CHAPITRE III.

De la mesure des surfaces et des volumes.

§ I. — De la mesure des surfaces.

273. — Toutes les faces d'un polyèdre étant des polygones dont nous savons évaluer l'aire, nous aurons peu de chose à ajouter sur ce sujet.

Théorème. *La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le produit de sa hauteur par le périmètre de sa base.*

En effet : cette surface latérale se compose d'une série de rectangles qui ont pour hauteur celle du prisme. Soient H cette hauteur, et B, B′, B″, etc., les bases des rectangles, ou les côtés de la base du prisme ; la surface à évaluer aura pour expression :

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.}$$

ou $$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H ;$$

c'est-à-dire le produit du périmètre de la base par la hauteur.

Application. *Combien faudrait-il d'une étoffe qui a* $1^{m},20$ *de large pour recouvrir les murs d'un salon octogone dont la hauteur est de* $3^{m},24$ *et dont chaque mur a* $2^{m},5$ *de large?*

La superficie totale des murs est celle d'un prisme droit dont la hauteur est de $3^{m},24$, et dont la base a pour périmètre $2^{m},5 \times 8$ ou 20^{m}. Cette superficie a donc pour expression $3^{m},24 \times 20$ ou $64^{m.c.},80$. Divisant par $1^{m},20$, le quotient 54^{m} sera la longueur d'étoffe demandée.

274. — Théorème. *La surface latérale d'un cylindre a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence de sa base.*

Car le cylindre pouvant être considéré comme un prisme droit dont la base est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, on peut appliquer le théorème précédent en remplaçant le périmètre de la base du prisme par la circonférence de la base du cylindre.

Si H désigne la hauteur et R le rayon de la base, on aura donc pour l'expression de la surface $2\pi R \times H$.

Application. Si l'on veut connaître la quantité de tôle nécessaire pour construire un tuyau de 8^{m} de long et de $0^{m},6$ de diamètre, on aura à effectuer le produit $8^{m} \times 0^{m},6 \times 3^{m},1416$; ce qui donne $15^{m.c.},07968$ ou à peu près $15^{m.c.},08$.

275. — Théorème. *La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la moitié de la perpendiculaire abaissée de son sommet sur l'un des côtés de cette base.*

En effet : cette surface latérale se compose d'une série de triangles isocèles égaux : soient l la hauteur commune de ces triangles, B la base de l'un d'eux, et n le nombre de ces triangles. L'aire de l'un d'eux aura pour expression $\frac{1}{2} l B$; la surface totale aura donc pour expression $\frac{1}{2} l B \times n$ ou $\frac{1}{2} l \times Bn$. Or, Bn n'est autre chose que le périmètre de la base ; cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

276. — Théorème. *La surface latérale d'un cône a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de sa base par sa génératrice.*

En effet : un cône peut être considéré comme une pyramide régulière dont la base est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits. On peut donc appliquer le théorème précédent, en remarquant que le périmètre de la base de la pyramide devient la circonférence de la base du cône ; et que la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur l'un des côtés de la base, devient la génératrice même du cône.

Si donc on désigne par R le rayon de la base du cône, et par C sa génératrice, sa surface aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}.\,2\pi R.C, \quad \text{ou simplement} \quad \pi RC.$$

Application. Supposons que le toit conique d'une tour ronde ait $8^m,5$ de diamètre à sa base, et que sa génératrice ait $6^m,4$; la superficie de ce toit aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}.\,6^m,4 \times 8^m,5 \times 3^m,1416, \text{ ou } 85^{m.c.},45...$$

277. — Théorème. *La surface latérale d'une pyramide régulière tronquée a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses bases par la hauteur d'une de ses faces.*

En effet : cette surface se compose d'une série de trapèzes égaux. Soient B et b les bases inférieure et supérieure de l'un de ces trapèzes, h sa hauteur et n le nombre des faces. L'expression de l'aire d'un de ces trapèzes sera $\frac{1}{2}(B+b)\times h$; celle de la surface totale sera donc $\frac{1}{2}(B+b)\times h\times n$; valeur que l'on peut écrire $\frac{1}{2}.(Bn+bn)\times h$.

Or Bn n'est autre chose que le périmètre de la base inférieure de la pyramide tronquée, et bn est le périmètre de sa base supérieure. Cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

278. — Théorème. *La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure la demi-somme des circonférences de ses bases multipliée par sa génératrice.*

En effet : un tronc de cône peut être considéré comme une

pyramide régulière tronquée dont les bases seraient des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés infiniment petits. On peut donc appliquer le théorème qui précède, en remarquant que les périmètres des deux bases du tronc de pyramide doivent être remplacés par les circonférences des deux bases du tronc du cône, et que la hauteur de l'un des trapèzes qui sert de face latérale au tronc de pyramide devient la génératrice même du tronc de cône.

Si donc on nomme R et r les rayons des deux bases, et c la génératrice, l'expression de la surface du tronc de cône sera :

$$\tfrac{1}{2}.\,(2\pi R+2\pi r).\,c \text{ ou } \pi.(R+r).\,c.$$

Application. Imaginons un bassin circulaire dont la paroi ait un talus ; cette paroi formera la surface latérale d'un tronc de cône. Supposons que les rayons des deux bases soient respectivement de 7^m et de 6^m ; et que la génératrice ait 3^m ; l'expression de la superficie de la paroi sera

$$3,1416 \times (7^m+6^m) \times 3^m, \text{ ou } 122^{m.c},5224.$$

279. — L'aire de la surface latérale du cône tronqué est susceptible de deux autres expressions qu'il est utile de connaître.

I. *La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure le produit de sa génératrice par la circonférence de la section faite à égale distance des deux bases, parallèlement à ces bases.*

Soit en effet ABDC (fig. 175) le trapèze qui engendre le tronc de cône. Joignons les milieux I et H des côtés non parallèles. Cette droite sera parallèle aux deux bases, et par conséquent perpendiculaire à l'axe AC. Dans sa rotation autour de cet axe, elle décrira donc un cercle perpendiculaire à l'axe et ayant le point H pour centre. De plus, la circonférence de ce cercle sera égale à la demi-somme des circonférences des deux bases. Car I H est la demi-somme des droites A B et C D (129) ; et comme les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, la circonférence qui a pour rayon I H est la demi-somme de celles qui ont pour rayons A B et C D. Or, la surface du tronc de cône a pour expression

$$\tfrac{1}{2}.\ (\text{circonf. AB} + \text{circonf. CD}) \times \text{BD};$$

on pourra donc écrire aussi

$$\text{circonf. IH} \times \text{BD};$$

ce qu'il fallait démontrer.

II. *La surface latérale d'un tronc de cône* A B C D (fig. 175) *a pour mesure le produit de la hauteur* A C *par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire* I O *élevée au milieu de sa génératrice, jusqu'à la rencontre de l'axe.*

Pour le prouver, menons B K parallèle à A C ; ces deux droites seront égales. Les triangles B D K et I O H sont semblables ; car ils sont rectangles, l'un en K, l'autre en H, et de plus les angles K B D et H I O sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (77). On a donc entre leurs côtés homologues la proportion

$$\text{IH} : \text{BK} :: \text{IO} : \text{BD},$$

d'où $$\text{IH} \times \text{BD} = \text{IO} \times \text{BK} = \text{IO} \times \text{AC}.$$

Multipliant les deux membres par 2π, il vient

$$2\pi \text{IH} \times \text{BD} = 2\pi \text{IO} \times \text{AC}.$$

Or, en vertu de la proposition précédente, le premier membre de cette égalité est l'expression de la surface du tronc de cône ; le second membre, c'est-à-dire le produit de la circonférence dont le rayon est I O par la hauteur du tronc de cône, est donc une nouvelle expression de la même surface.

Remarque. Cette dernière expression serait applicable au cône entier ; car elle subsiste quelque petite que soit la base supérieure du tronc de cône, et subsisterait par conséquent encore si cette base se réduisait à zéro, c'est-à-dire si le tronc de cône devenait un cône entier.

280. — LEMME. *La surface engendrée par une portion de polygone régulier* A B C D... (fig. 176) *tournant autour du rayon* A O *qui passe par l'une de ses extrémités, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite, par la portion de l'axe* A O *comprise entre le point* A *et le pied* P *de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité* D *sur l'axe.*

Abaissons sur l'axe les perpendiculaires B M, C N..., D P. Soient $i, h, \ldots k$, les milieux des côtés ; joignons Oi, $Oh\ldots$, Ok, ces lignes seront égales, et représenteront le rayon de la circonférence inscrite.

La surface engendrée par A B C D, se composera du cône engendré par A B et des troncs de cône engendrés par les côtés consécutifs B C, ...C D. Ces surfaces partielles, en vertu de ce qui a été établi ci-dessus (279, II), auront respectivement pour expressions...

$$\text{circonf. } Oi \times \text{AM}, \quad \text{circonf. } Oh \times \text{MN}, \ldots,$$
$$\text{circonf. } Ok \times \text{NP}.$$

Faisant la somme, en remarquant que circonf. Oi est un facteur commun, on obtient pour l'expression de la surface totale

$$\text{circonf. } Oi \times (\text{AM} + \text{MN} + \ldots + \text{NP}),$$

ou bien $\quad$ circonf. $Oi \times AP$;

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

281. — Théorème. *L'aire d'une calotte sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

En effet, une calotte sphérique peut être considérée comme engendrée par une portion de polygone régulier dont les côtés seraient infiniment petits et en nombre infiniment grand. La circonférence inscrite n'est alors autre chose que la circonférence même dont l'arc générateur de la calotte fait partie; et la portion de l'axe comprise entre l'une des extrémités de l'arc et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité sur l'axe, n'est autre chose que la hauteur de la calotte.

Si donc on désigne par h cette hauteur et par R le rayon de l'arc générateur, ou, ce qui revient au même, le rayon de la sphère, l'expression de la surface de la calotte sera

$$2\pi R \times h.$$

Corollaire. *La surface d'une zone a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

On peut remarquer en effet qu'une zone, telle que celle qui est comprise entre les cercles EFG et CDH (fig. 174), peut être considérée comme étant la différence entre deux calottes, savoir : entre la calotte engendrée par l'arc AC et la calotte engendrée par l'arc AE. L'expression de sa surface est donc $\quad 2\pi R \times AO - 2\pi R \times AI$,

ou bien $\quad 2\pi R \times (AO - AI)$, $\quad$ ou enfin $\quad 2\pi R \times OI$.

Or, OI est précisément la hauteur de la zone; cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

282. — Théorème. *L'aire d'une sphère équivaut à celles de 4 grands cercles.*

En effet, si l'on veut appliquer à la demi-sphère l'expression trouvée pour une calotte quelconque, il suffit de remarquer que dans ce cas la hauteur AO (fig. 174) n'est autre chose que le rayon. L'expression de la surface de la demi-sphère est donc $\quad 2\pi R \times R \quad$ ou $\quad 2\pi R^2$. $\quad$ Celle de la surface totale de la sphère est par conséquent $4\pi R^2$, c'est-à-dire égale à 4 fois πR^2 ou à 4 fois la surface d'un grand cercle.

Applications. I. *Le globe terrestre pouvant être considéré comme une sphère dont le rayon est de* $636^{myr.},62$, *on demande sa surface.*

L'expression de cette surface est :

$$4 \times 3{,}1415926 \times (636^{myr.},62)^2.$$

En effectuant ce calcul, on trouve $5092962^{myr.\ car.}$, et une fraction qu'il convient de négliger.

II. — *La hauteur de la calotte sphérique qui forme chaque zone glaciale est d'environ* $52^{myr.},65$; *quelle est la superficie de cette zone?*

L'expression de cette superficie est :

$$2 \times 3{,}1415926 \times 636^{myr.},62 \times 52^{myr.},65.$$

En effectuant le calcul on trouve $\quad 210600^{myr.\ car.}$.

III. — *Quel rayon faut-il donner à une sphère pour que sa surface soit équivalente à 1 mètre carré?*

La surface de cette sphère étant 1 m. carré, l'aire d'un grand cercle en est le quart ou $0^{m.\ c.},25$. Or l'aire d'un cercle est le produit du nombre π par le carré de son rayon; divisant $0^{m.\ c.},25$ par $3{,}1415926$ on aura donc le carré du rayon demandé; on trouve $0^{m.\ c.},079577$... La racine carrée de ce nombre, ou $0^{m.},282$... est le rayon demandé.

§ II. — De la mesure des volumes.

283. — Mesurer le volume d'un corps, c'est le comparer à un autre volume pris pour unité. On choisit pour unité de volume le volume d'un cube qui a pour arête 1 mètre, et auquel on donne le nom de *mètre cube*. L'évaluation des volumes géométriques se ramène toujours à des mesures de longueur.

284. — THÉORÈME. *Le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

Soit MB (fig. 177) le parallélépipède proposé. L'énoncé qui précède signifie que, pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans ce parallélépipède, il faut chercher le nombre d'unités de longueur contenues dans les trois arêtes AB, AC, AD, qui aboutissent à un même sommet A, et faire le produit de ces trois nombres.

En effet : supposons, pour fixer les idées, que l'arête AB contienne 4 fois l'unité de longueur *ab*, et que les arêtes AC et AD la contiennent respectivement 5 fois et 7 fois. Divisons AB en 4 parties égales, et, par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AB ; divisons AC en 5 parties égales, et par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AC; enfin, divisons AD en 7 parties égales, et par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AD.

Le parallélépipède MA se trouvera ainsi divisé en petits parallélépipèdes rectangles, qui auront tous pour hauteur, pour largeur et pour épaisseur l'unité de longueur *ab* (226, 230, coroll.). Ces petits parallélépipèdes rectangles seront donc des cubes, ayant pour arête l'unité de longueur, c'est-à-dire que ce seront des unités de volume ; et il ne reste plus qu'à déterminer leur nombre.

Or, le long de l'arête AB, on compte autant de ces petits cubes qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire 4 ; ces 4 petits cubes forment une sorte de colonne posée horizontalement. Le long de l'arête AD, on peut compter autant de colonnes analogues qu'il y a d'unités dans AD, c'est-à-dire 7 ; et ces 7 colonnes composent une sorte de tranche horizontale. Enfin, le long de l'arête AC, on peut compter autant de tranches pareilles qu'il y a d'unités dans AC, c'est-à-dire 5 ; et ces 5 tranches composent le parallélépipède proposé. Le nombre total des petits cubes est donc le produit de 4 par 7 et par 5, c'est-à-dire 140 ; le parallélépipède proposé contient donc 140 unités de volume.

Ces raisonnements sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans chaque arête. Si l'unité de longueur n'était pas contenue un nombre exact dans chaque arête, il faudrait recourir à des unités de plus en plus petites, jusqu'à ce que cette condition fût remplie, ce qui finirait toujours par arriver dans la pratique.

COROLLAIRE. Dans le cas où le parallélépipède rectangle proposé est un cube, les trois dimensions sont égales ; et pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans ce cube, il faut chercher le nombre d'unités de longueur contenues dans l'une de ses arêtes, et former un produit où ce nombre entre trois fois comme facteur. Si, par exemple, l'arête du cube proposé contient 2 unités de longueur, le cube contiendra $2 \times 2 \times 2$ ou 8 unités de volume. Si l'arête contient 3 unités de longueur, le cube contiendra $3 \times 3 \times 3$ ou 27 unités de volume ; et ainsi de suite.

C'est pour cela que l'on donne, en arithmétique, le nom de *cube* à un produit de trois facteurs égaux.

Un centimètre valant 10 millimètres, un centimètre cube vaut $10 \times 10 \times 10$ ou 1000 millimètres cubes. Par la même raison, un décimètre cube vaut 1000 centimètres cubes; un mètre cube vaut 1000 décimètres cubes; et ainsi de suite.

Applications numériques. I. *Quel est le volume d'air contenu dans une salle rectangulaire qui a* $10^{m},42$ *de long sur* $7^{m},51$ *de large et* $3^{m},85$ *de haut?*

Le volume demandé, exprimé en centimètres cubes, sera le produit des trois nombres 1042, 751 et 385, c'est-à-dire 301278670 centimètres cubes; ce qui revient à $301^{\text{m.cub.}}$; $278^{\text{décim. cub.}}$, $670^{\text{cent. cub.}}$.

II. — *Une pile de bois a* $13^{m},4$ *de long,* 5^{m} *de large et* $7^{m},2$ *de hauteur; quelle est, en stères, la quantité de bois contenue?*

Les trois dimensions équivalent à $134^{\text{déc.}}$, $50^{\text{déc.}}$ et $72^{\text{déc.}}$, le volume de la pile, exprimé en décimètres cubes, serait donc $134 \times 50 \times 72$ ou $482400^{\text{déc.cub.}}$. Ce nombre revient à $482^{\text{m. cub.}}$, $400^{\text{déc. cub.}}$, ou à 482 stères et 4 décistères.

III. — *Un bassin rectangulaire a* $6^{m},4$ *de long,* $3^{m},5$ *de large et* $2^{m},7$ *de profondeur; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau qu'il peut contenir?*

Le volume demandé, exprimé en décimètres cubes, serait $64^{d} \times 35^{d} \times 27^{d}$ ou $60480^{\text{déc.cub.}}$. Ce nombre revient à 60480 litres, ou à 604 hectolitres, 80 litres.

Remarque. Le produit des arêtes AB et AD du parallélépipède MB (fig. 177) exprime l'aire de sa base BD, qui est aussi celle de sa base inférieure. Pour obtenir l'expression du volume d'un parallélépipède rectangle, on n'a donc qu'à multiplier l'aire de sa base par sa hauteur; c'est-à-dire que le nombre d'unités d'aires contenues dans la base, multiplié par le nombre d'unités de longueur contenues dans la hauteur, donnera le nombre d'unités de volume contenues dans le parallélépipède proposé.

C'est ce qu'on exprime en disant que *le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Si, par exemple, la base est de 28 mètres carrés et la hauteur de 5 mètres, le volume sera de 28×5 ou 140 mètres cubes.

285. — Lemme. *Deux parallélépipèdes qui ont des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalents en volume.*

Soient, en effet, AG et A′G′ (fig. 178) deux parallélépipèdes dont les bases ABCD et A′B′C′D′ sont supposées équivalentes, et qui de plus ont même hauteur. Concevons les bases inférieures ABCD, A′B′C′D′ placées sur un même plan horizontal; les bases supérieures EFGH, E′F′G′H′ seront aussi dans un même plan horizontal, puisque les parallélépipèdes ont même hauteur. Si l'on mène un plan horizontal quelconque qui coupe les deux parallélépipèdes, les sections MNOP, M′N′O′P′ étant respectivement égales aux bases ABCD, A′B′C′D′ (252), seront équivalentes entre elles.

On peut donc considérer les deux parallélépipèdes comme composés d'un même nombre (infiniment grand) de tranches infiniment minces, équivalentes chacune à chacune; donc les deux parallélépipèdes sont équivalents.

Corollaire. On peut toujours changer un parallélépipède quelconque A′G′ en un parallélépipède rectangle équivalent AG, ayant une base équivalente et même hauteur.

286. — Théorème. *Le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, soit b la base et h la hauteur du parallélépipède. On pourra le changer en un parallélépipède rectangle équivalent, ayant une base b' équivalente à b, et même hauteur h. La mesure de ce dernier (284) aura pour mesure $b' \times h$; cette mesure sera donc aussi celle du parallélépipède proposé. Mais on peut remplacer b' par son équivalent b; la mesure demandée sera donc $b \times h$; ce qu'il fallait démontrer.

287. — LEMME. *Deux prismes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents en volume.*

Même démonstration qu'au n° 285.

COROLLAIRE. — *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélépipède ayant une base double et même hauteur.*

Car, soit ABCEFG (fig. 170) un prisme triangulaire. Achevons les parallélogrammes ABCD, EFGH, et joignons DH. Le corps géométrique ainsi obtenu sera un parallélépipède, car les six faces seront des parallélogrammes. Ce parallélépipède aura une base ABCD double du triangle ABC, et de plus même hauteur. Or, les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH qui le composent, ont des bases ABC, ACD équivalentes et même égales comme moitiés d'un même parallélogramme; d'ailleurs ils ont pour hauteur commune celle du parallélépipède; ils sont donc équivalents. Ainsi chacun d'eux, et en particulier le prisme proposé, est la moitié du parallélépipède AG, ayant une base double et même hauteur.

288. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, soient B sa base et H sa hauteur. Le volume du parallélépipède qui a même hauteur et une base double, a pour mesure $2B \times H$ (286); le volume du prisme triangulaire qui en est la moitié a donc pour mesure $B \times H$, ou le produit de sa base par sa hauteur.

289. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, tout prisme peut être divisé par des plans diagonaux en prismes triangulaires de même hauteur que lui (251). Soit H cette hauteur, B, B', B'', etc., les bases des prismes triangulaires; la somme de leurs volumes aura pour mesure

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.},$$

ou

$$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H.$$

Or, le facteur entre parenthèses, ou la somme des bases des prismes triangulaires, forme la base polygonale du prisme. Son volume a donc pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

290. — THÉORÈME. *Le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, on peut considérer un cylindre comme un prisme régulier, dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si H désigne la hauteur du cylindre, et R le rayon de sa base, l'expression de son volume sera $\pi R^2 H$.

APPLICATIONS. I. *Trouver le volume de vapeur que peut contenir le cylindre d'une machine, sachant que ce cylindre a $1^m,2$ de hauteur et $0^m,6$ de diamètre à sa base.*

L'expression du volume demandé sera

$$3{,}1416 \times (0^m,3)^2 \times 1^m,2.$$

On trouve, en effectuant ce calcul, $0^{m.c.},339293$ (en forçant le dernier chiffre), ou $339^{déc.\ cub.}\ 293^{cent.\ cub.}$.

II. — *Quel rayon faut-il donner à un réservoir cylindrique de 3^m de profondeur, pour qu'il puisse contenir 1000 hectolitres d'eau?*