CHAPITRE II.

Des corps géométriques.

§ I. — Des tétraèdres.

240. — On nomme *tétraèdre* un corps géométrique terminé par quatre plans. SABC (fig. 164) est un tétraèdre. Les triangles ASB, ASC, BSC, ABC, qui le terminent, se nomment ses *faces*. Un tétraèdre présente 4 trièdres, 6 dièdres, autant d'arêtes. Les sommets S, A, B, C des 4 trièdres sont ce que l'on nomme les *sommets* du tétraèdre. Mais lorsque le tétraèdre a une face inférieure placée horizontalement, comme ABC, on donne le nom de *base* à cette face horizontale, et l'on nomme plus particulièrement *sommet* du tétraèdre le sommet S opposé à la base. La *hauteur* d'un tétraèdre est la longueur de la perpendiculaire qui serait abaissée du sommet sur le plan de la base.

241. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C' (fig. 164) *sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.* SAB = S'A'B', SAC = S'A'C', SBC = S'B'C'.

Car il en résulte d'abord que les triangles ABC, A'B'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux. Par suite, les trièdres des deux tétraèdres sont égaux chacun à chacun comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune (218), et par conséquent leurs dièdres sont égaux chacun à chacun. Les deux tétraèdres ont donc tous leurs éléments égaux; donc ces tétraèdres sont égaux.

Corollaire. Un tétraèdre est déterminé lorsque l'on connaît trois de ses faces et l'ordre dans lequel elles sont assemblées.

242. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C' (fig. 164) *sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal* SA = S'A' *compris entre deux faces égales chacune à chacune* SBA = S'B'A' *et* SCA = S'C'A'.

Car si l'on fait coïncider les faces égales SCA et S'C'A', les faces SBA et S'B'A' seront dans un même plan, puisque les dièdres SA et S'A' sont égaux. Les angles plans ASB et A'S'B' étant égaux, la ligne S'B' suivra la direction de SB; par une raison semblable, la ligne A'B' suivra la direction AB. Par conséquent, le point B' tombera en B; et les deux tétraèdres auront leurs quatre sommets communs; donc ils coïncideront dans toute leur étendue, donc ils sont égaux.

Corollaire. Un tétraèdre est déterminé quand on connaît deux de ses faces, le dièdre qu'elles forment, et la manière dont elles sont assemblées.

243. — On nomme *tétraèdres semblables* ceux qui ont leurs faces semblables chacune à chacune. Les faces semblables sont alors ce que l'on nomme les *faces homologues*. On nomme *arêtes homologues* celles qui, dans deux faces homologues, sont opposées à des angles égaux; *sommets* et *trièdres homologues*, ceux qui sont opposés à des faces homologues; et *dièdres homologues*, ceux qui sont compris entre des faces homologues.

Les trièdres homologues sont égaux, comme ayant leurs faces (ou angles plans) égales chacune à chacune, par suite de la similitude des triangles qui terminent les tétraèdres.

Les dièdres homologues sont égaux par suite de l'égalité des trièdres homologues.

Les arêtes homologues sont proportionnelles par suite de la similitude des faces homologues (118).

244. — Théorème. *Si deux tétraèdres* SABC, sabc (fig. 165) *sont semblables, leurs bases* ABC, abc *sont entre elles comme les carrés des hauteurs* SH *et* sh.

Les trièdres S et s étant égaux, on peut les faire coïncider; les points a, b, c se placeront alors en A′, B′, C′ sur les arêtes respectives SA, SB, SC. Les faces ASB, asb étant semblables, il en sera de même des triangles ASB, A′S′B′; donc A′B′ sera parallèle à AB. Par une raison semblable, A′C′ sera parallèle à AC et B′C′ à BC. Donc le plan A′B′C′ sera parallèle au plan ABC (227); et la droite SH, perpendiculaire à ABC, le sera aussi à A′B′C′. Si H′ est le point où SH rencontre A′B′C′, la droite SH′ sera donc la hauteur du tétraèdre SA′B′C′, et sera par conséquent égale à sh, puisque les deux tétraèdres SA′B′C′ et $sabc$ sont égaux.

Cela posé, les triangles ABC, A′B′C′, ayant leurs côtés parallèles, ont leurs angles égaux (208) et sont semblables; ils sont donc entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues; et l'on a

$$ABC : A'B'C' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2; \qquad (1)$$

mais la similitude des triangles ASB, A′S′B′ donne

$$AB : A'B' :: SA : SA'; \quad \text{d'où} \quad \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2. \ (2)$$

D'ailleurs les droites SA et SH étant coupées par des plans parallèles, on a aussi (231)

$$SA : SA' :: SH : SH'; \quad \text{d'où} \quad \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2 :: \overline{SH}^2 : \overline{SH'}^2; \ (3)$$

à cause des rapports communs entre les proportions (1), (2) et (3), on en tire

$$ABC : A'B'C' :: \overline{SH}^2 : \overline{SH'}^2.$$

Remplaçant A′B′C′ par son égal abc et SH′ par son égal sh, il vient enfin

$$ABC : abc :: \overline{SH}^2 : \overline{sh}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

245. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, sabc (fig. 165) *sont semblables lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient, par exemple, les trois faces ASB, ASC, BSC, respectivement semblables aux trois faces asb, asc, bsc.

Les trièdres S et s sont égaux comme ayant leurs faces égales chacune à chacune (218); donc les dièdres SA et sa sont égaux. Dès lors les trièdres A et a sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune (219); donc l'angle CAB est égal à l'angle cab. On démontrerait de la même manière que l'angle ACB est égal à l'angle acb, ou que l'angle ABC est égal à l'angle abc. Donc les triangles ABC et abc sont équiangles et par conséquent semblables. Donc les deux tétraèdres ont leurs quatre faces semblables chacune à chacune, et sont semblables d'après la définition (243).

246. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, sabc (fig. 165), *sont semblables quand ils ont un dièdre égal,* SA = sa, *compris entre deux faces semblables chacune à chacune.*

Soient les faces ABS, ACS respectivement semblables aux faces abs, acs. Les trièdres S et s sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune (219); il en résulte que les angles BSC et bsc sont égaux. Mais à cause de la similitude des faces ABS et abs on a

$$SB : sb :: SA : sa.$$

A cause de la similitude des faces ACS et *acs* on a de même

$$SC : sc :: SA : sa.$$

A cause du rapport commun entre ces deux proportions, on a donc

$$SB : sb :: SC : sc.$$

Les triangles BSC, *bsc* ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels, donc ils sont semblables.

On démontrerait de la même manière la similitude des triangles ABC et *abc*. Les deux tétraèdres ont donc leurs quatre faces semblables chacune à chacune; ils sont donc semblables d'après la définition (243).

247. — On nomme *tétraèdre tronqué* ce qui reste d'un tétraèdre quand on retranche la partie supérieure par un plan parallèle à la base.

Ainsi ABCA′B′C′ (fig. 165) est un tétraèdre tronqué. Les plans parallèles ABC, A′B′C′ sont les *bases* du tétraèdre tronqué. Sa *hauteur* est la perpendiculaire H′H menée entre les deux bases.

Il résulte de ce qui a été dit au n° 244 que les deux bases d'un tétraèdre tronqué *sont des triangles semblables*.

§ II. — Des pyramides.

248. — On nomme *pyramide* un corps géométrique SABCDE (fig. 166), terminé par un polygone ABCDE et par une suite de triangles ASB, BSC, CSD, etc.... ayant un sommet commun S et pour bases les différents côtés AB, BC, etc., du polygone. Ce polygone est ce qu'on nomme la *base* de la pyramide, et le point S est son *sommet*. On appelle *hauteur* de la pyramide la longueur de la perpendiculaire qu'on abaisserait du sommet S sur la base ABCDE (prolongée s'il était nécessaire).

On ne considère, dans la Géométrie élémentaire, que les pyramides *convexes*, c'est-à-dire dont la base est un polygone convexe (135). Les pyramides se distinguent d'après le nombre des côtés de la base. Le tétraèdre n'est autre chose qu'une pyramide *triangulaire*, parce que sa base est un triangle (240). Une pyramide est *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, etc., selon que sa base est un quadrilatère, un pentagone ou un hexagone, etc.

Une pyramide est *régulière*, lorsque sa base est un polygone régulier et que son sommet est situé sur la perpendiculaire élevée au centre de la base. Ses faces sont alors des triangles isocèles égaux, car les bases de ces triangles sont égales comme côtés d'un même polygone régulier, et ses arêtes latérales sont égales comme obliques, s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

Si l'on mène les diagonales AC, AD, etc., de la base d'une pyramide, et que par ces diagonales et par le sommet S on fasse passer des plans, ces plans prennent le nom de *plans diagonaux*. Ces plans divisent la pyramide en tétraèdres qui ont pour sommet commun le point S et pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, etc., qui composent la base de la pyramide. Tous ces tétraèdres ont même hauteur; leur nombre est égal au nombre des côtés de la base, diminué de deux (135).

249. — Deux pyramides sont dites *semblables* lorsqu'elles peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. Soient, par exemple, les deux pyramides SABCDE, *sabcde* (fig. 167); si les tétraèdres SABC, SACD, SADE, dans lesquels se décompose la première, sont respectivement semblables aux tétraèdres *sabc*, *sacd*, *sade*, dans lesquels se décompose la seconde, ces deux pyramides sont dites semblables ; et les tétraèdres semblables dont elles se composent sont dits tétraèdres *homologues*.

THÉORÈME. *Deux pyramides semblables* SABCDE, sabcde (fig. 167) *ont leurs faces homologues semblables et leurs bases semblables, et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun.*

En effet, 1° d'après la définition les tétraèdres SABC, *sabc* étant semblables, il en résulte que les faces ASB, BSC, ABC, sont respectivement semblables aux faces *asb*, *bsc*, *abc*. On démontrerait de même que les faces CSD, ACD sont semblables aux faces *csd*, *acd*, et les faces DSE, ESA, ADE aux faces *dse*, *esa*, *ade*. Maintenant, les polygones ABCDE, *abcde* étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, sont semblables ; 2° en vertu de la similitude des tétraèdres SABC, *sabc*, les dièdres SB et *sb* sont égaux (243), ainsi que les dièdres BSCA, *bsca*. En vertu de la similitude des tétraèdres SACD, *sacd*, les dièdres DSCA, *dsca*, sont égaux. Il en résulte que la somme des dièdres BSCA et DSCA, c'est-à-dire le dièdre BSCD, équivaut à la somme des dièdres *bsca* et *dsca*, c'est-à-dire au dièdre *bscd*. On démontrerait de la même manière l'égalité des dièdres CSDE, *csde*, et ainsi de suite.

Quant à l'égalité des dièdres AB et *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*, et ainsi de suite, elle résulte immédiatement de la similitude des tétraèdres considérés.

Donc ces deux pyramides ont leurs dièdres égaux chacun à chacun.

COROLLAIRES I. *Deux pyramides semblables ont leurs arêtes homologues et leurs hauteurs proportionnelles.*

Car si H et h désignent ces hauteurs, la similitude des tétraèdres SABC, *sabc* donnera les proportions (243)

$$SA : sa :: SB : sb :: AB : ab :: H : h.$$

La similitude des autres tétraèdres donnera de même :

$$SB : sb :: SC : sc :: BC : bc :: H : h,$$

$$\text{et } SC : sc :: SD : sd :: SE : se :: DE : de :: EA : ea :: H : h.$$

Donc, à cause des rapports communs,

$$SA : sa :: SB : sb :: \text{etc.} :: AB : ab :: BC : bc :: \text{etc.} :: H : h.$$

II. *Les bases de deux pyramides semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs.*

Car, les bases étant des polygones semblables, on a d'abord,

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Mais, d'après ce qu'on vient de voir,

$$AB : ab :: H : h, \text{ d'où } \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: H^2 :: h^2.$$

Donc, à cause du rapport commun,

$$ABCDE : abcde :: H^2 : h^2.$$

250. — THÉORÈME. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide* SABCDE (fig. 168) *détermine par sa rencontre avec les faces latérales un polygone* abcde *semblable à la base* ABCDE.

En effet, les droites *ab* et AB sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles *abcde*, ABCDE, par un troisième ASB (228). Il en est de même des droites *bc* et BC, *cd* et CD, *de* et DE, etc. Les polygones *abcde*, ABCDE, ont donc leurs angles égaux chacun à chacun, comme ayant des côtés parallèles (208).

En vertu des mêmes parallélismes, on a d'ailleurs

$$ab : AB :: Sb : SB;\ Sb : SB :: bc : BC :: Sd : SD;$$
$$Sd : SD :: cd : CD :: Se : SE, \text{ et ainsi de suite.}$$

Donc, à cause des rapports communs,

$$ab : AB :: bc : BC :: cd : CD, \text{ etc.}$$

Les polygones *abcde*, ABCDE, ont donc leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels; donc ils sont semblables (139).

Remarque. Le corps géométrique *abcde*ABCDE, qui reste d'une pyramide, quand on enlève la partie supérieure par un plan parallèle à la base, est ce qu'on nomme une *pyramide tronquée*. Les polygones semblables *abcde*, ABCDE, dont les plans sont parallèles, sont les deux *bases* du tronc de pyramide. On nomme *hauteur* d'un tronc de pyramide la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de l'une des deux bases sur l'autre (230, Coroll.).

§ III. — Des prismes.

251. — On nomme *prisme* un corps géométrique, tel que ABCDEFGHIK (fig. 169), dont deux faces, appelées *bases*, ABCDE et FGHIK, sont des polygones égaux et parallèles; et dont toutes les autres faces ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK, sont des parallélogrammes.

La *hauteur* d'un prisme est la distance de ses deux bases.

Toutes les arêtes latérales AF, BG, CH, DI, etc., qui réunissent les deux bases, sont égales et parallèles; car deux de ces arêtes consécutives sont toujours des côtés opposés d'un même parallélogramme.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leurs

bases; un prisme est triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, etc., suivant que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

Tout plan mené par deux arêtes latérales qui n'appartiennent pas à une même face, est ce qu'on appelle un plan diagonal. Les plans diagonaux menés par une même arête AF divisent le prisme total en prismes triangulaires de même hauteur ABCFGH, ACDFHI, ADEFIK. Le nombre de ces prismes triangulaires est égal au nombre des côtés de l'une des bases, diminué de deux.

Dans la Géométrie élémentaire, on ne considère que les prismes *convexes*, c'est-à-dire dont les bases sont des polygones convexes.

252. — Théorème. *Si l'on coupe un prisme* ABCDEFGHIK (fig. 169) *par un plan parallèle aux bases, la section* LMNOP *est un polygone égal à chacune de ces bases.*

En effet, les droites LM et AB sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles LMNOP et ABCDE par un troisième ABGF. La figure ABML est donc un parallélogramme, et l'on a $LM = AB$. On démontrerait de même que les droites MN, NO, OP, PL sont respectivement égales et parallèles aux droites BC, CD, DE, EA. Les deux polygones LMNOP et ABCDE ont donc leurs côtés égaux chacun à chacun, et de plus leurs angles égaux chacun à chacun comme ayant des côtés parallèles; ces deux polygones sont donc égaux.

253. — Un prisme est *droit* quand ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Toutes ses faces latérales sont alors des rectangles.

Un prisme droit est *régulier* quand ses bases sont des polygones réguliers.

On nomme *prisme tronqué* ce qu'il reste d'un prisme quand on enlève la partie supérieure par un plan non parallèle aux bases. La section faite par ce plan diffère ordinairement de la base du prisme entier, et les faces latérales du prisme tronqué sont en général des trapèzes.

254. — On nomme *parallélépipède* un prisme dont les bases sont des parallélogrammes. La figure 170 représente un parallélépipède.

Les faces opposées, telles que AEHD, BFGC, sont des parallélogrammes égaux. Car AE est égal et parallèle à BF, puisque ce sont des côtés opposés d'un même parallélogramme ABFE ; de même AD et BC sont égaux et parallèles, comme côtés opposés d'un même parallélogramme ABCD; de plus, les angles DAE et CBF sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens ; par conséquent les parallélogrammes AEHD et BFGC sont égaux.

De plus, les plans de ces parallélogrammes sont parallèles (227).

Il résulte de là que deux faces opposées quelconques d'un parallélépipède peuvent être prises pour bases du prisme ; sa hauteur est alors la distance mutuelle de ces faces.

Tout plan diagonal, tel que ACGE, divise un parallélépipède en prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, qui ont des bases égales, comme moitiés d'un même parallélogramme, et qui de plus ont même hauteur.

On nomme *diagonale* d'un parallélépipède toute droite, telle que AG, qui joint deux sommets opposés, A et G, c'est-à-dire deux sommets qui ne font point partie d'une même face.

255. — Un parallélépipède est *droit* lorsque ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Les faces latérales sont alors des rectangles; les bases seules sont des parallélogrammes obliques.

On nomme *parallélépipède rectangle* un parallélépipède droit dont les bases sont des rectangles.

Dans un parallélépipède rectangle (fig. 170) tous les dièdres sont droits. Pour démontrer, par exemple, que le dièdre BF est droit, on remarquera que les angles ABF et FBC étant droits, puisque les faces ABFE et FBCG sont des rectangles, l'angle ABC mesure l'inclinaison mutuelle de ces deux faces ; or, cet angle ABC est droit, puisque ABCD est un rectangle ; donc le dièdre BF est droit.

Chaque arête est perpendiculaire aux deux faces auxquelles elle aboutit. L'arête EH, par exemple, est perpendiculaire aux faces ABFE et DCGH ; car EH est perpendiculaire aux deux droites AE et EF qui passent par son pied dans le plan ABFE, et aux deux droites HD et HG qui passent par son pied dans le plan DCGH.

Les trois arêtes AB, AD, AE, qui aboutissent à un même sommet A, sont ce que l'on appelle les trois *dimensions* d'un parallélépipède rectangle. On les désigne souvent sous les noms de *longueur*, *largeur* et *hauteur ;* quelquefois on remplace l'une de ces deux dernières dénominations par celle d'*épaisseur* ou de *profondeur*.

256. — Théorème. *Deux parallélépipèdes rectangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs dimensions égales chacune à chacune.*

En effet, les bases inférieures ayant les mêmes dimensions, sont des rectangles de même base et de même hauteur, par conséquent superposables. Si l'on fait coïncider ces rectangles, les arêtes latérales prendront deux à deux les mêmes directions perpendiculaires aux bases inférieures devenues communes. Mais ces arêtes latérales qui mesurent la troisième dimension des deux parallélépipèdes rectangles sont égales, par conséquent les extrémités de ces arêtes coïncideront deux à deux. Les deux parallélépipèdes rectangles auront donc tous leurs sommets communs, et coïncideront, par conséquent, dans toute leur étendue; donc ils sont égaux.

Remarque. On peut encore énoncer ce théorème de cette manière : *Deux parallélépipèdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux.*

COROLLAIRE. Un parallélépipède rectangle est déterminé quand on connaît ses trois dimensions, ou quand on connaît sa base et sa hauteur.

257. — THÉORÈME. *Dans tout parallélépipède rectangle* ABCDEFGH (fig. 170), *le carré d'une diagonale* AG *équivaut à la somme des carrés des trois dimensions.*

En effet, l'arête GC étant perpendiculaire sur le plan ABCD, le triangle AGC est rectangle en C, et l'on a

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2.$$

Mais le triangle ACB étant aussi rectangle, on a de même

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Remplaçant, dans l'égalité précédente, $\overline{AC}^2$ par cette valeur, il vient

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2,$$

ou bien

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

APPLICATION NUMÉRIQUE. Soient $AB = 9^{m.}$; $AD = 6^{m.}$; $AF = 2^{m.}$,

on aura $\overline{AG}^2 = 81^{m.c.} + 36^{m.c.} + 4^{m.c.} = 121^{m.c.}$,

d'où $AG = 11^{m.}$

COROLLAIRE. Cette proposition démontre que toutes les diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales. Ces diagonales sont au nombre de quatre.

258. — On donne le nom de *cube* à un parallélépipède rectangle, dont les trois dimensions sont égales entre elles. Ses six faces sont alors des carrés égaux. Toutes ses arêtes sont donc égales.

Deux cubes sont égaux lorsqu'ils ont la même arête (256). Un cube est déterminé lorsque l'on connaît son arête.

Il suit du théorème précédent (257) que le carré de la diagonale d'un cube est le triple du carré de son arête.

§ IV. — Des polyèdres.

259. — On donne le nom de *polyèdre* à tout corps géométrique terminé par des plans. Ces plans sont les *faces* du polyèdre ; les droites qui terminent les faces sont ses *arêtes;* les extrémités des arêtes sont ses *sommets.* Toute droite joignant deux sommets qui n'appartiennent pas à une même face est une *diagonale* du polyèdre. Tout plan mené par trois sommets, qui n'appartiennent pas à une même face, est un *plan diagonal.*

On ne considère dans la Géométrie élémentaire que les polyèdres *convexes,* c'est-à-dire, dont la surface ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Si par l'un des sommets A (fig. 171) d'un polyèdre on mène des droites à tous les autres sommets, on détermine une série de pyramides, telles que ABCDE, qui ont pour sommet commun le point A, et pour bases les différentes faces du polyèdre, à l'exception de celles qui aboutissent au point A ; et l'ensemble de ces pyramides forme le polyèdre lui-même.

Tout polyèdre peut donc se décomposer en pyramides; et comme chaque pyramide peut, à son tour, se diviser en tétraèdres (248), il s'ensuit que tout polyèdre peut se décomposer en tétraèdres, ayant pour sommet commun l'un des sommets du polyèdre.

260. — On nomme polyèdres *semblables* ceux qui peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Ces pyramides semblables sont dites *pyramides homologues*. Les arêtes des pyramides homologues sont des arêtes ou des diagonales homologues des polyèdres. Leurs faces homologues sont celles qui sont terminées par des arêtes homologues.

Les extrémités des arêtes homologues sont les sommets homologues des polyèdres. La figure 171 représente deux polyèdres semblables.

THÉORÈME. *Deux polyèdres semblables ont leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et leurs dièdres égaux chacun à chacun.*

En effet : 1° si l'on considère deux faces homologues des deux polyèdres, il ne peut se présenter que deux cas. Ou ces faces sont des faces ou des bases de pyramides semblables, et alors elles sont semblables (249); ou elles se composent d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, comme faces homologues de pyramides semblables; et alors encore elles sont semblables.

2° Si l'on considère deux dièdres de deux polyèdres, il ne peut également se présenter que deux cas. Ou ces dièdres sont homologues dans deux pyramides semblables, et alors ils sont égaux (249); ou ces dièdres se composent d'un même nombre de dièdres égaux chacun à chacun, comme homologues dans des pyramides semblables; et alors encore ils sont égaux.

COROLLAIRE. De la similitude des faces homologues résulte la proportionnalité des arêtes homologues; et cette proportionnalité s'étend évidemment aux diagonales homologues, puisqu'elles sont elles-mêmes des arêtes homologues de pyramides semblables.

§ V. — Des corps ronds.

261. — On considère, dans la Géométrie élémentaire, outre les polyèdres, des corps limités en tout ou en partie par des surfaces courbes; ces corps sont au nombre de trois : le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*. On les réunit sous la désignation commune de *corps ronds*.

262. — Un *cylindre* est un corps engendré par un rectangle ABCD (fig. 172) qui tournerait autour de l'un de ses côtés AB. Les côtés AD et BC engendrent ainsi des cercles égaux dont les plans sont perpendiculaires à AB, et qui ont pour centres les points A et B. Le côté CD engendre une surface courbe à laquelle on donne le nom de *surface cylindrique*. La droite AB, autour de laquelle est supposée s'exécuter la rotation, s'appelle l'*axe* du cylindre; les cercles AD et BC sont ses *bases*; la droite AB qui mesure aussi la distance des deux bases se nomme la *hauteur* du cylindre.

Un cylindre peut être considéré comme un prisme régulier (253) dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

263. — On nomme *cylindres semblables* ceux qui sont engendrés par des rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues.

THÉORÈME. *Les bases de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs.*

Car, si l'on nomme R et r les rayons des bases, H et h les hauteurs, on aura, d'après la définition,

$$R : r :: H : h; \quad \text{d'où} \quad R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

ou, en multipliant par π les deux termes du premier rapport,

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: H^2 : h^2,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème, puisque les bases des cylindres ont respectivement pour mesure πR^2 et πr^2.

264. — Un *cône* est un corps engendré par un triangle rectangle ABC (fig. 173) qui tournerait autour de l'un des côtés AB de l'angle droit. Le côté BC engendre un cercle dont le centre est en B, et dont le plan est perpendiculaire à AB; l'hypoténuse AC engendre une surface courbe que l'on appelle *surface conique*.

La droite AB autour de laquelle est supposée s'exécuter la rotation s'appelle l'*axe* du cône; le cercle BC est sa *base*, le point A son *sommet*, la ligne AC sa *génératrice*. La droite AB qui mesure la distance du sommet à la base s'appelle aussi la *hauteur* du cône.

Un cône peut être considéré comme une pyramide régulière (248) dont la base serait un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

265. — Deux cônes sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables tournant autour d'un côté homologue de l'angle droit.

THÉORÈME. *Les bases de deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs.*

Même démonstration qu'au n° 263.

266. — Si, dans le triangle générateur ABC, on mène DE parallèle à BC, cette droite, dans la rotation du triangle, décrira un cercle dont le centre sera le point D, et dont le plan sera perpendiculaire à l'axe AB, et parallèle par conséquent au plan du cercle BC. La portion de cône comprise entre les cercles parallèles BC et DE est ce que l'on nomme un *tronc de cône*. Les deux cercles BC et DE sont les deux *bases* du tronc de cône; la portion DB de l'axe comprise entre les deux bases, et qui mesure leur distance, est la *hauteur* du tronc de cône; la portion EC de l'hypoténuse AC est sa *génératrice* ou son *côté*.

Un tronc de cône peut être regardé comme une pyramide régulière tronquée, dont les bases sont des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

On peut remarquer que le petit cône ADE est semblable au cône total; car les triangles générateurs ADE et ABC sont semblables.

267. — Une *sphère* est un corps engendré par un demi-cercle ABC (fig. 174) qui tournerait autour de son diamètre AB. Ce corps est terminé par une surface unique qu'on appelle *surface sphérique*. On désigne souvent cette surface par le mot *sphère* lui-même; mais le sens du discours indique toujours suffisamment s'il s'agit de cette surface ou du corps géométrique qu'elle termine.

Il résulte du mode même de génération de la sphère que tous les points de sa surface sont également distants du centre O du demi-cercle générateur, point que l'on nomme pour cette raison le *centre* de la sphère. On peut définir la surface sphérique, en disant que *tous ses points sont également distants d'un point intérieur nommé centre.*

On nomme *rayon* toute droite qui joint le centre à un point de la surface; d'après ce que nous venons de dire, *tous les rayons sont égaux.*

On nomme *diamètre* toute droite qui passe par le centre, et se termine de part et d'autre à la surface de la sphère. Chaque diamètre se compose ainsi de deux rayons ; d'où il suit que *tous les diamètres sont égaux*.

268. — Théorème. *Tout diamètre d'une sphère peut être pris pour son axe de révolution.*

Soit, en effet, AB (fig. 174) un diamètre quelconque. Par ce diamètre faisons passer un plan : il coupera la surface sphérique suivant une ligne courbe ACB, qui aura tous les points à égale distance du centre O ; cette courbe sera donc une circonférence de cercle ayant AB pour diamètre. Par la ligne AB, faisons passer un second plan quelconque ; il coupera la surface sphérique suivant une courbe ADB, qui aura tous ses points à égale distance du point O centre de la sphère ; ce sera donc aussi une circonférence de cercle ayant pour diamètre AB. Et comme le plan ADB est quelconque, on voit que la sphère peut être considérée comme engendrée par la révolution du demi-cercle ACB autour de son diamètre AB.

269. — Théorème. *Toute section de la sphère par un plan est un cercle.*

Soit, en effet, EFG (fig. 174) la courbe déterminée sur la surface de la sphère par son intersection avec un plan. Du centre O de la sphère, abaissons sur ce plan une perpendiculaire OI ; prenons sur la courbe EFG deux points quelconques E et F, et joignons EO, FO, EI, FI. Les triangles OIE, OIF, rectangles en I, puisque OI est perpendiculaire au plan EFG, ont en outre le côté OI commun, et des hypoténuses OE et OF égales comme rayons d'une même sphère ; ces deux triangles sont donc égaux, et l'on a $EI = FI$. Et comme les points E et F sont deux points quelconques de la courbe EFG, il s'ensuit que cette courbe a tous ses points également distants du point I ; c'est-à-dire que c'est une circonférence de cercle, dont le centre est le pied I de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan coupant.

Remarques. I. Lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphère, le cercle d'intersection a pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphère. Mais si le plan coupant ne passe pas par le centre de la sphère, comme le plan EFG par exemple, le rayon EI du cercle d'intersection, lequel rayon est perpendiculaire sur IO, est moindre que l'oblique OE, ou moindre que le rayon de la sphère.

C'est pour cette raison qu'une section dont le plan passe par le centre de la sphère se nomme un *grand cercle* de la sphère, tandis que si le plan de la section ne passe pas par le centre de la sphère, cette section prend le nom de *petit cercle*. Ainsi ACB, ADB, CDH, sont des grands cercles, et EFG est un petit cercle.

II. Un petit cercle est d'autant moindre qu'il est plus éloigné du centre de la sphère. Car le triangle rectangle OIE donne

$$\overline{OI}^2 + \overline{IE}^2 = \overline{OE}^2\,;$$

et, comme le second membre est constant pour une même sphère, on voit que le terme $\overline{IE}^2$ devra être d'autant moindre que le terme $\overline{OI}^2$ sera plus grand ; c'est-à-dire, que le rayon IE du petit cercle sera d'autant moindre que la distance OI du plan de ce cercle au centre de la sphère sera plus grande.

270. — Théorème. *Tout grand cercle divise la sphère en deux parties égales.*

Soit, en effet, CDH (fig. 174) la circonférence d'un grand cercle.

Renversons la portion inférieure de la sphère de manière à ce qu'elle occupe une position analogue à celle de la portion supérieure, et que ces deux portions de sphère coïncident suivant la circonférence CDH. Dans ce mouvement, les distances des différents points de la portion inférieure de la surface sphérique au point O n'auront point changé; par conséquent, si les deux portions de surface ne coïncidaient point dans toute leur étendue, il y aurait des points inégalement distants du centre, ce qui est contraire à la propriété fondamentale de la surface sphérique. Donc il faut que ces deux portions de surface coïncident; donc elles sont égales.

Remarque. Les deux moitiés de surface sphérique, séparées par un grand cercle, portent le nom d'*hémi-sphères*.

271. — Lorsqu'un diamètre AB (fig. 174) est pris pour axe de révolution d'une sphère, le plan mené perpendiculairement à cet axe par le centre O, coupe la surface de la sphère suivant un grand cercle CDH qui porte le nom d'*équateur*. Les extrémités A et B de l'axe se nomment *pôles*. Les cercles déterminés par des plans parallèles à l'équateur se nomment des *cercles parallèles*, ou simplement des *parallèles*; tel est le cercle EFG. Les cercles déterminés par des plans qui passent suivant l'axe AB se nomment des *cercles méridiens*, ou simplement des *méridiens*; tels sont les cercles ACB, ADB.

Toutes ces dénominations sont empruntées à la géographie. Le globe que nous habitons peut être considéré comme sensiblement sphérique. La droite autour de laquelle s'exécute le mouvement de rotation diurne qui produit le jour

et la nuit, s'appelle l'*axe* de la terre; les extrémités de cet axe sont les *pôles*. Le plan mené par le centre de la terre perpendiculairement à son axe se nomme le plan de l'*équateur*, parce que, lorsque le soleil est dans ce plan, la durée de la nuit égale celle du jour dans toutes les parties du globe. Tout cercle mené suivant l'axe de la terre se nomme un *méridien*, parce que, lorsque le soleil est dans ce plan, il est midi ou minuit pour tous les lieux du globe par lesquels ce cercle passe.

272. — On nomme *calotte sphérique* la portion de la surface de la sphère qui serait détachée par un plan. Ainsi la portion de sphère supérieure au plan EFG (fig. 174) est une calotte sphérique. On peut la supposer engendrée par un arc de cercle AE tournant autour du diamètre AB, qui passe par l'une de ses extrémités. La *hauteur* de la calotte est la portion de l'axe AB comprise entre le pôle A et le centre I du petit cercle qui termine la calotte.

On nomme *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles parallèles; ainsi la portion comprise entre les cercles EFG et CDH est une zone. La *hauteur* de la zone est la portion de l'axe comprise entre les centres des deux cercles parallèles.

On nomme *segment sphérique* le volume compris entre une calotte sphérique et le plan qui le termine. Ce plan est la *base* du segment.

On nomme *secteur sphérique* le volume engendré par un secteur de cercle tournant autour de l'un des rayons qui le terminent. Ainsi EOA, tournant autour de OA, engendrerait un secteur sphérique. La calotte engendrée par l'arc AE se nomme la base du secteur sphérique.