Application. — *Un bassin a la forme d'une demi-sphère dont le diamètre est de* 3^m ; *il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de* $1^m,2$ *à partir du point le plus bas; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau contenue?*

L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique dont la hauteur est de $1^m,2$. L'expression de son volume est donc

$$3,1416.\ (1^m,2)^2.\ [1^m,5-0^m,4] \text{ ou } 3,1416.\ 1^{m.c.},44.\ 1^m.1.$$

En effectuant le calcul, on trouve $4^{m.cub.},976294....$ ou 49 hectolitres et environ 76 litres.

CHAPITRE IV.

De la comparaison des surfaces et de celle des volumes.

§ 1. — De la comparaison des surfaces.

304. — Théorème. *Les surfaces totales de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

En effet : soit S la surface totale d'un polyèdre; soient M, N, P, etc., les aires des diverses faces qui la composent; A, B, C, etc., des arêtes quelconques appartenant respectivement à chacune de ces faces; soient s, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les parties homologues d'un second polyèdre semblable au premier.

Deux polyèdres semblables ayant leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et les aires des deux polygones semblables étant entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues, on aura

$$M : m :: A^2 : a^2 ;\ \ N : n :: B^2 : b^2 ;\ \ P : p :: C^2 : c^2 ; \text{ etc.} \qquad (1)$$

D'ailleurs, puisque les polyèdres sont semblables, leurs arêtes homologues sont proportionnelles, et l'on a :

$$A : a :: B : b :: C : c :: \text{etc.} ;$$

d'où $$A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2 :: \text{etc.} \qquad (2)$$

En vertu des premières proportions, on aura donc

$$M : m :: N : n :: P : p :: \text{etc.};$$

d'où $$M+N+P+\text{etc.} : m+n+p+\text{etc.} :: M : m,$$

ou $$S : s :: M : m. \qquad (3)$$

En ayant égard à la première des proportions (1), on peut donc écrire

$$S : s :: A^2 : a^2.$$

et, à cause de la suite de rapports égaux (2)

$$S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2, \text{ etc.} ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

305. — Théorème. *Les surfaces latérales de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Soient S et s les surfaces latérales des deux cylindres semblables, H et h leurs hauteurs, R et r les rayons de leurs bases. On aura (274)

$$S = 2\pi RH \quad \text{et} \quad s = 2\pi rh,$$

d'où la proportion identique

$$S : s :: 2\pi RH : 2\pi rh, \text{ ou simplement } S : s :: RH : rh. \qquad (1)$$

Mais, puisque les cylindres sont semblables (263), on a

$$R : r :: H : h. \qquad (2)$$

On a d'ailleurs la proportion identique

$$H : h :: H : h. \qquad (3)$$

Multipliant terme à terme les proportions (2) et (3), on en tire

$$RH : rh :: H^2 : h^2. \qquad (4)$$

Les proportions (1) et (4) ayant un rapport commun, il en résulte

$$S : s :: H^2 : h^2. \qquad (5)$$

Maintenant, la proportion (2) donne

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2, \qquad (6)$$

et, à cause du rapport commun entre les proportions (5) et (6), on peut écrire

$$S : s :: R^2 : r^2.$$

306. — THÉORÈME. *Les surfaces latérales de deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Même démonstration que pour le théorème précédent.

307. — THÉORÈME. *Les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.*

Soient S et s les surfaces de deux sphères, R et r leurs rayons, on aura (282)

$$S = 4\pi R^2 \qquad \text{et} \qquad s = 4\pi r^2.$$

De là, la proportion identique

$$S : s :: 4\pi R^2 : 4\pi r^2,$$

ou, en supprimant le facteur 4π commun aux deux termes du second rapport,

$$S : s :: R^2 : r^2 ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — De la comparaison des volumes.

308. — THÉORÈME. *Les volumes de deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues, ou comme les cubes de leurs hauteurs.*

Soient SABC et $sabc$ (fig. 165) deux tétraèdres semblables, SH et sh leurs hauteurs. On a vu (244) qu'on avait la proportion

$$ABC : abc :: \overline{SH}^2 : \overline{sh}^2.$$

On a aussi la proportion évidente

$$\tfrac{1}{3}SH : \tfrac{1}{3}sh :: SH : sh.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, on en tire

$$ABC \times \tfrac{1}{3}SH : abc \times \tfrac{1}{3}sh :: \overline{SH}^3 : \overline{sh}^3.$$

Or, les deux premiers termes mesurent les volumes des deux tétraèdres; ces deux tétraèdres sont donc entre eux comme les cubes de leurs hauteurs.

Mais, si l'on transporte le tétraèdre $sabc$ sur le tétraèdre SABC, de manière à ce qu'il prenne la position SA′B′C′, on a vu (244) que les plans A′B′C′ et ABC seront parallèles; et que la perpendiculaire SH sera divisée au point H′, de manière qu'on aura la proportion

$$SH : SH' :: SA : SA' \quad \text{ou} \quad SH : sh :: SA : sa,$$

d'où $$\overline{SH}^3 : \overline{sh}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{sa}^3.$$

Il en résulte que les volumes des deux tétraèdres sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues SA et sa, et par conséquent comme les cubes de deux arêtes homologues quelconques, puisqu'elles sont proportionnelles.

309. — THÉORÈME. *Les volumes de deux polyèdres sem-*

blables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.

Soient V le volume du premier polyèdre, M, N, P, etc., le volume des divers tétraèdres dans lesquels il peut se décomposer (259), A, B, C, etc., des arêtes quelconques prises respectivement sur chacun de ces tétraèdres. Soient v, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les grandeurs homologues relatives à un second polyèdre semblable au premier.

On aura, à cause de la similitude des polyèdres (260),

$$A : a :: B : b :: C : c, \text{ etc.};$$

d'où $$A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3 :: \text{etc.} \quad (1)$$

Les tétraèdres homologues étant semblables, on a, en vertu du théorème précédent :

$$M : m :: A^3 a^3; \quad N : n :: B^3 : b^3; \quad P : p :: C^3 : c^3, \text{ etc.}; \quad (2)$$

d'où, en vertu de la suite de rapports égaux, (1)

$$M : m : N : n :: P : p :: \text{etc.}$$

On en tire

$$M + N + P + \text{etc.} : m + n + p + \text{etc.} :: M : n,$$

ou $$V : v :: M : m,$$

ou, en vertu de la première des proportions, (2)

$$V : v :: A^3 : a^3,$$

ou enfin, en vertu de la suite de rapports égaux, (1)

$$V : v :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3 :: \text{etc.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Si les arêtes du premier polyèdre sont 2, 3, 4,... 10 fois plus grandes que les arêtes homologues du second polyèdre, le volume du premier est 8, 27, 64,... 1000 fois plus grand que le volume du second.

310. — Théorème. *Les volumes de deux cylindres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes des rayons de leurs bases.*

Soient V et v les volumes, H et h les hauteurs, R et r les rayons des bases ; on aura d'abord (290)

$$V = \pi R^2 H \quad \text{et} \quad v = \pi r^2 h,$$

d'où la proportion identique

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h, \quad \text{ou} \quad V : v :: R^2 H : r^2 h. \quad (1)$$

On a aussi, puisque les cylindres sont semblables,

$$R : r :: H : h; \quad \text{d'où} \quad R^2 : r^2 :: H^2 : h^2. \quad (2)$$

On a de plus la proportion identique

$$H : h :: H : h. \quad (3)$$

Multipliant membre à membre les proportions (2) et (3), on obtient

$$R^2 H : r^2 H :: H^3 : h^3, \quad (4)$$

et, à cause du rapport commun entre cette proportion et la proportion (1),

$$V : v :: H^3 : h^3. \quad (5)$$

Maintenant, de la proportion

$$R : r :: H : h, \quad \text{on tire} \quad R^3 : r^3 :: H^3 : h^3. \quad (6)$$

Les proportions (5) et (6) ayant un rapport commun, il en résulte

$$V : v :: R^3 : r^3.$$

311. — Théorème. *Les volumes de deux cônes sembla-*

bles sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes des rayons de leurs bases.

Même démonstration que pour le théorème précédent.

312. — Théorème. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons.*

Soient V et v les volumes de deux sphères, R et r leurs rayons, on aura (297)

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{et} \quad v = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

d'où la proportion identique

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

supprimant le facteur $\frac{4}{3}\pi$ commun aux deux termes du second rapport, il reste

$$V : v :: R^3 : r^3;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Si la première sphère a un rayon double du rayon de la seconde, le volume de la première est 8 fois plus grand que celui de la seconde; il serait 27 fois plus grand si le rayon était triple; 1000 fois plus grand si le rayon était décuple; et ainsi de suite.

313. — Théorème. *Deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases; et deux prismes dont les bases sont égales ou équivalentes sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Soient V et V′ les volumes des deux prismes, B et B′ leurs bases, H et H′ leurs hauteurs; on aura (289)

$$V = B \times H \quad \text{et} \quad V' = B' \times H',$$

d'où la proportion identique

$$V : V' :: B \times H : B' \times H'.$$

Si les hauteurs sont égales, on peut les supprimer comme facteur commun, et il reste

$$V : V' :: B : B'.$$

Si ce sont les bases qui soient égales ou équivalentes, on peut les supprimer comme facteur commun, et il reste

$$V : V' :: H : H'.$$

Corollaire. Cette proportion s'étend aux parallélépipèdes et aux cylindres; ainsi *un parallélépipède rectangle et un cylindre qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Si les bases sont en outre équivalentes, le parallélépipède rectangle et le cylindre sont équivalents.

Application. On a eu l'occasion de faire un cylindre équivalent à un cube lorsqu'il a fallu déterminer les dimensions des nouvelles mesures de capacité. Comme la forme cubique eût été incommode, on a adopté la forme cylindrique. Pour les matières sèches, le cylindre doit avoir une hauteur égale au diamètre de sa base.

Supposons qu'il s'agisse de l'hectolitre; soit R le rayon de sa base, la hauteur sera 2 R; le volume sera donc représenté par $\pi R^2 \times 2R$ ou $2\pi R^3$. Ce volume devant être égal à 1 hectolitre ou à 100 décimètres cubes; en divisant ce nombre 100 par 2π ou $2 \times 3{,}1416$, le quotient $15^{\text{déc. cub.}},915\ldots$ exprimera le cube du rayon. Extrayant la racine cubique, on trouve $2^{\text{déc.}},515$ pour la valeur du rayon; et par conséquent $5^{\text{déc.}},03$ ou $0^{\text{m}},503$ pour la hauteur de l'hectolitre.

314. — Théorème. *Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides qui ont des bases égales ou équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Même démonstration que pour le théorème précédent.

COROLLAIRE. Cette proposition s'étend au cône. Ainsi deux cônes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; et deux cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, ou, ce qui revient au même, comme les carrés des rayons de ces bases.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARPENTAGE

ET DE LAVIS DES PLANS.