QUATRIÈME PARTIE.

—

MESURE

DES HAUTEURS ET DES VOLUMES.

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

MESURE DES HAUTEURS.

193. La mesure des hauteurs est souvent indispensable quand on lève un plan où il y a des bâtiments : d'ailleurs ces opérations sont très simples.

Nou l ons donner les moyens de mesurer, par les procédés graphiques, les hauteurs inaccessibles.

Premier exemple.

194. Mesurer la hauteur d'un bâtiment accessible à son pied (*fig.* 79, pl. 6).

Tout le monde connaît la solution de ce problème par la mesure de l'ombre. On prend un double mètre x; on le place verticalement à une certaine distance du bâtiment, hors de l'ombre qu'il projette, et sur un plan horizontal; on mesure l'ombre projetée par le double mètre. Supposons que cette ombre, y, soit de 1 mètre 80, et que l'ombre de la maison, z, soit de 29 m. 15. On fera la proportion suivante : l'ombre, y, du double mètre est

à la hauteur du double mètre, x, comme l'ombre de la maison z est à la hauteur réelle de la maison.

$$1.80 : 2 :: 29.15 : x = 32 \text{ m. } 39.$$

Ce moyen est très simple; mais il ne donne pas un résultat très exact, parce que les ombres ne sont pas assez nettement prononcées, surtout à leur extrémité; cependant, lorsqu'il s'agira d'une approximation, l'ombre peut servir, comme nous venons de le voir, à trouver la hauteur d'un arbre, d'une maison, etc., etc.

Deuxième exemple.

195. Mesurer la hauteur d'une tour (*fig.* 80).

On pourrait obtenir la hauteur de la tour par le moyen indiqué dans le problème précédent, en mesurant l'ombre; mais nous supposons que le temps soit couvert ou que l'on veuille obtenir plus de précision. On place le graphomètre au point E (*fig.* 80); le plan de l'instrument doit être vertical, comme on le voit dans la figure. Mesurez avec le graphomètre l'angle A*cb*, et à la chaîne métrique la distance EB.

Soit l'angle A*cb* de 43 g. et EB de 21 mètres.

Sur le papier on tirera une horizontale indéterminée (*fig.* 81), sur laquelle on prendra une partie GI, représentant EB, et proportionnelle à 21 mètres. Au point I on indiquera avec le rapporteur de corne un angle de 43 grades. Comme l'angle en G (*fig.* 80) est supposé droit, on élèvera à l'équerre, au point G, une perpendiculaire dont la rencontre avec la ligne tirée du point I détermine le point K. En reportant la ligne KG sur l'échelle, on obtient la hauteur proportionnelle A*b*, et si on y ajoute la hauteur du graphomètre en *b* B, on à AB. Nous ferons observer que l'angle ABE n'est pas droit, mais obtus, puisque la ligne AB est inclinée à l'horizon. Pour avoir très exactement la hauteur CD de la tour, il faudrait ajouter, à la longueur 21 mètres, l'inclinaison de la tour, que l'on estimerait approximativement en prenant son inclinaison pour un mètre de hauteur. Le mètre placé verticalement au pied de la tour s'en écarte d'une certaine distance par son extrémité supérieure, cet écartement est l'inclinaison par mètre.

Troisième exemple.

196. Supposons encore que l'on demande la hauteur du clocher AB, dont on ne peut approcher jusqu'au pied (*fig.* 82).

Je m'éloigne de manière à pouvoir construire le triangle DCB. Je transporte successivement le graphomètre aux points C et D, pour mesurer les angles BCD et ADB. Je mesure à la chaîne la longueur DC. Les deux angles DCB, ACB, et la distance CD, suffisent pour trouver la hauteur AB. Effectivement, je tire sur le papier une horizontale indéfinie, sur laquelle je prends, d'après une échelle quelconque, la partie EG (*fig.* 83), proportionnelle à DC. Aux points G et E, j'indique, avec le rapporteur en corne, deux angles égaux à ceux que j'ai mesurés avec le graphomètre. Les deux lignes tirées par les points E et G, dans la direction des angles mesurés au rapporteur, se coupent en H. Sur le prolongement de GE élevez avec une équerre une perpendiculaire qui passe par le point H : la ligne HI représente la hauteur du clocher AB. On porte HI sur l'échelle de proportion qui à servi à

construire la figure 83, et on obtient la hauteur du clocher en mètres, décimètres et centimètres.

Quatrième exemple.

197. On demande la distance AB, que l'on ne peut mesurer à cause d'une rivière qui sépare les points A et B (*fig.* 84).

Après avoir jalonné la ligne BC, j'établis successivement le graphomètre aux points B et C; je mesure les deux angles ABC et ACB et la distance BC. Il ne me reste plus qu'à construire sur le papier, comme dans les exemples précédents, le triangle ABC avec une échelle de proportion et un rapporteur. La distance AB que je mesure sur l'échelle donne la distance cherchée en mètres, décimètres et centimètres.

Cinquième exemple.

198. On demande la distance AB de deux objets inaccessibles, et dont on est séparé par un fleuve (*fig.* 85).

Plantez des jalons en C et en D pour déterminer une base d'opération CD, et placez le graphomètre successivement aux points C et D; mesurez les angles ACD, ACB, BDA et BDC; mesurez à la chaîne la distance CD, et vous pouvez déterminer AB par une construction graphique.

Sur une ligne indéfinie que vous tracez sur le papier, prenez une distance proportionnelle à la ligne CD, et avec le rapporteur en corne tracez à chaque extrémité l'ouverture des angles ACD, ADC, que vous avez mesurés sur le terrain avec le graphomètre : l'intersection des deux lignes CA et DA déterminera le point A. Tracez avec le rapporteur en corne l'ouverture des angles BCD, BDC, et tirez les lignes DB et CD qui se couperont au point B. Joignez les points A et B, mesurez la ligne AB sur l'échelle de proportion : vous obtiendrez ainsi la distance AB en mètres, décimètres et centimètres.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

MESURE DES VOLUMES.

199. On a souvent besoin de mesurer le volume des ouvrages de maçons ou des travaux de terrassiers. Il est donc utile de connaître la mesure des volumes.

Les solides ont trois dimensions : *longueur*, *largeur* et *épaisseur*. C'est un élément de plus que dans l'arpentage, où l'on ne s'occupe que des superficies, c'est-à-dire de l'étendue à deux dimensions, *longueur* et *largeur*.

200. Soit le cube (*fig.* 186) dont on veut mesurer le volume.

Le dé à jouer est un cube : c'est une figure dont toutes les faces sont des carrés égaux, et dans laquelle on a, par conséquent, AB = BC = BD. Soit AB = 3 mètres : quelle sera la mesure du cube? Je divise AB, BC et BD en trois parties, et je mène par les points de division des horizontales et des verticales. Chacune des faces contient neuf carrés, et le cube total contiendra 27 petits cubes égaux ayant un mètre sur chaque dimension. Donc la mesure du cube est de 27 m. cubes. Mais

$27 = 3 \times 3 \times 3$: *la mesure d'un cube est donc égale au produit des trois dimensions, ou au produit de la surface d'une des bases multipliée par l'épaisseur.*

201. Si un cube avait 1 m. 45 sur chaque dimension, son volume serait représenté par 1.45 multiplié par 1.45 multiplié par 1.45, ou par $3^{m}048,625$, c'est-à-dire 3 mètres cubes 48 décimètres cubes 625 centimètres cubes.

On peut remarquer qu'un décimètre cube vaut 10 qui multiplie 10 qui multiplie 10, ou 1000 centimètres cubes ; qu'un centimètre cube vaut également 10 qui multiplie 10 qui multiplie 10, ou 1000 millimètres cubes, d'où résulte une nouvelle séparation de chiffres décimaux de trois en trois.

Soit en effet le nombre $47^{mmm}235652234$, on l'énoncera : 47 mètres cubes, 235 décimètres cubes 652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47,235 décimètres cubes, 652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47,235,652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47, 235,652,234 millimètres cubes.

La toise cube vaut 6 pieds multipliés par 6 pieds multipliés par 6 pieds, ou 216 pieds cubes.

Le pied cube vaut 12 qui multiplie 12 qui multiplie 12, ou 1728 pouces cubes.

Donc la toise cube vaut 1728 fois 216, ou 373,248 pouces cubes.

Le pouce cube vaut 1728 lignes cubes.

Donc la toise cube vaut 1728 fois 373,248, ou 644,972,544 lignes cubes.

202. On appelle parallélipipède un corps dont les six côtés sont des rectangles (*fig.* 87). On peut s'en faire une idée assez exacte par un coffre, une caisse.

Pour obtenir le volume d'un parallélipipède, on multiplie l'une par l'autre les trois arêtes qui concourent à former un des angles solides.

Soit AC égale à 34 c., CB égale à 42 c., et CD égale à 1^m18 c. : le volume sera $0^m168,504$, c'est-à-dire 168 décimètres cubes, 504 centimètres cubes.

203. Les bois équarris sont des parallélipipèdes que l'on évalue en multipliant la surface de la base par la hauteur, ou les trois arêtes qui viennent aboutir à un même angle. Soit une pièce de bois de 2^m45 c. de longueur sur 36 c. d'équarrissage : je multiplie 36 par 36, et le produit par 2.45, ce qui donne $0^m317,520$ ou 317 décimètres cubes 520 centimètres cubes.

204. Comme le bois en grume est recouvert d'un aubier et d'une écorce, et que l'acheteur ne paie que le bon bois, voici une méthode pour en faire le calcul : c'est le mesurage employé dans l'artillerie.

On mesure les circonférences extrêmes avec une chaîne ; on les ajoute et l'on en prend le dixième ; on élève ce dixième au carré, et on le multiplie par la longueur de la pièce de bois. Le résultat est le volume du bon bois contenu dans l'arbre.

Soit la longueur de la pièce de bois égale à 3^m83, la circonférence inférieure égale à 1^m40, et la circonférence supérieure égale à 1^m10 : j'ajoute 1.40 et 1.10, ce qui donne 2^m50, dont le dixième est de 25 c. Je carre 25 c., je multiplie le résultat 0.0625 par 3^m83, longueur de la pièce de bois.

Le volume de cette pièce de bois est donc de $0^m239,375$, ou de 239 décim. cubes, 375 cent. cubes.

205. Le prisme est un corps dont les bases opposées sont des polygones égaux, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes (*fig.* 88).

Son volume s'obtient en multipliant la surface de la base par la hauteur, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur la base inférieure ou sur son prolongement.

Pour mesurer la base, il faut la diviser en triangles, que l'on évaluera, comme nous avons vu plus haut, en multipliant la base de chaque triangle par la moitié de la hauteur (la base du prisme est évidemment composée de la réunion des triangles du polygone) ; il ne restera plus, pour avoir la solidité, qu'à multiplier la somme de ces triangles ou la surface de la base par la hauteur du prisme.

206. La pyramide (*fig.* 89) est un corps dont la base est un polygone, et dont toutes les faces sont des triangles ayant leurs sommets réunis en un point qui est le sommet de la pyramide.

Pour avoir le volume d'une pyramide, on multiplie la surface de la base par le tiers de la hauteur, c'est-à-dire par le tiers de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base ou sur le prolongement.

On évalue la base en la divisant en triangles ; on mesure les triangles et on multiplie leur somme par le tiers de la perpendiculaire qui indique la hauteur.

207. Les prismes peuvent être droits ou obliques : ils sont droits quand les arêtes sont verticales et servent de mesure pour la hauteur ; ils sont obliques si les arêtes ne sont pas verticales.

Les pyramides sont droites quand la verticale, abaissée de son sommet, tombe sur le milieu de la base; autrement elles sont obliques.

208. Dans la pratique, quand on doit mesurer des matériaux, tels que moellons, pierres dures, bois, etc., on les dispose en parallélipipèdes rectangles, qui s'évaluent comme nous avons vu plus haut.

Le sable et la terre se disposent de la même manière, mais les côtés prennent une inclinaison dont il faut tenir compte. On suppose les côtés verticaux, on évalue le volume du solide, et on distrait de ce volume les parties qui manquent réellement. Ce sont les ingénieurs qui font ces calculs dans les travaux du gouvernement; ils mesurent alors avec une grande précision. Il nous suffit de montrer comment on peut évaluer approximativement le volume des matériaux employés dans l'usage ordinaire.

209. Nous allons indiquer maintenant les moyens de mesurer et les cercles et les corps ronds.

Mesurer la surface d'un cercle.

Pour avoir la surface d'un cercle, multipliez le rayon par lui-même et ensuite par 355/113; c'est-à-dire qu'on multipliera le carré du rayon par 355, et qu'on divisera le produit par 113. Nous avons donné (52) un autre moyen de mesurer la surface d'un cercle.

On pourrait employer le rapport 22/7, mais le résultat serait moins exact.

Si on appelle π le rapport du diamètre à la circonférence, la formule sera πR^2.

210. Soit un bassin (*fig.* 90) dont la largeur est 12^m24; le rayon, qui est la moitié du diamètre, égalera 6^m12.


```
   6.12        37.4544
   6.12           355
 ---------------------
   1224        1872720
   612        1872720
  3672        1123632
 ---------    -----------
  37.4544     13296.3120 | 113.
               199        117.6664
               866
                753
                 751
                  732
                   540
                    88
```

Le résultat de l'opération donne 117 mètres carrés, 66 décimètres carrés, 64 centimètres carrés.

211. Mesurer le volume d'un cylindre droit (*fig.* 91).

On appelle *cylindre* un corps rond dont les bases opposées sont des cercles égaux; le cylindre est droit quand les côtés sont perpendiculaires sur la base.

Pour avoir le volume d'un cylindre, il faut multiplier la surface de la base par la hauteur.

212. Soit un tuyau cylindrique de 64 cent. de diamètre sur 12^m23 de hauteur, dont on veut évaluer le volume.

La base du cylindre droit est un cercle dont le rayon sera de 32 centimètres. Pour avoir la surface, on fera le calcul indiqué ci-dessus.

```
0.32        0.1024              0.3217
0.32          355                12.23
----        ------              ------
  64         5120                9651
 96          5120               6434
------      3072               6434
0.1024     -------            3217
           36.3520 | 113      ---------
              245  |--------  3.934391
              192    0.32169
               790
               1120
                103
```

Le cylindre aura pour expression de son volume 3 mètres cubes, 934 décim. cubes, 391 cent. cubes.

213. On veut donner 32 centimètres d'épaisseur au mur d'un puits qui doit avoir 1^m26 de diamètre et 23 mètres de profondeur. On demande combien il faudra de mètres cubes de pierre pour ce travail.

Il suffit, pour cette opération, de supposer un cylindre ayant 1^m26 de diamètre, plus 32 centimètres en sus à chaque extrémité, ce qui donnera 1^m90 de largeur; on cherchera le volume du cylindre de 1^m90 de diamètre sur 23 mèt. de profondeur; on retranchera de ce volume celui du puits, dont la largeur est seulement de 1^m26, la hauteur restant la même. Le résultat sera la quantité de mètres cubes nécessaires pour construire les murs du puits.

Première opération.

```
 0.95          0.9025
 0.95             355
------        -------
  475           45125
 855            45125
------         27075
0.9025        ----------
              320.3875 | 113
                 943   |-------
                 398     2.8352
                  597
                  325
```

Deuxième opération.

```
 0.63          0.3969
 0.63             355
------        -------
  189           19845
 378            19845
------         11907
0.3969        ----------
              140.8995 | 113
                278    |-------
                 529     1.2469
                  779
                  1015
```

Multipliant les deux quotients par la hauteur, j'ai pour les volumes 65^m2096 et 28^m6787, dont la différence 36^m53 décimètres cubes et 900 centimètres cubes exprime la quantité de matériaux qu'il faudrait employer dans cette construction.

214. Le cône est un corps rond dont la base est un cercle. Un pain de sucre donne l'idée d'un cône. Le cône est droit si la perpendiculaire abaissée de son sommet répond exactement au centre de la base.

215. Mesurer le volume d'un cône droit (*fig.* 92).

Le volume d'un cône droit est égal à la surface de sa base multipliée par le tiers de la hauteur.

Soit un pain de sucre dont la base a 38 centimètres de largeur, et dont la hauteur est de 52 centimètres.

Si la base à 38 centimètres de largeur, elle a 0.19 c. de rayon.

0.19	0.0361	
0.19	355	
171	1805	
19	1805	
0.0361	1083	
	12.8155	113
	151	0.1134
	385	0.52
	465	2268
	13	5670
	Total.	0.058968
	Dont le tiers est de	0.019656

Le volume de ce pain de sucre sera donc de 19 décimètres cubes, 656 centimètres cubes.

216. On appelle cône tronqué un cône dont on

a retranché la partie supérieure parallèlement à la base.

217. Mesurer un cône tronqué (*fig.* 93).

Pour obtenir ce volume, il faut prendre le rayon de chacune des bases, les ajouter et carrer leur somme, retrancher leur produit, et multiplier le reste par le tiers de la hauteur, et le tout par la fraction 355/113.

Soit le cône tronqué (*fig.* 93), dont la base supérieure a 42 cent. de diamètre, la base inférieure a 50 cent. de diamètre, et dont la hauteur a 36 cent.

Faisons le calcul indiqué ci-dessus :

			0.1591	
			0.12	
	0.21	0.21	3182	
	0.25	0.25	1591	
Total.	0.46	105	0.019092	
	0.46	42	355	
	276	0.0525	95460	
	184		95460	
	0.2116		57276	
Prod.	0.0525		6.777660	113
Différ.	0.1591		1127	0.059979
			1106	
			896	
			1050	
			53	

On trouve pour résultat 59 déc. cubes, 979 cent. cubes.

218. Le calcul du cône tronqué est assez compliqué; nous le recommandons aux maîtres, parce qu'il est très employé dans les arts : les cuves, les baquets, les chaudières, se rapportent au cône tronqué.

Les tonneaux eux-mêmes, quand on se contente d'une approximation, peuvent être considérés comme deux cônes tronqués unis par leur base inférieure.

219. *La sphère* est un corps rond dont tous les points de la surface sont à égale distance d'un point intérieur qu'on appelle centre (*fig.* 94).

Le volume de la sphère s'obtient en multipliant le rayon par lui-même, et le produit encore par le rayon; puis en multipliant ce dernier résultat par les 4/3 *de la fraction* 355/113, *c'est-à-dire par la raction* 1420/339.

Premier exemple.

220. Une sphère a 0ᵐ36 de diamètre. On demande le volume de cette sphère.

Son rayon est la moitié de 0ᵐ36, ou 0ᵐ18.

```
   0.18       0.005832      8.281440 | 339
   0.18           1420      1501     |---------
  -----       --------       1454    | 0.024428
    144         11664         984
    18         23328          3060
 ------        5832
 0.0324       --------
 0.18         8.281440
 ------
   2592
   324
 --------
 0.005832
```


Le volume de cette sphère est de 24 déc. cubes et 428 cent. cubes.

Deuxième exemple.

221. Une sphère a 5ᵐ42 de rayon. On demande le volume de cette spère.

```
      5.42            159.220088
      5.42                  1420
    ------           -----------
      1084             318440176
     2168             636880352
    2710              159220088
   --------          -------------
   29.3764           226092.524960
      5.42
   --------
    587528
   1175056
  1468820
 ----------
 159.220088
```

```
 226092.524960 | 339
   2269        |------------
    2352       | 666.939601
     3185
      1342
       3254
        2039
         560
```

Ainsi le volume de cette sphère est de 666 m. cubes, 939 déc. cubes, 601 cent. cubes.

Si on appelle π le rapport du diamètre à la circonférence, la formule du volume de la sphère est de $4/3\ \pi R^3$.