Les 1000 hectolitres reviennent à 100 mètres cubes. Divisant ce volume par la hauteur, 3^{m} du cylindre; le quotient $33^{m.c.}$,3333.. exprimera la superficie du cercle dont on demande le rayon. Divisant cette superficie par π ou 3,1416, le quotient $10^{m.c.}$, 6060 sera le carré du rayon, la racine carrée de ce nombre, ou 3^{m}, 25.. sera donc le rayon demandé.

291. — LEMME. I. *Deux tétraèdres qui ont des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalents en volume.*

Soient SABC, S′A′B′C′ (fig. 179) deux tétraèdres dont nous supposerons les bases ABC, A′B′C′ équivalentes. Concevons ces bases placées dans un même plan horizontal; les sommets S et S′ seront sur une même horizontale, puisque les tétraèdres ont même hauteur.

Menons un plan horizontal quelconque qui coupe les deux tétraèdres : je dis que les sections MNP, M′N′P′ seront équivalentes.

En effet : le tétraèdre SMNP est semblable au tétraèdre SABC, comme ayant les trois faces qui aboutissent en S semblables chacune à chacune (245). Il en résulte que si h et H désignent les hauteurs de ces deux tétraèdres, on aura (244)

$$\text{MNP} : \text{ABC} :: h^2 : \text{H}^2.$$

Par une raison toute semblable, et en remarquant que puisque les tétraèdres SABC, S′A′B′C′ ont pour hauteur commune H, les tétraèdres SMNP, S′M′N′P′ ont aussi pour hauteur commune h, on aura :

$$\text{M'N'P'} : \text{A'B'C'} :: h^2 : \text{H}^2.$$

De ces deux proportions on tire, à cause du rapport commun :

$$\text{MNP} : \text{ABC} :: \text{M'N'P'} : \text{A'B'C'},$$

ou

$$\text{MNP} : \text{M'N'P'} :: \text{ABC} : \text{A'B'C'};$$

mais les bases ABC et A′B′C′ sont équivalentes; les sections MNP, M′N′P′ faites par un même plan parallèle aux bases, sont donc aussi équivalentes.

Il résulte de là que les deux tétraèdres proposés peuvent être considérés comme composés d'un même nombre (infiniment grand) de tranches infiniment minces, équivalentes chacune à chacune; et que, par conséquent, ces tétraèdres sont équivalents.

292. — LEMME II. *Tout tétraèdre est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Soit SABC (fig. 180) un tétraèdre quelconque. Achevons les parallélogrammes ABSD, CBSE, et joignons DE. Le corps géométrique ainsi obtenu sera un prisme triangulaire; car ses faces latérales seront des parallélogrammes; ses bases seront des triangles égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; et enfin, ces bases seront parallèles comme étant menées suivant les droites SD, SE et BA, BC, respectivement parallèles (227). Ce prisme triangulaire a même base ABC que le tétraèdre, et même hauteur; il reste à prouver que le tétraèdre en est le tiers.

Pour cela, joignons AE. Le prisme triangulaire pourra être considéré comme décomposé en trois tétraèdres, SABC, SACE, SAED.

Si l'on compare SABC et SACE, on voit qu'ils peuvent être regardés comme ayant même sommet A, et des bases SBC, SCE qui sont les moitiés d'un même parallélogramme CBSE. Ces tétraèdres ont donc des bases équivalentes et même hauteur; donc ils sont équivalents (291).

Si l'on compare S A C E et S A E D, on voit qu'ils peuvent être regardés comme ayant même sommet S, et des bases ACE, AED, qui sont les moitiés d'un même parallélogramme A C E D. Ces tétraèdres ont donc aussi même base et même hauteur, et sont par conséquent équivalents.

Il résulte de là que le prisme triangulaire est décomposé en trois tétraèdres équivalents. L'un quelconque d'entre eux, SABC par exemple, est donc le tiers du prisme triangulaire ABCDSE qui a même base et même hauteur.

293.—Théorème. *Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Cet énoncé signifie que, pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans un tétraèdre, il faut multiplier le nombre d'unités d'aire contenues dans sa base par le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur.

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur a pour mesure le produit de cette base par cette hauteur. Le tétraèdre qui en est le tiers a donc pour mesure le tiers de ce produit.

294. — Théorème. *Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car, toute pyramide pouvant se décomposer, par des plans diagonaux, en tétraèdres de même hauteur qu'elle (248), si l'on nomme H cette hauteur et B, B′, B″, etc., les triangles dans lesquels la base se décompose, la somme des volumes des tétraèdres aura pour mesure

$$\tfrac{1}{3}.B \times H + \tfrac{1}{3}.B' \times H + \tfrac{1}{3}.B'' \times H + \text{etc.},$$

ou

$$\tfrac{1}{3}.(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H.$$

Or, le facteur entre parenthèses exprime précisément l'aire du polygone qui sert de base à la pyramide. Le volume de

celle-ci a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

295. — Théorème. *Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car on peut considérer un cône comme une pyramide régulière, dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si H désigne la hauteur du cône et R le rayon de sa base, l'expression de son volume sera $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Application.— *Quel est le volume d'un cône dont la hauteur est de* $0^{m},50$ *et dont la base a* $0^{m},25$ *de rayon?*

L'expression du volume demandé est

$$\tfrac{1}{3}.3,1416.(0^{m},25)^2.0^{m},50.$$

En effectuant le calcul, on trouve $0^{m.\,cub.},032725$, ou $32^{dec.\,cub.}$ et $725^{cent.\,cub.}$.

296. — Tout polyèdre pouvant se décomposer en pyramides, on obtiendra son volume en faisant la somme des volumes de ces pyramides.

297. — Théorème. *Le volume d'une sphère a pour mesure le tiers du produit de sa surface par son rayon.*

En effet: on peut considérer une sphère comme composée d'une infinité de pyramides qui auraient pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases les portions infiniment petites de sa surface. La hauteur de chacune de ces pyramides se confondant sensiblement avec le rayon de la sphère, la mesure de cette pyramide sera le tiers du produit de sa base infiniment petite par le rayon. La somme de toutes les pyramides, ou le volume de la sphère, a donc pour mesure le tiers de la somme des produits de chaque base par le rayon, ou, ce qui revient au même, le tiers du produit de la somme des bases par le rayon, ou enfin le tiers du produit de la surface de la sphère par son rayon.

Remarque. Si R désigne le rayon de la sphère, on a vu que l'expression de la surface (282) est $4\pi R^2$; l'expression de son volume sera donc $\frac{1}{3}.4\pi R^2.R$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$.

APPLICATIONS. I. *Quel est le volume d'un boulet qui a 22 centimètres de diamètre?*

Le diamètre ayant $22^{\text{cent.}}$, le rayon a $11^{\text{cent.}}$; l'expression du volume du boulet est donc $\frac{4}{3}.3,1416.(11)^3$. En effectuant le calcul, on trouve $5575^{\text{cent. cub.}},293$ (en forçant ce dernier chiffre) ou $5^{\text{déc. cub.}}\,573^{\text{cent. cub.}}\,293^{\text{mill. cub.}}$.

II. — *Quel diamètre faut-il donner à un bassin demi-sphérique pour qu'il puisse contenir* 50 *hectolitres d'eau?*

La capacité du bassin étant de 50 hectol. ou de $5^{\text{m. cub.}}$; en divisant ce nombre par $\frac{2}{3}.3,1416$, on aura pour quotient le cube du rayon du bassin. On trouve $2^{\text{m. cub.}},387318$ dont la racine cubique $1^{\text{m}},3355$ est le rayon du bassin. Son diamètre, ou le double de ce rayon, est donc $2^{\text{m}},671$.

298. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme triangulaire tronqué* ABCDEF (fig. 181) *a pour mesure le produit de l'une de ses bases* ABC *par une moyenne entre les trois perpendiculaires abaissées des sommets opposés* D, E, F, *sur cette base.*

Menons le plan AEC qui coupe les faces ABED et BCFE suivant les droites AE et EC; menons aussi le plan DEC qui coupe la face ACFD suivant la droite DC. Le prisme tronqué se trouvera décomposé en trois tétraèdres EABC, EACD, ECDF.

Désignons par d, e, f les perpendiculaires abaissées des points D, E, F sur la base ABC (prolongée s'il est nécessaire).

Le tétraèdre EABC aura pour mesure $ABC\times\frac{1}{3}e$.

Le tétraèdre EACD, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACD, est équivalent à un tétraèdre qui aurait même base ACD, et pour sommet le point B situé sur une même droite EB parallèle à la base commune; car ces deux tétraèdres auraient même base et même hauteur. Or, le tétraèdre qui aurait pour sommet le point B et pour base ACD, pourrait aussi être considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base ABC; son volume, qui est aussi celui de EACD, a donc pour expression $ABC\times\frac{1}{3}d$.

Le tétraèdre ECDF, considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base CEF, est équivalent à un tétraèdre qui aurait même base CEF et son sommet en A, sur une même droite DA parallèle à cette base. Ce tétraèdre ACEF, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACF, est, à son tour, équivalent à un troisième tétraèdre qui aurait même base ACF, et son sommet en B, sur une même droite EB parallèle à cette base. Or, ce dernier tétraèdre BACF peut être considéré comme ayant pour sommet le point F et pour base ABC. Son volume, qui est aussi celui du tétraèdre ECDF, a donc pour expression $ABC\times\frac{1}{3}f$.

Faisant la somme de ces trois expressions partielles, on obtient pour l'expression du volume du prisme tronqué

$$ABC\times\tfrac{1}{3}d+ABC\times\tfrac{1}{3}e+ABC\times\tfrac{1}{3}f,$$

ou

$$ABC\times\tfrac{1}{3}(d+e+f).$$

Or $\frac{1}{3}(d+e+f)$ est ce que l'on nomme une moyenne entre les trois quantités d, e, f; donc l'expression ci-dessus revient à l'énoncé du théorème.

COROLLAIRES I. — Si les arêtes AD, BE, CF étaient perpendiculaires sur la base ABC, elles seraient elles-mêmes les quantités que nous avons désignées par d, e, f, et l'on peut dire : qu'*un prisme triangulaire* droit *tronqué a pour mesure le produit de la base perpendiculaire aux arêtes latérales, par une moyenne entre ces trois arêtes.*

II. — Si l'on coupe un tronc de prisme triangulaire par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales, on le divise en deux prismes triangulaires droits tronqués, qui ont pour base commune la section obtenue, laquelle est dite *section droite*. En réunissant les expressions des volumes de ces deux prismes partiels, on reconnaît aisément que *le volume total a pour mesure le produit de la section droite par une moyenne entre les trois arêtes latérales.*

III. — S'il s'agit d'un prisme triangulaire non tronqué, les arêtes latérales sont égales, et leur moyenne n'est autre que l'une d'elles. On peut donc dire que *le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de la section droite par l'une des arêtes latérales.*

299. — Théorème. *Le volume d'un tétraèdre tronqué a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses deux bases, et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Soit ABCDEF (fig. 182) un tétraèdre tronqué. Menons les plans AEC et DEC qui décomposeront le tétraèdre tronqué en trois tétraèdres EABC, EACD, ECDF. Soit H la hauteur du tronc.

Le tétraèdre EABC, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ABC, aura pour mesure $\frac{1}{3}.\text{ABC}\times\text{H}$; car sa hauteur est celle du tronc.

Le tétraèdre ECDF, considéré comme ayant pour sommet le point C et pour base DEF, aura pour mesure $\frac{1}{3}.\text{DEF}\times\text{H}$, car sa hauteur est aussi celle du tronc.

Menons EI parallèle à DA, et joignons IC et DC. Le tétraèdre EACD, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACD, est équivalent au tétraèdre IACD qui a même base ACD et son sommet sur une même droite EI parallèle à cette base; car ces deux tétraèdres ont même base et même hauteur. Or, le tétraèdre IACD, considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base AIC, a pour mesure $\frac{1}{3}.\text{AIC}\times\text{H}$, puisque sa hauteur est encore celle du tronc.

Le volume du tronc a donc pour expression :

$$\tfrac{1}{3}.\text{ABC}\times\text{H}+\tfrac{1}{3}.\text{DEF}\times\text{H}+\tfrac{1}{3}.\text{AIC}\times\text{H},$$

ou

$$\tfrac{1}{3}\,\text{H}.(\text{ABC}+\text{DEF}+\text{AIC}).$$

Il reste donc à démontrer que AIC est une moyenne géométrique entre les bases ABC et DEF.

Pour cela, remarquons que DE et DF étant respectivement parallèles à AC et AB (228), les angles EDF et IAC sont égaux; les deux triangles DEF et IAC sont donc entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal. Mais DE et AI étant égaux comme parallèles comprises entre parallèles, les produits dont nous parlons ont un facteur commun que l'on peut supprimer sans changer le rapport, et l'on peut écrire

$$\text{DEF} : \text{AIC} :: \text{DF} : \text{AC}. \qquad (1)$$

Les triangles AIC et ABC, qui ont même hauteur puisqu'ils ont même sommet C et leurs bases sur une même droite, sont entre eux comme ces bases, et l'on a

$$\text{AIC} : \text{ABC} :: \text{AI} :: \text{AB}. \qquad (2)$$

mais les bases DEF et ABC étant semblables (247), on a

$$\text{DF} : \text{AC} :: \text{DE} : \text{AB} \quad \text{ou} \quad \text{DF} : \text{AC} :: \text{AI} : \text{AB}.$$

En vertu de cette dernière proportion, les deux proportions (1) et (2) ont leurs seconds rapports égaux; les deux premiers le sont donc aussi, et il vient

$$\text{DEF} : \text{AIC} :: \text{AIC} : \text{ABC};$$

ce qu'il fallait démontrer.

300. — Théorème. *Le volume d'une pyramide tronquée a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Soit ABCDE$abcde$ (fig. 138), une pyramide tronquée, et soit SABCDE la pyramide entière. Construisons un tétraèdre SMNP ayant même sommet S, une base MNP équivalente au polygone ABCDE, et placée sur le même plan que ce polygone. Prolongeons le plan de la base supérieure $abcde$ du tronc; il déterminera dans le tétraèdre une section mnp. Je dis d'abord que cette section sera équivalente au polygone $abcde$.

En effet: soit H la hauteur commune des deux pyramides SABCDE et SMNP, et h la hauteur également commune des deux pyramides S$abcde$, Smnp. Les deux pyramides SABCDE et S$abcde$, qui sont évidemment décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés (245), sont semblables. On a donc (249, coroll. II).

$$abcde : \text{ABCDE} :: h^2 : \text{H}^2.$$

Mais les tétraèdres Smnp et SMNP étant également semblables, on a de même

$$mnp : \text{MNP} :: h^2 : \text{H}^2.$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$abcde : \text{ABCDE} :: mnp : \text{MNP},$$

ou

$$abcde : mnp :: \text{ABCDE} : \text{MNP}.$$

Or, ABCDE et MNP sont équivalents par hypothèse; il en est donc de même de $abcde$ et de mnp.

Cela posé; les pyramides SABCDE et SMNP étant équivalentes comme ayant même base et même hauteur (293, 294), et les pyramides S$abcde$ et Smnp étant aussi équivalentes par la même raison, il en résulte que le tronc de pyramide ABCDE$abcde$ équivaut au tronc de tétraèdre MNPmnp. Mais le volume de celui-ci a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases; le tronc de pyramide a donc la même mesure. Or, le tronc de pyramide a la même hauteur que le tronc de tétraèdre; les bases sont respectivement égales de part et d'autre, et par suite la moyenne géométrique entre les deux bases du tronc de pyramide est la même que la moyenne géométrique entre les deux bases du tronc de tétraèdre. Donc le volume du tronc de pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.

Application. — *Un bassin a ses murs en talus; le fond est un carré dont le côté a* 15^{m}; *les bords forment aussi un carré dont le côté a* 16^{m}; *sa profondeur est de* 2^{m}; *on demande sa capacité.*

La forme du bassin est celle d'une pyramide tronquée. L'aire de sa plus grande base est de $16^{m} \times 16^{m}$ ou $256^{m.c.}$; celle de la plus petite base est $15^{m} \times 15^{m}$ ou $225^{m.c.}$; la moyenne géométrique entre ces deux bases est la racine carrée du produit 256×225 ou de 57600, c'est-à-dire $240^{m.c.}$.

L'expression de la capacité demandée est donc

$$\tfrac{1}{3}\cdot 2^{m}\left[256^{m.c.} + 225^{m.c.} + 240^{m.c.}\right].$$

En effectuant le calcul, on trouve $480^{m.cub.},666...$

301. — Théorème. *Le volume d'un tronc de cône a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Car un tronc de cône peut être considéré comme un tronc de pyramide régulière dont les bases seraient des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si l'on nomme H la hauteur du tronc de cône, R le rayon de sa plus grande base, et r le rayon de la plus petite; les aires de ces bases auront respectivement pour expression πR^2 et πr^2. La moyenne géométrique entre ces bases est la racine carrée de leur produit $\pi R^2 \times \pi r^2$ ou de $\pi^2 R^2 r^2$, c'est-à dire $\pi R r$. L'expression du volume du tronc de cône est donc

$$\tfrac{1}{3} H \times (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r) \text{ ou } \tfrac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + R r).$$

Application. — *Quelle est la capacité d'un cuvier dont le fond a 2^m de diamètre, le bord supérieur $2^m,50$ de diamètre, et dont la profondeur est de $1^m,50$?*

On a ici $H = 1^m,50$; $R = 1^m,25$; $r = 1^m$. L'expression de la capacité demandée est donc

$$\tfrac{1}{3}\cdot 3,1416.1^m,50\left[(1^m,25)^2 + (1^m)^2 + 1^m,25 \times 1^m\right],$$

ou

$$\tfrac{1}{3}\cdot 3,1436.1^m,50.3^{m.c.},8125.$$

En effectuant le calcul, on trouve $5^{m.cub.},988675$, ce qui revient à 59 hectolitres et environ 89 litres.

302. — Théorème. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le tiers du produit de l'aire de la calotte qui lui sert de base, par le rayon de la sphère.*

Même démonstration qu'au n° 297.

Remarque. Soit h la hauteur de la calotte qui sert de base au secteur, et R le rayon de la sphère. L'aire de la calotte aura pour expression (281), $2\pi R \times h$. Le volume du secteur sera donc exprimé par $2\pi R \times h \times \frac{1}{3} R$ ou par $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.

303. — Théorème. *Le volume d'un segment sphérique a pour mesure le produit de l'aire du cercle qui aurait pour rayon la hauteur de ce segment, par le rayon de sa sphère diminué du tiers de cette hauteur.*

Soit AB (fig. 174) l'axe du segment; $AI = h$ sa hauteur; $EI = r$ le rayon du petit cercle qui termine la calotte; $AO = R$ le rayon de la sphère; on aura $OI = AO - AI = R - h$. De plus, la ligne EI étant moyenne proportionnelle entre les segments AI et IB du diamètre AB, on a

$$\overline{EI}^2 = AI \times IB \quad \text{ou} \quad r^2 = h \times (2R - h).$$

Cela posé, le volume engendré par le secteur EOA a pour mesure

$$\tfrac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Le volume engendré par le triangle EIO, lequel volume est un cône, a pour mesure $\frac{1}{3}\pi . \overline{EI}^2 . OI$ ou

$$\tfrac{1}{3}\pi h (2R - h)(R - h).$$

Le segment proposé, qui est la différence de ces deux volumes, a donc un volume exprimé par

$$\tfrac{2}{3}\pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi h (2R - h)(R - h),$$

ou $$\tfrac{1}{3}\pi h\left[2R^2 - (2R - h)(R - h)\right],$$

ou $$\tfrac{1}{3}\pi h (3Rh - h^2),$$

ou enfin $$\pi h^2 (R - \tfrac{1}{3} h);$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

Application. — *Un bassin a la forme d'une demi-sphère dont le diamètre est de 3^m; il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de $1^m,2$ à partir du point le plus bas; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau contenue?*

L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique dont la hauteur est de $1^m,2$. L'expression de son volume est donc

$$3,1416.\ (1^m,2)^2.\ [1^m,5-0^m,4] \text{ ou } 3,1416.\ 1^{m.c.},44.\ 1^m.1.$$

En effectuant le calcul, on trouve $4^{m.cub.},976294....$ ou 49 hectolitres et environ 76 litres.

CHAPITRE IV.

De la comparaison des surfaces et de celle des volumes.

§ 1. — De la comparaison des surfaces.

304. — Théorème. *Les surfaces totales de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

En effet : soit S la surface totale d'un polyèdre; soient M, N, P, etc., les aires des diverses faces qui la composent; A, B, C, etc., des arêtes quelconques appartenant respectivement à chacune de ces faces; soient s, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les parties homologues d'un second polyèdre semblable au premier.

Deux polyèdres semblables ayant leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et les aires des deux polygones semblables étant entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues, on aura

$$M : m :: A^2 : a^2;\ N : n :: B^2 : b^2;\ P : p :: C^2 : c^2; \text{ etc.} \quad (1)$$

D'ailleurs, puisque les polyèdres sont semblables, leurs arêtes homologues sont proportionnelles, et l'on a :

$$A : a :: B : b :: C : c :: \text{etc.};$$

d'où $$A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2 :: \text{etc.} \quad (2)$$

En vertu des premières proportions, on aura donc

$$M : m :: N : n :: P : p :: \text{etc.};$$

d'où $$M+N+P+\text{etc.} : m+n+p+\text{etc.} :: M : m,$$

ou $$S : s :: M : m. \quad (3)$$

En ayant égard à la première des proportions (1), on peut donc écrire

$$S : s :: A^2 : a^2.$$

et, à cause de la suite de rapports égaux (2)

$$S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2, \text{ etc.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

305. — Théorème. *Les surfaces latérales de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Soient S et s les surfaces latérales des deux cylindres semblables, H et h leurs hauteurs, R et r les rayons de leurs bases. On aura (274)

$$S = 2\pi RH \quad \text{et} \quad s = 2\pi rh,$$

d'où la proportion identique

$$S : s :: 2\pi RH : 2\pi rh, \text{ ou simplement } S : s :: RH : rh. \quad (1)$$

Mais, puisque les cylindres sont semblables (263), on a

$$R : r :: H : h. \quad (2)$$

On a d'ailleurs la proportion identique

$$H : h :: H : h. \quad (3)$$