ASB, ASC, BSC, compris entre les arêtes; mais le sens du discours indique toujours suffisamment si l'on parle des plans ou des angles.

Dans la considération des trièdres on fait abstraction de la longueur des arêtes et de l'étendue des faces.

On désigne un trièdre par la lettre placée à son sommet, en la faisant suivre, s'il est nécessaire, de trois autres lettres prises sur chacune de ses arêtes : on dirait ainsi le trièdre S, ou le trièdre SABC.

217. — THÉORÈME. *Chaque face d'un trièdre est plus petite que la somme des deux autres, et plus grande que leur différence.*

Soit SABC (fig. 152) un trièdre quelconque.

1° Il n'y a lieu à démontrer la première partie du théorème que pour la plus grande des trois faces : soit ASC cette plus grande face.

Dans le plan ASC menons SD qui fasse avec SC un angle DSC égal à l'angle BSC. Coupons les trois droites SA, SD, SC par une droite quelconque ADC. Prenons SB égal à SD; et joignons BA et BC.

Les triangles DSC et BSC sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; on a donc $DC = BC$. On a d'ailleurs

$$AC < AB + BC;$$

et, si l'on retranche d'une part DC et de l'autre son égale BC, il restera :

$$AC - DC < AB \qquad \text{ou} \qquad AD < AB.$$

Si l'on considère maintenant les triangles ASD et ASB, on voit qu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun; mais le troisième côté AD de l'un est moindre que le troisième

côté AB de l'autre; il en résulte que l'angle ASD opposé à AD est moindre que l'angle ASB, opposé à AB (115). On a donc :

$$ASD < ASB.$$

Si l'on ajoute d'une part l'angle DSC et de l'autre son égal BSC, il vient

$$ASD + DSC < ASB + BSC,$$

ou

$$ASC < ASB + BSC.$$

2° Quant à la seconde partie du théorème, elle se déduirait immédiatement de la première, comme au n° 108.

218. — THÉORÈME. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune, et assemblées dans le même ordre.*

1° Soient d'abord deux trièdres S et S' (fig. 153) dont deux faces, ASB, BSC ou A'S'B', B'S'C' sont des angles aigus; et supposons que l'on ait $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$.

Par un point B pris sur l'arête SB élevons dans les plans ASB et BSC les droites BA et BC, perpendiculaires à SB, et qui rencontreront SA et SC en certains points A et C, puisque les angles ASB et BSC sont aigus. Joignons AC; l'arête SB perpendiculaire aux droites BA et BC sera perpendiculaire au plan ABC (196). Faisons les mêmes constructions dans le trièdre S' après avoir pris $S'B' = SB$, l'arête S'B' sera aussi perpendiculaire au plan A'B'C'.

Les triangles ABS et A'B'S' sont égaux comme ayant un côté égal $SB = S'B'$ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Il en résulte $SA = S'A'$ et $AB = A'B'$.

Les triangles BSC et B'S'C' sont égaux par une raison analogue, et il en résulte $SC = S'C'$ et $BC = B'C'$.

Par suite, les triangles ASC et A'S'C' sont égaux comme ayant un angle égal ASC=A'S'C' compris entre côtés égaux chacun à chacun; il en résulte AC=A'C'.

Enfin, les triangles ABC et A'B'C' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

Cela posé, transportons le dièdre S' sur le dièdre S, de manière que les triangles égaux ABC et A'B'C' coïncident, les arêtes BS et B'S' perpendiculaires au plan de ce triangle devenu commun coïncideront (198); et comme BS=B'S', le point S' tombera sur le point S; d'où il résulte que les droites SA et S'A' coïncideront ainsi que les droites SB et S'B'. Les deux trièdres coïncideront donc eux-mêmes, donc ils sont égaux.

2° Soient maintenant deux trièdres quelconques S et S' (fig. 154), dans lesquels on suppose toujours les angles ASB=A'S'B', ASC=A'S'C' et BSC=B'S'C'. Prenons, à partir des points S et S', sur les arêtes des deux trièdres, six longueurs égales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C'; et joignons AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C'.

Les triangles ASB, A'S'B' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux : donc AB=A'B'. On démontrera de même que l'on a AC=A'C' et BC=B'C'. Il en résulte que les triangles ABC et A'B'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux.

Si l'on considère maintenant les trièdres formés en B et en B', on voit, qu'à cause des égalités ci-dessus, ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune. De plus, les faces ABS et CBS sont des angles aigus ainsi que les faces A'B'S' et C'B'S', comme angles à la base dans des triangles isocèles. Ces trièdres rentrent donc dans le premier cas que nous avons considéré ci-dessus; ils sont donc égaux; et il en résulte que le dièdre SB est égal au dièdre S'B'.

On démontrerait de la même manière l'égalité des dièdres SA, S'A' ou SC, S'C'. Les deux trièdres S et S' ont donc tous leurs éléments égaux chacun à chacun, et disposés dans le même ordre. Donc ils sont égaux.

219. — Théorème. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.*

Soient les deux trièdres S et S' (fig. 154) dans lesquels on suppose, par exemple, le dièdre SA = S'A' et les faces ASB = A'S'B' et ASC = A'S'C'.

Transportons le trièdre S' sur le trièdre S de manière que les sommets S et S' se confondent, et que le dièdre S'A' coïncide avec son égal SA.

Les droites SB et S'B' étant alors dans un même plan, et faisant avec SA un même angle, coïncideront; il en sera de même des droites SC et S'C'. Donc les deux trièdres coïncideront dans toutes leurs parties, et sont par conséquent égaux.

220. — Angles polyèdres. Lorsque plusieurs plans se rencontrent en un même point, et se coupent consécutivement suivant des droites distinctes, leur réunion est ce que l'on nomme un *angle polyèdre*. La figure 155 représente un angle polyèdre. Les plans ASB, BSC, CSD, DSE, ESA qui le forment, sont ses *faces*; les droites SA, SB, SC, SD, SE, intersections de ses faces consécutives, sont ses *arêtes*. Leur point de concours S est le *sommet* de l'angle polyèdre.

On ne considère en Géométrie élémentaire, que les angles polyèdres *convexes*, c'est-à-dire qui ne peuvent être rencontrés par une droite en plus de deux points, et n'offrent par conséquent aucun angle dièdre rentrant.

Dans la considération des angles polyèdres, on fait abstraction de la longueur des arêtes et de l'étendue des faces.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet, suivie, s'il est nécessaire, d'une lettre prise sur chaque arête. On dira ainsi l'angle polyèdre S ou bien S A B C D E.

221. — Théorème. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que 4 angles droits.*

Soit S A B C D E (fig. 155) un angle polyèdre quelconque. Menons un plan A B C D E qui coupe toutes ses arêtes. Dans l'intérieur du polygone A B C D E, prenons un point O quelconque, et joignons O A, O B, O C, O D, O E.

Nous formerons des triangles ayant leur sommet en O, qui seront en nombre égal à ceux qui ont leur sommet en S; et la somme totale des angles de ces deux groupes de triangles sera la même. Mais la somme de tous les angles en O équivaut à 4 angles droits. Pour prouver que la somme des angles en S est moindre, il suffit donc de prouver que la somme totale des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en S, est plus grande que la somme totale des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en O.

Or, en vertu du théorème du n° 217, on aura, en considérant tour à tour les trièdres qui ont pour sommet les points A, B, C, D, E :

$$\begin{array}{lcl} SAE+SAB>EAB & \text{ou} & >EAO+OAB \\ SBA+SBC>ABC & \text{ou} & >ABO+OBC \\ SCB+SCD>BCD & \text{ou} & >BCO+OCD \\ SDC+SDE>CDE & \text{ou} & >CDO+ODE \\ SED+SDA>EDA & \text{ou} & >DEO+OEA. \end{array}$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, on voit que la somme des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en S, est plus grande que la somme des angles du polygone A B C D E, ou que la somme des angles à la base

dans le groupe de triangles dont le sommet est un O. D'où il suit, comme on vient de le voir, que la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O, c'est-à-dire moindre que 4 angles droits.

§ V. — Des plans perpendiculaires entre eux.

222. — Deux plans sont dits *perpendiculaires* entre eux, lorsqu'ils forment un angle dièdre droit, ou, ce qui revient au même, lorsque l'angle plan qui lui sert de mesure est lui-même un angle droit. Telle est ordinairement la position mutuelle du plancher et des murs d'un appartement; ces murs eux-mêmes sont le plus souvent perpendiculaires entre eux deux à deux.

223. — Théorème. *Si deux plans* M N, O P (fig. 156) *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* A B, *menée dans l'un de ces plans perpendiculairement à leur intersection* O D, *est perpendiculaire à l'autre plan.*

Car, si l'on mène, dans le plan M N, la droite B C perpendiculaire à O D, l'angle A B C mesurera l'angle des deux plans, et sera, par conséquent, droit. Mais déjà l'angle A B O est droit; la droite A B est donc à la fois perpendiculaire à B O et à B C, qui passent par son pied dans le plan M N; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

Corollaires. I. *Si par un point* B *de l'intersection on élevait une perpendiculaire au plan* M N, *elle serait tout entière dans le plan* O P.

Car si elle différait de B A, on pourrait en un même point d'un plan lui élever deux perpendiculaires, ce qui est impossible (198).

II. *Si par un point* A, *pris dans le plan* O P, *on abais-*

sait une perpendiculaire sur le plan MN, *elle serait tout entière dans le plan* OP.

Car si elle différait de AB, on pourrait par un point pris hors d'un plan lui mener deux perpendiculaires, ce qui est impossible (198).

224. — Théorème. *Tout plan* OP (fig. 156) *mené suivant une droite* AB *perpendiculaire à un plan* MN, *est lui-même perpendiculaire à ce plan.*

Car si l'on mène, dans le plan MN, la droite BC perpendiculaire à l'intersection OD des deux plans, les angles ABC et ABO seront droits, puisque AB est perpendiculaire au plan MN. Il en résulte que AB et BC sont deux perpendiculaires à l'intersection OD, menées en un même point de cette intersection dans chacun des deux plans; l'angle ABC mesure donc l'angle des deux plans; et puisque ABC est droit, les deux plans sont perpendiculaires.

Corollaire. On peut énoncer le même théorème en disant: *Tout plan* MN *perpendiculaire à une droite* AB *située dans un plan* OP, *est perpendiculaire à ce plan.*

225. — Théorème. *Tout plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection.*

Car si par le point de rencontre des trois plans on élevait une perpendiculaire au premier, elle serait tout entière dans chacun des deux autres (223, Coroll. I). Elle n'est donc autre chose que leur intersection.

§ VI. — Des plans parallèles entre eux.

226. — Théorème. *Deux plans* MN, PQ (fig. 157) *perpendiculaires à une même droite* AB, *ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, s'ils pouvaient avoir un point commun, que nous désignerons par O, soient AC et BD les droites menées de ce point O aux points A et B; les angles BAC et ABD seraient droits, puisque AB est perpendiculaire aux deux plans; dans le triangle ABO il y aurait donc deux angles droits, ce qui est impossible.

Remarque. Lorsque deux plans ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge, ces plans sont dits *parallèles* entre eux. Le théorème qui précède peut donc s'énoncer: *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.*

227. — Théorème. *Si deux droites qui se coupent,* AB, CD (fig. 158), *sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent* A′B′, C′D′, *le plan* MN *déterminé par les deux premières est parallèle au plan* M′N′ *déterminé par les deux dernières.*

En effet : la droite AB parallèle à A′B′ est parallèle au plan M′N′ (204); si donc le plan MN rencontrait le plan M′N′, l'intersection serait une parallèle à AB (205). On démontrerait de même que cette intersection devrait être parallèle à CD. Or, cette intersection ne saurait être parallèle à la fois aux deux droites AB et CD qui se coupent; donc les deux plans MN et M′N′ ne peuvent se rencontrer, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles.

228. — Théorème. *Les intersections* AB *et* CD (fig. 159), *de deux plans parallèles* MN *et* PQ, *par un troisième plan* ABDC, *sont parallèles entre elles.*

Car les droites AB et CD étant dans un même plan ABDC, si elles n'étaient pas parallèles elles se rencontreraient, et leur point de rencontre appartiendrait à la fois au plan MN qui contient AB et au plan PQ qui contient CD. Ces deux plans ne seraient donc pas parallèles, ce qui est contraire à la supposition.

229. — THÉORÈME. *Lorsque deux plans* MN *et* PQ (fig. 157) *sont parallèles, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un d'eux* MN, *est en même temps perpendiculaire à l'autre.*

Pour le démontrer, tirons dans le plan PQ la droite quelconque BD ; suivant AB et BD qui se coupent au point B conduisons un plan ; il coupera MN suivant une droite AC parallèle à BD (228). Or AB, perpendiculaire à MN, est perpendiculaire à AC qui passe par son pied dans ce plan ; elle est donc aussi perpendiculaire à sa parallèle BD. Et comme BD est quelconque, il s'ensuit que AB est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan PQ, et que par conséquent, elle est perpendiculaire à ce plan.

COROLLAIRES. I. *Par un point* B, *pris hors d'un plan* MN, *on ne peut lui mener qu'un plan parallèle* PQ.

Car si l'on en pouvait mener un second, ils devraient être tous deux perpendiculaires à la droite BA abaissée du point B perpendiculairement à MN. On pourrait donc, par un même point, mener deux plans perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible (199).

II. — *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.*

Car si l'on mène une droite perpendiculaire au troisième plan, elle sera aussi perpendiculaire aux deux premiers ; or, deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux (226).

230. — THÉORÈMES. *Les portions* AC *et* BD (fig. 159), *de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles* MN *et* PQ, *sont égales.*

Car si, par les parallèles AC et BD on fait passer un plan, il coupera les plans MN et PQ suivant deux parallèles AB et CD (228). La figure ABCD sera donc un parallélogramme. Donc AC = BD.

COROLLAIRE. *Deux plans parallèles sont partout également distants.*

Car si l'on suppose que AC et BD soient deux perpendiculaires à l'un des deux plans, elles seront perpendiculaires à l'autre (229) et de plus parallèles (202), et par conséquent égales (230). Or, ces perpendiculaires mesurent la distance des deux plans, puisque toute oblique serait plus longue.

231. — THÉORÈME. *Deux droites quelconques* ABC, DEF (fig. 160) *sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles* MN, PQ, RS.

Pour le prouver, menons AHI parallèle à DEF. En vertu du théorème précédent on aura AH = DE et HI = EF. Par les deux droites AI et AC qui se coupent, faisons passer un plan, il coupera les plans PQ et RS suivant les droites HB et IC qui sont parallèles. On aura donc

$$AB : BC :: AH : HI ;$$

ou, ce qui revient au même,

$$AB : BC :: DE : EF ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE. On déduit de cette proportion

$$AB : AB + BC :: DE : DE + EF$$

ou

$$AB : AC :: DE : DF.$$

232. — THÉORÈME. *Lorsque deux plans* MN, PQ (fig. 159) *sont parallèles, tout plan* ABDC *perpendiculaire à l'un d'eux* PQ, *est en même temps perpendiculaire à l'autre.*

Car, si par un point C pris sur l'intersection CD des deux plans ABDC et PQ, on élève dans le plan ABDC une perpendiculaire CA à cette intersection, cette droite CA sera perpendiculaire au plan PQ (223) et par conséquent au plan MN (229). Le plan ABDC qui passe par CA est donc perpendiculaire à MN (224).

§ VII. — Des directions verticales et horizontales.

233. — La direction *verticale* est celle que prend le *fil-à-plomb*, c'est-à-dire un fil fixé à son extrémité supérieure et sollicité à l'autre par un poids.

Dans la réalité, les verticales sont des droites qui vont se rencontrer au centre de la terre. Mais dans les applications ordinaires de la Géométrie, les verticales sont assez rapprochées pour pouvoir être considérées comme parallèles.

L'emploi des verticales est continuel dans les constructions. On donne cette direction aux arêtes latérales de la plupart des murs, à celles des jambages de porte ou de fenêtre, à celles des barreaux de grilles, etc.

234. — On nomme plan *horizontal*, tout plan perpendiculaire à la verticale du lieu que l'on considère. S'il est mené par le centre de la terre, c'est le plan de l'*horizon rationnel;* s'il est mené par un point de la surface de la terre, c'est le plan de l'*horizon sensible*.

Dans une étendue peu considérable, les verticales pouvant être considérées comme parallèles, il en est de même des plans horizontaux (203, 226).

Les plans horizontaux sont d'un fréquent usage : tels sont les planchers et les plafonds de nos appartements, la face supérieure de la plupart de nos meubles; telle est aussi la surface de l'eau contenue dans un vase, ou même celle d'une pièce d'eau dormante lorsqu'elle a peu d'étendue.

235. — Toute droite menée dans un plan horizontal, est ce qu'on nomme une *horizontale*. Telles sont toutes les lignes droites tracées sur un parquet, les arêtes des entablements, des balcons, des empatements de l'architecture, etc.

Si, par un point quelconque d'une droite horizontale, on mène une verticale, les deux droites seront perpendiculaires entre elles (196). Réciproquement, *toute perpendiculaire à la verticale est horizontale* (197).

Deux horizontales qui se coupent, déterminent un plan horizontal. Car si, par leur point de rencontre, on mène une verticale, elle sera perpendiculaire à chacune des deux horizontales, et par conséquent au plan qu'elles déterminent. Donc ce plan est horizontal.

236. — On s'appuie sur ce dernier principe pour s'assurer qu'un plan est horizontal. On emploie à cet effet divers instruments.

I. — *Le niveau de maçon* (fig. 161). Il se compose ordinairement de deux règles d'égale longueur, assemblées à angle droit, et réunies par une traverse. En un point de la bissectrice de l'angle droit est suspendu un fil-à-plomb. Le prolongement de cette bissectrice est marqué sur la traverse, et forme ce qu'on appelle la ligne de foi. Les extrémités A et B des deux règles sont dans un même plan perpendiculaire à la ligne de foi.

Pour qu'un plan soit horizontal, il faut qu'en y posant l'instrument par les extrémités A et B, dans une direction quelconque, le fil-à-plomb coïncide avec la ligne de foi. Mais il suffit que cela ait lieu dans deux directions; car ces directions sont alors perpendiculaires toutes deux à la verticale, c'est-à-dire qu'elles sont horizontales, et que par conséquent leur plan est lui-même horizontal.

II.—*Le niveau à bulle d'air* (fig. 162). Sa partie essentielle est un tube de verre couché sur une règle de cuivre. Le tube est rempli d'eau, à cela près d'une très-petite portion occupée par une bulle d'air. Lorsque la règle est horizontale, la bulle d'air occupe le milieu du tube; mais la moindre inclinaison suffit pour faire remonter la bulle d'air vers l'extrémité la plus élevée du tube.

Un plan est horizontal lorsqu'en y posant le niveau dans deux directions bien distinctes, la bulle d'air ne cesse pas d'occuper le milieu du tube.

Cet instrument s'emploie dans toutes les opérations délicates; et les graphomètres, les boussoles, etc., en sont ordinairement munis.

237. — Pour mener, dans la campagne, un rayon visuel horizontal, on fait usage d'un instrument qui porte le nom de *niveau d'eau* (fig. 163). Il se compose d'un tube de fer-blanc AB, qui se relève à angle droit à chacune de ses extrémités A*a*, B*b*, et se termine de part et d'autre par un tube de verre. L'instrument est supporté par trois pieds. Le tube est rempli, à peu de chose près, d'une eau colorée. Par une propriété des liquides, les surfaces de l'eau dans les deux tubes sont toujours dans un même plan horizontal, qui est ce qu'on appelle le *niveau* du liquide. Lorsque l'on place l'œil dans ce plan, le rayon visuel obtenu est nécessairement horizontal.

Pour fixer les extrémités de l'horizontale formée par ce rayon visuel, on fait planter sur son prolongement, en avant et en arrière, des jalons verticaux munis chacun d'un *voyant,* c'est-à-dire d'une planchette peinte de deux couleurs, et susceptible de glisser le long de la règle et de s'y fixer par une vis de pression. On fait élever ou abaisser chaque voyant jusqu'à ce que son centre vienne se placer dans le prolongement du rayon visuel *ab* ou *ba*. La droite

CD qui joindrait les centres C et D des voyants est une droite horizontale.

On se sert de cet instrument pour déterminer la différence de hauteur de deux points M et N du terrain. Cette différence est évidemment égale à celle des longueurs CM et DN, que l'on peut mesurer sur les jalons, au moyen de divisions qui y ont été tracées.

238. — Tout plan qui contient une verticale est lui-même ce que l'on nomme un *plan vertical.*

On donne ordinairement la direction verticale aux surfaces planes des murs, des portes, volets, vitres, etc.; et aux faces latérales de la plupart des meubles, etc.

239. — I. — *Par une droite donnée quelconque, on peut toujours faire passer un plan vertical.* Car, si par un point de cette droite on mène une verticale, cette verticale et la droite donnée déterminent un plan qui est vertical.

II. — *Deux plans dont l'un est vertical et l'autre horizontal sont toujours perpendiculaires entre eux.* Car le plan vertical contient une verticale, laquelle est perpendiculaire au plan horizontal (224).

III. — Réciproquement : *Tout plan perpendiculaire à un plan horizontal est un plan vertical.* Car, si par un point de l'intersection commune on élève une perpendiculaire au plan horizontal, c'est-à-dire une verticale, cette droite sera contenue tout entière dans l'autre plan (223, coroll. I); donc celui-ci est vertical.

IV. — *L'intersection de deux plans verticaux est une verticale.* Car ces plans étant tous deux perpendiculaires au plan de l'horizon, puisqu'ils contiennent une verticale, c'est-à-dire une perpendiculaire à l'horizon (224), il en résulte que leur intersection est elle-même perpendiculaire au plan de l'horizon (225); donc cette intersection est verticale.