygone a pour valeur

19671$^{m.c.}$,05 — 6355$^{m.c.}$,77, c'est-à-dire 13315$^{m.c.}$,28 ou environ 1 hectare 33 ares et 15 centiares.

7

CHAPITRE VI.

De la comparaison des aires.

§ I. — Théorèmes principaux sur la comparaison des aires.

176. — THÉORÈME. *Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Soient ABC et abc (fig. 131) deux triangles semblables. Des sommets homologues C et c abaissons sur les côtés opposés les perpendiculaires AD et ad.

Les triangles proposés étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels, et l'on a

$$AB : ab :: AC : ac \quad (1).$$

Les triangles rectangles ACD et acd, ayant l'angle A égal à l'angle a, sont équiangles, et par conséquent semblables; on a donc aussi

$$CD : cd :: AC : ac \quad (2).$$

Multipliant terme à terme les proportions (1) et (2), et divisant par 2 les deux termes du premier rapport, il vient

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

Or, $\frac{1}{2}AB \times CD$ mesure l'aire du triangle ABC, et $\frac{1}{2}ab \times cd$ mesure celle du triangle abc; on peut donc écrire

$$ABC : abc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarque. A la place du rapport $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$, on pourrait mettre $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ ou $\overline{CB}^2 : \overline{cb}^2$, puisque les côtés homologues sont proportionnels, et qu'il en est par conséquent de même de leurs carrés.

177. — THÉORÈME. *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Soient ABCDEF et $abcdef$ (fig. 107) deux polygones semblables. Par les sommets homologues A et a, menons les diagonales AC, AD, AE, ac, ad, ae, qui diviseront les deux polygones en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.

En vertu de cette similitude et de la proposition précédente, on aura successivement :

$$ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 \quad (1).$$
$$ACD : acd :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$$
$$ADE : ade :: \overline{DE}^2 : \overline{de}^2$$
$$AEF : aef :: \overline{EF}^2 : \overline{ef}^2.$$

Mais les polygones étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels; les carrés de ces côtés homologues sont donc aussi en proportion. Il en résulte que les seconds rapports des proportions précédentes sont tous égaux; il en est donc de même des premiers, et l'on a

$$ABC : abc :: ACD : acd :: ADE : ade :: AEF : aef.$$

Or, dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent. Ici, la somme des antécédents forme le polygone ABCDEF, et la somme des conséquents forme le polygone $abcdef$; on peut donc écrire

$$ABCDEF : abcdef :: ABC : abc.$$

Comparant cette proportion avec la proportion (1), on voit qu'elles ont un rapport commun ABC : abc; les deux autres rapports forment donc une proportion, et l'on a enfin

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

Remarque. A la place du rapport $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$, on pourrait mettre le rapport des carrés de deux côtés homologues quelconques, ou même le rapport des carrés de deux diagonales homologues.

COROLLAIRE. Si les côtés d'un polygone deviennent 2, 3, 4, 5 fois, 10 fois plus grands, sans que ses angles changent, sa surface devient 4, 9, 16, 25 fois, 100 fois plus grande; et ainsi de suite.

178. — THÉORÈME. *Deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Soient AB et ab (fig. 116) deux côtés de ces polygones; O et o leurs centres; joignons OA, OB et oa, ob, qui seront leurs rayons.

Les angles O et o étant une même fraction de 4 droits, sont égaux, et les triangles isocèles AOB, aob sont semblables. On a donc, en vertu de la proposition du n° 176,

$$AOB : aob :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

Si n désigne le nombre des côtés de chacun des deux polygones, on obtiendra, en multipliant par ce nombre, les deux termes du premier rapport

$$AOB \times n : aob \times n :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

Or, les deux termes du premier rapport expriment précisément les aires des deux polygones; ces aires sont donc entre elles comme les carrés des rayons.

Remarque. A la place du rapport des carrés des rayons, on pourrait mettre le rapport des carrés des apothêmes; car ces derniers sont proportionnels aux rayons.

179. — THÉORÈME. *Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Car si A et a désignent les aires de deux cercles, R et r leurs rayons, on aura (172, coroll.)

$$A = \pi R^2 \quad \text{et} \quad a = \pi r^2;$$

d'où résulte la proportion identique

$$A : a :: \pi R^2 : \pi r^2;$$

ou, en divisant les deux termes du second rapport par π,

$$A : a :: R^2 : r^2.$$

Remarque. A la place du rapport des carrés des rayons, on pourrait mettre le rapport des carrés des diamètres, qui sont proportionnels aux rayons.

COROLLAIRE. Si le rayon d'un cercle devient 2, 3, 4,... 10 fois plus grand, sa surface devient 4, 9, 16,... 100 fois plus grande; et ainsi de suite.

180. — THÉORÈME. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Car si A, B, H désignent l'aire, la base et la hauteur d'un rectangle; a, b, h, l'aire, la base et la hauteur d'un second rectangle, on a (166)

$$A = B \times H \quad \text{et} \quad a = b \times h;$$

d'où résulte la proportion identique,

$$A : a :: B \times H : b \times h;$$

c'est-à-dire que deux rectangles sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.

Mais si les hauteurs sont égales, cette hauteur devient un facteur commun aux deux termes du second rapport; on peut donc le supprimer, et il reste

$$A : a :: B : b.$$

Remarque. On démontrerait de même que deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

181. — THÉORÈME. *Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Même démonstration que pour la proposition précédente.

182. — THÉORÈME. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*

Soit ABC (fig. 132) un triangle rectangle en C; soient ABEF, CBGK et ACMN, les carrés construits sur ses trois côtés. Du sommet C abaissons sur l'hypoténuse AB et sur sa parallèle FE la perpendiculaire commune CDH.

Le triangle ADC étant semblable au triangle total (121), on a la proportion

$$AD : AC :: AC : AB,$$

d'où

$$AD \times AB = \overline{AC}^2,$$

ou, en mettant pour AB son égale AF,

$$AD \times AF = \overline{AC}^2.$$

Or, $AD \times AF$ mesure l'aire du rectangle ADHF, et $\overline{AC}^2$ mesure l'aire du carré ACMN; donc ce rectangle équivaut à ce carré.

On démontrerait de la même manière que le rectangle DBEH équivaut au carré CBGK.

Mais la somme des rectangles ADHF et DBEH forme le carré ABEF construit sur l'hypoténuse; ce carré équivaut donc à la somme des carrés ACMN et CBGK construits sur les deux autres côtés.

COROLLAIRE. Si le triangle rectangle est en même temps isocèle, les carrés construits sur les côtés de l'angle droit sont égaux; et le carré construit sur l'hypoténuse est le double de chacun d'eux.

183. — THÉORÈME. *Les carrés* ACMN, CBGK (fig. 132) *construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *sont entre eux comme les parties* AD, DB *de l'hypoténuse* (déterminées par la perpendiculaire CD, abaissée du sommet de l'angle droit).

Car ces carrés sont entre eux comme les rectangles ADHF et DBEH, qui leur sont respectivement égaux. Or, ces rectangles ayant même hauteur DH, sont entre eux comme leurs bases AD et DB. On a donc

$$ACMN : CBGK :: AD : DB,$$

ou bien

$$\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 :: AD : DB.$$

§ II. — Problèmes sur la comparaison des aires.

184. — PROBLÈME I. *Faire un carré équivalent à un rectangle.*

Soient B et H la base et la hauteur du rectangle. Cherchez une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes (102); en la désignant par x on aura

$$B : x :: x : H; \quad \text{d'où} \quad x^2 = B \times H.$$

Or, x^2 mesure l'aire du carré dont le côté est x, et $B \times H$ mesure l'aire du rectangle proposé. Le carré construit sur la moyenne proportionnelle entre B et H sera donc le carré demandé.

185. — PROBLÈME II. *Faire un carré équivalent à un triangle.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre sa base et la moitié de sa hauteur; ce sera le côté du carré demandé.

Même démonstration que pour la proposition précédente.

186. — PROBLÈME III. *Faire un carré équivalent à un polygone.*

Soit ABCDE (fig. 133) le polygone donné. Menez la diagonale DB qui sépare du polygone le triangle BCD. Par le point C menez CF parallèle à cette diagonale, et terminé au prolongement de AB ; puis joignez DF. Les triangles DCB et DFB peuvent être considérés comme ayant même base DB ; leurs sommets C et F étant situés sur une même parallèle à la base, leurs hauteurs sont égales ; ces triangles sont donc équivalents. Si donc on enlève au polygone proposé le triangle DCB, et qu'on le remplace par le triangle équivalent DFB, on obtiendra un nouveau polygone AFDE équivalent au premier. Mais ce nouveau polygone aura un côté de moins, puisque AB et BF sont en ligne droite.

En répétant cette opération, on réduira successivement le nombre des côtés du polygone, jusqu'à le réduire à un triangle équivalent. On déterminera le carré équivalent à ce triangle ; ce carré équivaudra au polygone proposé.

187. — PROBLÈME IV. *Faire un carré équivalent à un cercle.*

Ce problème, connu sous le nom de QUADRATURE DU CERCLE, a longtemps occupé les géomètres ; mais ils sont parvenus à démontrer qu'on ne pouvait le résoudre exactement par la règle et le compas.

On le résout, par le calcul, avec telle approximation qu'on le désire.

Car si R désigne le rayon du cercle et x le côté du carré équivalent, on doit avoir

$$x^2 = \pi R^2 ; \quad \text{d'où} \quad x = R . \sqrt{\pi}.$$

Or, on a calculé le rapport π jusqu'à 140 décimales ; on peut

donc extraire sa racine avec un degré d'approximation qui surpassera toujours les besoins de la pratique. Si l'on prend pour π la valeur 3,1415926535..., on trouve que sa racine carrée est 1,77245, à moins d'une demi-unité du cinquième ordre décimal. On a donc

$$x = R \times 1,77245,$$

à moins d'un demi-cent-millième du rayon.

Si, par exemple, le rayon avait 100 mètres, le côté du carré équivalent au cercle serait $177^m,245$, à moins d'un demi-millimètre.

188. — PROBLÈME V. *Faire un carré qui soit à un carré donné, comme le nombre* p *est au nombre* q.

Sur une droite indéfinie portez une longueur AB (fig. 134) égale à p unités arbitraires ; à la suite de AB, portez une longueur BC égale à q de ces mêmes unités. Sur AC comme diamètre décrivez une demi-circonférence. Au point B élevez la perpendiculaire BD ; joignez DA et DC. Sur DC portez, à partir du point D, une longueur DE égale au côté du carré donné. Par le point E menez EF parallèle à CA ; la distance DF sera le côté du carré demandé.

En effet : l'angle ADC étant inscrit dans un demi-cercle, le triangle ADC est rectangle. La droite DB étant une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, on a, en vertu de la proposition du n° 183,

$$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 :: AB : BC \qquad (1).$$

Or, les parallèles FE et AC divisant proportionnellement les côtés de l'angle ADC, on a la proportion

$$AD : DC :: DF : DE,$$

d'où

$$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 :: \overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 \qquad (2).$$

Les proportions (1) et (2) ayant un rapport commun, les deux autres forment une proportion, et l'on peut écrire

$$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: AB : BC,$$

ou

$$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: p : q,$$

c'est-à-dire que le carré construit sur DF est au carré donné comme le nombre p est au nombre q.

189. — PROBLÈME VI. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et qui soit à ce polygone comme le nombre* p *est au nombre* q.

Soit P l'aire du polygone donné; X celle du polygone demandé; a l'un des côtés du polygone donné, x son homologue dans le polygone cherché.

Les polygones étant semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues; on a donc

$$X : P :: x^2 : a^2;$$

mais, d'après l'énoncé, on doit aussi avoir

$$X : P :: p : q,$$

à cause du rapport commun; on peut donc écrire

$$x^2 : a^2 :: p : q,$$

c'est-à-dire que la question est ramenée à trouver le côté x d'un carré, qui soit à un carré donné a^2 comme le nombre p est au nombre q; ce qu'on a appris à faire dans le problème précédent.

Ayant déterminé le côté homologue du côté a, on construira sur ce côté un polygone semblable au polygone demandé (141).

190. — PROBLÈME VII. *Faire un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés.*

Tracez un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit soient respectivement égaux aux côtés des deux carrés donnés; l'hypoténuse de ce triangle sera le côté du carré demandé (182).

191. — PROBLÈME VIII. *Étant donnés deux polygones semblables* P *et* P', *en construire un troisième* P'' *semblable aux deux premiers, et équivalent à leur somme.*

Soient a et a' deux côtés homologues dans les deux premiers polygones; soit x leur homologue dans le troisième.

On aura d'abord (177) :

$$P : P' :: a^2 : a'^2 \qquad (1),$$

et

$$P'' : P :: x^2 : a^2 \qquad (2).$$

De la première proportion on tire

$$P + P' : P :: a^2 + a'^2 : a^2,$$

ou, en remplaçant P + P' par P'', qui équivaut à cette somme,

$$P'' : P :: a^2 + a'^2 : a^2 \qquad (3).$$

En comparant les proportions (2) et (3), on voit qu'elles ont trois termes communs; il faut donc que le terme restant soit égal de part et d'autre; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$x^2 = a^2 + a'^2.$$

La question est donc ramenée à trouver le côté x d'un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés a^2 et a'^2; ce qu'on fera au moyen du problème précédent.

Ayant déterminé le côté x homologue de a, on construira sur ce côté un polygone semblable au polygone P (141); ce sera le polygone que l'on demande.

192. — PROBLÈME IX. *Tracer un cercle équivalent à la somme de deux cercles donnés.*

Tracez un triangle rectangle, dans lequel les côtés de l'angle droit soient les rayons des cercles donnés; l'hypoténuse de ce triangle sera le rayon du cercle demandé.

Car, en appelant R et R' les rayons des cercles donnés, et R'' l'hypoténuse du triangle, on aura (182) :

$$R''^2 = R^2 + R'^2,$$

d'où en multipliant par le rapport π de la circonférence au diamètre,

$$\pi R''^2 = \pi R^2 + \pi R'^2.$$

Mais $\pi R''^2$, πR^2, $\pi R'^2$, mesurent respectivement l'aire des cercles qui ont pour rayon R'', R et R' (172, coroll.); donc le cercle qui a pour rayon l'hypoténuse du triangle est équivalent à la somme des deux cercles donnés.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

De la ligne droite et du plan.

§ I. — De la droite et du plan en général.

193. — Théorème. *Si une droite a deux de ses points dans un plan, elle est tout entière dans ce plan.*

Cela résulte de la définition du plan (6).

Corollaire. *Une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point*; à moins d'y être contenue tout entière.

194. — Théorème. *Deux plans qui ont trois points communs* (non en ligne droite), *coïncident dans toute leur étendue.*

Soient A, B, C (fig. 135), trois points non en ligne droite; et supposons, s'il est possible, qu'ils appartiennent à deux plans distincts, que nous appellerons M et P pour faciliter le discours. Si, par les points A et B, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans le plan M et dans le plan P (193). De même si, par les points A et C, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans chacun des deux plans M et P.

Soit D un point quelconque du plan M; je dis qu'il appartient aussi au plan P. En effet : dans le plan M, menons par le point D une droite EF qui coupe en E et en F les