RÉPONSES

ET

SOLUTIONS RAISONNÉES

DES EXERCICES DE CALCUL ET PROBLÈMES

CONTENUS

DANS LA NOUVELLE ARITHMÉTIQUE

DES ÉCOLES PRIMAIRES

Remitida

Por.

PARIS — IMPRIMERIE DE CH. LAHURE ET Cie
Rues de Fleurus, 9, et de l'Ouest, 21

RÉPONSES
ET
SOLUTIONS RAISONNÉES
DES
EXERCICES DE CALCUL ET PROBLÈMES
CONTENUS
DANS LA NOUVELLE ARITHMÉTIQUE
DES ÉCOLES PRIMAIRES

DE G. RITT
inspecteur général de l'instruction primaire

par le même auteur

PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14
(Près de l'École de médecine)

RÉPONSES
ET
SOLUTIONS RAISONNÉES
DES EXERCICES DE CALCUL ET PROBLÈMES
CONTENUS
DANS LA NOUVELLE ARITHMÉTIQUE
DES ÉCOLES PRIMAIRES.

RÉPONSES AUX EXERCICES.

PREMIÈRE PARTIE.
THÉORIE ET PRATIQUE DU CALCUL.

LIVRE PREMIER.
NOMBRES ENTIERS.

I.
Numération parlée.

1). L'unité simple, la dizaine, la centaine.

2). Du quatrième ordre, du sixième.

3). Trois.

4). Les unités simples, les mille, les millions.

5). De la troisième, de la cinquième.

6). Deuxième ordre de la première classe, troisième ordre de la seconde classe

7). L'unité simple.

8). La centaine de mille.

9). La dizaine de millions.

10). Les unités peuvent être de différentes classes et des divers ordres; les unités simples sont les unités du premier ordre et de la première classe.

11). Chaque nombre doit avoir un nom particulier qui le distingue de tous les autres : la série des nombres étant infinie, il y a aussi un nombre infini de noms de nombres.

12). Dix, onze, douze, treize, quatorze. On ne considère pas comme des mots nouveaux les mots onze, douze, ..., seize, vingt, trente, quarante, cinquante, ..., quatre-vingts, quatre-vingt-dix, qui ne sont à proprement parler que des abréviations.

13). Sept mille huit cent cinquante-quatre.

II.

Numération écrite.

1). 1; 3; 5; 8; 9; 12; 15; 18. 2). 19; 20; 23; 27; 29.

3). 31; 36; 39; 48. 4). 51; 53; 55.

5). 59; 60; 67; 89. 6). 95; 100; 110; 209.

7). 307; 420; 512. 8). 603; 740; 871.

9). 890; 920. 10). 983; 1002.

11). 1138; 1078. 12). 2700; 3502.

13). 4540; 5903. 14). 5048; 6312.

15). 7900; 10050. 16). 13029; 20405.

17). 29800; 30700. 18). 32008; 43020.

19). 90004; 120039. 20). 200200; 600080.

21). 730902. 22). 824009.

23). 1522348. 24). 2000309.

25). 3040900. 26). 15025072.

27). 57028004. 28). 200300715.

29). 300000013. 30). 500004008.

31). 900004800.

32). Le $2^{\text{ième}}$, le $4^{\text{ième}}$, le $5^{\text{ième}}$, le $7^{\text{ième}}$, le $11^{\text{ième}}$.

33). La centaine, la dizaine de mille, le million, la dizaine de million.

34). Trois, six, sept, onze, treize, seize, dix-huit, dix-neuf, vingt, vingt-quatre, vingt-sept, vingt-huit.

35). Trente-quatre, trente-neuf, quarante-cinq, quarante-neuf, trois, cinquante, cinquante-trois, cinquante-six, neuf, cinquante-huit, soixante-trois.

36). Soixante-quinze, quatre-vingt-cinq, quatre-vingt-dix, quatre-vingt-dix-neuf, cent un, cent vingt-trois, deux cent quarante-huit, trente-sept, huit, quatre cent vingt-quatre.

37). Quatre cent soixante-quinze, six cent trente-quatre, quatre-vingt-deux, huit cent neuf, neuf cent soixante-huit, neuf cent soixante-dix-sept, trente-quatre, neuf cent quatre-vingt-treize, neuf.

38). Mille quatre, mille deux cent trente-huit, mille quarante-neuf, mille sept cent quatre-vingt-quinze, deux mille neuf, trois mille quatre cent soixante-quinze, trois mille huit, quatre mille neuf cent quatre-vingt-sept.

39). Cinq mille sept cent trente-six, cinq mille neuf cent quarante-huit, cinq mille sept, cinq mille quatre-vingt-dix-neuf, six mille huit cent quarante-cinq, neuf mille trois cent vingt-quatre, dix mille quatre cent vingt-neuf, dix mille trente-sept

40). Treize mille cinq cent quarante, vingt-huit mille cinq cent soixante-dix-neuf, quarante mille trois cent vingt, quatre-vingt-deux mille trois cent sept, cent dix mille trois cent quarante-neuf, cent trente-sept mille huit.

41). Deux cent quarante-huit mille quarante-sept, cinq cent quarante mille quatre cent vingt-trois, huit cent trente-cinq mille quatre cent trente-neuf, neuf cent quatre mille trois cent huit, un million deux cent soixante-quinze mille quarante-six, un million cinq cent soixante-deux mille quatre.

42). Trois millions sept cent quarante-cinq mille vingt-huit, sept millions huit cent quatre-vingt-dix mille quatre, dix-huit millions quarante-six mille quatre-vingt-dix-sept, quarante-trois millions quarante mille quatre-vingts, deux cent quarante-huit millions sept cent neuf mille quarante-trois.

43). Neuf cent quatre-vingt-sept millions six cent cinquante-quatre mille trois cent vingt-un, un billion deux cent trente-quatre millions cinq cent soixante-sept mille huit cent quatre-vingt-dix.

44). 3400; 1280000; 52000000; 60000000; 8002000000; 42300000000.

III.

Addition.

1). 13; 15; 29; 19; 38.

2). 89; 255; 750.

3). 1463; 3168; 15500.

4). 283741; 5911751.

5). 7258.

6). 80798.

7).
38
75
160
49
206
427
———
955

8).
503
620
947
316
839
548
———
3773

9).
305
428
510
1017
813
975
929
3007
2410
———
10394

10).
3512
4075
2925
3089
7117
8628
———
29346

11).
128
919
3040
1427
48
135
4023
2954
5018
———
17692

12).
3215
4927
405
3047
5029
6268
9403
8746
———
41040

13).
30705
42356
27132
74228
85937
———
260358

14).
140307
282025
352948
400975
850237
———
20264[illegible]

15).		16).	
	2030007		54018228
	5715129		39407347
	8900045		64500956
	9703418		79800734
	6703483		95320057
	33052082		83017112
			416064434

IV.

Soustraction.

1). 3; 6; 3; 6. 2). 9; 8; 6; 8; 9; 7; 7.
3). 11; 14; 41; 61; 70; 54. 4). 221.
5). 222. 6). 131.
7). 119. 8). 2383.
9). 1239. 10. 806.
11). 25184. 12). 1014.
13). 17518. 14). 101081.
15). 2795914. 16). 1399251.
17). 23332146. 18). 25233354.
19). 61438. 20). 341250.
21). 985992836. 22). 506700.
23). 94064215. 24). 605273.
25). 814161. 26). 52567437036.

V.

Multiplication.

1). 38215; 296322; 3014472; 1111111101.
2). 156; 10296; 780045; 148565648.
3). 255; 16625; 394320; 22436838864.

4). 304; 15552; 1607970; 156067307245.
5). 270, 23161; 2741184; 944985060.
6). 864; 36855; 4934680; 2787300000.
7). 925; 49062; 7673388; 18204450000.
8). 1827; 66381; 38949900; 30584706673000.
9). 3525; 149766; 22768872; 51734700605000.
10). 3071; 288642; 292163086; 9512250000000.
11). 4410; 480420; 363397914; 15241578750190521.

VI.

Division.

1). 38; 24; 35; 240; 1052; 14; 11.
2). 17; 21; 34. 3). 105; 47.
4). 73; 137. 5). 66; 13.
6). 70; 619. 7). 113; 149.
8). 34; 230. 9). 71; 610.
10). 29; 79. 11). 26; 375.
12). 74; 496. 13). 12; 7658.
14). 20; 3798. 15). 17.

LIVRE II.

FRACTIONS.

VII.

Notions préliminaires sur les fractions ordinaires.

1). $\frac{17}{25}$. 2). $\frac{85}{143}$.

3). Un *demi*; deux *tiers*; trois *septièmes*; quinze *vingt-neuvièmes*; trente-sept *soixante-quinzièmes*; six mille quatre cent quatre-vingt-trois *douze mille cinq cent quatre-vingt-unièmes*.

4). $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{18}$; $\frac{29}{47}$; $\frac{106}{220}$; $\frac{3041}{7917}$.

5). $8\frac{2}{5}$; $46\frac{2}{7}$; $35\frac{4}{13}$; $20\frac{58}{345}$; $73\frac{867}{4327}$.

6). $9\frac{1}{3}$; $5\frac{4}{5}$; $\frac{3}{7}$.

7). 4; $235\frac{3}{15}$; 15; $47\frac{123}{145}$; $11\frac{1437}{6348}$.

8). $\frac{5}{2}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{37}{7}$; $\frac{75}{4}$; $\frac{239}{8}$; $\frac{408}{5}$; $\frac{1568}{9}$; $\frac{232}{17}$; $\frac{1824}{71}$; $\frac{69057}{465}$.

9). 44 quarts.

10). 203 septièmes.

11). 6055 trente-cinquièmes.

12). 25 demis.

13). 88 cinquièmes.

14). 2877 vingtièmes.

15). La seconde fraction $\frac{6}{16}$ est plus petite que $\frac{7}{16}$, et celle-ci plus petite que $\frac{7}{15}$ qui a même numérateur et un dénominateur plus petit; donc la seconde fraction est plus petite que la première.

16). $\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$. 17). $\frac{5}{63}$.

18). $\frac{30}{3}=10$. 19). $\frac{15}{18}$.

20). $\frac{1}{18}$. 21). $\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$.

22). $\frac{3}{45}$.

VIII.

Réduction des fractions ordinaires au même dénominateur.

1). $\frac{27}{63}$, $\frac{35}{63}$; $\frac{65}{104}$, $\frac{88}{104}$; $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{18}{30}$; $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$.

2). $\frac{10}{20}$, $\frac{7}{20}$; $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$; $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{22}{24}$, $\frac{17}{24}$; $\frac{24}{48}$, $\frac{32}{48}$, $\frac{42}{48}$, $\frac{33}{48}$, $\frac{46}{48}$, $\frac{15}{48}$.

3). $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$; $\frac{3}{20}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{10}$.

4). $\frac{237}{240}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{27}{40}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{31}{60}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$.

IX.

Simplification des fractions ordinaires.

1). $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ en divisant *les deux termes* par 2;
$\frac{30}{48}=\frac{15}{24}$ en divisant par 2, $=\frac{5}{8}$ en divisant par 3;
$\frac{210}{630}=\frac{21}{63}$ en divisant par 10, $=\frac{3}{9}$ en divisant par 7, $=\frac{1}{3}$ en divisant par 3;
$\frac{324}{540}=\frac{81}{135}$ en divisant par 4, $=\frac{9}{15}$ en divisant par 9, $=\frac{3}{5}$ en divisant par 3;
$\frac{1280}{6400}=\frac{128}{640}$ en divisant par 10, $=\frac{32}{160}$ en divisant par 4, $=\frac{4}{20}$ en divisant par 8, $=\frac{1}{5}$ en divisant par 4.

2). $\frac{320}{540}=\frac{32}{54}=\frac{16}{27}$; $\frac{1690}{2600}=\frac{169}{260}=\frac{13}{20}$;
$\frac{3000}{4320}=\frac{300}{432}=\frac{75}{108}=\frac{25}{36}$; $\frac{18000}{129600}=\frac{180}{1296}=\frac{20}{144}=\frac{5}{36}$.

3). $\frac{58}{174}=\frac{1}{3}$ l. p. g. c. d. est 58;
$\frac{888}{962}=\frac{12}{13}$ 74;
$\frac{2403}{2492}=\frac{27}{28}$ 89;
$\frac{6566}{7772}=\frac{49}{58}$ 134;
$\frac{30281}{45563}=\frac{107}{161}$ 283.

4). $\frac{31}{64}$ est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$;
$\frac{127}{445}$ $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$;
$\frac{3348}{17963}$ $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$;
$\frac{62350}{548963}$ $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$;
$\frac{639635}{73698451}$ $\frac{1}{115}$ et $\frac{1}{116}$.

X.

Addition des fractions ordinaires.

1). $\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$; $\frac{97}{77}=1\frac{20}{77}$; $\frac{1137}{940}=1\frac{197}{940}$; $\frac{3781}{3180}=1\frac{601}{3180}$; $\frac{272567}{239030}=1\frac{33537}{239030}$.

2). $\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$; $\frac{142}{105}=1\frac{37}{105}$; $\frac{326}{120}=2\frac{43}{60}$; $\frac{114}{48}=2\frac{3}{8}$; $\frac{931}{320}=2\frac{291}{320}$.

3). $\frac{4609}{2520}=1\frac{2089}{2520}$.

4). $15\frac{17}{60}$; $106\frac{5}{12}$; $406\frac{37}{120}$; $3350\frac{19}{60}$.

XI.

Soustraction des fractions ordinaires.

1). $\frac{1}{28}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{147}{1295}$; $\frac{5246}{23595}$; $\frac{31383}{203670}$; $\frac{1172}{3600}=\frac{293}{900}$.

2). $\frac{3}{55}$; $\frac{5}{99}$; $\frac{21}{260}$.

3). $\frac{3}{14}$; $\frac{19}{99}$; $\frac{27}{100}$.

4). $1\frac{1}{14}$; $5\frac{1}{9}$; $14\frac{9}{44}$; $52\frac{13}{45}$.

5). $1\frac{7}{10}$; $\frac{5}{6}$; $3\frac{13}{20}$; $62\frac{15}{28}$; $918\frac{27}{36}$; $2\frac{997}{1020}$.

XII.

Multiplication des fractions ordinaires.

1). $\frac{3\times56}{4}=\frac{168}{4}=42$; $\frac{7\times9}{8}=\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$; $\frac{10\times6}{2}=\frac{60}{2}=30$; $\frac{13\times12}{48}=\frac{156}{48}=3\frac{1}{4}$; $\frac{15600}{739}=21\frac{81}{739}$.

2). Le $\frac{1}{7}$ de $56=8$, $8\times5=40$;
le $\frac{1}{9}$ de $126=14$, $14\times8=112$;

le $\frac{1}{12}$ de $360=30$, $30\times11=330$;
le $\frac{1}{40}$ de $240=6$, $6\times31=186$;
le $\frac{1}{250}$ de $1250=\frac{125}{25}=5$, $5\times123=615$.

3). $\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$; $\frac{112}{9}=12\frac{4}{9}$; $\frac{2040}{23}=88\frac{16}{23}$; $\frac{99120}{623}=159\frac{9}{89}$; $\frac{34965}{1966}=17\frac{1543}{1966}$.

4). $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{44}$.

5). $\frac{2\times3}{3\times7}=\frac{2}{7}$; $\frac{4\times6}{5\times11}=\frac{24}{55}$; $\frac{3\times5}{19\times8}=\frac{15}{152}$; $\frac{20\times5}{21\times12}=\frac{5\times5}{21\times3}=\frac{25}{63}$; $\frac{30\times13}{47\times28}=\frac{15\times13}{47\times14}=\frac{195}{658}$.

6). $\frac{3\times8}{5\times9}=\frac{1\times8}{5\times3}=\frac{8}{15}$; $\frac{4\times2}{7\times3}=\frac{8}{21}$; $\frac{16\times13}{21\times40}=\frac{2\times13}{21\times5}=\frac{26}{105}$; $\frac{29\times18}{54\times23}=\frac{29\times1}{3\times23}=\frac{29}{69}$; $\frac{148\times87}{549\times163}=\frac{148\times29}{183\times163}=\frac{4292}{29829}$.

7). $\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{3\times5}{7\times8}=\frac{15}{56}$; $\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{1\times8}{2\times9}=\frac{1\times4}{1\times9}=\frac{4}{9}$;
$\frac{12}{13}\times\frac{10}{11}=\frac{12\times10}{13\times11}=\frac{120}{143}$; $\frac{2}{3}\times\frac{20}{41}=\frac{2\times20}{3\times41}=\frac{40}{123}$;
$\frac{29}{41}\times\frac{52}{67}=\frac{29\times52}{41\times67}=\frac{1508}{2747}$.

8). $8\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{8\times3\times2}{4\times3}=\frac{2\times1\times2}{1\times1}=2\times2=4$;
$9\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{9\times2\times5}{3\times6}=\frac{3\times1\times5}{1\times3}=5$;
$20\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{20\times4\times7}{5\times8}=\frac{4\times1\times7}{1\times2}=2\times7=14$;
$80\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{80\times7\times3}{8\times5}=\frac{10\times7\times3}{1\times5}=\frac{2\times7\times3}{1\times1}=42$;
$252\times\frac{8}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{252\times8\times3\times1}{9\times5\times4}=\frac{28\times2\times3\times1}{1\times5\times1}=\frac{168}{5}=33\frac{3}{5}$;
$\frac{30}{41}\times\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{30\times7\times2\times1}{41\times8\times5\times3}=\frac{6\times7\times1\times1}{41\times4\times1\times3}=\frac{2\times7}{41\times4}=\frac{7}{82}$.

XIII.

Division des fractions ordinaires.

1). $\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}:6=\frac{3}{7\times6}=\frac{1}{7\times2}=\frac{1}{14}$;
$\frac{5}{8}:10=\frac{5}{8\times10}=\frac{1}{8\times2}=\frac{1}{16}$;
$\frac{7}{9}:11=\frac{7}{9\times11}=\frac{7}{99}$; $\frac{10}{11}:12=\frac{10}{11\times12}=\frac{5}{11\times6}=\frac{5}{66}$.

2). $3:\frac{1}{2}=3\times\frac{2}{1}=6$; $5:\frac{2}{3}=5\times\frac{3}{2}=\frac{5\times3}{2}=7\frac{1}{2}$;
$7:\frac{5}{6}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$; $8:\frac{8}{9}=\frac{8\times9}{8}=9$;
$9:\frac{10}{12}=\frac{9\times12}{10}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$.

3). $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3\times7}{5\times4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$; $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4\times5}{7\times3} = \frac{20}{21}$;
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} : \frac{3}{5} = \frac{5}{12}$; $\frac{2}{3} : \frac{1}{7} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$;
$\frac{3}{5} : \frac{7}{9} = \frac{27}{35}$; $\frac{4}{9} : \frac{3}{7} = 1\frac{1}{27}$; $\frac{10}{11} : \frac{11}{12} = \frac{120}{121}$; $\frac{17}{22} : \frac{30}{61} = 1\frac{377}{660}$;
$\frac{131}{350} \times \frac{795}{486} = \frac{131\times159}{50\times486} = \frac{131\times53}{50\times162} = \frac{6943}{8100}$.

4). $\frac{5}{2} : \frac{10}{3} = \frac{5\times3}{2\times10} = \frac{3}{4}$; $\frac{22}{5} : \frac{23}{3} = \frac{66}{115}$;
$\frac{91}{5} : \frac{9}{4} = \frac{364}{45} = 8\frac{4}{45}$; $5 : \frac{5}{2} = 2$; $\frac{7}{2} : 7 = \frac{1}{2}$;
$\frac{63}{2} : \frac{38}{3} = \frac{189}{76} = 2\frac{37}{76}$; $\frac{744}{5} : \frac{205}{7} = \frac{5208}{1025} = 5\frac{83}{1025}$.

XIV.

Notions préliminaires sur les fractions décimales.

1). Le second; le troisième; le cinquième.

2). Le dixième; le millième; le millionième; le dix-billionième.

3). Le centième.

4). Le millième; le dix-millième.

5). Deux; trois; cinq.

6). Un *dixième*; deux *centièmes*; trois *millièmes*; quatre *dix-millièmes*; cinq *cent-millièmes*.

7). Trois *dixièmes*; quarante-cinq *centièmes*; sept *centièmes*; soixante-treize *millièmes*; quarante *centièmes*.

8). Quatre cent trente-neuf *millièmes*; une *unité* sept mille cinq cent soixante-quatre *dix-millièmes*; quarante-cinq *unités* trois *dixièmes*; vingt-huit *unités* quatre *millièmes*; sept *unités* quatre cent quatre-vingt-dix *millièmes*.

9). Huit *dix-millièmes*; trois *unités* sept cent quatre-vingts *dix-millièmes*; dix-sept *unités* quatre-vingt-dix *dix-millièmes*; quarante-cinq mille neuf cent soixante-treize *cent-millièmes*; quarante-deux *unités* soixante-quinze mille six cent quarante *cent-millièmes*.

10). Sept *cent-millièmes;* une *unité* quatre cent cinquante mille sept cent neuf *millionièmes;* quatre mille sept cents *dix-millionièmes;* quatre-vingt-dix-sept *dix-millionièmes;* un *cent-millionième.*

11). 3,5; 0,7; 30,1; 0,04; 0,50; 0,90.

12). 5,20; 50,65; 48,07; 507,9; 20,60.

13). 0,034; 2,005; 3,500; 7,080; 48,502.

14). 0,0134; 2,0002; 30,0030; 5,9045; 0,0500.

15). 237,24; 4007,045; 18703,0067; 5000003,20; 500000,0500.

16). 3,9, trois *unités* neuf *dixièmes.*
54,8, cinquante-quatre *unités* huit *dixièmes.*
90,04, quatre-vingt-dix *unités* quatre *centièmes.*
1,703, une *unité* sept cent trois *millièmes.*
4,0027, quatre *unités* vingt-sept *dix-millièmes.*

17). 5007,009, cinq mille sept *unités* neuf *millièmes.*
43000,0040, quarante-trois mille *unités* quarante *dix-millièmes.*
5000,04008, cinq mille *unités* quatre mille huit *cent-millièmes.*
2000,004005, deux mille *unités* quatre mille cinq *millionièmes.*
3000,8700008, trois mille *unités* huit millions sept cent mille huit *dix-millionièmes.*

18). 35, trente-cinq *unités.*

19). 0,492, quatre cent quatre-vingt-douze *millièmes.*

20). 4,8937, quatre *unités* huit mille neuf cent trente-sept *dix-millièmes.*

21). 70, soixante-dix *unités.*

22). 0,0848, huit cent quarante-huit *dix-millièmes.*

23). 29420, vingt-neuf mille quatre cent vingt *unités.*

24). 0,0007, sept *dix-millièmes*.

25). 0,004739, quatre mille sept cent trente-neuf *millioniémes*.

26). 427800, quatre cent vingt-sept mille huit cents *unités*.

27). 347000, trois cent quarante-sept mille *unités*.

28). 0,24, vingt-quatre *centièmes*.

29). 2700, deux mille sept cents *unités*.

30). 0,00009, neuf *cent-millièmes*.

31). 80, quatre-vingts *unités*.

32). 0,00482937, quatre cent quatre-vingt-deux mille neuf cent trente-sept *cent-millionièmes*.

33). 7,5 sept *unités* cinq *dixièmes*.

34). 4,9, quatre *unités* neuf *dixièmes*.

35). 0,0487593, quatre cent quatre-vingt-sept mille cinq cent quatre-vingt-treize *dix-millionièmes*.

36). 84000, quatre-vingt-quatre mille *unités*.

37). 4873967000, quatre billions huit cent soixante-treize millions neuf cent soixante-sept mille *unités*.

38). Cent; dix mille; dix-mille; dix mille; dix millions.

39). Le mille; la dizaine; le millième; la dizaine; le millième.

40). Le second; à trois rangs de distance; à quatre rangs; à cinq rangs; à six rangs.

XV.

Recherche du quotient complet ou approché au moyen des décimales.

1). 3 : 4 = 0,75; 27 : 8 = 3,375; 49 : 16 = 3,0625; 174 : 24 = 7,25; 448 : 32 = 14; 360 : 48 = 7,5;

1296 : 64 = 20,25; 5493 : 125 = 43,944; 79638 : 625 = 127,4208.

2). 54,4640625; 45,3321875; 38,18632; 23,0205078125.

3). 11,9680192. **4**). 9,1.

5). 9,84. **6**). 6,123.

7). 38,0723. **8**). 0,10.

9). 0,013. **10**). 0,0274.

11). 0,055. **12**). 0,65.

13). 0,6498127.

XVI.

Addition des nombres décimaux.

1). 2,8; 20,9. **2**). 24,51.

3). 24,876. **4**). 199,903.

5). 1329,116. **6**). 782,9544.

7). 300,2216. **8**). 358,08378.

9). 708,79701.

10).	3,7	**11**).	0,25
	9,8		0,43
	4,5		2,3
	7		0,18
	0,4		0,75
	25,4		3,91
12).	0,003	**13**).	17,34
	0,042		5,08
	0,0025		40,50
	0,075		37,17
	0,029		0,40
	0,1515		100,49

14).		15).	
	52,025		0,0005
	3,40		0,007
	60,305		0,8
	12,9		0,025
	43,006		0,04
	20,72		0,002
	0,0015		0,8745
	0,040	16).	0,00034
	7,9		0,062
	53,0087		0,0200
	0,114		0,0008
	253,4202		0,00017
			0,08331
17).	4,2	18).	30,05
	0,129		4,5
	3,69		3550,29
	0,0050		200,012
	0,72		4906,7
	8,7440		8691,552

XVII.

Soustraction des nombres décimaux.

1). 2,3; 2,4; 6,2; 5,3.

2). 29,2; 44,4; 8,3; 72,2.

3). 0,4; 0,18; 0,193; 0,191.

4). 0,28; 0,57; 0,7.

5). 11,17; 60,66; 118,97.

6). 0,999; 0,0128; 0,5275.

7). 0,0088; 0,0006; 48.

8). 13,75; 68,968. 9). 87,675; 816,05.

10). 675,522; 3,71218. 11). 0,75996.

12). 0,0022; 0,0007. 13). 0,000002.

14). 0,000002. 15). 0,00000002.

XVIII.

Multiplication des nombres décimaux.

1). 310,5; 425,25; 8957,2; 147853,85; 126.

2). 752,4; 10,005; 4,074; 3,843.

3). 2,07774; 550,4; 87; 1,377.

4). 5.2376; 0,042; 0,003132; 6,72.

5). 28,8; 461,1; 0,6708741; 0,15; 0,48.

6). 0,3; 0,288; 0,1728; 1,484; 0,483.

7). 1,0795; 6,0517; 0,000162; 0,00036.

8). 0,258888; 2,510785; 0,000018035.

9). 0,00000000399; 279,1989425; 0,1688.

10). 2135798,0937051; 33153,960953528; 315,5939496.

XIX.

Division des nombres décimaux.

1).	12,075.	10,88.
2).	2,705625.	0,04535.
3).	0,01875.	0,00075.
4).	0,0037032.	0,0000156.
5).	0,000000109375.	0,0000003421875.
6).	3.	0,4.
7).	1,8.	90.
8).	80.	0,7.

9). 40. 30.

10). 790. 70.

XX

Conversion des fractions décimales en fractions ordinaires, et réciproquement.

1). $\frac{3}{10}$; $\frac{45}{100}$; $\frac{326}{100}$; $\frac{48739}{1000}$; $\frac{67432}{10000}$; $\frac{38}{100000}$.

Addition.

2). $1\frac{1}{6}$; $8\frac{22}{35}$; $\frac{113}{200}$; $1\frac{19}{36}$; $4\frac{3}{40}$.

Soustraction.

$\frac{31}{70}$; $4\frac{1}{6}$; $1\frac{19}{20}$; $10\frac{41}{45}$.

Multiplication.

$\frac{3}{35}$; $1\frac{2}{3}$.

Division.

$\frac{5}{28}$; $2\frac{5}{8}$.

3). $\frac{3}{5}=0{,}6$; $\frac{3}{4}=0{,}75$; $\frac{5}{8}=0{,}625$; $\frac{11}{25}=0{,}44$; $\frac{13}{40}=0{,}325$
$\frac{257}{500}=0{,}514$; $\frac{1829}{2560}=0{,}714453125$.

4). $\frac{3}{7}=0{,}4$ à moins de 0,1 près.

5). $\frac{8}{13}=0{,}62$ à 0,01 près.

6). $\frac{11}{17}=0{,}647$ à 0,001 près.

7). $\frac{12}{23}=0{,}5217$ à 0,0001 près.

8). $\frac{41}{53}=0{,}77358$ à 0,00001 près.

LIVRE III.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

XXI.

Le mètre, ses multiples et ses sous-multiples.

1). Cent; dix-mille; mille.

2). 40000000 mètres; 40000 kilomètres; 4000 myriamètres.

3). La millième partie; la millième partie; la cent-millième partie.

4). 1° $3^{met},5$; 2° $18^{met},24$; 3° $130^{met},508$; 4° $3000^{met},07$; 5° $2^{met},049$.

5). 1° 4 décimètres ou $0^{met},4$; 2° 30 centimètres ou $0^{met},30$; 3° 128 millimètres ou $0^{met},128$; 4° 29 millimètres ou $0^{met},029$; 5° 38 décimètres ou $3^{met},8$.

6). 1° Cinq mètres six décimètres ou mieux cinq mètres six dixièmes;
2° Quatre-vingt-deux mètres sept décimètres ou mieux sept dixièmes;
3° Quinze mètres seize centimètres ou mieux seize centièmes;
4° Trois cent quatre-vingt-deux mètres huit centimètres ou mieux huit centièmes;
5° Sept mètres trois cent quarante-huit millièmes.

7). 1° Zéro mètre vingt-cinq centièmes ou vingt-cinq centimètres;
2° Trois mètres huit millièmes ou huit millimètres;
3° Zéro mètre quatre-vingt-quinze dix millièmes ou quatre-vingt-quinze dix millimètres;

4° Zéro mètre sept mille deux cent quatre-vingt-neuf dix millièmes ou sept mille deux cent quatre-vingt-neuf dix millimètres;

5° Zéro mètre quatre-vingt-cinq mille neuf cent soixante-quatorze cent millièmes ou cent millimètres.

8). 1° 60000 mètres; 2° 25000 mètres; 3° 700 mètres; 4° 1370 mètres; 5° 2 mètres 5 dixièmes.

9). 1° 42380 mètres; 2° 53700 mètres; 3° 148359 mètres 6 dixièmes; 4° 380 mètres; 5° 2900 mètres.

10).

	1°	2°	3°
(*a*)	30 décimètres;	24;	756;
(*b*)	300 centimètres;	240;	7560;
(*c*)	3000 millimètres;	2400;	75600;
(*d*)	$0^{\text{decam}},3$;	0,24;	7,56;
(*e*)	$0^{\text{hectom}},03$;	0,024;	0,756;
(*f*)	$0^{\text{myriamet}},0003$;	0,00024;	0,00756,

	4°	5°
(*a*)	324,8;	75982,369;
(*b*)	3248;	759823,69;
(*c*)	32480;	7598236,9;
(*d*)	3,248;	759,82369;
(*e*)	0,3248;	75,982369;
(*f*)	0,003248;	0,75982369.

XXII.

Le mètre carré.

1). 1° Cent; 2° dix mille; 3° un million; 4° dix mille, 5° cent millions.

2). 1° La centième partie; 2° cent fois plus grand; 3° la dix-millième partie; 4° la cent-millionième partie; 5° la dix-billionième partie.

3). 1° $3^{\text{m-car}},06$; 2° $20^{\text{m-car}},0013$; 3° $3^{\text{decim-car}},05$ ou $0^{\text{m-car}},0305$; 4° $126^{\text{centim-car}}$ ou $1^{\text{decim-car}},26$ ou $0^{\text{m-car}},0126$; 5° $409^{\text{millim-car}}$ ou $4^{\text{centim-car}},09$ ou $0^{\text{decim-car}},0409$ ou $0^{\text{met-car}},000409$.

4). 1° 4 mètres carrés 25 centièmes ou 4 mètres carrés et 25 décimètres carrés; 2° 16 mètres carrés 3 dixièmes ou 16 mètres carrés 30 décimètres carrés; 3° 19 mètres carrés 849 dix-millièmes ou 19 mètres carrés 8 décimètres carrés 49 centimètres carrés; 4° 0 mètre carré 9 dix-millièmes ou 9 centimètres carrés; 5° 73 mètres carrés 45378 cent-millièmes ou 73 mètres carrés 45 décimètres carrés 37 centimètres carrés 80 millimètres carr.

5). 1° 7535 mètres carrés; 2° 8000000 mètres carrés; 3° 15800000000 mètres carrés; 4° 1270 mètres carrés; 5° 28600000 mètres carrés.

6). 1° $0^{\text{m-car}},03$; 2° $0^{\text{m-car}},0275$; 3° $0^{\text{m-car}},0028$; 4° $0^{\text{m-car}},000375$; 5° $0^{\text{m-car}},000007$.

7).

	1°	2°
(*a*) Décimètres carrés,	600;	1520.
(*b*) Centimètres carrés,	60000;	152000.
(*c*) Millimètres carrés,	6000000;	15200000.
(*d*) Décamètres carrés,	0,06;	0,152.
(*e*) Hectomètres carrés,	0,0006;	0,00152.
(*f*) Myriamètres carrés,	0,00000006;	0,000000152.

	3°	4°
(*a*) Décimètres carrés,	13175;	148287,5.
(*b*) Centimètres carrés,	1317500;	14828750.
(*c*) Millimètres carrés,	131750000;	1482875000.
(*d*) Décamètres carrés,	1,3175;	14,82875.
(*e*) Hectomètres carrés,	0,013175;	0,1482875.
(*f*) Myriamètres carrés,	0,0000013175;	0,00001482875.

	5°
(*a*) Décimètres carrés,	1378935,648.
(*b*) Centimètres carrés,	137893564,8.
(*c*) Millimètres carrés,	13789356480.
(*d*) Décamètres carrés,	137,8935648.
(*e*) Hectomètres carrés,	1,378935648.
(*f*) Myriamètres carrés,	0,0001378935648.

XXIII.

L'are.

1). 1° Dix mille; 2° dix mille; 3° un million; 4° un million; 5° dix billions.

2). 1° $20^{\text{ares}},05$; 2° $32^{\text{hectares}},50$; 3° $28^{\text{hectares}},0075$; 4° $13^{\text{hectares}},0220$; 5° $2^{\text{hectares}},0003$.

3). 1° 37 ares 5 centièmes ou 5 centiares;
2° 3 hectares 45 centièmes ou 45 ares,
3° 7 hectares 6 dixièmes ou 60 ares;
4° 175 ares 4 dixièmes ou 40 centiares;
5° 48 hectares 7 millièmes ou 70 centiares.

4).

	1°	2°	3°
(a) Centiares,	345;	4567;	48,3.
(b) Ares,	3,45;	45,67;	0,483.
(c) Hectares,	0,0345;	0,4567;	0,00483.

	4°	5°
(a) Centiares,	1,458;	0,0004.
(b) Ares,	0,01458;	0,000004.
(c) Hectares,	0,0001458;	0,00000004.

XXIV.

Le mètre cube.

1). 1° Un million; 2° mille; 3° mille; 4° un billion; 5° un million.

2). 1° La millième partie; 2° la millième partie; 3° la millième partie; 4° la millionième partie; 5° la billionième partie.

3). 1° $2^{\text{m-cub}},140$; 2° $3^{\text{m-cub}},028$; 3° $45^{\text{decim-cub}}$ ou $0^{\text{m-cub}},045$;
4° $5^{\text{decim-cub}},029$ ou $0^{\text{m-cub}},005029$;
5° $30^{\text{decim-cub}},008$ ou $0^{\text{m-cub}},030008$.

4). 1° $3^{\text{centim-cub}},140$ ou $0^{\text{m-cub}},00000314$;
2° $5^{\text{decim-cub}},000809$ ou $0^{\text{m-cub}},005000809$;
3° $60^{\text{centim-cub}},012$ ou $0^{\text{m-cub}},000060012$;
4° $2^{\text{decim-cub}},003004$ ou $0^{\text{m-cub}},002003004$;
5° $1^{\text{decim-cub}},005020$ ou $0^{\text{m-cub}},001005020$.

5). (a) 1° 3 metres cubes 248 millièmes ou 248 décimètres cubes;
2° 6 mètres cubes 75 millièmes ou 75 décimètres cubes;
3° 0 mètre cube 29415 cent-millièmes ou 294 décimètres cubes 150 centimètres cubes;
4° 0 mètre cube 3019 millionièmes ou 3 décimètres cubes 19 centimètres cubes;
5° 2 mètres cubes 5 dixièmes ou 500 décimètres cubes.

6). (b) 1° 0 mètre cube 48 centièmes ou 480 décimètres cubes;
2° 0 mètre cube 5 dix-millièmes ou 500 centimètres cubes.
3° 0 mètre cube 6 cent-millièmes ou 60 centimètres cubes;
4° 0 mètre cube 8 millionièmes ou 8 centimètres cubes;
5° 0 mètre cube 40035 dix-millionièmes ou 4 décimètres cubes 3 centimètres cubes 500 millimètres cubes.

7).

	(a) Décim. cubes.	(b) Centim. cubes.	(d) Millim. cubes.
1°	6000;	6000000;	6000000000.
2°	15320;	15320000;	15320000000.
3°	144358;	144358000;	144358000000.
4°	1432356,7;	1432356700;	1432356700000.
5°	489,562;	489562;	489562000.

XXV.

Le stère.

1). 1° Dix; 2° un; 3° mille, 4° un million; 5° un billion.

2). 1° Dix; 2° dix mille; 3° dix millions; 4° cent; 5° cent mille.

3). 1° $20^{\text{stères}}$,3; 2° 25 stères; 3° 16 stères; 4° $130^{\text{stères}}$,6; 5° $0^{\text{stère}}$,9.

4). 1° 35 stères; 2° $60^{\text{stères}}$,3; 3° $4^{\text{stères}}$,8; 4° 290 stères; 5° $13^{\text{stères}}$,5.

5). 1° 38 stères 7 dixièmes ou 7 décistères; 2° 0 stère 4 dixièmes ou 4 décistères; 3° 49 décastères 5 dixièmes ou 495 stères; 4° 38 décastères 24 centièmes ou 382 stères 4 décistères; 5° 0 décastère 59 centièmes ou 5 stères 9 décistères.

6).

	(a) décastères.	(b) décistères.
1°	3,83;	383;
2°	14,82;	1482;
3°	1,3;	130;
4°	0,09;	9;
5°	128,98;	12898.

XXVI.

Le litre.

1). 1° Cent; 2° cent; 3° mille; 4° mille; 5° dix mille.

2). 1° La millième partie; 2° la centième partie; 3° la dix-millième partie; 4° la dix-millième partie.

3). 1° Mille; 2° la centième partie; 3° la dixième partie; 4° dix; 5° dix mille.

4). 1° Dix millions; 2° cent; 3° dix; 4° dix mille; 5° mille.

5). 1° La millième partie; 2° la cent-millième partie; 3° 20 fois; 4° 50 fois; 5° la vingtième partie.

6). 1° $3^{\text{lit.}}$,5; 2° $8^{\text{décalit.}}$,035; 3° $12^{\text{hectolit.}}$,08; 4° 28 centilitres ou $0^{\text{lit.}}$,28; 5° $7^{\text{hectolit.}}$,007.

7). 1° 5 litres 2 dixièmes ou 2 décilitres;
2° 42 hectolitres 38 centièmes ou 38 litres;
3° 5 kilolitres 09 centièmes ou 9 décalitres;
4° 28 hectolitres 5 dixièmes ou 5 décalitres;
5° 7 décalitres 3 dixièmes ou 3 litres.

8). 1° 29 décalitres 43 centièmes ou 4 litres et 3 décilitres;
2° 18 litres 375 millièmes ou 3 décilitres 7 centilitres et 5 millilitres;
3° 13 kilolitres 8 millièmes ou 8 litres;
4° 3 décilitres 9 dixièmes ou 9 centilitres;
5° 0 litre 348 millièmes ou 3 décilitres 4 centilitres et 8 millilitres.

9).

(A)	1	2°	3°
(a) Décalitres,	1,8;	0,35;	24,837;
(b) Hectolitres,	0,18;	0,035;	2,4837;
(c) Kilolitres,	0,018;	0,0035;	0,24837,
(d) Décilitres,	180;	35;	2483,7;
(e) Centilitres,	1800;	350;	24837;
(f) Millilitres,	18000;	3500;	248370:

(A)	4°	5°
(a) Décalitres,	0,02;	0,045,
(b) Hectolitres,	0,002;	0,0045;
(c) Kilolitres,	0,0002;	0,00045;
(d) Décilitres,	2;	4,5;
(e) Centilitres,	20;	45;
(f) Millilitres,	200;	450.

10).

(B)	1°	2°	3°
(a) Décalitres,	300;	1340;	80;
(b) Hectolitres,	30;	134;	8;
(c) Kilolitres,	3;	13,4;	0,8;
(d) Décilitres,	30000;	134000;	8000;
(e) Centilitres,	300000;	1340000;	80000;
(f) Millilitres,	3000000;	13400000;	800000;

424.

(B)	4°	5°
(*a*) Décalitres,	43592,3;	37049,875;
(*b*) Hectolitres,	4359,23;	3704,9875;
(*c*) Kilolitres,	435,923;	370,49875;
(*d*) Décilitres,	4359230;	3704987,5;
(*e*) Centilitres,	43592300;	37049875;
(*f*) Millilitres,	435923000;	370498750.

XXVII.

Le gramme, ses multiples et ses sous-multiples.

1). 1° Mille; 2° cent; 3° dix mille; 4° dix; 5° cent mille.

2). 1° Cent; 2° cent; 3° dix mille; 4° cent; 5° dix.

3). 1° Un kilogramme; 2° dix kilogrammes; 3° cent kilogrammes; 4° mille kilogrammes; 5° cent grammes.

4). 1° Dix grammes; 2° un gramme; 3° deux mille grammes; 4° cinquante grammes; 5° vingt grammes; 6° cinq kilogrammes.

5). 1° $25^{gr},3$; 2° $30^{kilog},025$; 3° $10^{centig},3$; 4° $18^{hectog},03$; 5° $15^{kilog},008$.

6). 1° $40^{kilog},05$; 2° $12^{kilog},0009$; 3° $2^{hectog},0007$; 4° $8^{decag},003$; 5° $20^{kilog},000007$.

7). 1° 3 kilogrammes 83 centièmes ou 83 décagrammes;
2° 18 kilogrammes 759 millièmes ou 759 grammes;
3° 25 myriagrammes 49 centièmes ou 49 hectogrammes;
4° 32 grammes 48 centièmes ou 48 centigrammes;
5° 0 gramme 8 millièmes ou 8 milligrammes.

8). 1° 128 myriagrammes 4 dixièmes ou 4 kilogrammes;
2° 79 kilogrammes 3 dixièmes ou 3 hectogrammes;
3° 9 grammes 5 millièmes ou 5 milligrammes;
4° 38 grammes 7 centièmes ou 7 centigrammes;
5° 0 myriagramme 8 dix-millièmes ou 8 grammes.

9).

	1°	2°	3°
(*a*) Décagrammes,	0,32	4,83	14,8439
(*b*) Hectogrammes,	0,032	0,483	1,48439
(*c*) Kilogrammes,	0,0032	0,0483	0,148439
(*d*) Myriagrammes,	0,00032	0,00483	0,0148439

	4°	5°
(*a*) Décagrammes,	0,03	0,048
(*b*) Hectogrammes,	0,003	0,0048
(*c*) Kilogrammes,	0,0003	0,00048
(*d*) Myriagrammes,	0,00003	0,000048

10).

	1°	2°	3°
(*a*) Décigrammes,	40	345	486,3
(*b*) Centigrammes,	400	3450	4863
(*c*) Milligrammes,	4000	34500	48630

	4°	5°
(*a*) Décigrammes,	4,9	0,08
(*b*) Centigrammes,	49	0,8
(*c*) Milligrammes,	490	8

11). 1° 38 kilogrammes; 2° 4230 kilogrammes; 3° 39 décagrammes; 4° 23 kilogrammes 48 centièmes; 5° 253 kilogrammes.

12). 1° 18000 kilogrammes; 2° 3400 kilogrammes; 3° 480 kilogrammes; 4° 500 grammes; 5° 489 grammes 7 décigrammes.

XXVIII.

Le franc.

1). 1° Dix; 2° dix, 3° deux cents; 4° cinquante; 5° cinq cents.

2). 1° Quatre; 2° dix; 3° huit; 4° vingt.

3). 1° $38^{fr},25$; 2° $206^{fr},20$; 3° $7^{fr},05$; 4° $50^{fr},7$ ou $50^{fr},70$; 5° $0^{fr},95$.

4). 1° $4^{fr},30$; 2° $1^{fr},35$; 3° $3^{fr},205$; 4° $0^{fr},035$; 5° $40^{fr},35$.

5). 1° 148 francs 30 centimes; 2° 17 francs 9 décimes ou 90 centimes; 3° 4 francs 5 centimes; 4° 10 francs 10 centimes; 5° 75 centimes.

6). 1° 325 francs 40 centimes et demi ou 405 millimes, 2° 84 centimes et 7 dixièmes de centime ou millimes; 3° 1 franc 1 centime et demi; 4° 18 francs 5 millimes; 5° 1 centime et 5 centièmes ou 105 dix-millièmes de franc.

7).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) décimes,	530;	42;	152;	480,8;	0,75;
(*b*) centimes,	5300;	420;	1520;	4808;	7,5.

8).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) francs,	45,6;	4,83;	0,85,	0,07;	0,0085;
(*b*) centimes,	4560;	483;	85;	7;	0,85.

9).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) francs,	7,45;	0,48;	0,153;	0,087;	0,0005;
(*b*) décimes,	74,5;	4,8;	1,53;	0,87;	0,005.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

LIVRE PREMIER.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES.

XXIX.

Propriétés des proportions.

1). 1° $x = 54$;
2° $x = 72\frac{6}{7}$;
3° $x = 72$;
4° $x = 7$;
5° $x = \frac{14}{17}$.

2). 1° $x = 0{,}5625$,
2° $x = 0{,}60$;
3° $x = 3\frac{1}{3}$;
4° $x = 0{,}12$;
5° $x = 2{,}50$.

3). 1° $x = 1\frac{1}{2}$;
2° $x = 1\frac{299}{520}$;
3° $x = 29\frac{17}{75}$;
4° $x = 2\frac{5}{56}$;
5° $x = 1{,}3$.

4). $x = 6$;
$y = 18$.

5). $x = 124{,}8$;
$y = 172{,}8$.

6). $x = 14$;
$y = 21$;
$z = 28$.

7). $x = 36$;
$y = 24$;
$z = 18$.

8). $x = 2000$;
$y = 3000$;
$z = 4000$;
$u = 5000$.

5). 1° 148 francs 30 centimes; 2° 17 francs 9 décimes ou 90 centimes; 3° 4 francs 5 centimes; 4° 10 francs 10 centimes; 5° 75 centimes.

6). 1° 325 francs 40 centimes et demi ou 405 millimes, 2° 84 centimes et 7 dixièmes de centime ou millimes; 3° 1 franc 1 centime et demi; 4° 18 francs 5 millimes; 5° 1 centime et 5 centièmes ou 105 dix-millièmes de franc.

7).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) décimes,	530;	42;	152;	480,8;	0,75;
(*b*) centimes,	5300;	420;	1520;	4808;	7,5.

8).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) francs,	45,6;	4,83;	0,85,	0,07;	0,0085;
(*b*) centimes,	4560;	483;	85;	7;	0,85.

9).

	1°	2°	3°	4°	5°
(*a*) francs,	7,45;	0,48;	0,153;	0,087;	0,0005;
(*b*) décimes,	74,5;	4,8;	1,53;	0,87;	0,005.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

LIVRE PREMIER.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES.

XXIX.

Propriétés des proportions.

1). 1° $x=54$; 2° $x=72\frac{6}{7}$; 3° $x=72$; 4° $x=7$; 5° $x=\frac{14}{17}$.

2). 1° $x=0{,}5625$, 2° $x=0{,}60$; 3° $x=3\frac{1}{3}$; 4° $x=0{,}12$; 5° $x=2{,}50$.

3). 1° $x=1\frac{1}{2}$; 2° $x=1\frac{299}{520}$; 3° $x=29\frac{17}{75}$; 4° $x=2\frac{5}{56}$; 5° $x=1{,}3$.

4). $x=6$; $y=18$.

5). $x=124{,}8$; $y=172{,}8$.

6). $x=14$; $y=21$; $z=28$.

7). $x=36$; $y=24$; $z=18$.

8). $x=2000$; $y=3000$; $z=4000$; $u=5000$.

LIVRE II.

THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES; ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

XXX.

Du carré et de la racine carrée.

1). 529	$\frac{4}{9}$	0,09.
2). 2025	$\frac{16}{49}$	6,25.
3). 6241	$\frac{169}{841}$	185,2321.
4). 17956	$\frac{784}{6561}$	0,0064.
5). 71289	$\frac{2401}{12544}$	0,005625.
6). 301401	$\frac{23716}{119025}$	10,342656.
7). 38825361	$\frac{44100}{546121}$	0,0000793881.
8). 89775625	$\frac{235225}{833569}$	0,000000002809.
9). 1007618049	$13\frac{212}{289}$	0,00000000008464.
10). 218860230625.	$351\frac{9}{16}$	81,02880256.
11). 9	$\frac{3}{8}$	0,7.
12). 38	$\frac{7}{20}$	0,13.
13). 49	$\frac{5}{13}$	5,4.
14). 65	$1\frac{1}{19}$	0,108.
15). 78	$1\frac{21}{31}$	23,3...
16). 108	$\frac{47}{79}$	59 exactement.
17). 179	$\frac{320}{1800}=\frac{8}{45}$	0,845...
18) 3526	$\frac{50}{18754}$	1,5546...
19). 54217	$\frac{61}{17023}$	1,84797...
20). 439182	$\frac{312459}{254073}=1\frac{19462}{84691}$	0,069209...

XXXI.

Du cube et de la racine cubique.

1). 1728	$\frac{8}{343}$	0,027.
2). 24389	$\frac{2197}{15625}$	0,000512.
3). 421875	$3\frac{3}{8}$	2,460375.
4). 2299968	$44\frac{692}{729}$	8,072216216.
5). 78953589	$2032\frac{8}{27}$	0,000000064.
6). 164566592	$16735\frac{5891}{6859}$	0,000000188132517.
7). 16522921323	$2134232\frac{27}{64}$	0,000000000000729.
8). 53540005609	$47\frac{12038388}{13997521}$	0,040283058752.
9). 410205530831608	$25759\frac{1682}{3375}$	0,000000000000000343.
10). 2169635008739912	$523\frac{120209092949}{395446904000}$	39321,342550125.
11). 8	$\frac{2}{5}$	3,7.
12). 12	$1\frac{1}{2}$	1,06.
13). 39	$\frac{7}{10}$	25,8.
14). 52	$\frac{12}{39}$	16,2...
15). 74	$\frac{14}{17}$	7,04...
16). 135	$1\frac{2}{19}$	1,526...
17). 223	$5\frac{5}{11}$	0,65...
18). 688	$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	0,1661...
19). 441	$\frac{4}{5}$	4,331...
20). 1702 $2\frac{1}{2}$		0,021126.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE ET PRATIQUE DU CALCUL.

LIVRE PREMIER.

NOMBRES ENTIERS.

I.

Addition.

1). 137.

2). L'âge du père 45, celui de la mère 38.

3). Louis XIV est mort en 1715, âgé de 77 ans.

4). 68 rois, 1373 ans.

5). 1194603 habitants.

6). 996 millions d'habitants.

7). 101 marches.

8). 4018340 habitants.

9). 1602 arbres.

10). 698686 têtes de bétail.

II.

Soustraction.

1). 8422.

2). 783.

3). 209.

4). 52 ans.

5). 174 ans.

6). 23975.

7). 44405.

8). De 1700 à 1800 la population de la France s'est accrue de 9700000 habitants; de 1800 à 1841, de 4900000 habitants.

9). Il lui reste de la première espèce 450, deuxième espèce 280, troisième espèce 209, quatrième espèce 91, cinquième espèce 297, et en tout 1327 arbres.

10). De 1300 à 1800, la population de Paris s'est accrue de 607800 habitants; de 1800 à 1841, de 202461 habitants.

III.

Multiplication.

1). $47 \times 28 = 1316$.

2). $12 \times 17 = 204$ élèves.

3). $320 \times 79 = 25280$ arbres.

4). $6 \times 45 = 45 \times 6 = 270$ carreaux.

5). $25 \times 35 = 875$ tours.

6). $3 \times 34 \times 6 = 612$ francs.

7). $125 \times 18 = 2250$ francs.

8). $3769 \times 458 = 1726202$.

9). $475 \times 127 = 60325$.

$475 + 15 = 490$, $490 \times 127 = 62230$.

$62230 - 60325 = 1905$.

Les 127 pièces ont coûté 60325, elles ont été revendues 62230 francs et ont produit un bénéfice de 1905 francs.

On aurait pu trouver directement ce bénéfice en multipliant 15^f par $127 = 1905$.

10). $24 \times 36 \times 450 = 388800$ lettres.

IV.

Division.

1). Chaque enfant recevra 8 noix; celui qui en avait le plus en perdra 4, et celui qui en avait le moins en gagnera 3.

2). 3167.
3). 227.
4). 50 fois.
5). 80 fois.
6). 16 personnes.
7). 81 arbres.
8). 600 tours.
9). 147.
10). 58 francs.

V.

Problèmes de récapitulation sur les quatre opérations.

1). La classe contenait $69 + 48 + 53 = 170$. Par suite de la rentrée et de la sortie, la petite classe ne contient plus que $69 - 12 = 57$ élèves, la moyenne $48 - 8 = 40$, et la grande $53 + 7 = 60$, et en tout l'école contient $57 + 40 + 60 = 157$ élèves.

2). La première a eu 130 fr., la deuxième $130 - 20 = 110$, et la troisième $360 - (130 + 110) = 360 - 240 = 120$.

3). Le chiffre des unités doit être $7 - 1 = 6$, celui des dizaines $9 + 2 = 11$, et par conséquent 1 avec 1 de retenue pour la colonne suivante des centaines; mais d'après l'énoncé, le chiffre des centaines doit être $5 + 2 = 7$, et avec la retenue $7 + 1 = 8$; enfin le chiffre des mille doit être $4 - 3 = 1$; l'élève aurait dû trouver pour la somme demandée 31816 au lieu de 34597. La différence entre ces deux résultats est $34597 - 31816 = 2781$.

4). Il reste $1000 - (348 + 75 + 375) = 1000 - 798 = 202^{fr}$.

5). La dépense totale de la famille est
$$1548 + 526 + 740 + 325 = 3139 \text{ francs.}$$

6). Il faut la revendre
$$2528 + 350 - 50 = 2528 + 300 = 2828 \text{ francs.}$$

7). Clovis est mort à un âge exprimé par
$$(511 - 481) + 15 = 30 + 15 = 45 \text{ ans.}$$
Il est né en $481 - 15 = 466$; en 1845, il s'était écoulé $1845 - 481 = 1364$ ans depuis son avénement au trône.

8). Il a reçu $48536 - 3748 = 44788$ francs.

9). Les deux premiers payements réunis font
$$5700 + 4320 = 10020 \text{ francs,}$$
le troisième sera $13950 - 10020 = 3930$ francs.

10). Le régiment se compose de
$$728 + 712 + 697 + 345 = 2482 \text{ hommes.}$$

11). $720 : 10 = 72$, $72 \times 2 = 144$ nombre demandé.

12). La recette de l'année a été de
$$15936 + 31940 + 27674 + 42769 = 118319 \text{ francs.}$$
$118319 + 24375 = 142694$, $142694 - 96843 = 45851$, il reste au banquier 45851 francs.

13). Le produit véritable doit être
$$3339 + 63 \times 2 = 3339 + 126 = 3465.$$
Le multiplicateur était 55 et non 53.

14). La voiture transporte annuellement
$$16 \times 14 \times 365 = 81760 \text{ voyageurs.}$$

15). Le premier héritier a reçu 14000 francs.

Le deuxième $14000 - 800 =$	13200
Le troisième $13200 - 500 =$	12700
Legs fait aux hôpitaux......	3600
Aux pauvres..............	1200
Total ou montant de la succession	44700 francs.

16). $14 - 2 = 12$, $12 : 2 = 6$, une des caisses contenait $6 + 2$ douzaines ou $12 \times 8 = 96$ oranges, et l'autre 6 douzaines ou $12 \times 6 = 72$.

17). Le nombre total des canons est
$110\times3+84\times8+50\times6=330+672+300=1302$.

18). Les 5 douzaines de perdrix à 2 francs la pièce, valent $2^{fr}\times60=120$ francs, les 3 douzaines de faisans ont donc rapporté $120+60=180$ francs, et chaque faisan a été vendu $180^{fr} : 36=5$ francs.

19). L'équipage de l'escadre se compose de
$970\times2+890\times5+450\times4=1940+4450+1800=8190^{hom}$.

20 Prix d'achat de la maison 53490
Frais de réparations..... 14768
Bénéfice................ 6000
Total ou prix de vente 74258 francs.

21). Héritage........ 36500 francs.

Part du premier...............	12450
Part du second.. 12450 — 350 =	12100
Total des deux parts...........	24550
Part du troisième 36500 — 24550 =	11950

22) Mise du premier............... 18730
Mise du second 25400 — 18730 = 6670
Différence demandée........... 12060

23). La pièce de Bourgogne coûte $135-75=60$ francs.

24). Première espèce..... 348
Deuxième espèce.... 165
Total....... 513
Reste après la vente.. 309
Vendu............ 204
Sur lesquelles...... 147 de la première espèce.
Vendu de la 2e espèce 57, nombre demandé.

25). Part de la troisième.......... 750
Part de la seconde. $750\times3=$ 2250
Part de la première $2250\times2=$ 4500
Montant de l'héritage......... 7500

26). J'ai $1800+28-540=1828-540=1288$ francs.

27). $426-38=388$, la somme que je possède n'est que la moitié de 388 ou 194 francs.

28). 23 paquets de 25 plumes font $25\times23=$ 575
$48-23=25$ paq. de 30 plu. font $30\times25=$ 750
Total..................... 1325 plum.

29). Nombre de journées des 43 ouvriers. $15\times43=$ 645
Nombre de journées des 57 ouvriers. $18\times57=$ 1026
Total........................... 1671

30). 36 pièces de Bordeaux, à 125 fr.,
valent.................. $125\times36=4500$ fr.
48 pièces de Mâcon, à 90 fr.,
valent.................. $90\times48=$ 4320
Total...................... 8820 fr.

31). Prix d'achat de la barrique $26854^{fr} : 463=58$ fr.
Prix total de vente $26854+2315=29169$.
Prix de vente de la barrique $29169 : 463=63$.
Bénéfice sur chaque barrique, $63-58=5$ fr.
On aurait pu trouver directement le bénéfice sur chaque barrique en divisant 2315 par 463, ce qui donne 5.

32). 138 journées à 2 fr., valent $2^{fr}\times138=276$ francs, restent $573-138=435$ journées qui coûtent
$1581-276=1305$ fr.
Le prix de chacune de ces dernières est $1305 : 435=3$ fr.

33). La bouteille de Bordeaux coûte $900 : 300=3$ fr.
Celle de Mâcon vieux.......... $560 : 280=2$
Différence.............................. 1 fr.
La bouteille de Bordeaux coûte 1 franc de plus que celle de Mâcon.

34). $153+148+95=396$, prix de la journée d'ouvrier $1188 : 396=3$ francs.

35). Les 123 croisées à 8 carreaux chacune, renferment $8 \times 123 = 984$ carreaux qui coûtent 1968 fr. Chaque carreau coûte $1968 : 984 = 2$ francs.

36). 15 sacs à 35 fr. font $35^{fr} \times 15 = 525$ fr.
$29 - 15 = 14$ sacs à 36 fr. font $36^{fr} \times 14 = 504$
Total.................... 1029 fr.

37). $2598 - 1845 = 753$ ans avant J. C.

38). 40 bouteilles à 3 fr. la bouteille, font $3^{fr} \times 40 = 120$ fr. $120 - 60$ fr. de retour $= 60$ fr., prix des 12 bouteilles de liqueur; prix de la bouteille de liqueur $60 : 12 = 5$ fr.

39). $30616 - 27967 = 2649$ excès des naissances sur les décès.

40). Les 280 bouteilles à 3 fr. rapporteront

$$3^{fr} \times 280 = 840 \text{ fr.}$$

dont il faut soustraire 38 fr., prix d'achat du verre; la vente de la pièce produira par conséquent

$$840 - 38 = 802 \text{ fr.}$$

Le bénéfice du marchand sera donc $802 - 540 = 262$ fr.

41). La feuille in-8° contient 16 pages et celle in-12, 24. Le volume imprimé en in-12, aurait donc

$$480 : 24 = 20 \text{ feuilles.}$$

En in-8°, il en avait $480 : 16 = 30$.

42). 2 fr. d'économie par jour valent au bout de l'année

$$2^{fr} \times 365 = 730 \text{ fr.}$$

Il ne reste donc plus pour la dépense que

$$3285 - 730 = 2555 \text{ fr.}$$

La dépense journalière sera $2555 : 365 = 7$ fr.

43). Les 18 pièces à 108 fr. coûtent $108 \times 18 = 1944$
12 pièces à 106 fr. coûtent $106 \times 12 = 1272$
Restent 6 pièces qui valent................ 672 fr.

Chacune desquelles devra être vendue au prix de

$$672 : 6 = 112 \text{ fr.}$$

44). 4 balles à 65 fr. valent $65^{fr} \times 4 = 260$ fr.
7 balles à 68 fr. valent $68^{fr} \times 7 = 476$
11 $\qquad$ 736 fr.

Les $20 - 11 = 9$ balles restantes coûtent

$$1312 - 736 = 576^{fr},$$

par conséquent la balle revient à $576 : 9 = 64^{fr}$.

45). $30 + 3 - 1 = 32$ représentent le double de la somme égale que chacune aurait d'après l'énoncé. Elles auraient donc $32 : 2 = 16$; et par conséquent l'une des deux personnes a $16 - 3 = 13$, et l'autre $16 + 1 = 17$.

46). 50 élèves payant 3 fr., donnent $3^{fr} \times 50 = 150^{fr}$
45 élèves payant 4 fr., donnent $4^{fr} \times 45 = 180$
95 $\qquad$ 330^{fr}

Les $135 - 95 = 40$ élèves de la grande classe payent en tout $570 - 330 = 240$, et par conséquent chaque élève paye $240 : 40 = 6^{fr}$.

47). 540 est le triple du nombre d'exemplaires brochés par les femmes; donc les femmes ont broché $540 : 3 = 180$ exemplaires, et les hommes $180 \times 2 = 360$.

48). 34 paires à 16 francs, font $16^{fr} \times 34 = 544^{fr}$. Les $76 - 34 = 42$ paires qui restent ont été vendues

$$1342 - 544 = 798^{fr},$$

et par conséquent chaque paire coûte $798 : 42 = 19^{fr}$.

49). Les 36 chapeaux donnent un bénéfice de

$$4^{fr} \times 36 = 144^{fr};$$

ils ont donc été payés $576 - 144 = 432^{fr}$, et chaque chapeau avait coûté $432 : 36 = 12^{fr}$.

50). La vente a produit $392 + 56 = 448^{fr}$, et chaque barrique a été payée $448 : 8 = 56^{fr}$.

LIVRE II.

FRACTIONS.

VI.

Addition des fractions ordinaires.

1). $\frac{29}{21}=1\frac{8}{21}$.

2). Les $\frac{29}{30}$ de l'ouvrage.

3). Le premier fait $\frac{1}{5}$ de l'ouvrage en 1 heure et le deuxième $\frac{1}{8}$; ils font tous les deux en 1 heure $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{13}{40}$ de l'ouvrage.

4). $\frac{1}{9}+\frac{1}{8}=\frac{17}{72}$.

5). $\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}=\frac{37}{120}$.

6). $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$.

7). $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$.

8). Les $\frac{11}{30}$ de la pièce.

9). Des $\frac{15}{56}$ de la distance qui les séparait au moment du départ.

10). Les $\frac{11}{72}$ du réservoir.

VII.

Soustraction des fractions ordinaires.

1). $4\frac{20}{21}$.

2). $\frac{15}{930}=\frac{1}{62}$. La différence entre deux fractions de même numérateur, et dont les dénominateurs ne diffèrent que d'une unité, est une fraction dont le numérateur est le numérateur commun, et le dénominateur, le produit des dénominateurs des fractions proposées.

3). La seconde; car la fraction $\frac{36}{10}$ est plus grande que $\frac{35}{10}$.

4). Les $\frac{29}{70}$ de l'ouvrage.

5). La portion du bassin exprimée par $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

6). De $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$.

7). $168\frac{1}{4}$.

8). $\frac{11}{35}$.

9). $1\frac{1}{2}$

10). $1\frac{1}{6}$.

VIII.

Multiplication des fractions ordinaires.

1). Le $\frac{1}{4}$ de 80 fr. est 20 fr., 20 fr. $\times 3=60$ fr.

2). $3\frac{4}{7}=\frac{25}{7}$; le $\frac{1}{6}$ de $\frac{25}{7}=\frac{25}{42}$, le nombre demandé est $\frac{25}{42}\times 5=\frac{125}{42}=2\frac{41}{42}$.

3). Le $\frac{1}{25}$ de $750=30$, $30\times 17=510$.

4). Le $\frac{1}{8}$ de 720 fr. $=90$ fr.; 90 fr. $\times 5=450$ fr.

5). $\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times 3}{9\times 4}=\frac{5}{12}$.

6). $20^{fr}\times\frac{3}{4}=15^{fr}$; $20^{fr}\times\frac{7}{10}=14^{fr}$; $15^{fr}+14^{fr}=29^{fr}$. On peut dire encore $\frac{3}{4}+\frac{7}{10}=\frac{15+14}{20}=\frac{29}{20}$, les $\frac{29}{20}$ de $20^{fr}=29^{fr}$.

7). La première remplit en 1 heure le $\frac{1}{8}$ du bassin, et la seconde $\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$

8). Les $\frac{2}{5}$ de $240=\frac{240\times 2}{5}=96$; les $\frac{2}{3}$ de $96=64$.

9). $29\frac{2}{7}=\frac{205}{7}$; $\frac{205}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{205\times 3}{7\times 5}=\frac{41\times 3}{7}=\frac{123}{7}=17\frac{4}{7}$.

10). $2140\times\frac{17}{20}=\frac{2140\times 17}{20}=107\times 17=1819^{fr}$.

IX.

Division des fractions ordinaires.

1). Le $\frac{1}{4}$ du nombre demandé est $\frac{27}{3}=9$ et les $\frac{4}{4}$ ou le nombre lui-même $9\times 4=36$.

2). $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$; puisque les $\frac{13}{5}$ du nombre demandé sont 52, $\frac{1}{5}$ sera $\frac{52}{13}=4$ et le nombre lui-même $4\times 5=20$.

3). $36:10\frac{5}{6}=36\times\frac{6}{65}=\frac{216}{65}=3\frac{21}{65}$.

4). Pour $\frac{1}{7}$ de l'ouvrage, on payera $\frac{40}{4} = 10^{fr}$, et pour l'ouvrage entier $10 \times 7 = 70^{fr}$.

5). $\frac{1}{3}$ de la dépense totale est 21 fr., et la dépense elle-même 63 fr.

6). $67\frac{1}{8} : 29\frac{1}{2} = \frac{537}{8} \times \frac{2}{59} = \frac{537}{236} = 2\frac{65}{236}$.

7). $27\frac{1}{2} = \frac{55}{2}$, la demi-journée est payée $\frac{110}{55} = 2$ fr. et la journée entière 4 fr.

8). $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$, en $\frac{1}{4}$ d'heure la roue fait $\frac{11500}{23} = 500$ et en 1 heure 2000 tours.

9). $\frac{1}{12}$ de l'ouvrage vaut $\frac{70}{10} = 7^{fr}$ et l'ouvrage entier 84 fr.

10). $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$; $\frac{1}{35}$ de la somme est 4 fr. et la somme totale $4 \times 35 = 140^{fr}$.

X.

Recherche du quotient complet ou approché au moyen des décimales.

1). $36 : 8 = 4,5$.

2). $60 : 18 = 3,33\frac{1}{3}$.

3). $360^{fr} : 16 = 22^{fr},50$.

4). $104^{fr} : 80 = 1^{fr},30$.

5). $16^{fr} : 500 = 0^{fr},03$ environ.

6). $512^{fr} : 640 = 0^{fr},80$.

7). $1^{fr},80$.

8). $4350^{fr} : 750 = 5^{fr},80$.

9). $3480^{fr} : 48 = 72^{fr},50$.

10). $42728^{fr} : 365 = 117^{fr},06$ environ.

XI.

Addition des nombres décimaux.

1). La quête a produit en tout $62^{fr},90$.

2). $2628^{fr},10$.

3). $1409^{fr},50$.

4). $442^{fr},55$.

5). $7755^{fr},50$.

6). Le sac contenait 241 fr.

7). La somme est 2177,928.

8). $558^{fr},70$.

9). La dépense se monte à $5^{fr},30$.

10). La recette totale est $11394^{fr},80$.

XII.

Soustraction des nombres décimaux.

1). $8 - 2,3 = 5,7$.

2). $70 - 45,769 = 24,231$.

3). $36,50 - 29 = 7,50$.

4). $38,40 - 15,957 = 22,443$.

5). $849,675 - 436,40 = 413,275$.

6). $75^{fr},90 - 48^{fr},60 = 27^{fr},30$.

7). $38^{fr},50 - 21^{fr},80 = 16^{fr},70$.

8). $47^{fr},60 - 29^{fr},45 = 18^{fr},15$.

9). $8996^{fr},25$.

10). $37385^{fr},65$.

XIII.

Multiplication des nombres décimaux.

1). $90^{fr} + 0^{fr},25 \times 25 = 90^{fr} + 6^{fr},25 = 96^{fr},25$.

2). $245^{fr},75 \times 18 = 4423^{fr},50$.

3). $115^{fr},80 \times 35 = 4053^{fr}$.

4). $0,000003 \times 7 = 0,000021$.

5). 0,056.

6). $0,145 \times 48 = 6,96$.

7). $48^{fr} \times 0,35 = 16,8$.

8). $3,6 \times 75 = 270$.

9). $3^{fr},75 \times 25 = 93^{fr},75$.

10). $148^{fr},35 \times 86 = 12758^{fr},10$.

XIV.

Division des nombres décimaux.

1). 7,5 : 0,025 = 300.
2). 2,4 : 0,03 = 80.
3). 12 : 2,4 = 5.
4). 3,6 : 0,04 = 90.
5). 0,03.
6). 7,35 : 3,5 = 2,1.
7). 0,0048 : 0,00016 = 30.
8). 170 fois.
9). 67,50 : 2,50 = 27.
10). 4,05 : 0,15 = 27 lettres.

LIVRE III.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

XV.

Le mètre, ses multiples et ses sous-multiples.

1). 330 mètres.
2). 230 mètres.
3). 171 francs.
4). 47 mètres 50 centimètres.
5). 142 kilomètres.
6). $3^{fr},75 \times 0,48 = 1$ fr. 80 centimes.
7). 1 fr. 80 centimes.
8). $32^{fr},40 : 3,6 = 9$ francs.
9). Le pic de l'Hymalaya est 193 fois environ plus élevé que la colonne Vendôme, et le Mont-Blanc 119 fois environ.
10). 180 myriamètres.
11). 26 fr. 59 centimes environ.
12). 270220 francs.
13). 1279 kilomètres.
14). 12800 arbres.
15). 960 mètres.
16). 307 mille francs environ.
17). 76404 kilomètres.
18). 45 mètres 6 décimètres.
19). 720 marches.
20). 814 fois environ.

XVI.

Le mètre carré.

1). 63 mètres carrés 20 décimètres carrés.

2). 1 franc 43 centimes environ.

3). 20 mètres carrés 25 décimètres carrés.

4). 492 carreaux.

5). 200.

6). 25 mètres carrés 40 décimètres carrés.

7). 942 francs 50 centimes.

8). 150 morceaux.

9). 18 centimètres carrés : 1 mètre carré 87 décimètres carrés 50 centimètres.

10). 2512 environ.

XVII.

L'are.

1). 7 hectares 49 ares. 2). 9200 mètres carrés.

3). 242208 francs. 4). 8700 mètres carrés.

5). 32 hectares 15 ares. 6). 92 fois.

7). 72000 francs. 8). 46500 mètres.

9). 4000 francs. 10). On a gagné 77200 fr.

XVIII.

Le mètre cube.

1). 8 mètres cubes 117 décimètres cubes.

2). 210 francs.

3). 61 mètres cubes 185 décimètres cubes.

4). 118 francs 44 centimes environ.

5). De 429 mètres cubes 540 décimètres cubes.

6). 198 mètres cubes.

7). 107 francs 25 centimes.

8). 34612 briques environ.

9). 153 heures.

10). 50000.

XIX.

Le stère.

1). 148 stères 9 décistères.

2). 72 stères 6 décistères.

3). 67 décistères 50 centièmes.

4). 16 jours. 5). 66500 francs.

6). 85 stères. 7). 20 voyages.

8). 2 stères 7 $\frac{1}{10}$ décistères.

9). 12 ouvriers.

10). Chaque feu a brûlé 9 stères 6 décistères et pour 177 francs 60 centimes de bois.

XX.

Le litre.

1). 71 hectolitres 65 litres. 2). 2 francs 40 centimes.

3). 4 francs 20 centimes. 4). 38 hectolitres 25 litres.

5). 657 francs. 6). 19 litres 5 décilitres.

7). 4851 hectolitres. 8). 150 pièces

9). 988 sacs. 10). 144 bouteilles.

XXI.

Le gramme, ses multiples et ses sous-multiples.

1). 257 kilogrammes 75 décagrammes.

2). 7 francs 80 centimes.

3). 200 kilogrammes.

4). 6 kilogrammes 73 décagrammes.

5). 29925 kilogrammes.

6). 1856 kilogrammes 75 décagrammes.

7). 73 kilogrammes 34 décagrammes.

8). 1200 kilogrammes.

9). 30 caisses.

10). 5151 kilogrammes 20 décagrammes.

XXII.

Le franc.

1). 1 franc pèse 5 grammes, donc 5 francs pèseront $5 \times 5 = 25$ grammes, et par conséquent en divisant 1000 par 25, on obtiendra pour quotient le nombre de pièces demandé qui est 40. 40 pièces de 5 francs valent 200 francs. 200 francs d'argent pèsent un kilogramme quelles que soient les pièces de monnaie.

2). $134^{fr},80 \times 12 = 1617$ francs 60 centimes.

3). $2^{m},5 \times 15,60 = 39$ mètres.

4). $136^{fr},80$ en argent pèsent $5^{gr} \times 136,80 = 684$ grammes qui sont le poids de 684 centim. cub. d'eau distillée ou 68 centilitres 4 dixièmes.

5). Le décagramme coûte $\frac{25}{100}^{fr}$ ou 25 centimes, et par conséquent 8 décagrammes coûteront $25^{c} \times 8 = 2$ fr.

6). $1000 : 37 = 27$ et il reste 1. Il faut 27 pièces à 1 millimètre près.

7). 25 grammes d'argent monnayé valent 5^{fr}; 1 gramme vaudra $\frac{5}{25}^{fr} = 0^{fr},20$ centimes, et par conséquent 23 grammes vaudront $20^{c} \times 23 = 4^{fr},60$; la pièce a perdu 40 centimes.

8). 20 francs en argent pèsent $5^{gr} \times 20 = 100$ grammes.

$$100 : 15\tfrac{1}{2} = 100 : \tfrac{31}{2} = 200 : 31 = 6,45.$$

La pièce d'or pèse 6 grammes 45 centigrammes à moins d'un centigramme près.

9). Puisque l'argent monnayé contient en poids les $\frac{9}{10}$ d'argent pur et $\frac{1}{10}$ de cuivre; le poids du cuivre n'est que le $\frac{1}{9}$ de celui de l'argent, et par conséquent pour $5^{kilog},40$ d'argent pur il faudra prendre $\frac{5^{kilog},40}{9} = 0,6$ de cuivre. L'alliage sera donc du poids de

$$5^{kilog},40 + 0,6 = 6^{kilog} = 6000 \text{ gram.}; \quad 6000 : 5 = 1200.$$

On aurait donc pour 1200 francs d'argent monnayé.

10). 3460 francs en argent pèsent $5^{gr} \times 3460 = 17300$ gr.; $17300^{gr} : 15\frac{1}{2} = \frac{31}{2} = 1116^{gr},129\frac{1}{31}$.

———

LIVRE IV.

NOMBRES COMPLEXES.

XXIII.

Le temps.

1). L'année commune se compose de

$$
\begin{aligned}
& & 365 \text{ jours.} \\
24^h \times 365 &= & 8760 \text{ heures,} \\
60^m \times 8760 &= & 525600 \text{ minutes,} \\
60^s \times 525600 &= & 31536000 \text{ secondes.}
\end{aligned}
$$

2). Dans 40 années successives, il y aura $\frac{46}{4} = 11$ bissextiles, en ne considérant que le quotient entier.

$$
\begin{array}{rrl}
365 \times 46 = & 16790 \text{ jours} & \\
 & 11 & \text{pour les années bissextiles.} \\
\hline
\text{Total...} & 16801 \text{ jours.} &
\end{array}
$$

3). Sur les $4^h \times 2 = 8$ heures de travail par jour, l'élève perd $15^m \times 2 = 30$ minutes; et, pendant toute l'année, $30^m \times 280 = 8400$ minutes.

$\frac{8400^h}{60} = 140$ heures; ce qui fait $\frac{140^h}{8} = 17\frac{1}{2}$ jours de travail.

4). Du 1^er^ janvier au 3 mars 1845, on compte 61 jours.
Du 1^er^ janvier au 27 octobre 1798 .. 299
Au moment du décès, il s'était écoulé depuis N. S. J. C.

$$
\begin{array}{lrr}
 & 1844^{\text{ans}} & 61 \text{ jours,} \\
\text{et au moment de sa naissance} & 1797 & 299 \\
\hline
\text{Reste....} & 46^{\text{ans}} & 127 \text{ jours.}
\end{array}
$$

5).

$$
\begin{array}{lrr}
\text{Le premier} & 25^j & 6^h\frac{1}{2} \\
\text{Le deuxième} & 18 & 9 \\
\text{Le troisième} & 20 & 7\frac{3}{4} \\
\hline
\text{Total....} & 64^j & 11^h\frac{1}{4}
\end{array}
$$

6).

$$
\begin{array}{lrrr}
 & 28^j & 5^h & 30 \\
 & 25 & 8 & 50 \\
\hline
\text{Reste....} & 2 & 10 & 40
\end{array}
$$

7). 39 francs 6 centimes $\frac{1}{4}$.

8). 385 mètres environ.

9). 22 jours 1 heure.

10). 17 heures 27 minutes 36 secondes.

XXIV.

Les degrés.

1). Le mètre étant la dix-millionnième partie du quart du méridien terrestre, c'est-à-dire de la distance du pôle à l'équateur, l'arc de méridien qui la représente vaut 10000000 de mètres. En divisant 10000000 par 90, on trouve que le degré vaut $111111^m,11$ ou 11 myriamètres environ.

En divisant ensuite 111111,11 par 60, on trouve pour la minute de degré 1851,85 mètres.

Enfin divisant ce dernier résultat par 60, on obtient, pour la longueur d'une seconde de degré, 30 mètres 86 centimètres environ.

2). 1° En divisant 360 par 24, on trouve pour quotient 15, c'est le nombre de méridiens qui passent en 1 heure devant le soleil. Réciproquement à 1 degré de longitude correspondent 4 minutes en temps.

$2°\ 4' \times 35 = 140' = 2^h\ 20^{\text{minutes}}$. Il est donc 2 heures et 20 minutes dans le lieu désigné.

Si la longitude était occidentale, il serait $12^h - 2^h\ 20^m = 9^h\ 40^m$.

3). $4°\ 7'\ 27''$.

4). $\frac{360°}{8} = 45°$.

5). $72^{\circ}\,30'\,20'' = 261020''$; $3^{\circ}\,20' = 12000''$;
$\frac{261020}{12000} = 21^{h}\,45'\,6''$.

6). $17 : 3,4 = 5$.

7). $360^{\circ} = 60' \times 360 = 21600'$ valent 4 mètres.
$35^{\circ}\,20' = 2120'$. La portion de la circonférence n'est que les $\frac{2120}{21600} = \frac{212}{2160}$ de la circonférence totale et vaudra par conséquent les $\frac{212}{2160}$ de 4 mètres ou 39 centimètres et $\frac{7}{27}$ de centimètre.

8). 1° Par jour.... 252000 myriamètres environ.
Par heure... 10500
Par minute.. 175
Par seconde. 2,9

2° Le degré vaudrait. 256000 myriamètres environ.
La minute....... 4250
La seconde....... 71

9). 1 degré du méridien vaut en kilomètres 111,11 ; par conséquent $5^{\circ}\,30'$ vaudront 611 kilomètres 10 décamètres.

10). $1548 : 111,11 = 13^{\circ}\,55'\,55''\,\frac{7795}{11111}$.

LIVRE V.

DES RAPPORTS.

XXV.

Problèmes de récapitulation générale sur les nombres entiers et décimaux, sur les fractions et les rapports.

1). Le tiers et demi-tiers ou le sixième réunis font $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La moitié de 36 est 18.

2). La moitié de $240^{fr} = 120^{fr}$
Le tiers......... = 80
La différence.. 40^{fr}.

3). 8 et $\frac{1}{3}$.

4). $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. La troisième personne a donc $\frac{1}{6}$ de l'héritage, et les trois parts sont 18000, 12000, 6000 francs.

5). $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; il reste encore $\frac{5}{12}$ de la pièce.

6). La deuxième a dépensé le $\frac{1}{4}$ de 12 fr. 60 c. ou 3 fr. 15 c., et la première de 9 fr. 45 c.

7). $1^{fr}\,80^{c} \times \frac{1}{2} + 1^{fr}\,15^{c} \times 3 = 90^{c} + 3^{fr}\,45^{c} = 4^{fr}\,35^{c}$.

8). 38 kil. à 1 fr. 90 c. le kilogramme valent $72^{fr},20$
à 1 fr. 50 c. 57
Différence exprimant le bénéfice. $15^{fr},20$

9). Le mélange total vaut $75^{fr} \times 3 + 125^{fr} \times 5 = 850$
Bénéfice............................ 130
Total........ 980

Si les pièces étaient égales, chacune d'elles serait vendue au prix de 122 fr. 50 c.

10). Prix d'achat...... 60^{fr}
Frais de transport. 4 ,50
Droits d'entrée... 37
Total........ $101^{fr},50 : 300 = 33,8$ c. environ.

5). $72^\circ\, 30'\, 20'' = 261020''$; $3^\circ 20' = 12000''$;
$\frac{261020}{12000} = 21^h\, 45'\, 6''$.

6). $17 : 3{,}4 = 5$.

7). $360^\circ = 60' \times 360 = 21600'$ valent 4 mètres.

$35^\circ 20' = 2120'$. La portion de la circonférence n'est que les $\frac{2120}{21600} = \frac{212}{2160}$ de la circonférence totale et vaudra par conséquent les $\frac{212}{2160}$ de 4 mètres ou 39 centimètres et $\frac{7}{27}$ de centimètre.

8). 1° Par jour.... 252000 myriamètres environ.
Par heure... 10500
Par minute.. 175
Par seconde. 2,9

2° Le degré vaudrait. 256000 myriamètres environ.
La minute....... 4250
La seconde....... 71

9). 1 degré du méridien vaut en kilomètres 111,11; par conséquent $5^\circ\, 30'$ vaudront 611 kilomètres 10 décamètres.

10). $1548 : 111{,}11 = 13^\circ\, 55'\, 55''\, \frac{7795}{11111}$.

LIVRE V.

DES RAPPORTS.

XXV.

Problèmes de récapitulation générale sur les nombres entiers et décimaux, sur les fractions et les rapports.

1). Le tiers et demi-tiers ou le sixième réunis font $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La moitié de 36 est 18.

2). La moitié de $240^{fr} = 120^{fr}$
Le tiers......... = 80
La différence.. 40^{fr}.

3). 8 et $\frac{1}{3}$.

4). $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. La troisième personne a donc $\frac{1}{6}$ de l'héritage, et les trois parts sont 18000, 12000, 6000 francs.

5). $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; il reste encore $\frac{5}{12}$ de la pièce.

6). La deuxième a dépensé le $\frac{1}{4}$ de 12 fr. 60 c. ou 3 fr. 15 c., et la première de 9 fr. 45 c.

7). $1^{fr}\, 80^c \times \frac{1}{2} + 1^{fr}\, 15^c \times 3 = 90^c + 3^{fr}\, 45^c = 4^{fr}\, 35^c$.

8). 38 kil. à 1 fr. 90 c. le kilogramme valent $72^{fr},20$
à 1 fr. 50 c. 57
Différence exprimant le bénéfice. $15^{fr},20$

9). Le mélange total vaut $75^{fr} \times 3 + 125^{fr} \times 5 = 850$
Bénéfice................................ 130
Total......... 980

Si les pièces étaient égales, chacune d'elles serait vendue au prix de 122 fr. 50 c.

10). Prix d'achat...... 60^{fr}
Frais de transport. 4 ,50
Droits d'entrée... 37
Total........ $101^{fr},50 : 300 = 33{,}8$ c. environ.

11). 27 hectolitres de blé pesant 2160 kilogrammes.

12). $157\frac{1}{2}=\frac{315}{2}$; puisque avec 3 kilogrammes de farine on peut faire 4 kilogrammes de pain, avec $\frac{3}{2}$ kilogrammes de farine, on fera 2 kilogrammes de pain ou un pain de 2 kilogrammes, et par conséquent avec $\frac{315}{2}$ kilogrammes de farine on fera $\frac{315}{3}=105$ pains.

13). Si le voyage ne devait durer que 1 jour, la ration serait 25 fois plus grande, puisqu'il doit durer $25+8=33$ jours, la nouvelle ration ne sera que la 33ᵉ partie de la précédente, et par suite les $\frac{25}{33}$ de la ration primitive.

La ration sera donc réduite des $\frac{8}{33}$ de ce qu'elle était auparavant.

14). 17609 pièces à moins de 1 pièce près.

15). $3\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$; $4\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$; la première remplirait en 1 heure les $\frac{5}{16}$ et la deuxième les $\frac{5}{24}$ du bassin. Par conséquent les deux fontaines coulant ensemble rempliront en 1 heure les $\frac{5}{16}+\frac{5}{24}=\frac{25}{48}$ du bassin.

16). $0,15\times 140=21$. Il faudrait au moins 21 fr.

17). $0,475\times 38=18,05$.

18). De $\frac{45^{fr}}{300}=\frac{15^{fr}}{100}=0,15$ centimes.

19). Le prix de $300-45=255$ bouteilles dans le deuxième cas est le même que celui de 300 dans le premier; donc le prix de 1 bouteille est égal aux $\frac{300}{255}$ du prix antérieur, et par conséquent le prix est augmenté des $\frac{45}{255}=\frac{3}{17}$ de ce qu'il était précédemment.

20). $\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$; les $\frac{2}{7}$ de la pièce sont représentés par 42 mètres; donc le $\frac{1}{7}$ vaut 21 mètres et la pièce totale est de $21\times 7=147$ mètres.

21). Première vente $\frac{1}{5}$ de la pièce et il en reste $\frac{4}{5}$; les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$ représentent la deuxième vente. On a donc vendu en tout $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$ de la pièce, et il reste encore

$\frac{1}{5}$ de la pièce qui est de 16 mètres, d'après l'énoncé; la pièce avait $16\times 5=80$ mètres.

22). $8'13''=60''\times 8+13''=493''$;

$17000000:493=34482\frac{374}{493}$ nombre de myriamètres parcourus par la lumière en une seconde.

23). $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$; $3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$; le premier ouvrier fait en 1 jour les $\frac{2}{5}$ de l'ouvrage et le deuxième $\frac{3}{10}$. Travaillant ensemble, ils feront $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ de l'ouvrage en 1 jour; par conséquent, pour en faire $\frac{1}{10}$, ils mettront $\frac{1}{7}$ de jour, et les $\frac{10}{10}$ ou l'ouvrage total, $\frac{10}{7}$ de jour ou 1 jour $\frac{3}{7}$.

24). $28,783:2,69=10,7$ nombre demandé.

25). La reliure du volume coûte $\frac{100^{fr}}{80}=1^{fr},25$.

26). 14 douzaines et $\frac{1}{6}=12\times 14+2=170$;

$255:170=1,50$. La chemise coûte 1 fr. 50 c. de façon.

27). Le produit aura neuf chiffres décimaux, et par conséquent la plus petite unité sousdécuple sera le billionnième.

28). L'eau contenue dans le vase pèse

$$28,50-2,30=26^{kil},20.$$

Le kilogramme est le poids de 1 litre d'eau, par conséquent la capacité du vase est de 26 litres 20 centilitres.

29). Chaque personne a reçu 4 stères 4 décistères qui représentent une valeur de $18^{fr},50\times 4,4=81^{fr},40$.

30). La somme renfermée dans le sac pèse

$$6,75-0,4=6,35^{kil}=6350^{gr}.$$

Comme 1 franc pèse 5 grammes, le sac contient $\frac{6350^{fr}}{5}=1270^{fr}$. Le nombre des pièces de 5 francs renfermées dans le sac est donc $\frac{1270}{5}=254$.

31). 130 kilogrammes valent 130000 grammes;

$130000:5=26000$. Il pourra donc porter 26000 fr. en argent.

Comme à poids égal, l'or a une valeur $15\frac{1}{2}$ plus grande que l'argent; la somme qu'il pourra porter en or sera $26000^{fr} \times 15\frac{1}{2} = 403000^{fr}$.

32). Les $\frac{5}{6}$ du prix d'achat sont représentés par 360 fr. pour avoir le prix d'achat, il suffit d'ajouter à 360 sa cinquième partie, c'est-à-dire 72; le prix d'achat sera donc $360 + 72 = 432^{fr}$.

33). $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$; le nombre demandé est $3 \times 12 = 36$.

34). 2 litres 5 décilitres d'eau distillée pèsent 2500 grammes qui sont aussi le poids d'une somme, en argent, de $\frac{2500}{5} = 500^{fr}$; et, en or, de $500 \times 15\frac{1}{2} = 7750^{fr}$. Pour multiplier par $15\frac{1}{2}$, on multipliera d'abord par 15, et au produit on ajoutera la moitié du multiplicande.

35). La première ayant eu la moitié de la somme, la part de la seconde a été $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de la somme; il reste donc pour la troisième, $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ de la somme totale représenté par 63 fr.; cette somme était par conséquent $63^{fr} \times 6 = 378^{fr}$; la première a reçu 189 fr. et la deuxième 126 fr. Vérification $189 + 126 + 63 = 378$.

36). $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; $\frac{7}{12} - \frac{5}{9} = \frac{3}{108} = \frac{1}{36}$. Le nombre demandé est 360.

37). $30^{minutes} \times 9 = 270^{m} = 4^{h}\frac{1}{2}$.

38). $2^{fr},35 + 2^{fr},65 = 5^{fr}$, tel est le prix de chaque groupe de 2 kilogrammes dont 1 kilogramme de sucre et 1 kilogramme de café; $18,50 : 5 = 3,7$. Il a donc acheté 3 kilogrammes 70 décagrammes de chaque denrée.

39). Le prix d'achat est $16^{fr} \times 18 = 288^{fr}$, et puisque le marchand veut gagner 40 fr., le prix total de vente sera $288 + 40 = 328^{fr}$.

Les 18 douzaines de vases font $12 \times 18 = 216$ vases, dont il ne reste plus, après le transport que $216 - 8 = 208$; Le prix de vente de chaque vase sera donc

$$328 : 208 = 1^{fr}\,58^{c} \text{ au moins.}$$

40). Les 38 kilogrammes de chandelle ont produit $1^{fr}\,30^{c} \times 38 = 49^{fr}\,40^{c}$. Il reste donc pour l'huile à brûler $86,90 - 49,40 = 37,50$, dont la quantité vendue sera $37,50 : 1,50 = 25^{kil}$.

41). Chaque couple de pièces de 1 fr. et de 2 fr. fait une longueur de $23 + 27^{millim} = 50^{millim}$; $1000 : 50 = 20$. Il faut donc 20 pièces de chaque espèce pour faire la longueur du mètre; et ces 40 pièces valent en tout $3^{fr} \times 20 = 60^{fr}$.

42). $118,15 - 29,50 = 88,65$; $88,65 \times 1,20 = 106,38$. Le peintre recevra 106 fr. 38 c.

43). $\frac{136}{40} = 3,4$. Le convoi met donc 3 heures 24 minutes pour faire le trajet.

La vitesse du courrier étant de $\frac{136}{10} = 13^{kil},6$, tandis que celle du convoi est de 40 kilomètres par heure, le convoi va $\frac{400}{136} = 3$ fois environ plus vite que le courrier (la fraction précédente se réduit à $\frac{50}{17} = \frac{51}{17} - \frac{1}{17} = 3 - \frac{1}{17}$).

44). Le kilomètre carré vaut 100 hectomètres carrés ou 100 hectares; partant, 34 kilomètres carrés $\frac{1}{2}$ valent $3400 + 50 = 3450$ hectares.

La superficie de Paris s'est donc accrue de

$$3450 - 576,80 = 2873,20 \text{ hectares}$$

ou de 28,732 kilomètres carrés.

45). 14 kilomètres carrés 25 hectomètres carrés font en tout 14250000 mètres carrés; multipliant ce nombre par $16\frac{1}{2}$, on obtient pour le nombre de pavés 235125000.

46). $44^{c} \times 16,60 = 7^{fr}\,30^{c}$ et $\frac{2}{5}$; ajoutant à cette somme $1^{fr}\,10^{c} + 45^{c}$, on obtient pour le pavage du mètre carré $8^{fr}\,85^{c}\,\frac{2}{5}$.

47). Le transport de 1 mètre cube de bois à 100 mètres coûtant 1 fr. 55 c.; à 320 mètres, il coûtera

$$1^{fr}\,55 \times 3\frac{1}{5} = 4^{fr}\,96^{c}.$$

Le transport de 2 mètres cubes 125 décimètres cubes coûtera par conséquent..... $4^{fr}96^{c} \times 2\frac{1}{8} = 10^{fr}54^{c}$.

Prix de $2^{met\cdot cub}125^{decimet\cdot cub}$ à 80 fr. le mètre cube........	170
Total........	$180^{fr}54^{c}$.

48). Poids brut de la pièce..... $302^{kil},292$
Poids du fût..... 24
Poids du vin..... $278^{kil},292$

Divisant 278,292 par 0,9939, on obtiendra pour le nombre de litres demandé 280 litres.

49). $20+30=50$; $360000:50=7200$; les deux fontaines mettront 7200 heures ou 30 jours.

50). Les $\frac{2}{3}$ de $21,60=14,40$; $43200:14,40=3000$. Il a revendu 3000 fr. l'hectare.

51). A 3 kilogrammes 60 décagrammes d'argent pur, il faut ajouter, pour l'alliage de cuivre, le $\frac{1}{9}$ de ce poids, c'est-à-dire 40 décagrammes, et l'on aura 4 kilogrammes de métal monétaire dont 25 grammes valent 5 fr.; le nombre de pièces de 5 fr. sera donc $\frac{4000}{25}=160$, qui valent 800 fr.

On peut encore dire : la pièce de 5 fr. ne contient que 22,50 grammes de fin ; par conséquent autant de fois 22,50 sera contenu dans 3600, autant on aura de pièces de 5 ; $3600:22,50=160$.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

LIVRE PREMIER.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES.

XXVI.

De l'intérêt simple.

1). 100 fr. de capital rapportent 4 fr. d'intérêt;

1	$\frac{4}{100}$
6895	$\frac{4}{100}\times 6895=275,80.$

L'intérêt est de 275 fr. 80 c.

2). $4\frac{1}{2}^{fr}=\frac{9}{2}^{fr}$ sont l'intérêt de 100 fr.;

1	$100:\frac{9}{2}=100\times\frac{2}{9}$
3600	$100\times\frac{2}{9}\times 3600=80000.$

La somme est 80000 fr.

3). 100 fr. de capital valent avec les intérêts 105 fr. au bout de l'année.

Si 105 fr. proviennent de	100 fr.
1	$\frac{100}{105}$
6300	$\frac{100}{105}\times 6300=6000.$

La somme demandée est 6000 fr.

4). L'intérêt seul est de $8280-8000=280^{fr}$.

Si 8000 fr. rapportent	280 fr.
100	$\frac{280}{80}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$

Le taux est de $3\frac{1}{2}$ pour 100.

5). 1° 200000 fr. ont rapporté 13400^{fr};
100 $\frac{13400}{2000} = 6{,}7$.
2° 150000 ont rapporté 10800^{fr};
100 $\frac{10800}{1500} = 7{,}2$.
La seconde spéculation est la meilleure.

6). 40000 fr. rapportent $\frac{40000 \times 6}{100} = 2400^{fr}$ d'intérêt pour un an.
$2^{ans}\,50^{j} = 365 \times 2 + 50 = 780^{j} = \frac{780}{365}$ d'année.
L'intérêt demandé sera donc $2400 \times \frac{780}{365} = 5128{,}77$.
$40000 + 5128{,}77 = 45128{,}77$. Il rendra $45128^{fr},77^{c}$.

7). L'intérêt seul sera $576 - 450 = 126^{fr}$ pour 8 ans.
L'intérêt pour un an sera $126 : 8 = 15{,}75$.
Si 450 fr. rapportent $15{,}75^{fr}$ d'intérêt
1 $\frac{15{,}75}{450}$
100 $\frac{15{,}75}{450} \times 100 = \frac{157{,}50}{45} = 3{,}50$.
Le taux est de $3\frac{1}{2}$ pour 100.

8). Un capital de 100 fr. au bout de 3 ans vaut $100 + 4 \times 3 = 112^{fr}$.
112 fr. proviennent de 100^{fr}
1 $\frac{100}{112}$
3360 $\frac{100}{112} \times 3360 = 3000$.
Le capital est 3000 fr.

9). L'intérêt seul est de $4080 - 3400 = 680^{fr}$.
L'intérêt de 3400 f. à 5 pour 100 est de $\frac{3400 \times 5}{100} = 170$.
Autant de fois 170 fr. sera contenu dans 680 f., autant d'années aura duré l'absence; $680 : 170 = 4$.
Le voyageur est resté 4 ans absent.

10). 100 fr. deviennent 140 fr. au bout de 8 ans au taux donné.
140 fr. provenant de 100 fr.
14800 proviendra de $\frac{100 \times 14800}{140} = 10571{,}42\frac{6}{7}$.

XXVII.

De l'intérêt composé.

1).

Capital	3600^{fr}
Intérêt à 4 pour 100	144
Capital à la fin de la première année	3744^{fr}
Intérêt	149 76
Fin de la deuxième année	$3893^{fr},76$
Intérêt	155 7504
Fin de la troisième année	$4049^{fr},5104$
Intérêt	161 980416
Fin de la quatrième année	$4211^{fr},490816$
Intérêt	168 45963264
Fin de la cinquième année	$4379^{fr},95044864$

La somme s'élève à $4379^{fr},95^{c}$ environ.

Deuxième manière. On peut arriver au même résultat en formant le produit

$$1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 \times 1{,}04 = 1{,}2166529024$$

qu'on multipliera ensuite par 3600; ce qui donne le résultat trouvé précédemment.

Remarque. Si le capital devient double, triple, etc., le montant devient aussi double, triple, etc., pourvu que le taux et le nombre d'années demeurent les mêmes.

2). Dans les questions de cette espèce, lorsque le taux n'est pas exprimé, il est convenu de prendre le taux ordinaire de 5 pour 100. Il est évident qu'il faut que le montant de la somme à laquelle s'élève le capital 80000 fr. accru des intérêts composés pendant 4 ans, soit égal à la somme des montants auxquels s'élevaient les capitaux 18000, 24000, 30000 fr. accrus des intérêts composés pendant 3 ans, 2 ans, 1 an, plus le montant inconnu du dernier payement. Or, d'après le calcul analogue au précédent (nº 1),

le montant de	80000 après 4 ans s'élève à	$97240^{fr},50$
Celui de.....	18000 après 3 ans s'élève à	$20837^{fr},25$
	24000 après 2 ans s'élève à	26460
	30000 après 1 an s'élève à	31500
Somme des 3 derniers.................		$78797^{fr},25$
Différence entre le 1er et cette somme....		$18443^{fr},25$

Le dernier payement sera de 7753 fr. 75 cent.

3).

Annuité...............	6000^{fr}
Intérêt à 5 pour 100.....	300
Fin de la première année.	6300^{fr}
Annuité...............	6000
Total.........	12300^{fr}
Intérêt.................	615
Fin de la deuxième année	12915^{fr}
Annuité...............	6000
Total.........	18915^{fr}
Intérêt.................	$945^{fr},75$
Fin de la troisième année.	$19860^{fr},75$
Annuité...............	6000
Total........	$25860^{fr},75$
Intérêt.................	$1293^{fr},0375$
Fin de la quatrième année	$27153^{fr},7875$
Annuité...............	6000
Total........	$33153^{fr},7875$
Intérêt.	$1657^{fr},689375$
Fin de la cinquième année.	$34811^{fr},476875$

Le montant total des annuités accrues des intérêts composés s'élève à 34811 fr. 48 cent. environ.

4). Le taux étant 6, l'intérêt pour 1 mois sera $\frac{6}{12} = 0,5$. Effectuant les calculs d'après le nº 1, on trouvera pour le montant, au bout du douzième mois, 10616,78 environ. L'intérêt simple donne 600 fr.; par conséquent 18 fr. 78 cent. de moins que l'intérêt composé.

5). 300 fr. placés à 4 pour 100 avec les intérêts accumulés deviennent,

au bout de 5 ans,	$364^{fr},99$
de 4	350 96
de 3	337 46
de 2	324 48
de 1	312
Total...........	$1689^{fr},89$

dont 1500 fr. de capital et 189,89 d'intérêt.

6). 4000 fr. placés à 3 pour 100 s'élèvent, au bout de 8 ans, avec les intérêts composés à 5067 fr. 8 cent.

Il s'agit donc de trouver le capital qui, placé à 5 pour 100 pendant 8 ans, produirait avec les intérêts simples $5067,08^{fr}$.

100 fr. en 1 an produisent 5 fr d'intérêt; en 8 ans, ils produisent 40 fr.

Puisque 140 fr. proviennent d'un capital de 100 fr.

1 proviendrait de $\frac{100}{140}$

5067,08 proviendrait de $\frac{100 \times 5067,08}{140}$

Le capital demandé est $3619^{fr},34$.

7). 10000 fr. placés à 5 pour 100 s'élèvent, au bout de 6 ans, avec les intérêts accumulés, à 13400 fr. 96 cent. Les intérêts composés sont donc de 3400 fr. 96 cent., tandis que les intérêts simples ne donnent que 3000 fr.

8).

Annuité	10000^{fr}
Intérêt à 4 $\frac{1}{2}$	450
Fin de la première année.	10450^{fr}
Annuité	10000
Total	20450^{fr}
Intérêt	920 25
Fin de la deuxième année.	21370^{fr},25
Annuité	10000
Total	31370^{fr},25
Intérêt	1411 66
Fin de la troisième année.	32781^{fr},91
Annuité	10000
Total	42781^{fr},91
Intérêt	1925 18
Fin de la quatrième année	44707^{fr},10
Annuité	10000
Total	54707^{fr},10
Intérêt	2461 82
Fin de la cinquième année	57168^{fr},92
Annuité	10000
Total	67168^{fr},92
Intérêt pour 6 mois	1511 30
Total général	68680^{fr}.22

Le calcul du montant des annuités peut être simplifié à l'aide des considérations suivantes :

D'abord, on voit qu'il suffirait de calculer le montant auquel s'élève la somme représentée par l'annuité au bout de 1, 2, 3, etc., jusqu'au nombre d'années dont il s'agit, et de faire la somme de tous les montants Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on aurait :

Sommes auxquelles s'élève le capital de 10000 fr. placé à 4 $\frac{1}{2}$ pour 100, à l'aide des intérêts composés,

au bout de 1 an	10450^{fr}
2 ans	10920 25
3 ans	11411 66
4 ans	11925 19
5 ans	12461 82
Total	57168^{fr},92

ainsi qu'on l'a trouvé dans le tableau précédent.

Enfin, si l'on se reporte à la deuxième manière du nº **1**, on verra que le calcul revient à faire la somme des produits obtenus en prenant le nombre 1,045, 1 fois, 2 fois, 3 fois facteur, etc., jusqu'au nombre de fois indiqué par le nombre d'années, et à multiplier cette somme par le capital donné, qui est ici 10000.

En effet, on a	1,045	1 fois facteur.
	1,092025	2
	1,141166	3
	1,192519	4
	1,246182	5
	5,716892	
	10000	
Produit	57168,92	comme précédemment.

9). D'après la remarque du nº **1**, le nombre d'années cherché sera le même pour une somme quelconque. Si donc l'on suppose la somme donnée égale à 1, il suffira de former les produits successifs.

$$1,05$$
$$1,05 \times 1,05$$
$$1,05 \times 1,05 \times 1,05$$
etc.,

jusqu'à ce que le résultat soit au moins égal à 2.

En effectuant le calcul on trouvera que le quatorzième produit est 1,9799

Et le quinzième 2,0789.

Un capital placé à intérêts composés est donc doublé après 14 ans environ. On trouverait par le même calcul prolongé que le capital est triplé après 22 ans environ, quadruplé après 28, etc.. décuplé après 47 ans environ.

10). 3000 fr. placés à intérêts composés à 5 pour 100, deviennent, au bout de 3 ans, 3472 fr. 87 cent. environ.

Puisque 106 fr. proviennent de 100 fr.

1 $\frac{100}{106}$

3472,87 $\frac{100\times 3472,87}{106}=\frac{347287}{106}=3276,29.$

XXVIII.

Des fonds publics.

1). 5 fr. sont l'intérêt de 100 fr.

1 $\frac{100}{5}=20.$

3 $\frac{100\times 3}{5}=20\times 3=60.$

Le pair de la rente 3 pour 100 est donc 60 fr.

2). Si $119^{fr},50$ rapportent 5 fr.

1 fr. $\frac{5}{119,50}.$

100 $\frac{500}{119,50}=\frac{5000}{1195}=4\frac{220}{1195}.$

Divisant les deux termes de la fraction par le numérateur, on trouve $4\frac{1}{5}$ environ.

3). En achetant des rentes 5 pour 100 au cours de $121^{fr},90$, on place son argent à $4\frac{1}{3}$ environ, tandis que la rente 3 pour 100 à 84 ne donne qu'un intérêt de $3\frac{1}{2}$ environ. Le premier placement est donc le plus avantageux.

4). Si 5 fr. de rente se vendent $120^{fr},90$, $4000^{fr}=5^{fr}\times 800$ se vendront $120,90\times 800=96720$ fr.

5). 5000 fr. de rente 5 pour 100 au cours de $120^{fr},40$ valent 120400 fr.

En effet, 5 fr. valent 120,40.

5000 vaudront $120,40\times 1000=120400.$

De même 5000 fr. de rente au cours de 121,10 valent 121100.

La différence, c'est-à-dire 700 fr. exprimera le bénéfice.

6). Au cours de 83,60, 3000 fr. de rente 3 pour 100 valent 83600.

7). 3000 fr. ont coûté 36120 fr.

1 fr. coûtera $\frac{36120}{3000}=12^{fr},04,$

et 5 fr. $12,04\times 5=60^{fr},20.$

Le cours de la rente 5 pour 100 était $60^{fr},20$.

8). 5 fr. de rente correspondent

à 119,50

1 à $\frac{119,50}{5}$

3 à $\frac{119,50}{5}\times 3=\frac{3}{5}$ de $119,50=71,70.$

Le cours du 3 pour 100 est 71,70.

9). D'après un raisonnement semblable au précédent, le cours correspondant du 5 pour 100 sera les $\frac{5}{3}$ du cours du 3 pour 100, c'est-à-dire $94\times\frac{5}{3}=\frac{470}{3}=156,66\frac{2}{3}$.

10). Les cours correspondants du 5 et du 3 pour 100 sont dans le rapport des rentes elles-mêmes, si donc le premier cours augmente ou diminue, le deuxième cours augmentera ou diminuera des $\frac{3}{5}$ de la variation du premier.

Le 5 pour 100 ayant baissé de $2^{fr},50$, la baisse correspondante du 3 pour 100 sera les $\frac{3}{5}$ de $2^{fr},50$ ou $2^{fr},50\times\frac{3}{5}=1^{fr},50.$

XXIX.

De l'escompte en dehors.

1). L'intérêt de 3500 fr. à 6 pour 100 est

$$3500 \times \tfrac{6}{100} = 35 \times 6 = 210\,;$$

c'est aussi l'escompte du billet.

2). Puisque 100 sont réduits à 92 fr. par l'escompte, on dira 92 fr. proviennent de 100 fr

1	$\frac{100}{92}$
4140	$\frac{100\times4140}{92} = 4500.$

Le montant du billet est de 4500 fr.

3). Puisque le billet de 650 fr. est réduit par l'escompte à 611 fr., l'escompte a été de $650 - 611 = 39$.

Puisque 650 fr. ont donné 39 fr. d'escompte,

10 fr. donneront	$\frac{39}{65}$
100	$\frac{390}{65} = 6.$

Le taux de l'escompte est 6.

4). Le taux de l'escompte étant 6 pour un an, pour un jour, il sera $\frac{6}{365}$, et pour 35 jours $\frac{6\times35}{365}$; l'escompte demandé sera par conséquent,

$$\frac{5000\times6\times35}{365} = \frac{5000\times6\times7}{73} = \frac{21000}{73} = 287{,}67 \text{ environ.}$$

Le taux de l'escompte est $287^{fr},67$.

5). Entre le 1er mars et le 1er juillet, il y a 4 mois, dont 2 ont 31 jours; en tout, par conséquent,

$$30 \times 4 + 2 + 10 = 132 \text{ jours.}$$

Le taux commercial de l'escompte est ordinairement 6 pour 100 par an, et par conséquent $\frac{6}{365}$ par jour, et pour 132 jours $\frac{6\times132}{365}$. Un billet de 100 fr. serait donc réduit à $100 - \frac{6\times132}{365} = \frac{36500-792}{365} = \frac{35708}{365}$.

Donc si $\frac{35708}{365}$ fr. proviennent de 100 fr.

$\frac{1}{365}$	$\frac{100}{35708}$
$\frac{365}{365}$ ou 1 fr.	$\frac{100\times365}{35708}$
et 3458 fr.	$\frac{100\times365\times3458}{35708} = 3534^{fr},70,$

en forçant le dernier chiffre.

6). Le taux de l'escompte étant 6 pour les deux billets par an, l'escompte du premier billet pour 140 jours sera

$$\frac{3700\times6\times140}{365\times100} = 85{,}15\,,$$

et pour le deuxième billet, payable dans 200 jours,

$$\frac{3760\times6\times200}{365\times100} = 123{,}61.$$

La valeur du premier billet est donc

$$3700 - 85{,}15 = 3614{,}85\,,$$

et celle du deuxième billet,

$$3760 - 123{,}61 = 3636{,}38.$$

Le négociant recevra, par conséquent, de surplus

$$3636{,}38 - 3614{,}85 = 21{,}53.$$

7). L'escompte du billet sera

$$\frac{750\times6\times146}{365\times100} = \frac{15\times6\times146}{73\times10} = \frac{15\times6\times2}{10} = 18.$$

La valeur actuelle du billet est donc $750 - 18 = 732$.

8). Ce problème présente une difficulté particulière. On ne peut supposer, en effet, que le taux d'escompte des deux billets soit le taux ordinaire 6, car la valeur actuelle du second billet serait

$$500 - \frac{500\times6\times73}{365\times100} = 500 - 6 = 494\,,$$

somme plus grande que le montant du premier billet.

Le taux de l'escompte est donc inconnu, et c'est lui qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela on observera que puisque, d'après l'énoncé, la valeur actuelle à laquelle sont réduits les deux billets par l'escompte doit être la même, il faut nécessairement que la différence des deux sommes 500 et 450, c'est-à-dire 50, soit compensée par l'excès de l'escompte du deuxième billet sur celui du premier. Or, pour obtenir l'escompte d'un billet, il faut multiplier le montant du billet par le nombre de jours et par le taux, et diviser le produit de ces trois facteurs par 365×100. Les deux expressions de l'escompte ont pour facteur commun le taux inconnu divisé par 365×100, et par conséquent la différence des escomptes sera

$$\left(\frac{500\times73-450\times40}{365\times100}\right)\times \text{taux} = \left(\frac{365-180}{365}\right)\times \text{taux} = \frac{185}{365}\times \text{taux}$$
$$= \frac{37}{73}\times \text{taux}.$$

Connaissant un produit 50 et un des deux facteurs $\frac{37}{73}$, on obtiendra le deuxième facteur, c'est-à-dire le taux, par la division; donc le taux demandé

$$= 50 : \frac{37}{73} = 50 \times \frac{73}{37} = \frac{3650}{37} = 98\tfrac{24}{37}.$$

9). L'escompte pour 73 jours étant 350, pour un an ou 365 jours, il sera 5 fois plus grand ou 1750.

Si donc 8000 fr. ont donné 1750$^{\text{fr}}$ d'escompte

100 donneront $\frac{1750}{80} = \frac{175}{8} = 21\frac{7}{8}$.

Le billet a été escompté à $21\frac{7}{8}$ pour 100

10). L'escompte de 730 fr. à 6 pour 100 par an est $\frac{730\times6}{100}$ pour un an, et pour un jour : $\frac{730\times6}{100\times365} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

Autant de fois 0,12 sera contenu dans 48, autant il y a eu de jours à courir jusqu'à l'échéance du billet $\frac{48}{0{,}12} = \frac{4800}{12} = 400$.

Le billet était à 400 jours d'échéance.

On aurait pu aussi calculer $\frac{730\times6}{100} = 43{,}80$ et diviser 48 par 43,80; ce qui donne pour quotient $1^{\text{an}}35^{\text{j}} = 400^{\text{j}}$ comme précédemment.

XXX.

De l'escompte en dedans.

1). 106 fr. sont réduits par l'escompte à 100 fr.

1 à $\frac{100}{106}$

3180 $\frac{100\times3180}{106} = 100\times30 = 3000$.

L'escompte est de $3180^{\text{fr}} - 3000 = 180^{\text{fr}}$.

2). 108 fr. correspondent à 100 fr.

1 $\frac{100}{108}$

7560 $\frac{100\times7560}{108} = 7000$.

3). 6000 correspondent à 6330

1 $\frac{6330}{6000}$

100 $\frac{6330\times100}{6000} = 105\frac{1}{2}$.

Le taux de l'escompte est $5\frac{1}{2}$.

4). 102 fr. correspondent à 100 fr.

1 $\frac{100}{102}$

3600 $\frac{100\times3600}{102} = 3529\frac{7}{17}$.

5). Le taux de l'escompte étant 6, l'escompte de 100 fr. pour un jour sera $\frac{6}{365}$, et pour 73 jours $\frac{6\times73}{365} = \frac{6}{5} = 1{,}20$.

Si donc 101,20 correspondent à 100 fr.

1 $\frac{100}{101{,}20}$

15000 $\frac{100\times15000}{101{,}20} = 14822{,}13\ldots$

6). Pour avoir 25000 fr. on a donné 600 fr. d'escompte;

100 on donnera $\frac{600}{250} = \frac{60}{25} = \frac{240}{100} = 2{,}40$.

Or, pour calculer l'escompte de 100 fr. à un taux donné, 6 comme dans ce problème, pour un nombre quelconque de jours, il faut multiplier 6 par le nombre de jours et diviser par 365. On a donc un produit de deux facteurs 2,40 et l'un des facteurs $\frac{6}{365}$, le deuxième facteur, c'est-à-dire le nombre de jours demandé, s'obtiendra en divisant 2,40 par $\frac{6}{365}$, ce qui donne

$$2{,}40 : \frac{6}{365} = \frac{2{,}40\times365}{6} = 0{,}40\times365 = 146.$$

Le billet était donc à 146 jours d'échéance.

7). 25000 fr. correspondent à 600 fr. d'escompte;

100 à $\frac{600}{250} = \frac{60}{25} = 2{,}40$.

146 jours $= \frac{146}{365}$ de l'année $= \frac{2}{5}$, l'escompte, pour les $\frac{2}{5}$ de l'année étant 2,40; pour l'année il sera $2{,}40\times\frac{5}{2} = 6$

Le taux demandé est donc 6.

8). Pour avoir

2000 fr. on a donné $2030 - 2000 = 30^{fr}$ d'escompte;

100 $\frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1{,}50$.

6 fr. d'escompte correspondent à 1 an;

1 à $\frac{1}{6}$ d'année;

1,50 à $\frac{1}{6} \times 1{,}50 = \frac{1}{4} = 3$ mois.

Le billet est à 3 mois d'échéance.

On aurait pu employer aussi le raisonnement et la méthode du nº 6.

9). Si l'escompte 6 correspond à 12 mois

2 correspondra à 4 mois.

Par conséquent 2 étant l'escompte de 100 fr.

12 sera l'escompte de $100 \times 6 = 600^{fr}$.

10). Les 80 barriques de sucre à 57 fr. la pièce, coûtent $57^{fr} \times 80 = 4560^{fr}$ sur lesquels il faut prélever les 5 pour 100 de tare, c'est-à-dire $4560^{fr} \times \frac{5}{100} = 228^{fr}$. L'acheteur n'aurait donc à payer que

$$4560^{fr} - 228 = 4332^{fr}.$$

Le taux étant 6, pour 8 mois l'escompte de 100 fr. sera $6 \times \frac{2}{3} = 4$.

Donc si 104 fr. correspondent à 100^{fr}

1 correspondra à $\frac{100}{104}$

4332 $\frac{100 \times 4332}{104} = 4165{,}38...$

La somme à débourser sera donc 4165 fr. 38 cent. à moins d'un centime près.

XXXI.

Règle de répartition.

1). Le nombre total des parts étant $2 + 3 + 4 = 9$; une seule part sera $\frac{2340}{9} = 260$.

La 1re personne aura donc $260 \times 2 = 520$

La 2e $260 \times 3 = 780$

La 3e $260 \times 4 = 1040$

Total égal.... 2340

2). La somme des âges est 231; si donc la somme à partager était 231 fr.: le premier aurait 75 fr., le second, 77 fr. et le troisième, 79 fr. Si la somme était 1, le premier aurait $\frac{75}{231}$, et par conséquent la somme étant 3285 fr., sa part sera les $\frac{75}{231}$ de $3285 = 1066^{fr}\,\frac{129}{231}$

de même la part du second, les .... $\frac{77}{231}$ de $3285 = 1095$

du troisième, les .... $\frac{79}{231}$ de $3285 = 1123\ \frac{102}{231}$

Total égal. . . . 3285

3). Il s'agit de partager 560 en deux parties qui soient dans le rapport des nombres 1760 et 2240.

Or, $1760 + 2240 = 4000$; $\frac{560}{4000} = \frac{56}{400} = \frac{7}{50} = 0{,}14$.

$0{,}14 \times 1760 = 246{,}40$

$0{,}14 \times 2240 = 313{,}60$

Total égal. . . . 560

4). La question revient à partager 1000 en deux parties qui soient entre elles comme les nombres 2,70 et 2,30, dont la somme = 5.

$\frac{1000}{5} = 200$ nombre de kilogrammes achetés.

$2{,}70 \times 200 = 540$ somme payée pour le café.

$2{,}30 \times 200 = 460$ pour le sucre.

5). $240 + 200 + 160 + 100 = 700$; $\frac{9100^{fr}}{700} = 13^{fr}$.

$13^{fr} \times 240 = 3120^{fr}$ somme à payer par le premier.

$13 \times 200 = 2600$ par le second.

$13 \times 160 = 2080$ par le troisième.

$13 \times 100 = 1300$ par le quatrième.

Somme égale. 9100

6). Réduisant les fractions au même dénominateur 12, on a $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$. La question revient à partager 138 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 6, 8, 9; or $6 + 8 + 9 = 23$; $\frac{138}{23} = 6$.

$6 \times 6 = 36$ première partie.

$6 \times 8 = 48$ seconde partie.

$6 \times 9 = 54$ troisième partie.

Somme égale.... 138

7). Multipliant les deux termes du premier rapport par 5, et les deux termes du deuxième rapport par 3, on aura 10 : 15 pour le premier rapport, 15 : 18 pour le deuxième rapport, et la question revient à partager 7400 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 10, 15 et 18. $10+15+18=43$; la première partie sera donc les $\frac{10}{43}$, la seconde les $\frac{15}{43}$, et la troisième les $\frac{18}{43}$ de 7400,

ou $1720\frac{40}{43}$ première partie;
$2581\frac{17}{43}$ deuxième partie;
$3097\frac{29}{43}$ troisième partie.
Total égal... 7400.

On peut dire encore, puisque la première partie doit être les $\frac{2}{3}$ de la deuxième et celle-ci les $\frac{5}{6}$ de la troisième, la première partie sera les $\frac{2}{3}$ des $\frac{5}{6}$ de la troisième ou les $\frac{10}{18}$ de la troisième, la deuxième les $\frac{5}{6}$ ou les $\frac{15}{18}$ de la troisième, et la troisième enfin les $\frac{18}{18}$ de la troisième.

Les trois parties sont donc entre elles comme les nombres 10, 15 et 18.

8). Le premier ouvrier a travaillé $10^h \times 6 = 60^h$
Le deuxième $8 \times 7 = 56$
Le troisième $6 \times 9 = 54$.

Il s'agit donc de partager 510 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 60, 56, 54, dont la somme égale 170. Par conséquent

Le premier ouvrier recevra les $\frac{60}{170}$ de $510 = 180^{fr}$
Le deuxième les $\frac{56}{170}$ de $510 = 168$
Le troisième les $\frac{54}{170}$ de $510 = 162$
Nombre égal... 510.

9). C'est comme si le premier berger avait laissé paître $240 \times 10 = 2400$ moutons pendant un jour, et le second $180 \times 15 = 2700$.

La question revient donc à partager 340 en deux

parties qui soient dans le rapport des nombres 2400 et 2700 ou 24 et 27, dont la somme égale 51.

Le premier payera donc les $\frac{24}{51}$ de $340^{fr} = 160^{fr}$
Et le deuxième les $\frac{27}{51}$ de $340 = 180$
Total égal... 340.

10). $50 \times 125 \times 12 = 75000$
$40 \times 90 \times 10 = 36000$.

C'est donc comme si le premier entrepreneur avait employé 75000 ouvriers pendant une heure, et le second 36000. Il faut donc partager 370000 en deux parties qui soient entre elles comme les nombres 75000 et 36000 ou 75 et 36 dont la somme = 111.

Il revient donc au premier les $\frac{75}{111}$ de $370000 = 250000$
et au second les $\frac{36}{111}$ de $370000 = 120000$
Total égal... 370000

Dans les problèmes de ce genre, on doit faire attention aux simplifications qui se présentent dans le calcul; ainsi, sans effectuer les multiplications précédentes, on peut dire qu'il s'agit de partager la somme donnée 370000 en deux parties qui soient entre elles comme les produits $50 \times 125 \times 12$, $40 \times 90 \times 10$; ou, supprimant de part et d'autre les facteurs 10, 5, 4, comme les produits 5×5, 6×2 et enfin comme les nombres 25 et 12, dont la somme égale 37.

Le premier aura donc les $\frac{25}{37}$ de $370000 = 250000$
et le second les $\frac{12}{37}$ $= 120000$
comme précédemment.

XXXII.

Règles de société et de partage.

1). 400 mise du premier,
450 mise du deuxième,
550 mise du troisième.
1400 somme des mises.

Si la somme à partager était 1400, le premier aurait 400, si la somme à partager était 1, le premier aurait $\frac{400}{1400}=\frac{2}{7}$; donc le 1^{er} aura les $\frac{2}{7}$ de 2400 fr.; le 2^e les $\frac{450}{1400}=\frac{45}{140}=\frac{9}{28}$ de 2400; et le 3^e les $\frac{550}{1400}=\frac{55}{140}=\frac{11}{28}$ de 2400.

Les trois parts sont

pour le premier	$685^{fr}\ \frac{5}{7}$	ou 71^c environ.
le deuxième	$771\ \frac{3}{7}$	ou 43
le troisième	$942\ \frac{6}{7}$	ou 86
Total égal..........	2400^{fr}.	

2). 25000
30000
45000
100000 somme des mises.

48000 : 100000 = 0,48.

La première aura $0{,}48\times 25000 = 12000^{fr}$
La deuxième aura $0{,}48\times 30000 = 14400$
La troisième aura $0{,}48\times 45000 = 21600$
Total égal......... 48000^{fr}.

3). $5600+6000+6400=18000$ somme des mises, $\frac{10800}{18000}=\frac{108}{180}=0{,}6$.

Le premier aura $0{,}6\times 5600 = 3360^{fr}$
Le deuxième aura $0{,}6\times 6000 = 3600$
Le troisième aura $0{,}6\times 6400 = 3840$
Total égal........... 10800^{fr}.

4). $200+250+300+350=1100$ somme des mises. Si la perte était 1100, la part que chaque marchand devrait supporter serait égale à sa mise; si la perte était 1, la part de chacun serait $\frac{200}{1100}$, $\frac{250}{1100}$, $\frac{300}{1100}$, $\frac{350}{1100}$, et par conséquent, pour 550 fr. de perte, la part que chaque marchand devra supporter sera :

Pour le 1^{er} $\frac{200}{1100}\times 550=\frac{550}{1100}\times 200=0{,}5\times 200=100^{fr}$
le 2^e $0{,}5\times 250=125$
le 3^e $0{,}5\times 300=150$
le 4^e $0{,}5\times 350=175$
Total égal. . . . . 550^{fr}

5). $300+350+550=1200$ bénéfice total.

Si pour 1200 fr. de bénéfice la mise a été de 12000 fr. pour 1 fr de bénéfice la mise aura été $\frac{12000}{1200}=10$.

Par conséquent, pour 300 fr. $10\times 300 = 3000^{fr}$
pour 350 $10\times 350 = 3500$
pour 550 $10\times 550 = 5500$
Total égal. . . . . 12000^{fr}.

Les mises particulières sont 3000, 3500, 5500^{fr}.

6). $30000+25000+40000+5000=100000$ mise totale $\frac{4800}{100000}=0{,}048$.

La part de la première est $0{,}048\times 30000=1440^{fr}$
de la seconde est $0{,}048\times 25000=1200$
de la troisième est $0{,}048\times 40000=1920$
de la quatrième est $0{,}048\times 5000=240$
Total égal. . . . . 4800^{fr}.

7). Fonds commun 40000^{fr} somme des mises.
Intérêts à 5 p. 100 2000
Fin de la 1^{re} année 42000^{fr}
Intérêts. 2100
Fin de la 2^e année 44100^{fr}
Intérêts. 2205
Fin de la 3^e année 46305^{fr}
Intérêts . . . . . 2315 ,25
Fin de la 4^e année $48620^{fr},25$
Intérêts . . . . . 2431 ,0125
Fin de la 5^e année $51051^{fr},26$ fonds commun à partager.

La part du premier sera les $\frac{15}{40}$ de 51051,26 ou $19144^{fr},22$
du second sera les $\frac{13}{40}$ 16591 66
du troisième sera les $\frac{12}{40}$ 15315 38
Total égal. . . . . $51051^{fr},26$

8). 3000 francs pendant 2 ans font le même effet que $3000 \times 2 = 6000$ pendant 1 an ; de même 4000 fr. pendant 3 ans font autant que $4000 \times 3 = 12000$ pendant 1 an. Il s'agit donc de partager 5400 en deux parties qui soient entre elles comme les nombres 6000 et 12000 ou comme les nombres 1 et 2 dont la somme est 3.

Le premier aura donc le $\frac{1}{3}$ de 5400	ou	1800^{fr}
et le second les $\frac{2}{3}$	ou	3600
Total égal.		5400^{fr}.

9). C'est comme si

le premier avait mis $240,50 \times 4 = 962$ pendant 1 mois,
le second avait mis $350,20 \times 5 = 1751$
le troisième avait mis $458,00 \times 6 = 2748$

La question revient donc à partager 273,05 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 962, 1751, 2748, dont la somme = 5461.

$$273,05 : 5461 = 0,05.$$

La part du premier sera donc $0,05 \times 962 =$	48,10
du deuxième sera donc $0,05 \times 1751 =$	87,55
du troisième sera donc $0,05 \times 2748 =$	137,40
Total égal.	273,05.

10).

Mise du premier	$400 \times 2 =$	800
du deuxième	$300 \times 2 =$	600
	$300 \times 1\frac{1}{2} =$	450
du troisième	$200 \times 2 =$	400
	$500 \times 1 =$	500
Somme.		2750.

$\frac{6600}{2750} = 2,4$; la part du 1^{er} sera $2,4 \times 800 =$	1920
la part du 2^{e} sera $2,4 \times 1050 =$	2520
la part du 3^{e} sera $2,4 \times 900 =$	2160
Total égal.	6600.

XXXIII.

Règle de mélange et d'alliage de première espèce.

1). 2 litres du mélange reviendraient à $1,80 + 0,60 = 2,40$, donc 1 litre du mélange reviendra à $\frac{2,40}{2} = 1^{fr},20$.

2).

240 litres	à $0^{fr},45$ font	108 fr.
250	à 0 ,50	125
310	à 0 ,60	186
Somme des litres du mélange 800	Total. . . .	419

Le litre du mélange revient à $\frac{419}{800} = 0,52$ environ.

3).

50 hectolitres	à 46 fr. font	2300 fr.
40	à 45	1800
10	à 44	440
100		4540

1 hectolitre revient à $\frac{4540}{100} = 45^{fr},40$.

4).

1 kilog. d'étain vaut.	$2^{fr},20$
3 kilog. de cuivre valent $2,70 \times 3 =$	8 ,10
4 kilog. de l'alliage valent.	10 ,30

10000 kilog. vaudront $10,30 \times 2500 = 25750$ fr.

On peut dire encore : il y a $\frac{1}{4}$ de 10000 kilog. d'étain ou 2500 kilog., et $\frac{3}{4}$ de 10000 ou 7500 de cuivre,

les 2500 kilog. d'étain	à 2,20 valent	5500 fr.
les 7500 de cuivre	à 2,70	20250
	Total.	25750

5). L'ouvrier fait dans les 6 jours 216 mètres ; dans un jour, il fait, terme moyen, $\frac{216}{6}$ mètres = 36 mètres.

6). La somme des revenus, pendant 5 ans, est 17600 fr., le revenu moyen est $\frac{17600}{5} = 3520$ fr.

7).

3 kilog. de zinc	à 90 cent. font	2,70
7 de cuivre	à $2^{fr},70$	18,90
10 kilog. de laiton valent		21,60

Le kilog. de laiton vaut donc $\frac{21,60}{10} = 2^{fr},16$.

8). 11 kilog. d'étain à $2^{fr},75$ valent 30,25
100 kilog. de cuivre à 1 ,60 — 160
111 kilog. de bronze valent 190,25

Le kilog. de bronze vaut donc $\frac{190,25}{111} = 1^{fr},71$ environ.

9). Le $\frac{1}{4}$ de 6000 fr. ou 1500 — 3 mois — 4500
$\frac{1}{3}$ — 2000 — 6 — 12000
6000 — 3500 = 2500 — 10 — 25000
41500

Le terme de l'échéance se trouvera en divisant 41500 par 6000; ce qui donne 6 mois 27 jours et demi en supposant le mois de 30 jours.

10). 10000 fr. 12 mois 12000
4000 — 7 — 2800
9200 fr.

Le terme s'obtiendra en divisant 9200 par 600, et l'on trouvera 15 mois 10 jours.

XXXIV.

Règle de mélange et d'alliage de deuxième espèce.

1). En vendant 18 fr. un hectolitre de blé qui coûte 19 fr., le marchand perd 1 fr.

En vendant 18 fr. un hectolitre de blé qui coûte 16 fr., il gagne 2 fr.

Pour que la perte soit compensée par le gain, il faut que le marchand vende 2 fois plus de la première espèce que de la seconde.

2). Pour un litre, le marchand perdra 5 centimes sur la première espèce et gagnera 4 centimes sur la seconde. Les nombres de litres qu'il doit prendre seront donc entre eux comme les nombres 4 et 5, c'est-à-dire :

4^{lit} de la première	5 de la seconde
ou 8	10
12	15
etc.	etc.

3). Il suffit de partager 90 en deux parties qui soient dans le rapport de 4 à 5; on prendra donc 40 de la première et 50 de la seconde.

4). Gain sur un hectolitre 2 francs.
Perte 3 francs.

Partageant 100 en deux parties qui soient entre elles comme 3 et 2, on obtient 60 pour la première espèce et 40 pour la seconde.

5).
$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90} \text{ perte;}$$
$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} \text{ gain;}$$
$$\frac{1}{30} : \frac{1}{90} = 3.$$

Il faudra prendre 3 fois plus de la première que de la seconde espèce.

6).
$$\frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40};$$
$$\frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60};$$
$$\frac{1}{60} : \frac{1}{40} = \frac{2}{3}.$$

Il faudra prendre de ces deux métaux des quantités qui soient entre elles comme les nombres 2 et 3.

7).
$$60 - 50 = 10 \text{ perte;}$$
$$50 - 45 = 5 \text{ gain;}$$
$$50 - 40 = 10 \text{ gain.}$$

Prenant à volonté deux nombres de litres pour la première et la deuxième espèce, 20 et 30 par exemple, la perte serait $10 \times 20 - 5 \times 30 = 50^c$. $\frac{50}{10} = 5$ serait le nombre de la troisième espèce.

Les nombres seraient donc 20, 30 et 5, qu'on pourrait multiplier ou diviser par un même nombre.

Les nombres les plus simples sont 4, 6, 1.

8).
$$\text{perte } 0{,}920 - 0{,}900 = 0{,}20;$$
$$\text{gain } 0{,}900 - 0{,}860 = 0{,}40;$$
$$\text{gain } 0{,}900 - 0{,}850 = 0{,}50.$$

Prenant deux nombres à volonté pour les deux dernières espèces 20 et 40 par exemple, le gain total serait

$0,40 \times 20 + 0,50 \times 40 = 28. \quad \frac{28}{0,20} = \frac{280}{2} = 140.$

Les nombres seraient 140, 20, 40 ou 7, 1, 2, etc.

9). 4 hectolitres de vin à 60 centimes le litre valent 240 francs; $\frac{240}{0,50} = \frac{2400}{5} = 480$; $480 - 400 = 80$.

Il faudrait ajouter 80 litres d'eau.

10). Sur un litre $60 - 45 = 15^c$ perte;

$50 - 45 = 5$ perte;

$45 - 40 = 5$ gain;

$45 - 30 = 15$ gain.

Les nombres à prendre sont donc 15, 5, 5, 15, ou 3, 1, 1, 3.

Il ne reste plus qu'à partager 1000 en quatre parties qui soient entre elles comme ces quatre nombres dont la somme est 8.

Or, $\frac{1000}{8} = 125$.

On prendra donc $125 \times 3 = 375^{lit}$ de la première espèce;

$125 \times 1 = 125$ de la deuxième espèce;

$125 \times 1 = 125$ de la troisième espèce;

$125 \times 3 = 375$ de la quatrième espèce.

Total égal... 1000.

Autre solution. Je prends à volonté les 3 nombres 20, 40, 60 pour la première, deuxième et troisième espèce.

La perte sera $15 \times 20 + 5 \times 40 = 500^c$.

Le gain total provenant de la troisième espèce sera $5 \times 60 = 300^c$. Il restera donc encore de perte

$$500 - 300 = 200^c$$

qu'il faudra compenser par un nombre convenable de litres de la quatrième espèce. Ce nombre sera $\frac{200}{15} = \frac{40}{3}$. Les quatre nombres seront donc 20, 40, 60, $\frac{40}{3}$ ou multipliant par 3 et divisant par 20 : 3, 6, 9, 2.

Partageant 1000 en quatre parties qui soient entre elles comme ces quatre nombres, on trouvera 150, 300, 450, 100.

On peut vérifier ces quatre nombres de la manière suivante :

150^{lit}	à 60^c font	90^{fr}
300	à 50	150
450	à 40	180
100	à 30	30
	Total...	450

1000^{lit} à 45 font 450 comme on l'a déjà trouvé.

LIVRE II.

THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES; ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

XXXV.

Du carré et de la racine carrée.

1). Le prix total qu'il en a retiré sera $35^c \times 35 = 12^{fr}\ 25^c$.

2). La racine carrée seule est $29 - 13 = 16$. Le nombre demandé sera donc le carré de 16, qui est 256.

3). La racine carrée de ce nombre sera $5\frac{2}{7} : 3 = \frac{37}{21}$, et le nombre lui-même sera le carré de $\frac{37}{21}$ qui donne $3\frac{46}{441}$.

4). Le carré de ce nombre sera $32 - 7 = 25$ et, par conséquent ce nombre est la racine carrée de 25 ou 5

5). Le produit du $\frac{1}{3}$ d'un nombre par le $\frac{1}{4}$ de ce même nombre donne le $\frac{1}{12}$ de son carré, le carré du nombre cherché sera donc $48 \times 12 = 576$; et le nombre lui-même sera $\sqrt{576} = 24$.

6) Pour résoudre ce problème, il suffirait de décomposer 25 en deux parties quelconques, et de voir si le produit des deux parties est égal à 150.

On commencerait par prendre

24 et	1 dont le produit	$= 24$
23	2	$= 46$
22	3	$= 66$
21	4	$= 84$

et l'on trouverait, en continuant cette décomposition, que 15 et 10 donnent pour produit 150. Les deux parties sont donc 15 et 10.

Mais on peut abréger ce tâtonnement à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME. *Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres diminuée du double de leur produit.*

Soient en effet les deux nombres 8 et 5, dont la différence est 3.

Au lieu de faire le produit de 3 par 3, je puis multiplier $8 - 5$ par $8 - 5$; or, si je multiplie $8 - 5$ par 8, j'obtiendrai $8 \times 8 - 5 \times 8$; car en multipliant 8 par 8, on obtient un produit trop grand de tout le produit de 5 par 8.

Mais ce n'était pas par 8 qu'il fallait multiplier $8 - 5$, c'était par 8 diminué de 5; le produit précédent est donc trop grand de tout le produit de $8 - 5$ par 5; c'est-à-dire de $8 \times 5 - 5 \times 5$.

Il faut donc du produit $8 \times 8 - 5 \times 8$ retrancher le produit $8 \times 5 - 5 \times 5$. Or, si l'on retranche seulement la première partie 8×5, ce qui donne $8 \times 8 - 5 \times 8 - 8 \times 5$, on aura un reste trop faible de toute la quantité 5×5. Pour rendre au résultat sa juste valeur, il faudra lui ajouter 5×5; donc $(8 - 5) \times (8 - 5) = 8 \times 8 - 2(8 \times 5) + 5 \times 5$.

Pour revenir au problème proposé, on remarquera que si l'on fait le carré de $25 = 625$, ce carré comprendra la somme des carrés des deux parties, plus le double de leur produit. Si de ce carré on retranche le quadruple de 150 qui est le produit des deux parties, d'après l'énoncé, le reste $625 - 150 \times 4 = 25$ renfermera la somme des carrés des deux parties diminuée du double de leur produit, et sera par conséquent le carré de leur différence.

On a donc la somme de deux nombres qui est	25
la différence	5.

La plus grande partie sera $\frac{25+5}{2} = 15$, et la plus petite $\frac{25-5}{2} = 10$.

7). Toute fraction divisée par cette même fraction renversée donne pour résultat une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont les carrés du numérateur et du dénominateur de la fraction elle-même. La fraction demandée est donc $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$; en effet

$$\frac{5}{8} : \frac{8}{5} = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}.$$

8). Au carré 900 de la différence 30, j'ajoute le quadruple du produit 2800, c'est-à-dire 11200, et j'obtiens 12100, qui est le carré de la somme des deux nombres demandés ; donc cette somme est égale à $\sqrt{12100} = 110$. Le plus grand nombre est donc $\frac{110+30}{2} = 70$, et le plus petit $\frac{110-30}{2} = 40$.

9). Puisque la somme des carrés des deux nombres est 130, et la différence des carrés de ces mêmes nombres 32, $130 - 32 = 98$ sera le double du carré du plus petit ; le carré du plus petit nombre sera donc $\frac{98}{2} = 49$, et ce nombre sera $\sqrt{49} = 7$; $49 + 32 = 81$ sera le carré du plus grand ; et par conséquent ce plus grand nombre sera $\sqrt{81} = 9$; les deux nombres sont 7 et 9.

Si l'on donnait la somme des carrés de deux nombres inconnus et 1° la somme ou 2° la différence de ces deux nombres, voici comment on pourrait déterminer ces deux nombres.

1° Soient 89 la somme des carrés de deux nombres et 13 la somme de ces nombres.

Le carré de $13 = 169$ renfermera la somme des carrés des deux nombres, plus le double de leur produit ; si donc on retranche 89 de 169, le reste 80 sera le double du produit de ces nombres, et par conséquent le produit de ces nombres sera 40.

Maintenant si de 169 on retranche le double de 80, c'est-à-dire le quadruple de $40 = 160$, le reste 9 sera le carré de la différence de ces nombres ; laquelle différence sera par conséquent $\sqrt{9} = 3$. Connaissant la somme 13 et la différence 3 de deux nombres, on obtiendra sur-le-champ pour le plus grand $\frac{13+3}{2} = 8$, pour le plus petit $\frac{13-3}{2} = 5$.

2° Soient 193 la somme des carrés de deux nombres et 5 la différence de ces nombres ; $193 - 25 = 168$ sera le double du produit des deux nombres demandés, et par conséquent $193 + 168 = 361$ sera le carré de la somme de ces nombres ; donc la somme des deux nombres demandés sera $\sqrt{361} = 19$. On connaît donc la somme 19 et la différence 5 de deux nombres. Ces deux nombres sont par conséquent $\frac{19+5}{2} = 12$, $\frac{19-5}{2} = 7$.

10). Avant de résoudre ce problème, nous donnerons la démonstration d'un autre théorème très-important.

THÉORÈME. *Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence des carrés de ces nombres.*

On peut vérifier cette proposition sur deux nombres pris à volonté, 7 et 5 par exemple ;

$$7 + 5 = 12, \quad 7 - 5 = 2 \; ; \quad 12 \times 2 = 24.$$
$$(7)^2 = 49, \quad (5)^2 = 25 ; \quad 49 - 25 = 24.$$

En général, $\quad 12 = 7 + 5,$
$$2 = 7 - 5.$$

Pour multiplier $7 + 5$ par $7 - 5$, je commence par multiplier $7 + 5$ par 7, ce qui donne $7 \times 7 + 5 \times 7$.

Or, ce n'est pas par 7 qu'il fallait multiplier, mais par 7 diminué de 5, le produit précédent est donc trop fort de tout le produit de $7 + 5$ par 5, lequel produit est $7 \times 5 + 5 \times 5$; si donc du premier produit, on retranche ce second produit, il ne restera plus que

$$7 \times 7 - 5 \times 5,$$

c'est-à-dire la différence des carrés ; donc

$$(7 + 5) \times (7 - 5) = (7)^2 - (5)^2 ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenant au problème proposé : si l'on divise la différence des carrés de deux nombres, 350, par la différence de ces nombres, 7, le quotient $\frac{350}{7} = 50$ sera la somme des deux nombres.

Connaissant la somme 50, et la différence 7 de deux nombres, on obtiendra pour le plus grand $\frac{50+7}{2}=28\frac{1}{2}$, et pour le plus petit $\frac{50-7}{2}=21\frac{1}{2}$.

En effet,
$$(28\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{57}{2})^2=\tfrac{3249}{4},$$
$$(21\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{43}{2})^2=\tfrac{1849}{4};$$
$$\tfrac{3249}{4}-\tfrac{1849}{4}=\tfrac{1400}{4}=350.$$

Les deux nombres demandés sont donc $28\frac{1}{2}$ et $21\frac{1}{2}$.

Si l'on donnait la somme 20 de deux nombres et la différence 180 de leurs carrés, on diviserait le second nombre par le premier, et l'on obtiendrait pour la différence des deux nombres cherchés $\frac{180}{20}=9$.

Connaissant la somme 20 et la différence 9 de deux nombres, on aurait pour ces deux nombres
$$\tfrac{20+9}{2}=14\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{20-9}{2}=5\tfrac{1}{2}.$$

Enfin si l'on donnait la différence 297 des carrés de deux nombres et le produit de ces nombres 252, voici comment on pourrait opérer :

Élevant au carré 297, on obtiendra le nombre 88209 qui renferme la somme des carrés des carrés des deux nombres diminuée du double produit des carrés; si donc on ajoute à 88209 le quadruple du carré de 252 qui est 63504, c'est-à-dire 254016 la somme 342225 sera le carré de la somme des carrés des deux nombres cherchés. Extrayant la racine, on aura pour la somme des carrés 585.

Maintenant connaissant la somme des carrés de deux nombres 585 et leur différence 297, le carré du plus grand sera $\frac{585+297}{2}=441$. Donc $\sqrt{441}=21$ sera le plus grand nombre.

De même le carré du plus petit nombre sera
$$\tfrac{585-297}{2}=144,$$
et par suite $\sqrt{144}=12$ sera le plus petit nombre.

On vérifie aisément que la différence des carrés de 21 et de 12 est 297 et leur produit 252.

XXXVI.

Du cube et de la racine cubique.

1). La racine cubique du nombre demandé sera $24+3=27$ et le nombre lui-même $(27)^3=19683$.

2). Le nombre des objets est $25\times25=(25)^2$; et le prix total $25^c\times(25)^2=(25^c)^3=15625^c=156^{fr}25^c$.

3). Le produit de la moitié, du tiers et du quart d'un nombre est égal au vingt-quatrième du cube de ce nombre. Le cube du nombre demandé sera donc égal à $9\times24=216$; et le nombre demandé sera $\sqrt[3]{216}=6$.

4). Le tiers d'un nombre multiplié par le carré de ce nombre donne le tiers du cube de ce même nombre. Le cube du nombre cherché sera donc $1944\times3=5832$, et par conséquent le nombre demandé $=\sqrt[3]{5832}=18$.

5). La quatrième puissance d'un nombre divisé par le $\frac{1}{8}$ de ce même nombre, donne pour quotient 8 fois le cube de ce nombre; par conséquent 8 fois le cube du nombre demandé valent $2000+197=2197$; le cube de ce nombre est donc $\frac{2197}{8}$; et le nombre lui-même
$$=\sqrt[3]{\tfrac{2197}{8}}=\tfrac{13}{2}=6\tfrac{1}{2}.$$

6). Le nombre d'oranges sera égal à 3 fois le carré du nombre de caisses, et le prix total à 6 fois le cube du nombre de caisses. Donc le nombre de caisses aura pour cube $\frac{16464}{6}=2744$, et par suite le nombre de caisses sera $\sqrt[3]{2744}=14$, et celui des oranges
$$(14)^2\times3=196\times3=588.$$

7). La somme mise en commun sera égale à 1000 fois le carré du nombre d'associés. Pour trouver l'intérêt de cette somme, d'après les conditions de l'énoncé, il faudrait la multiplier par la moitié du nombre d'associés et diviser le produit par 100, ce qui donnerait 1000 fois le cube du nombre d'associés divisé par 200; donc 1000 fois le cube du nombre d'associés égalent $2560 \times 200 = 512000$; et par suite le nombre d'associés égale $\sqrt[3]{512} = 8$. Il y avait donc 8 associés.

8). Au taux de 5 pour 100, l'intérêt de 1 fr. est de 5 cent. Au bout de la première année le capital total sera

$$30000 + 30000\,(0{,}05) = 30000\,(1{,}05).$$

Au bout de la deuxième année $= 30000\,(1{,}05)^2$.

Au bout de la troisième année $= 30000\,(1{,}05)^3$.

$(1{,}05)^3 = 1{,}157625$; $30000 \times 1{,}157625 = 34728{,}75$.

Le capital s'élève à 34728 fr. 75 cent.

9). Le cube de 130 se compose : 1° du cube de la première partie; 2° de 3 fois le carré de la première multiplié par la seconde; 3° de 3 fois le carré de la seconde multiplié par la première; 4° du cube de la seconde; autrement dit : 1° de la somme des cubes des deux parties; 2° de 3 fois le produit des deux parties multiplié par la somme des deux parties. Donc, si du cube de $130 = 2197000$, on retranche la somme des cubes 637000, la différence 1560000 sera égale à 3 fois le produit des deux parties multiplié par la somme 130. Le produit des deux parties s'obtiendra donc en divisant 1560000 par $130 \times 3 = 390$, ce qui donne 4000.

Connaissant la somme 130 de deux nombres et leur produit 4000, on obtiendra facilement chacun des deux nombres. (Voir Problème VI, *Extraction des racines carrées*).

Je fais le carré de 130 qui est 16900, j'en retranche le quadruple de 4000, c'est-à-dire 16000, et le reste 900 représente le carré de la différence des deux nombres, laquelle est $\sqrt{900} = 30$.

On a donc la somme 130 et la différence 30 de deux nombres.

Le plus grand sera $\frac{130+30}{2} = 80$.

Le plus petit sera $\frac{130-30}{2} = 50$.

es deux nombres cherchés sont 80 et 50.

10). Si l'on divise 11576,25 par 10000, le quotient 1,157625 représentera le cube du nombre formé de l'unité augmentée de l'intérêt de 1 fr. par an. Extrayant donc la racine cubique de 1,157625, on obtient pour racine 1,05, l'intérêt de 1 fr. étant 0,05, l'intérêt de 100 fr. ou le taux sera 5.

11). Le produit $112 \times 588 \times 576 = 37933056$ sera évidemment, d'après l'énoncé, le produit des cubes des trois nombres ou le cube du produit des trois nombres demandés. Le produit de ces trois nombres est donc

$$\sqrt[3]{37933056} = 336.$$

Maintenant si l'on divise 112, produit du carré du premier nombre par le second, par 336, produit des trois nombres, on aura, pour le rapport du premier nombre et du troisième, $\frac{112}{336} = \frac{1}{3}$. Le premier nombre est donc le $\frac{1}{3}$ du troisième, et par conséquent le produit du premier nombre par le carré du troisième sera égal au $\frac{1}{3}$ du cube du troisième; or ce produit est 576; donc le cube du troisième nombre est $576 \times 3 = 1728$, et le troisième nombre $= \sqrt[3]{1728} = 12$. Le premier sera par conséquent $\frac{12}{3} = 4$, et le second s'obtiendra en divisant 336, produit des trois nombres, par $4 \times 12 = 48$, produit de deux de ces nombres déjà trouvés. Le second nombre est donc $\frac{336}{48} = 7$.

Les trois nombres demandés sont 4, 7 et 12.

XXXVII.

Progressions par différence.

1). Il s'agit de trouver : 1° le 17e terme d'une progression par différence dont le 1er est 240 et la raison 36 ; 2° la somme de ces 17 termes.

1° Le 17e terme demandé sera

$$240 + 36 \times 16 = 240 + 576 = 816.$$

2° La somme des 17 termes est

$$(240 + 816)\tfrac{17}{2} = \tfrac{1056 \times 17}{2} = 528 \times 17 = 8976.$$

Le domestique a reçu la 17e année 816 fr. et en tout, pendant 17 ans, 8976 fr.

2). Le 16e terme de la progression par différence dont le 1er terme est 3,40 et la raison 0,20 est

$$3{,}40 + 0{,}20 \times 15 = 3{,}40 + 3 = 6{,}40 ;$$

et la somme des 16 termes :

$$(3{,}40 + 6{,}40) \times \tfrac{16}{2} = 9{,}80 \times 8 = 78{,}40.$$

3). Pour le 20e mètre, l'ouvrier aura

$$2 + 0{,}50 \times 19 = 2 + 9{,}50 = 11{,}50,$$

et pour les 20 mètres : $(2 + 11{,}50)\tfrac{20}{2} = 135^{fr}$.

4). L'intérêt de 3500 fr. à 4 p. 100 est $\tfrac{3500 \times 4}{100} = 140$,
de 300 $\tfrac{300 \times 4}{100} = 12$.

Ainsi pour la 1re année, l'intérêt sera 140
2e 140+12=152
3e 140+12+12=164
etc. etc.

Il s'agit donc de déterminer le dernier terme et la somme de tous les termes d'une progression par différence dont le 1er terme est 140, la raison 12 et le nombre des termes 24.

Le 24e terme sera donc

$$140 + 12 \times 23 = 140 + 276 = 416,$$

et la somme $(140 + 416)\tfrac{24}{2} = 556 \times 12 = 6672$.

Les intérêts de toutes les sommes placées s'élèvent donc à 6672 fr.

5). La question revient à déterminer le dernier terme d'une progression par différence décroissante dont le premier terme est 58, la raison 1 et le nombre de termes 19 ; le dernier terme sera donc $58 - 1 \times 18 = 58 - 18 = 40$. Dès lors la somme des 19 termes sera

$$(58 + 40)\tfrac{19}{2} = \tfrac{98 \times 19}{2} = 49 \times 19 = 931.$$

Le voyageur a donc fait 40 kilomètres le premier jour et 931 kilomètres dans tout son voyage.

6). Il s'agit de déterminer le nombre de termes d'une progression par différence, dont le premier terme est 100, la raison 50 et le dernier terme 550. Si du dernier terme on retranche le premier, le reste $550 - 100 = 450$ sera le produit de la raison par le nombre de termes qui précède le dernier. Il suffira donc de diviser 450 par 50, et d'augmenter le quotient de 1, ce qui donne

$$\tfrac{450}{50} = 9, \quad 9 + 1 = 10.$$

Le domestique est depuis 10 ans dans la maison.

7). Dans la 20e seconde de sa chute, le corps aura parcouru $4{,}90 + 9{,}80 \times 19 = 191^{m},10$.
Et dans les 20 secondes, 1960.

8). On connaît le premier terme 20 d'une progression par différence, le dernier terme 80 et la somme 800 ; il s'agit de trouver le nombre de termes. Pour cela, il faut diviser la somme 800 par $20 + 80 = 100$, et le quotient 8 sera la moitié du nombre des termes. Le nombre des termes est donc 16.

Maintenant, connaissant le premier terme, le dernier et le nombre des termes, on calculera facilement la raison en retranchant le premier terme du dernier, et divisant le reste par le nombre des termes diminué de 1; ce qui donne $\frac{80-20}{15}=\frac{60}{15}=4$.

La somme sera acquittée dans 16 mois, et chaque payement mensuel surpassera de 4 fr. le payement précédent.

9). Les deux courriers ont parcouru à eux deux la distance totale 420 kilomètres, et le second a parcouru 36 kilomètres de plus que le premier; on connaît donc la somme de deux nombres 420 et leur différence 36, on obtiendra facilement pour la plus petite distance parcourue par le premier $\frac{420-36}{2}=192$; et pour la plus grande distance parcourue par le second, $\frac{420+36}{2}=228$.

Maintenant on connaît la somme 192 des 6 termes d'une progression dont le premier terme est inconnu, et dont la raison est 8. Pour calculer ce premier terme, on divisera 192 par $\frac{6}{2}=3$, ce qui donne 64; 64 représente la somme du premier et du dernier terme; mais le dernier terme est égal au premier, augmenté de la raison 8 multipliée par le nombre des termes 5 qui le précèdent, c'est-à-dire augmentée de $8\times5=40$, donc $64-40=24$ est le double du premier terme, et par conséquent le premier terme est $\frac{24}{2}=12$. Pareillement $\frac{228}{3}=76$ est la somme du premier et du dernier terme de la deuxième progression; $76-12\times5=76-60=16$ est le double du premier terme, $\frac{16}{2}=8$ est le premier terme. Le premier courrier a donc parcouru 12 kilomètres le premier jour, et le second 8.

10). Avant de résoudre ce problème, nous donnerons à la formule du dernier terme et à la somme de tous les termes d'une progression dont on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes, une forme plus commode pour ce genre de calcul.

1° Un terme quelconque d'une progression dont le premier terme est donné ainsi que la raison et le rang

de ce terme, s'obtient en ajoutant au premier terme la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui. Si, par exemple, le premier terme est 5, la raison 3 et le rang du terme 10, on aura : dixième terme $=5+3\times9$, qui peut s'écrire sous la forme

$$5+3\times10-3=5-3+3\times10,$$

et l'on peut dire que :

Un terme quelconque d'une progression est égal au produit de la raison multipliée par le rang du terme augmenté de l'excès du premier terme sur la raison (ou diminué de l'excès de la raison sur le premier terme, si la raison est plus grande que ce premier terme).

2° Pour obtenir la somme de tous les termes d'une proportion, il faut multiplier la somme du premier et du dernier par la moitié du nombre des termes; par conséquent le produit de la somme des termes extrêmes par le nombre des termes, donne le double de la somme.

Mais la somme du premier et du dernier terme est égale, d'après ce qui précède, à la raison multipliée par le nombre des termes, plus 2 fois le premier terme diminué de la raison; donc, *dans toute progression par différence, le produit du double de la somme des termes par la raison est égal à un produit qui a pour facteurs, 1° le nombre de termes multiplié par la raison, plus l'excès du double du premier terme sur la raison; 2° le nombre de termes multiplié par la raison.*

Revenant au problème dans lequel il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression par différence dont on connaît le premier terme 3, la raison 4 et la somme de tous les termes 1596, je double 1596, ce qui donne 3192; je multiplie ce nombre par la raison 4, et j'obtiens 12768 pour le produit de deux facteurs, dont l'un est le produit du nombre de termes par la raison, et le deuxième ce même produit augmenté du double du premier terme diminué de la raison, c'est-à-dire $3\times2-4=2$. Je connais donc la différence 2 des deux facteurs et leur produit 12768 ; la question est donc ramenée à un problème déjà résolu. (Problème VIII, *sur les carrés et sur les racines carrées*.)

Je fais le carré de 2 qui est 4, j'ajoute à ce carré le quadruple de 12768 qui est 51072, et la somme 51076 est le carré de la somme des deux facteurs demandés. Extrayant la racine carrée de 51076, on obtiendra pour la somme des deux facteurs 226.

Enfin, connaissant la somme 226 et la différence 2 des deux facteurs, on aura pour le plus petit des deux $\frac{226-2}{2}=112$.

Mais ce facteur est lui-même un produit de deux facteurs, dont l'un est le nombre de termes demandé, et l'autre la raison connue 4 ; divisant donc 112 par 4, on trouve pour le nombre de termes demandé 28.

L'ouvrier avait donc mis 28 mois à économiser cette somme de 1596 fr.

XXXVIII.

Progressions par quotient.

1). Le problème revient à déterminer : 1° le dernier terme d'une progression par quotient dont le premier terme est 5, la raison 3, et le nombre des termes 12; 2° la somme de ces 12 termes.

1° Pour trouver le douzième terme, il faut multiplier le premier terme 5 par la puissance de la raison 3 marquée par le nombre de termes qui précèdent, c'est-à-dire par la onzième puissance de la raison 3 ; or, $3^{11}=177147$. Le douzième terme est donc

$$177147\times 5=885735.$$

2° Pour trouver la somme des douze termes il faut multiplier le dernier 885735 par la raison 3, retrancher du produit le premier terme 5 et diviser le reste par la raison diminuée de 1, on aura donc, en effectuant les calculs,

$$\frac{885735\times 3-5}{3-1}=\frac{2657205-5}{2}=1328600.$$

Le perdant a dû donner le dernier jour 8857 francs 35 centimes, et en tout 13286 francs.

2). Le trente-deuxième terme de la progression qui commence par 1 et dont la raison est 2, est, d'après la formule, $1\times 2^{31}=2147483648$; et la somme des trente-deux termes sera

$$\frac{2\times 2147483648-1}{2}=4294967295.$$

Le prix du cheval serait donc 42949672 fr. 95 cent.

3). Prix du 1er mètre 2^{fr} ;

du 2e $2^{fr}+\frac{1}{4}$ de $2^{fr}=$ les $\frac{5}{4}$ de $2^{fr}=2\left(\frac{5}{4}\right)$;

du 3e $2\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}$ de $2\left(\frac{5}{4}\right)=2\left(\frac{5}{4}\right)^2$;

du 4e $2\left(\frac{5}{4}\right)^3$;

....

du 10e $2\left(\frac{5}{4}\right)^9$.

La suite de ces nombres forme donc une progression par quotient dont le premier terme est 2, la raison $\frac{5}{4}$ et le nombre des termes 10.

$$\text{Or } \left(\frac{5}{4}\right)^9=\frac{5^9}{4^9}=\frac{1953125}{262144}=7,4505805.........$$

Le prix du dixième mètre est donc 14 francs 90 cent.

$$\text{et le prix total } \frac{14,90\times 2-1}{\frac{5}{4}-1}=\frac{28,80}{\left(\frac{1}{4}\right)}=115,20.$$

Il revient à l'ouvrier 115 francs 20 centimes.

4). En désignant la somme demandée par x, on aura

$$x=(1,05)^{20}.(1,05)^2=1,1025;$$

multipliant cè nombre par lui-même, on a

$$(1,05)^4=1,2155...;$$

multipliant encore ce nombre par lui-même, on a

$$(1,05)^8=1,47744...$$

Procédant de la même manière, on trouve

$$(1,05)^{16}=2,1828...$$

Multipliant ce nombre par $(1,05)^4 = 1,2155$, on trouve enfin $(1,05)^{20} = 2,65319\ldots$

Ainsi la somme s'élève à 2 francs 65 centimes environ.

Pour un nombre quelconque, il suffirait de multiplier 2,65 par ce nombre pour avoir la somme à laquelle ce capital s'élève au bout de 20 années, par les intérêts composés.

5). D'après l'énoncé, c'est comme si 1 franc restait placé pendant 20, 19, 18..... 3, 2, 1 années. Il s'agit donc d'obtenir la somme de ces 20 résultats, dont les expressions sont

$(1,05)^{20}$, $(1,05)^{19}$, $(1,05)^{18}\ldots$ $(1,05)^3$, $(1,05)^2$, $(1,05)$,

et forment une progression géométrique dont le premier terme est 1,05, le dernier $(1,05)^{20}$ et la raison $(1,05)$. D'après le problème précédent $(1,05)^{20} = 2,65$. La somme $\int$ de tous les termes de la progression sera exprimée par

$$\int = \frac{(1,05)(2,65) - (1,05)}{(1,05) - 1} = \frac{1,05 \times 1,65}{0,05} = 34,65.$$

On aurait, au bout de 20 années, en capital et intérêts composés 34 francs 65 centimes.

Pour une annuité différente de 1, il suffirait de multiplier 34,65 par l'annuité; et l'on aurait par ce moyen la somme à laquelle s'élève le capital total au bout de 20 années.

6). En désignant par x le rapport cherché, on doit avoir, d'après la formule $(1+x)^{10} = 1048576$.

Remplaçant successivement x par 1, 2, 3, 4..... on trouve

$(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$, donc x est plus grand que 1;

$(1+2)^{10} = 3^{10} = 59049$, donc x est plus grand que 2;

$(1+3)^{10} = 4^{10} = 1048576$, donc $x = 3$.

Le rapport cherché est donc 3.

Si le nombre d'années était un multiple des facteurs 2 et 3, on pourrait parvenir à déterminer x au moyen d'extractions successives de racines carrées et cubiques.

7). Il s'agit d'abord de trouver le premier terme d'une progression par quotient, dont la raison est 2, le nombre des termes 10 et le dernier 25,60. En désignant par x ce premier terme, on doit avoir, d'après la formule,

$$x \times 2^9 = 25,60,$$

d'où $$x = \frac{25,60}{2^9}.$$

Le calcul direct donne $2^9 = 512$, $\frac{25,60}{512} = 0,05$. Le premier pauvre a donc reçu 5 cent.

Maintenant, désignant la somme totale dépensée par $\int$, on doit avoir

$$\int = \frac{2 \times 25,60 - 0,05}{2-1} = 51,15.$$

La somme dépensée est donc 51 fr. 15 cent.

8). La question revient à trouver le nombre des termes d'une progression par quotient, dont le premier est 0,05, la raison 2 et la somme de tous les termes 204,75.

Désignant par x le dernier terme, on aura, d'après la formule de la somme,

$$204,75 = \frac{2 \times x - 0,05}{2-1} = 2x - 0,05,$$

d'où $2x = 204,80$ et $x = 102,40$.

Connaissant le dernier terme 102,40, il sera facile de déterminer le nombre des termes, car en désignant ce nombre des termes par y, on doit avoir

$$0,05 \times 2^{y-1} = 102,40,$$

d'où $$2^{y-1} = \frac{102,40}{0,05} = 2048.$$

Élevant 2 successivement aux puissances 2, 3, 4, 5, etc., on trouve

$$\begin{aligned}2^2 &= 4,\\ 2^3 &= 8,\\ 2^4 &= 16,\\ 2^5 &= 32,\\ 2^6 &= 64,\\ 2^7 &= 128,\\ 2^8 &= 256,\\ 2^9 &= 512,\\ 2^{10} &= 1024,\\ 2^{11} &= 2048;\end{aligned}$$

donc $y-1=11$, et par conséquent $y=11+1=12$.

Il y avait donc 2 pauvres de plus que dans le problème précédent.

9). On commencera par trouver le douzième terme de la progression par quotient, dont le premier terme est 50 et la raison 3, lequel terme est

$$x=50\times 3^{11}=8857350.$$

Ensuite, pour trouver la somme des 12 termes, dont le premier est 50, la raison 3 et le dernier terme 8857350, on a la formule

$$\int=\frac{3\times 8857350-50}{3-1}=13286000.$$

On peut parvenir directement au même résultat par un seul calcul, à l'aide de la formule suivante. En désignant par a le premier terme d'une progression,
par q la raison,
par l le dernier terme,
par n le nombre des termes,
par $\int$ la somme de tous les termes,
on a les deux formules $l=a\times q^{n-1}$,

$$\int=\frac{ql-a}{q-1}.$$

Si dans la seconde formule on remplace l par sa valeur donnée par la première, on a

$$\int=\frac{q\times aq^{n-1}-a}{q-1}=\frac{aq^n-a}{q-1},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\int=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

D'après l'énoncé $a=50$, $q=3$, $n=12$, on a donc

$$\int=\frac{50\times(3^{12}-1)}{2}.$$

Or, $3^{12}=531441$, et par suite

$$\int=\frac{50\times 531440}{2}=13286000.$$

La dette s'élève à 13286000 fr.

10). Il s'agit de déterminer le nombre des termes x d'une progression par quotient, dont on connaît le premier terme 400, la raison 3 et la somme de tous les termes 48400.

Pour cela on se servira de la formule du numéro précédent qui devient

$$48400=\frac{400(3^x-1)}{2}=200(3^x-1),$$

d'où l'on tire $\quad 3^x-1=\frac{48400}{200}=242$

et $\quad 3^x=242+1=243.$

En formant les puissances successives de 3, on trouve que la cinquième puissance $=243$; donc $x=5$.

Il faudra donc 5 payements.

11). On pourrait commencer par calculer le soixante-quatrième terme de la progression, et ensuite déterminer la somme de tous les termes. La formule du n° 9 donne directement le même résultat. Comme $a=1$ et $q=2$, en désignant la somme par $\int$, on aura $\int=2^{64}-1$. On trouve $2^{64}=18446744073709551616$, et par conséquent le nombre de grains de blé est environ 184467, suivi de 14 zéros. D'après l'énoncé, il faut diviser ce nombre par $25000\times100=2500000$, pour savoir combien il y a d'hectolitres, ce qui revient à diviser 184467, suivi de 9 zéros par 25, ou, à diviser par 100, le quadruple de 184467, suivi de 9 zéros. On trouve ainsi le nombre 737868, suivi de 7 zéros. En prenant le nombre exact pour dividende, le quotient est 737869762948 mètres cubes. Enfin, multipliant ce nombre par 20, on obtient pour la somme demandée le nombre 14757360000000.

L'inventeur du jeu des échecs ne demandait pas moins que 14757360 millions de francs.

Et si l'on prend le nombre exact,

$$737869762948\times20=14757395258960 \text{ fr.}$$

XXXIX.

Mesure des longueurs, des circonférences et des angles.

1). $25,5+32,4+48=105,9$. Le contour du triangle est de 105 mètres 9 décimètres.

2). $185+129=314$, $314\times2=628$. Il faut 628 mètres de cordes.

3). $1080+450=1530$; $1530\times2=3060$. Le contour du champ de Mars est de 3060 mètres. $3060\times2=6120$; le cheval a parcouru 6120 mètres en 3 minutes $\frac{1}{2}$, et par conséquent sa vitesse, ou, autrement dit, l'espace parcouru en 1 minute s'obtiendra en divisant 6120 par $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$:

$$6120:\frac{7}{2}=6120\times\frac{2}{7}=\frac{12240}{7}=1748,57\frac{1}{7}.$$

La vitesse du cheval est de 1748 mètres $\frac{1}{2}$ environ par minute.

4). Le contour de la place est de $10^m\times240=2400^m$, dont la moitié est 1200. Le plus petit côté n'étant, d'après l'énoncé, que le quart de cette longueur, aura donc 300 et le plus grand 900 mètres. Il y a donc 90 arbres sur le grand côté et 30 sur le petit.

5). Il suffit de prendre les $\frac{22}{7}$ de 2,45; autrement dit de multiplier ce nombre par 3 et d'ajouter au produit le septième de ce même nombre, ce qui donne 7 mètres 70 centimètres.

6). $17,60:\frac{22}{7}=17,60\times\frac{7}{22}=5,60$. Le diamètre du bassin est de 5 mètres 60 centimètres.

7). Le contour de l'Équateur est de

$$2\times6378000\times\frac{22}{7}=40090285 \text{ mètres environ.}$$

Le jour renferme $60\times60\times24=86400$ secondes; par conséquent la vitesse de rotation par seconde est de $\frac{40090285}{86400}=464$ mètres environ.

8). En supposant que la terre parcourt, dans son mouvement annuel autour du soleil, une circonférence d'un rayon de 34600000 lieues, le contour de cette circonférence serait $2.34600000\times\frac{22}{7}=217485714$ lieues environ. Divisant ce nombre par 31536000, nombre de secondes contenues dans 365 jours, on aura pour la vitesse moyenne de la terre $6\frac{3}{4}$ lieues environ.

D'après l'énoncé, le contour de la terre égale $25\times360=9000$ lieues; or, le contour de la terre, exprimé en mètres, est de 40000000 de mètres; d'où l'on conclut que la lieue vaut $\frac{40000000}{9000}=4444$ mètres environ; donc la vitesse cherchée est

$$4444\times6\frac{3}{4}=29997 \text{ mètres par seconde.}$$

9). D'après le problème 7, le contour de l'Équateur est de 40090285 mètres. Divisant ce nombre par 360, on aura pour la longueur d'un degré à l'Équateur 111361,9 environ; divisant ce nombre par 60, on obtient pour la longueur de la minute 1856,03 ; enfin divisant par 60, on a pour la longueur de la seconde de degré 30,934.

Multipliant le premier nombre par 16, le deuxième par 28 et le troisième par 45, et additionnant les trois produits, on trouve pour la distance demandée 1835 kilomètres environ.

XL.

Mesure des surfaces planes.

1). $2(5+4)\times 3,60 = 64,80$; $0,45\times 10 = 4,50$. La surface des quatre parois est de 64 mètres carrés 80 décimètres carrés; celle du rouleau, de 4 mètres carrés 50 décimètres carrés : $\frac{64,80}{4,50} = 14\frac{2}{5}$.

Il faudra donc 14 rouleaux et $\frac{2}{5}$.

2). La surface en mètres carrés est $\frac{1440\times 840}{2} = 604800$ mètres carrés $=$ 60 hectares 48 ares.

3). Le contour du triangle $= 25 + 30 + 45 = 100$ mètres et le demi-contour 50. Retranchant successivement de ce nombre les trois nombres 25, 30, 45 qui expriment les longueurs des côtés, on obtient pour restes 25, 20, 5. Effectuant le produit des quatre nombres 50, 25, 20, 5 et extrayant la racine carrée, on trouve 353 mètres carrés environ pour la surface du triangle.

Extrayant encore la racine carrée de 353, on a enfin 18,79 environ pour le côté du carré équivalent en surface au triangle donné.

4). La surface de la chaussée est de $360\times 4 = 1440$ mètres carrés $= 1440000000$ millimètres carrés. Divisant ce nombre par $240\times 240 = 57600$, surface de chaque pavé exprimée en millimètres carrés, on trouve 25000.

Il entre donc 25000 pavés dans la chaussée.

5). La surface du trapèze est de

$\left(\frac{420+350}{2}\right)\times 280 = 385\times 280 = 107800$ mètres carrés $=$ 10 hectares 78 ares. $22\frac{1}{4}\times 10,78 = 242,55$.

Le champ rapporte en moyenne 242 hectolitres 55 litres de blé.

6). La circonférence du cercle est de $3,50\times\frac{22}{7} = 11^{m}$.

La surface égale $11\times\frac{3,50}{4} = 11\times 0,875 = 9,6250$, c'est-à-dire 9 mètres carrés 62 décimètres carrés 50 centimètres carrés.

On arrive directement au même résultat par la seconde formule qui consiste à multiplier le carré du rayon 1,75 par le nombre $\frac{22}{7}$; en effet

$$1,75\times 1,75 = 3,0625\ ;\quad 3,0625\times\frac{22}{7} = 9,6250.$$

Le côté du carré $= \sqrt{9,6250} = 3,1024\ldots$ et par conséquent il est de 3 mètres 10 centimètres environ.

7). Le diamètre $= 44 : \frac{22}{7} = 44\times\frac{7}{22} = 14$.
$44\times\frac{14}{4} = 154$. La surface du terrain circulaire est de 154 mètres carrés.

8). Le rayon du cintre étant $\frac{2,10}{2} = 1,05$, la hauteur du rectangle de la porte est $5,60 - 1,05 = 4,55$; par conséquent la surface du rectangle égale

$$4,55\times 2,10 = 9,5550.$$

La surface du cintre, c'est-à-dire le demi-cercle de rayon 1,05 est de $(1,05)^2\times\frac{22}{7}\times\frac{1}{2} = 1,7325$.

Donc la surface entière $= 9,5550 + 1,7325 = 11,2875$.

Multipliant enfin $2^{fr},50$ par ce nombre, on trouve pour la valeur du bois de la porte 28 francs 22 centimes environ.

9). Pour obtenir la somme des surfaces des deux cercles donnés, il faudrait multiplier le carré de 3 par $\frac{22}{7}$, ensuite le carré de 4 par $\frac{22}{7}$, et additionner les deux résultats; la somme devrait être égale au produit du carré du rayon inconnu par $\frac{22}{7}$; d'où l'on voit que le carré du rayon inconnu x doit égaler la somme des carrés de 3 et de 4, c'est-à-dire que $x^2 = 9 + 16 = 25$. Par conséquent $x = \sqrt{25} = 5$.

Le cercle équivalent aux deux cercles donnés a 5 mètres de rayon.

10. D'après l'énoncé, la longueur du côté du carré est de $37 \times 15 = 555$ millimètres, et par conséquent la surface de ce carré, de $555 \times 555 = 308025$ millimètres carrés.

D'autre part, le nombre des pièces de 5 francs rangées en carré est de $15 \times 15 = 225$. En outre la surface de chaque pièce est de $\frac{1}{4}(37)^2 \times \frac{22}{7} = 1075\frac{9}{14}$ millimètres carrés; et la surface totale couverte par les 225 pièces, de $1075\frac{9}{14} \times 225 = 242019\frac{9}{14}$ millimètres carrés. Par conséquent l'espace vide est de

$$308025 - 242019\tfrac{9}{14} = 66005\tfrac{5}{14} \text{ millimètres carrés.}$$

XLI.

Mesure des surfaces extérieures des corps.

1). La surface d'un des trapèzes égale $(\frac{45+50}{2}) \times 3$ mètres carrés, et par conséquent les deux trapèzes opposés ont en surface $(45+50) \times 3 = 95 \times 3 = 285$ mètres carrés.

De même chaque triangle a $\frac{8 \times 3}{2}$ mètres carrés de surface, et par conséquent la surface des deux triangles opposés est de $8 \times 3 = 24$ mètres carrés.

Ce qui donne en tout pour la surface du toit

$$285 + 24 = 309^{m.c} = 3090000^{c.c}.$$

La surface de chaque ardoise rectangulaire est exprimée par $30 \times 22 = 660$ centimètres carrés. Le nombre des ardoises strictement nécessaires serait donc

$$\frac{3090000}{660} = 4682 \text{ environ,}$$

dont le tiers 1561, ajouté au nombre précédent, donne 6243 ardoises.

$$17{,}50 \times 6{,}243 = 109{,}25 \text{ environ.}$$

Le prix d'achat des ardoises est donc de $109^{fr},25$.

2). La surface externe de chaque caisse, qui a la forme

d'un parallélépipède, est égale au double de la somme des produits 2 à 2 de ses trois dimensions, c'est-à-dire

$$2(3 \times 2 + 3 \times 1{,}50 + 2 \times 1{,}50) = 2(6 + 4{,}50 + 3)$$
$$= 2 \times 13{,}50 = 27 \text{ mètres carrés.}$$

Il faudra donc pour les 20 caisses $27 \times 20 = 540$ mètres carrés.

$0{,}35 \times 540 = 189$. Le prix de la toile est de 189 fr.

3). Le contour de la base carrée de la pyramide étant de 10 mètres, chaque côté du carré est de $\frac{10}{4} = 2{,}50$ mètres et la surface de la base $= 2{,}50 \times 2{,}50 = 6{,}25$ mètres carrés. Les quatre triangles de la surface latérale donnent pour surface totale $\frac{25 \times 2{,}50}{2} \times 4 = 125$ mètres carrés.

La surface totale de la pyramide est par conséquent de $6{,}25 + 125 = 131{,}25$ mètres carrés.

Chaque feuille de cuivre a pour surface

$$3 \times 0{,}6 = 1{,}80 \text{ mètres carrés.}$$

Le nombre de feuilles sera donc $\frac{131{,}25}{1{,}80} = 73$ environ.

4). La feuille de plomb a

$$2{,}80 \times 1{,}50 = 4^{m.c},20 = 4200000^{mil.c} \text{ de surface.}$$

Le diamètre du tuyau étant de 460 millimètres, la circonférence de la section circulaire aura $460 \times \frac{22}{7}$ millimètres, et la surface du tuyau

$$460 \times \tfrac{22}{7} \times 143000 = \tfrac{1447160000}{7} \text{ millimètres carrés.}$$

Le nombre de feuilles nécessaire pour couvrir la surface du tuyau sera $\frac{144716}{7 \times 420} = 49\frac{164}{735}$ environ.

5). La circonférence de la colonne est de

$$2 \times 28 \times \tfrac{22}{7} = 176 \text{ centimètres;}$$

$\frac{132000}{176} = 750$; la hauteur de la colonne est de $7^m,50$.

6). La surface extérieure du cône sera exprimée par

$$2 \times 2{,}3 \times \tfrac{22}{7} \times 5{,}8 \times \tfrac{1}{2} = 2{,}3 \times 5{,}8 \times \tfrac{22}{7} = 41{,}92\tfrac{4}{7}.$$

Elle a par conséquent 41 décimètres carrés 92 centimètres carrés et $\frac{4}{7}$ de centimètre carré.

7). La base inférieure du seau a pour circonférence........................ $8\times\frac{22}{7}$
La base supérieure................. $6\times\frac{22}{7}$
Somme des deux circonférences....... $14\times\frac{22}{7}=44$.

La surface du seau sera donc $\frac{44\times3}{2}=66$ décimètres carrés.

8). Un grand cercle de cette sphère aurait pour surface $(\frac{2,50}{2})^2\times\frac{22}{7}=(2,50)^2\times\frac{22}{7}\times\frac{1}{4}$, et par conséquent la surface de la sphère égale à 4 fois celle d'un grand cercle, sera $(2,50)^2\times\frac{22}{7}=19,6428\,\frac{4}{7}$ mètres carrés.

9). Le méridien terrestre étant de 4000 myriamètres, le diamètre de la terre est $4000:\frac{22}{7}=4000\times\frac{7}{22}$, et la moitié du rayon $1000\times\frac{7}{22}$.

La surface du méridien, considéré comme un grand cercle, serait par conséquent $4000\times1000\times\frac{7}{22}$ myriamètres carrés.

Et par suite la surface terrestre serait de

$$4000\times1000\times\frac{7}{22}\times4=(4000)^2\times\frac{7}{22}=5090909\,\frac{1}{11}\,^{\text{myr.car}}.$$

10). La surface de la sphère qui aurait pour rayon le rayon polaire, serait exprimée par $4\,.\,\frac{22}{7}\,.\,(6356740)^2$.

La surface de la sphère qui aurait pour rayon le rayon équatorial, serait exprimée par $4\,.\,\frac{22}{7}\,.\,(6378000)^2$; il faudrait donc ajouter ces deux résultats et en prendre la moitié, ce qui se réduit à faire la somme des carrés des deux rayons, à multiplier le résultat par $\frac{22}{7}$ et à multiplier encore le produit par 2.

$$(6356740)^2+(6378000)^2=81087027427600^{\text{mèt.car}}.$$

Multipliant ce nombre par $\frac{44}{7}$, on obtient

$$509689886687771\,\frac{3}{7}\text{ mètres carrés},$$

ou en myriamètres carrés $5096898\,\frac{4}{5}$ environ, surface plus grande que celle qui a été trouvée dans le numéro précédent, ainsi que cela devait être.

XLII.

Mesure des volumes.

1). Le volume de la grande boîte est de $5\times4\times3=60$ décimètres cubes $=60000$ centimètres cubes.

Le volume de la petite boîte est de $10\times8\times6=480$ centimètres cubes.

La première contient donc $\frac{60000}{480}=125$ petites boîtes.

2). La capacité de la caisse est de $1,80\times1,50\times0,90=2$ mètres cubes 430 décimètres cubes $=2430$ décimètres cubes; et comme le décimètre cube d'eau distillée pèse 1 kilogramme, le poids de l'eau contenue dans la caisse est de 2430 kilogrammes.

3). x étant la hauteur et le diamètre du litre, la surface de la base sera $\frac{1}{4}\,.\,\frac{22}{7}\,x^2=\frac{11}{14}\,x^2$.

Et le volume intérieur sera représenté par

$$\frac{11}{14}\,x^2\times x=\frac{11}{14}\,x^3.$$

Mais le volume du litre $=1$ décimètre cube $=1000000$ millimètres cubes.

On a donc $x^3=1000000:\frac{11}{14}=\frac{14000000}{11}=1272727$.

Extrayant la racine cubique de ce nombre, on aura $x=108$ millimètres environ. C'est la hauteur et le diamètre du litre.

4). Le diamètre de la base du cylindre sera $3\times\frac{7}{22}=\frac{21}{22}$ et la moitié du rayon $\frac{21}{88}$, par conséquent la surface de la base sera $3\times\frac{21}{88}=\frac{63}{88}$.

Les $\frac{3}{4}$ de $5=\frac{15}{4}$; le volume de l'eau renfermée dans le cylindre sera donc $\frac{63}{88}\times\frac{15}{4}=\frac{945}{352}$ mètres cubes $=\frac{945000}{352}$ décimètres cubes $=2684$ litres 659 millilitres environ.

Le poids de l'eau est donc de 2684 kilogrammes 659 grammes.

5). La surface de la base du cylindre sera $\frac{22}{7}\times7^2=154$ centimètres carrés.

Les $\frac{3}{8}$ d'un litre $= 1000 \times \frac{3}{8}$ centimètres cubes $= 375$ centimètres cubes.

Pour trouver la hauteur de l'eau avant l'immersion des objets, il faut diviser 375 par 154, ce qui donne 2 centimètres 435.

Après l'immersion, l'eau s'est élevée à la hauteur de $2,435 + 1,5 = 3,935$.

Quant au volume des objets, il sera exprimé par $154 \times 1,5 = 231$ centimètres cubes.

6). La surface extérieure d'un cylindre non fermé, d'un diamètre égal à sa hauteur, de 5 mètres, par exemple, serait égale à $\frac{22}{7}.(5)^2$.

Celle d'une sphère de même diamètre serait aussi représentée par $\frac{22}{7}.(5)^2$.

Par conséquent la sphère et le cylindre de même dimension ont aussi la même surface.

Si à la surface extérieure du cylindre on ajoute la surface des deux cercles qui le ferment, on aura pour l'expression de la surface totale $\frac{22}{7}(5)^2 + \frac{1}{2}.\frac{22}{7}(5)^2 = \frac{3}{2}.\frac{22}{7}(5)^2$.

La surface du cylindre fermé est à la surface de la sphère de même dimension dans le rapport de 3 à 2.

Quant au volume du cylindre de diamètre 5, par exemple, et de même hauteur, il serait exprimé par $\frac{1}{4}.\frac{22}{7}(5)^3$, et celui de la sphère de même dimension par $\frac{1}{6}.\frac{22}{7}(5)^3$; par conséquent le volume du cylindre est au volume de la sphère de même dimension dans le rapport de 6 à 4 ou de 3 à 2, le même rapport que précédemment.

7). Le volume de la pyramide sera exprimé par

$$\frac{3^2 \times 10}{3} = 3 \times 10 = 30 \text{ mètres cubes.}$$

Si l'on divisait 30, volume du cône, par la surface du cercle de base qui est $\frac{22}{7}.(2,10)^2 = 13,86$, on aurait pour quotient le $\frac{1}{3}$ de la hauteur du cône; par conséquent en prenant pour diviseur le $\frac{1}{3}$ de $13,86 = 4,62$, on obtiendra pour quotient la véritable hauteur demandée $\frac{30}{4,62} = 6,50$ en forçant le dernier chiffre.

La hauteur du cône est de 6 mètres 50 centimètres environ.

8). Le volume de la sphère sera exprimé par $\frac{4}{3}.\frac{22}{7}.5^3 = 523$ mètres cubes 809 décimètres cubes à moins de 1 décimètre cube près.

Le rapport de la circonférence au diamètre $\frac{22}{7}$ réduit en décimales, donne 3,1428...., par conséquent plus grand que la valeur réelle de π qui est 3,1415926.... Si l'on se borne au quatrième chiffre décimal, il suffit de prendre dans la pratique 3,1416; d'après cette valeur le volume de la sphère sera $\frac{4}{3} \times 3,1416 \times 5^3 = 523,600$. Le nombre 3,1416 étant divisible par 3 et par 4, le calcul peut être simplifié dans un grand nombre de cas.

9). Le diamètre étant représenté par x, on a, d'après la formule du volume de la sphère, $\frac{\pi x^3}{6} = 480$;

et par conséquent

$$x^3 = \frac{480 \times 6}{3,1416} = \frac{480}{0,5236} = \frac{120}{0,1309} = 916,730....,$$

dont la racine cubique est 9,7.

Le diamètre de la sphère est de 9 mètres 7 décimètres à moins d'un décimètre près.

10). Le volume étant 168, le diamètre sera $\sqrt[3]{\frac{168 \times 6}{\pi}}$.

Effectuant les calculs indiqués en remplaçant π par $\frac{22}{7}$, on trouve pour le diamètre de la sphère $6^m,845$.

La surface de la sphère étant $\pi \times$ le carré du diamètre, on aura pour le carré du diamètre 46,8540. Et multipliant ce nombre par π, on obtient 147,2390.

La surface de la sphère est de 147 mètres carrés, 23 décimètres carrés, 90 centimètres carrés.

11). Le diamètre sera exprimé par $\sqrt[2]{\frac{28}{\pi}} = \sqrt[2]{28 \times \frac{7}{22}}$;

et après avoir effectué les calculs, on obtient 2,98.

Le volume de la sphère étant exprimé par $\frac{\pi}{6}\times$ cube du diamètre, on calculera $\frac{22}{7\times 6}\times(2,98)^3$; ce qui donne 13,920.

Le volume est donc de 13 mètres cubes 920 décimètres cubes environ.

12). Le volume de la sphère de 3 mètres de rayon ou de 6 mètres de diamètre serait exprimé par $\frac{\pi\times 6^3}{6}=\pi\times 6^2$.

Le côté du cube équivalent sera par conséquent $\sqrt[3]{\pi\times 6^2}$.

Effectuant les calculs indiqués, on trouve

$$\sqrt[3]{36\times \tfrac{22}{7}}=4,836.$$

Le côté du cube équivalent est de 4 mètres 836 millimètres à peu près.

XLIII.

Évaluation du poids des corps par leur volume, et leur poids spécifique.

1). Le volume de la planche sera $3\times 0,4\times 0,05=60$ décimètres cubes; $60\times 0,8520=51,12$. Le poids de la planche est de 51 kilogrammes 12 décagrammes.

2). Le volume de chaque barre est

$$0,08\times 0,08\times 2,25=14,400 \text{ décimètres cubes;}$$

et son poids $7,788\times 14,400=112$ kilogr. 147 gram. à peu près.

La charge de la voiture sera donc

$112,147\times 20=2242$ kilogram. 94 décagram. environ.

3). Le diamètre de base étant de 3 centimètres, la surface de sa base sera $\pi.3^2$ et le volume de chaque pain de sucre $\pi\times 3^2\times \frac{45}{3}=\pi.9\times 15$ centimètres cubes $=3,1416\times 9\times 15=424,116$ centimètres cubes; les 150 pains pèseront donc

$424,116\times 150\times 1,358=86392$ grammes 43 centigr. environ.

4). La pression éprouvée par le corps humain est exprimée par $350\times 7,6\times 13,598=36170$ kilogrammes 680 grammes.

Pour 1 centimètre de variation de la colonne barométrique, la pression varie de $350\times 13,598\times 0,1=475$ kilogrammes 930 grammes, et ainsi proportionnellement.

5). Le diamètre de la boule étant de 21 centimètres, le volume sera

$$\pi.\frac{(21)^3}{6}=\frac{22}{7}.\frac{21\times 21\times 21}{6}=11.21.21=4851 \text{ centimètres cubes.}$$

Le poids absolu est $4851\times 7,207=34961,157$ gram. Retranchant de ce nombre 4851 grammes, poids du volume d'eau déplacé, le poids de la boule dans l'eau est de 30 kilogrammes 110 grammes à moins d'un gramme près.

6). Le diamètre de la boule d'argent étant de 7 centimètres, le volume de la boule sera

$$\frac{22}{7}.\frac{(7)^3}{6}=\frac{22\times 49}{6}=\frac{11\times 49}{3}=179,666,$$

et son poids $179,666\times 10,473=1881,8755838$.

Le poids de la boule d'or étant le même, si on divise ce nombre par le poids spécifique de l'or, 19,3617, on trouve pour le volume de la boule d'or 97,195 centimètres cubes.

Le diamètre de la boule d'or sera donc

$$\sqrt[3]{\frac{97,195\times 6}{\pi}}=57 \text{ millimètres environ.}$$

7). Le rayon de la tringle étant 1,4 la surface de la section circulaire sera $\frac{22}{7}\times(1,4)^2=6,16$ centimètres carrés; le volume de la tringle $=6,16\times 300=1848$ centimètres cubes; et le poids de la tringle

$1848\times 7,207=13$ kilogrammes 318 grammes environ.

Divisant 400 par 13,318, on trouve pour résultat 30. On pourrait donc faire environ 30 tringles de fer.

8). Le volume de la barre est de
$135 \times 48 \times 30 = 194400$ millimètres cubes ; et son poids $194,400 \times 10,4743 = 2036,20392$ grammes.

Or, 5 grammes d'argent monnayé, au titre de 0,9, valant 1 franc, 4,5 d'argent pur valent 1 franc.

Divisant le nombre précédent par 4,5, on a pour la valeur de la barre 452 francs 48 centimes à peu près.

Si la barre était d'argent au titre de 0,9, il suffirait de diviser par 5, ce qui donne 407,24; elle vaudrait 407 francs 24 centimes environ.

9). Le volume intérieur de la chambre est
$5 \times 3 \times 4 = 60$ mètres cubes $= 60000$ décimètres cubes.

$60000 \times 0,0013 = 78$. Le poids de l'air renfermé dans la chambre est de 78 kilogrammes.

10). Le volume de la boule sera

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{(4,2)^3}{6} = 2,2 \times (4,2)^2 = 38,808 \text{ centimètres cubes.}$$

Le poids $38,808 \times 19,3617 = 751^{gr},389$ environ.

L'or monnayé vaut 15 fois $\frac{1}{2}$ l'argent monnayé. Par conséquent 1 gramme d'argent valant $\frac{1}{5}^{fr} = 20^c$, 1 gramme d'or vaudra $20^c \times 15\frac{1}{2} = 3^{fr}\,10^c$; par conséquent la boule d'or vaudra $3,10 \times 751,339 = 2329,30$.

La boule d'or vaudrait 2329 fr. 30 c. environ.

11). Le poids de la boule est 1000×5 grammes et son volume $\frac{1000 \times 5}{10,4743}$.

Le diamètre sera donc exprimé par

$$\sqrt[3]{\frac{1000 \times 5 \times 6}{10,4743 \times \pi}} = \sqrt[3]{\frac{1000 \times 5 \times 6 \times 7}{10,4743 \times 22}} = \sqrt[3]{\frac{210000}{230,4346}}$$
$$= \sqrt[3]{954,892} = 9,7 \text{ environ.}$$

Le diamètre de la boule est donc de 9 centimètres et 7 millimètres environ.

XLIV.

Problèmes de récapitulation générale.

1). Puisque 35 kilog. coûtent 42 fr., 1 kilog. vaut $\frac{42}{35} = \frac{6}{5}$ de franc; donc 23 kilog. valent $\frac{6}{5} \times 23 = \frac{138}{5} = 27$ fr. 60 c.

Les nombres de kilog. étant en rapport direct avec les prix, on peut écrire la proportion

$$35 : 23 :: 42 : x = \frac{42 \times 23}{35} = 27,60.$$

2). 34 mètres d'étoffe sont faits en 8 heures.

1	$\frac{8}{34}$
238	$\frac{8 \times 238}{34} = 56.$

On voit, du reste, que $238 = 34 \times 7$; le nombre d'heures doit donc être $8 \times 7 = 56$.

3). 29 ouvriers ont fait l'ouvrage en 18 jours.

1	18×29
87	$\frac{18 \times 29}{87} = 6.$

Le nombre des jours étant en rapport inverse du nombre des ouvriers, on aura la proportion

$$87 : 29 :: 18 : x = \frac{29 \times 18}{87} = 6.$$

4). 250 litres ont coûté 80 fr.

1	$\frac{80}{250} = \frac{8}{25}$
300	$\frac{8 \times 300}{25} = 8 \times 12 = 96.$

On a, par la proportion,

$$250 : 300 :: 80 : x,$$

ou $$5 : 6 :: 80 : x = \frac{80 \times 6}{5} = 96.$$

5). 2 douzaines de chemises ont coûté 45 fr.

1	$\frac{45}{2}$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{45 \times 5\frac{1}{2}}{2} = 123,75.$

Les $5\frac{1}{2}$ douzaines ont coûté 123 fr. 75 c.

La proportion $2 : 5\frac{1}{2} :: 45 : x$ donne la même valeur

$$x = \frac{45 \times 5\frac{1}{2}}{2} = 123,75.$$

6). 120 litres de blé valent 18 fr.

1	$\frac{18}{120}$
160	$\frac{18\times160}{120}=24.$

On a la proportion $120:160::18:x=24$.

7). 36 mètres cubes d'eau sont vidés en 126 minutes.

1	$\frac{126}{36}=\frac{7}{2}$
2140	$\frac{7\times2140}{2}=7490$

Et divisant par 60, $\frac{7490}{60}=124$ heures 50 minutes.

La proportion $36:2140::126:x$ donne la même valeur $x=7490$.

8). Quand la toile a $\frac{3}{4}$ de large il faut 3 mètres.

$\frac{1}{4}$	3×3
$\frac{1}{8}$	$3\times3\times2$
$\frac{7}{8}$	$\frac{3\times3\times2}{7}=2\frac{4}{7}$,

la proportion donne

$$\tfrac{7}{8}:\tfrac{3}{4}::3:x=\tfrac{9}{4}\times\tfrac{8}{7}=\tfrac{18}{7}=2\tfrac{4}{7},$$

il faudra donc 2 mètres $\frac{4}{7}$ de toile.

9). Puisque plus le papier est large, moins il en faut de longueur, on a la proportion $50:64::16:x$,

$$x=\frac{16\times64}{50}=20\tfrac{12}{25},$$

il faudra environ 20 rouleaux $\frac{1}{2}$ à peu près.

10). $18:12\frac{1}{2}::135:x$, $x=93{,}75$; l'ouvrier recevra 93 fr. 75 c.

	Ouvriers.		Jours.	Mètres.
11).	18	en	15	ont fait 60
	1		15	$\frac{60}{18}$
	1		1	$\frac{60}{18\times15}$
	1		20	$\frac{60\times20}{18\times15}$
	30		20	$\frac{60\times20\times30}{18\times15}=\frac{60\times20\times2}{18}=\frac{10\times20\times2}{3}=133\frac{1}{3}$.

Si les deux troupes d'ouvriers travaillaient le même

nombre de jours 15, le travail fait par la deuxième troupe serait donné par la proportion

$$18:30::60:x,$$

et à cause de la différence du nombre des jours de travail on a

$$15:20::x:x'.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, on a

$$18\times15:30\times20::60:x',$$

d'où $x'=\frac{60\times30\times20}{18\times15}=133\frac{1}{3}$.

On peut enfin résoudre le problème par une seule proportion en considérant que 18 ouvriers en 15 jours font autant que 18×15 ouvriers en 1 jour, et que 30 ouvriers en 20 jours font autant que 30×20 en 1 jour, ce qui donne la seule proportion

$$18\times15:30\times20::60:x=\frac{60\times30\times20}{18\times15}=133\tfrac{1}{3}.$$

	Ouvriers.		Jours.	Heures.	Mètres.
12).	5	en	10	travaillant 12	par jour ont fait 300
	1		10	12	$\frac{300}{5}$
	1		1	12	$\frac{300}{5\times10}$
	1		1	1	$\frac{300}{5\times10\times12}$
	1		1	10	$\frac{300\times10}{5\times10\times12}$
	1		6	10	$\frac{300\times10\times6}{5\times10\times12}$
	8		6	10	$\frac{300\times10\times6\times8}{5\times10\times12}$

$$=30\times8=240.$$

Ils feront donc 240 mètres.

On peut résoudre le problème à l'aide des proportions

$$\begin{array}{l} 5\ :\ 8::300:x \\ 12:10::x\ :x' \\ 10:\ 6::x'\ :x'' \\ \hline 5\times12\times10:8\times10\times6::300:x'', \end{array}$$

$$x''=\frac{300\times8\times10\times6}{5\times12\times10}=240.$$

Enfin, comme 5 ouvriers en 10 jours à 12 heures par jour, et 8 ouvriers en 6 jours à 10 heures par jour, font autant que $5 \times 10 \times 12$ et $8 \times 6 \times 10$, travaillant 1 heure, on a la seule proportion

$$5 \times 10 \times 12 : 8 \times 6 \times 10 :: 300 : x,$$

d'où $$x = 240.$$

13). 6 chevaux pendant 4 jours et 20 chevaux pendant 10 jours consomment autant que $6 \times 4 = 24$ et $20 \times 10 = 200$ chevaux par jour, ce qui fournit la proportion

$$24 : 200 :: 180 : x = \frac{180 \times 200}{24} = 1500.$$

Il faudra donc 1500 kilogrammes de foin.

14). On aura la proportion

$$120 \times 90 : 340 \times 80 :: 450 : x,$$

$$x = \frac{340 \times 80 \times 450}{120 \times 90} = \frac{34 \times 8 \times 450}{12 \times 9} = \frac{34 \times 2 \times 50}{3} = 1133\tfrac{1}{3};$$

on payera 1133 fr. 33 c. environ.

	Ouvriers.		Jours.		Ouvriers.	
15).	20	en	8	font autant que	20×8	en 1 jour.
	24		x		$24 \times x$	en 1

Un fossé de 160 mètres de long, 2 de large et 1,2 de profondeur représente $160 \times 2 \times 1{,}2$ mètres cubes.

Un autre fossé de 90 mètres de long, 1,8 de large et 1,6 de profondeur, représente $90 \times 1{,}8 \times 1{,}6$ mètres cubes.

On aura donc, par une seule proportion,

$$160 \times 2 \times 1{,}2 : 90 \times 1{,}8 \times 1{,}6 :: 20 \times 8 : 24 \times x,$$

d'où $$24 \times x = \frac{90 \times 1{,}8 \times 1{,}6 \times 20 \times 8}{160 \times 2 \times 1{,}2} = 9 \times 6 \times 2 = 108;$$

donc $$x = \frac{108}{24} = 4\tfrac{1}{2}.$$

Il faudra 4 jours $\frac{1}{2}$ à la seconde troupe d'ouvriers.

16). On a la proportion

$$360 : 160 :: 20 \times 6 \times 12 : 15 \times 10 \times x,$$

d'où $x = \frac{160 \times 20 \times 6 \times 12}{360 \times 15 \times 10} = \frac{16 \times 2 \times 6 \times 12}{36 \times 15} = \frac{16 \times 2 \times 2}{15} = \frac{64}{15} = 4\frac{4}{15}$.

Il faudra donc 4 jours et $\frac{4}{15}$.

17). En 1 jour les 4 voyageurs ont dépensé $\frac{45}{3} = 15$ fr.
en 1   1 $\frac{15}{4} = 3{,}75$
donc en 1 $4 + 3 = 7$ $3{,}75 \times 7 = 26{,}25$,

par conséquent autant de fois 262,50 contient 26,25, autant les 7 voyageurs sont restés de jours ensemble; ils sont donc restés $\frac{262{,}50}{26{,}25} = 10$ jours.

18). $$40 \times 10 \times 12 : 25 \times 6 \times x :: 1600 : 550,$$

d'où $$x = \frac{550 \times 40 \times 10 \times 12}{1600 \times 25 \times 6} = \frac{550 \times 4 \times 2}{16 \times 25} = 11.$$

Les 25 ouvriers travaillent 11 heures par jour.

19). Le nombre de kilogrammes étant en raison directe de la surface, on a la proportion

$$34 : 108{,}80 :: 25 \times 0{,}60 : 0{,}80 \times x,$$

d'où $$x = \frac{108{,}80 \times 25 \times 0{,}60}{34 \times 0{,}80} = 60.$$

On pourrait faire 60 mètres de tissu.

20). $6 \times 39 : 9 \times 45 :: 780 : x$, $\quad x = \frac{9 \times 45 \times 780}{6 \times 39} = 1350$.
L'entretien coûterait 1350 fr.

21). L'achat des 5 pièces coûte 45×5.	225^{fr}
Frais de transport.	25
Droit d'entrée $18{,}50 \times 2\frac{1}{2} \times 5$.	231 25
Les $2\frac{1}{2} \times 5 = 12\frac{1}{2}$ hectolitres coûtent donc. .	$481^{fr}25^{c}$

L'hectolitre revient à $\frac{481{,}25}{12{,}50} = 38^{fr}50^{c}$;

et par conséquent le litre revient à 0,38 c. $\frac{1}{2}$.

22). Poids du vin $940 \times 250 = 235000^{grammes} = 235^{kil}$	
Poids du fût.	$= 17^{kil},45$
Poids total de la pièce.	$252^{kil},45$

23). $35 : 31{,}50 :: 2\frac{1}{2} : x$, $\quad x = \dfrac{31{,}50 \times 2\frac{1}{2}}{35} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{2} = 2\frac{1}{4}$

L'ouvrier mettra 2 jours $\frac{1}{4}$.

24). 1 fr. en un an rapporte $\frac{7}{100}$

8400	$7 \times 84 = 588$
et en $4\frac{1}{2}$	$588 \times 4\frac{1}{2} = 2646.$

L'intérêt est de 2646 fr.

25). Les 25 pour 100 de 100 fr. = 25 fr.
Le marchand vendra donc les 250 litres $100+25=125$ fr. et par conséquent le litre revient à $\frac{125}{250} = \frac{1}{2} = 0{,}50$. Le marchand doit vendre 50 c. le litre.

26). 100 fr. au bout de $3\frac{1}{2}$ rapportent 14 fr.;

donc, puisque 114 fr. proviennent de	100
1	$\frac{100}{114}$
6840	$\frac{100 \times 6840}{114} = 6000^{fr.}$

27). 100 kilogrammes à 80 c. donnent 80 fr.

Sur 90 fr. il perd donc	10 fr.
Sur 1 fr.	$\frac{10}{90}$
Sur 100	$\frac{10 \times 100}{90} = 11\frac{1}{9}.$

Il perd donc $11\frac{1}{9}$ pour 100.

28). L'intérêt est donc $614400 - 500000 = 114400$ après 5 ans $\frac{1}{3}$, et par conséquent pour 1 an l'intérêt est

$$\frac{114400}{5\frac{1}{3}} = \frac{114400}{\left(\frac{16}{3}\right)} = \frac{114400 \times 3}{16} = 21450.$$

Si donc, 500000 rapportent	21450
100	$\frac{21450}{5000} = 4{,}29,$

le taux est de $4\frac{29}{100}$ pour 100.

29). Prix d'achat des 100 kilogrammes 113 fr.

$\frac{1}{2}$ pour 100, frais de courtage.	$0{,}56\frac{1}{2}$
10 pour 100 de gain réservé.	11,30
Prix total pour l'acheteur.	$124{,}86\frac{1}{2}$

Le kilogramme revient donc au détail à 1 fr. 25 c. environ.

30). D'après l'énoncé, une valeur de 100 fr. avec la commission et le bénéfice deviendrait 107,50

Si donc, 107,50 proviennent de	100 fr.
1 proviendrait de	$\frac{100}{107{,}50}$
161,25	$\frac{100 \times 161{,}25}{107{,}50} = 150.$

Le marchand avait payé 150 fr. les 100 kilogrammes.

31). Au cours de 84,10 les 3000 fr. de rente 3 pour 100 coûtent 84100 fr.

Si la rente baisse de 25 cent., et que par conséquent le cours descende à $84{,}10 - 0{,}25 = 83{,}85$, les 3000 fr. de rente ne coûtent plus que 83850 fr.

La perte de l'agent de change serait donc

$$84100 - 83850 = 250 \text{ fr.}$$

32).

1000 fr. produisent	125
100	12,50

On a placé son argent à $12\frac{1}{2}$ pour 100.

33). 1250 ne représentent que 1000 fr., et par conséquent 50 fr. de rente au taux ordinaire 5 pour 100; donc 5 fr. de rente coûtent $\frac{1250}{10} = 125$ fr.; tandis qu'au cours de la rente 5 pour 100, 5 fr. de rente ne coûtent que 122,20 fr.

Il vaut donc mieux acheter des rentes à ce cours que de prendre des actions au prix indiqué.

On peut encore dire 1250^{fr} ne représentent que 1000 fr.,

et par conséquent	1	$\frac{1000}{1250}$
de même	122,20	100
	1	$\frac{100}{122{,}20}.$

La seconde fraction ayant un moindre dénominateur est plus grande que la première; donc, etc.

34). $5 : 15700 :: 100 : x \quad x = 314000$

Le capital est de 314000 fr.

35). Au cours de 121,40, 17500 fr. de rente 5 pour 100 valent $\frac{17500\times121,40}{5}=424900^{fr}$.

Au cours de 83,50, 8000 fr. de rente 3 pour 100 valent $\frac{8000\times83,50}{3}=222666^{fr},66$

$$\begin{array}{rr} \text{Total. . . . .} & 647566^{fr},66 \\ & 500000 \\ \hline & 147566^{fr},66 \end{array}$$

Il reste disponible une somme de 147566 fr. 66 c. environ.

36). Si 5 fr. de rente coûtent 121,60

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{coûtera} & \frac{121,60}{5}=24,32 \\ 4\frac{1}{2} & \text{coûteront} & 24,32\times4\frac{1}{2}=109,44 \\ 4 & & 24,32\times4\ =\ 97,28 \\ 3 & & 24,32\times3\ =\ 72,96 \end{array}$$

Les cours correspondants du $4\frac{1}{2}$, 4 et 3 pour 100 sont 109,44; 97,28; 72,96.

On aurait pu déterminer les mêmes cours à l'aide des proportions suivantes :

$$5:4\tfrac{1}{2}::121,60:x=109,44$$
$$5:4\ ::121,60:x=\ 97,28$$
$$5:3\ ::121,60:x=\ 72,96$$

Car les cours des rentes sont proportionnels aux taux.

37). La hausse ou la baisse des rentes est proportionnelle aux cours ou au taux; par conséquent la baisse du 3 pour 100 sera les $\frac{3}{5}$ de la baisse du 5 pour 100.

Or, $80\times\frac{3}{5}=48$

La baisse correspondante du 3 pour 100 sera de 48 c.

38). La part de la 1re étant représentée par 1

$$\begin{array}{lr} \text{de la } 2^{me} \text{ sera} & 3 \\ \text{de la } 3^{me} & 1+3=4 \\ \hline & 8 \end{array}$$

6400 fr. représentent donc 8 fois la part de la première qui sera par conséquent $\frac{6400}{8} = 800$

$$\begin{array}{lr} \text{celle de la deuxième} & 800\times\ 3=2400 \\ \text{de la troisième} & 2400+800=3200 \\ \hline \text{Total égal. . . . .} & 6400 \end{array}$$

On peut dire comme si le nombre à partager était $1+3+4=8$, la part de la première serait 1.

Si le nombre à partager était 1, la part de la première serait $\frac{1}{8}$.

Le nombre à partager étant 6400, la part de la première sera $\frac{1}{8}\times6400=800$, et ainsi des autres parts.

39). 1° Escompte en dehors.

L'escompte de 1500 est de $1500-1200=300$ fr. pour 3 ans et par conséquent de $\frac{300}{3}=100$ pour 1 an.

Si 1500 fr. donnent 100 fr. d'escompte,
100 fr. $\frac{100}{15}=6\frac{2}{3}$.

L'escompte est à $6\frac{2}{3}$ pour 100 par an.

2° Escompte en dedans.

Si 1200 fr. donnent 100 fr. d'escompte.
100 fr. $\frac{100}{12}=8\frac{1}{3}$.

L'escompte est à $8\frac{1}{3}$ pour 100 par an.

40). 1° Escompte en dedans.

Si 106 fr. sont réduits par l'escompte à 100 fr.
1 fr. $\frac{100}{106}$
2560 $\frac{100\times2560}{106}=2415,10$ environ.

Et l'escompte par an aurait été de

$$2560-2415,10=144,90.$$

L'escompte est réellement de $2560-2500=60$. Par conséquent, le nombre de jours d'échéance sera $\frac{60\times365}{144,90}=151$ jours environ.

2° Escompte en dehors.

Si 100 fr. donnent 6 fr. d'escompte par an,

1	$\frac{6}{100}$
2560	$\frac{6\times2560}{100}=153,60.$

Le nombre de jours d'échéance sera donc $\frac{60\times365}{153,60}=142$ environ.

41). Du 10 février au 15 septembre il y a 217 jours.
Du 10 février au 15 mars 33 jours.

Il faut donc que la somme totale de 3600 augmentée de son intérêt pendant 217 jours soit égale à la somme de 1500 fr. payée en à-compte augmentée de son intérêt pendant 33 jours, plus la somme restante de 2100 augmentée de son intérêt pendant le nombre de jours cherché, ou, ce qui revient au même, que l'intérêt de la première somme soit égal à la somme des intérêts des deux autres.

Sommes.	Nombres de jours.	Total.
3600	217	781200
1500	33	49500
	Reste.	731700

Divisant 731700 par 2100 on trouve 348 environ, il pourra garder le restant de la somme 348 jours environ, ce qui remet l'échéance au 9 janvier suivant.

42).

	Montants des billets.	Nombres de jours.	Totaux.
	2500	54	135000
	1800	161	289800
	1500	248	372000
	3000	334	1002000
Somme des montants	8800	Somme totale	1798800.

Divisant la somme totale 1798800 par la somme des montants 8800, on trouve 204 environ, l'échéance commune est donc à 204 jours, ce qui la remet au 7 août de la même année.

43). 94 barriques à 57 fr. valent 5358 fr.; sur laquelle somme il faut prélever $18\frac{1}{2}$ pour 100, qui font 991 fr. 23 c. Le marchand payera donc comptant

$$5358-991,23=4366 \text{ fr. } 77 \text{ c.}$$

44). Puisque 5 fr. de rente valent 121,50, 5000 fr. valent $121,50\times1000=121500$. On les revend

$$121500+350=121850 \text{ fr.}.$$

Par conséquent 5 fr. de rente valent $\frac{121850}{1000}=121,85$. La rente était remontée de $121,85-121,50=0,35$ c.

45).

Montants des billets.	Nombres de mois.	Totaux.
800	3	2400
900	6	5400
1000	9	9000
Somme. . . 2700		16800

$$\frac{16800}{2700}=6\tfrac{2}{9}.$$

L'échéance sera donc à 6 mois $\frac{2}{9}$.

46). La plus petite part sera $\frac{36}{4} = 9$
La plus grande $9\times3=27$
Somme égale . . . . 36.

47). Il s'agit de partager 48 en 3 parties qui soient entre elles comme les nombres 7, 6, 5, dont la somme égale 18.

Si la somme à partager était 18, le premier ouvrier aurait 7 fr.

La somme étant 1, sa part serait $\frac{7}{18}$
48 sera $\frac{7\times48}{18}=18^{\text{fr}}\,\frac{2}{3}$
On trouverait de même pour la 2^{me} $\frac{6\times48}{18}=16$
3^{me} $\frac{5\times48}{18}=13\ \frac{1}{3}$
Somme égale. . . . . 48.

En désignant par x, y, z, les trois parts, on aurait les trois rapports égaux

$$x:7::y:6::z:5$$

Et comme dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, on a les trois proportions

$x+y+z$ ou $48:7+6+5$ ou $18::x:7$ d'où $x=\frac{7\times 48}{18}=18\frac{2}{3}$

$48:18::y:6 \qquad y=\frac{6\times 48}{18}=16$

$48:18::z:5 \qquad z=\frac{5\times 48}{18}=13\frac{1}{3}$

$\overline{48}$

48). Le 1er ouvrier a travaillé $8\times 10=80$ heures;

le 2e $9\times 6=54$

par conséquent, il s'agit de partager 6,70 en 2 parties qui soient entre elles comme les nombres 80 et 54, dont la somme est 134.

La part du 1er sera $\frac{6,70\times 80}{134}=4^{fr}$

la part du 2e $\frac{6,70\times 54}{134}=2\ \ 70$

Somme égale $6^{fr}\,70^{c}$

49). $2+3+5=10$.

Le 1er aura $5400\times\frac{2}{10}=1080$

le 2e $5400\times\frac{3}{10}=1620$

le 3e $5400\times\frac{5}{10}=2700$

Somme égale 5400

50). $75+78+81+82=316$.

Le 1er recevra $\frac{620\times 75}{316}=147\frac{12}{79}$

le 2e $\frac{620\times 78}{316}=153\frac{3}{79}$

le 3e $\frac{620\times 81}{316}=158\frac{73}{79}$

le 4e $\frac{620\times 82}{316}=160\frac{70}{79}$

Somme égale 620

51). Il s'agit de partager 8475 en 4 parties qui soient entre elles comme les nombres 1, $1\times 2=2$, $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$; $\frac{1+2+\frac{3}{2}}{3}=\frac{3}{2}$, dont la somme $=6$.

La 1re aura $\frac{8745\times 1}{6}=1457,50$

la 2e $\frac{8745\times 2}{6}=2915$

la 3e $\frac{8745\times\frac{3}{2}}{6}=2186,25$

la 4e $\frac{8745\times\frac{3}{2}}{6}=2186,25$

Somme égale 8745,00

52.) $50000+60000=110000 \quad \frac{4400}{110000}=0,04$.

Le bénéfice du 1er sera $0,04\times 50000=2000$

du 2e $0,04\times 60000=2400$

Somme égale 4400

53.) 2000 fr. pendant 3 ans produisent autant que $2000\times 3=6000$ fr. pendant 1 an.

3000 fr. pendant 2 ans et $\frac{1}{2}$ produisent autant que $3000\times\frac{5}{2}=7500$ fr. pendant 1 an.

4000 fr. pendant 2 ans produisent autant que $4000\times 2=8000$ fr. pendant 1 an.

C'est donc comme si les mises étaient 6000, 7500, 8000, dont la somme $=21500$.

La part du 1er sera $\frac{38700\times 6000}{21500}=10800$

du 2e $\frac{38700\times 7500}{21500}=13500$

du 3e $\frac{38700\times 8000}{21500}=14400$

Somme égale 38700

Déduction faite de la mise, le bénéfice de chacun des associés sera 4800, 6000, 6400.

54). Puisque la première a mis 5000 fr., la seconde a mis $9000-5000=4000$ fr. Comme la première a apporté sa mise dès le début de l'association, c'est comme si elle avait mis $5000\times 2=10000$ pour un an; et, comme elle a retiré 2000 fr., la seconde a retiré

$3400^{fr}-2000=1400^{fr}$.

Puisque 2000 de bénéfice répondent à 10000 de mise

	1	répond à	5
et	1400	à	$5\times1400=7000$

Mais la mise du deuxième associé est réellement 4000 fr. Pour savoir combien de temps elle est restée dans l'association, il faut diviser 7000 par 4000, ce qui donne $1\frac{3}{4}$.

Ce n'est donc que 3 mois après le début de l'association que le deuxième associé a fourni sa mise.

55). 30 ouvriers pendant 20 jours à 10 heures par jour représentent $30\times20\times10=6000$ heures de travail.

18 ouvriers pendant 15 jours à 12 heures par jour représentent $18\times15\times12=3240$ heures de travail.

15 ouvriers pendant 24 jours à 8 heures par jour représentent $15\times24\times8=2880$ heures de travail.

Il s'agit donc de partager 6060 en trois parties qui soient entre elles dans le rapport des nombres 6000, 3240, 2880, dont la somme $=12120$.

La part du 1er entrepreneur sera	$\frac{6060}{12120}\times6000=3000^{fr}$
du 2e	$\frac{6060}{12120}\times3240=1620$
du 3e	$\frac{6060}{12120}\times2880=1440$
Somme égale	6060

56). Le problème revient à partager 2500 en 3 parties qui soient entre elles comme les nombres 2500, 6000 et 9000, ou, plus simplement, comme les nombres 5, 12 et 18, dont la somme $=35$.

La perte du 1er associé sera	$\frac{2500}{35}\times5=357\frac{1}{7}^{fr}$
du 2e	$\frac{2500}{35}\times12=857\frac{1}{7}$
du 3e	$\frac{2500}{35}\times18=1285\frac{5}{7}$
Somme égale	2500

57). $30000+25000+20000+15000=90000$;

$\frac{3600}{90000}=0{,}04$.

La part du 1er associé	$0{,}04\times30000=1200^{\text{hectolit}}$
du 2e	$0{,}04\times25000=1000$
du 3e	$0{,}04\times20000=800$
du 4e	$0{,}04\times15000=600$
Total égal	3600

58). 6000 pendant 4 ans représentent 24000 pendant 1 an,

7000	3	21000
	Somme	45000

2000 pendant 2 ans représentent 4000 pendant 1 an,

3000	1	3000
	Somme	7000

$45000-7000=38000$, sur laquelle somme la mise du premier est représentée par 20000, et celle du second par 18000.

La part du 1er sera	$\frac{10000}{38000}\times20000=5263\frac{3}{19}$
du 2e	$\frac{10000}{38000}\times18000=4736\frac{16}{19}$
Total égal	10000

59). Rapportées au même temps, les mises des trois capitalistes sont

$80000\times8=640000$, $60000\times10=600000$, $100000\times4=400000$;

dont la somme est 1640000.

Puisque 640000 mise du 1er rapportent 6000 — 6000

1 — $\frac{6000}{640000}=\frac{6}{640}$,

et par conséquent

600000 rapportent	$\frac{6}{640}\times600000=5625$
400000	$\frac{6}{640}\times400000=3750$
Bénéfice total	15375

Le bénéfice total est donc de 15375 fr., et celui des deux derniers associés de 5625 et 3750.

On peut trouver directement le bénéfice total connaissant le bénéfice correspondant à 1 fr. de mise; en effet, si 1 correspond à $\frac{6}{640}$

$$1640000 \quad \text{à} \quad \frac{6\times1640000}{640}=\frac{6\times164000}{64}$$

$$=\frac{3.2^6.125.41}{2^6}=123.125=15375.$$

Enfin, par les rapports égaux, on a

$$640000:6000::600000:x::400000:y,$$

d'où

$$640000+600000+400000:6000+x+y::640000:6000$$
$$640000:6000::600000:x$$
$$640000:6000::400000:y.$$

La première proportion donne le bénéfice total

$$6000+x+y=\tfrac{1640000\times6000}{640000}=15375,$$

et les deux dernières, les bénéfices de deux associés

$$x=\tfrac{600000\times6000}{640000}=5625,$$
$$y=\tfrac{400000\times6000}{640000}=3750.$$

60). A 80 c. le kilogramme, la vente des 100 kilogrammes de riz rapporte 80 fr.; bénéfice absolu : $80-60=20$; à 90 c. le kilog., la vente des 100 kilog. de vermicelle rapporte 90 fr.; bénéfice absolu, $90-75=15$.

1° Si 60 fr. rapportent 20 fr.
10 $\quad \frac{20}{6}$
100 $\quad \frac{20\times10}{6}=\frac{200}{6}=33\frac{1}{3}$;

2° Si 75 fr. rapportent 15 fr.
1 $\quad \frac{15}{75}=\frac{1}{5}$
100 $\quad \frac{1}{5}\times100=20.$

Le marchand a gagné $33\frac{1}{3}$ pour 100 sur le riz, et seulement 20 pour 100 sur le vermicelle.

61). Au cours de 116 fr. la rente $4\frac{1}{2}$ pour 100, 4500 fr. de rente coûtent 116000 fr.

Le spéculateur les revend $116000-800=115200$; le cours était donc, au moment de la vente, 115,20.

La rente avait donc baissé de $116-115,20=0,80$, c'est-à-dire de 80 centimes.

62). Désignant les deux parts des associés par x et y, on a $30000\times6:x::40000\times3:y$, divisant, pour simplifier, les deux antécédents par $3\times2\times10000$, on aura

$$3:x::2:y, \quad \text{d'où} \quad 3+2:x+y::3:x,$$
$$::2:y;$$

or, $x+y=84000$, donc $5:84000::3:x=50400$
$::2:y=33600$
Total égal 84000

Il revient au 1er associé 50400 fr. et au 2e 33600 fr.

63). Désignant la 1re partie par 1,
la 2e sera $\frac{2}{3}$,
la 3e $(1+\frac{2}{3})\frac{3}{4}=\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$.

Réduisant les 3 fractions au même dénominateur pour les additionner, on a $\frac{12}{12}+\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{35}{12}$.

Si le nombre à partager était 35, la première partie serait 12; la seconde, 8; la troisième, 15; si le nombre à partager était 1, les trois parties seraient $\frac{12}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{15}{35}$. Et comme le nombre à partager est 735, les trois parties seront

$$\tfrac{12}{35}\times735=252, \quad \tfrac{8}{35}\times735=168, \quad \tfrac{15}{35}\times735=315.$$

Deuxième manière. On voit que la question revient à partager 735 en 3 parties qui soient entre elles dans le rapport des nombres 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ ou $\frac{12}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{5}{12}$, ou, enfin, 12, 8, 15.

Par les rapports égaux on aurait, en désignant les trois parties par x, y, z,

$$12:x::8:y::15:z,$$

d'où $12+8+15$ ou $35:x+y+z$ ou $735::12:x$
$::8:y$
$::15:z.$

Le premier rapport se simplifie en divisant les deux termes par 35, ce qui le réduit à 1 : 21;

d'où
$$x = 21 \times 12 = 252$$
$$y = 21 \times 8 = 168$$
$$z = 21 \times 15 = 315$$
Total égal 735

Troisième manière. Enfin, si l'on observe que la seconde partie devant être les $\frac{2}{3}$ de la première et la troisième les $\frac{5}{4}$ de la première, comme $1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$, on peut dire que les $\frac{35}{12}$ de la première partie doivent faire 735, donc le $\frac{1}{12}$ de la première partie $= \frac{735}{35} = 21$.

Et la 1re partie $= 21 \times 12 = 252$,
la 2e devant être les $\frac{2}{3}$ de la 1re, sera $252 \times \frac{2}{3} = 168$,
et la 3e $\frac{5}{4}$ $252 \times \frac{5}{4} = 315$.
Ou bien encore $252 + 168 = 420$, les $\frac{3}{4}$ de $420 = 315$.

64). 20 pièces de drap à 450 fr. la pièce, font 9000fr
35 de vin à 160 5600
Somme des mises 14600fr

On aura les deux proportions
$$14600 : 2920 :: 9000 : x = 1800$$
$$14600 : 2920 :: 5600 : y = 1120$$
Total égal 2920

On remarquera que le premier rapport peut se simplifier par la division du facteur 2920.

65). Bénéfice du 1er associé 3500
du 2e 2500
Somme des bénéfices... 6000.

6000 fr. de bénéfices proviennent d'un fonds commun de 60000.

1 de $\frac{60000}{6000} = 10$
3500 $10 \times 3500 = 35000$
2500 $10 \times 2500 = 25000$
Somme des mises 60000

La mise du premier est de 35000, celle du second de 25000.

66). Bénéfice du 1er 3600
du 2e $3600 \times \frac{3}{4} = 2700$
du 3e $\frac{1}{2}(3600 + 2700) = 3150$
Somme des bénéfices... 9450

$$\begin{array}{l} 9450 : 28350 \\ \text{ou}\quad 1 : 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} :: 3600 : x = 10800, & \text{mise du 1}^{\text{er}}; \\ :: 2700 : y = 8100, & 2^{\text{e}}; \\ :: 3150 : z = 9450, & 3^{\text{e}}. \end{array} \right.$$
Somme égale des mises 28350.

67). $375 + 382 + 380 + 377 + 379 + 380\frac{1}{2} + 376\frac{1}{2} + 381\frac{1}{4} + 378\frac{1}{2} + 380\frac{1}{4} = 3790$.

La moyenne est $\frac{3790}{10} = 379$.

La longueur de l'allée est de
$$60 \times 379 = 22740^{\text{centim}} = 227^{\text{mèt}},40.$$

68). La somme des 10 résultats est 25713. La moyenne portée de la pièce est donc de 2571 mètres 3 décimètres.

69). La somme des 10 nombres est 42226, et par conséquent le revenu moyen, de 4222 fr. 60 c.

70). Additionnant les 6 nombres et divisant la somme par 6, on trouve pour la moyenne cherchée 3 fr. 71 c. $\frac{2}{3}$.

71). 1re pièce 240 litres. Prix 120 fr.
2e 200 80
3e 160 64
Bénéfice 60
Somme 600 litres que le marchand vendra 324 fr.

1 litre vaudra donc $\frac{324^{\text{fr}}}{600} = 0{,}54$.

Le marchand doit rendre le litre 54 c.

72). 2 litres du mélange valent $1,80+0,60=2,40$.

Le litre revient à $\frac{2^{fr},40}{2}=1^{fr},20^{c}$.

73). Partageant 100000 en 4 parties qui soient entre elles comme les nombres 1, 2, 3 et 4 dont la somme $=10$, on trouvera pour chacune des mises

$$100000\times\tfrac{1}{10}=10000;\ 100000\times\tfrac{2}{10}=20000;$$
$$100000\times\tfrac{3}{10}=30000;\ 100000\times\tfrac{4}{10}=40000;$$

qui restées dans l'association pendant des temps qui sont entre eux comme les nombres 5, 6, 7 et 8, produiront le même effet que les sommes 50000; 120000; 210000; 320000 pendant 1 an. Il ne reste plus qu'à partager le bénéfice total 78400 en 4 parties qui soient entre elles comme les quatre nombres 50000, 120000, 210000, 320000 dont la somme est 700000.

Les quatre nombres exprimant les bénéfices seront donc $\frac{78400\times50000}{700000}=5600$;

$$\frac{78400\times120000}{700000}=13440;$$
$$\frac{78400\times210000}{700000}=23520;$$
$$\frac{78400\times320000}{700000}=35840.$$

Total égal... 78400.

On voit facilement que le rapport des 4 nombres 50000, 120000, 210000, 320000 peut être simplifié et qu'il revient à celui des nombres 5, 12, 21, 32 ou 1×5, 2×6, 3×7, 4×8. Ce qui fournit une solution plus prompte et plus facile.

	Montants des billets.	Échéances.	Nombres.
74).	$\frac{1}{3}$ de $4500=1500$	6	$1500\times6=9000$
	$4500-1500=3000$	12	$3000\times12=36000$
	Total... 4500		Total... 45000

$\frac{45000}{4500}=10$; le terme de l'échéance commune est 10 mois.

	Montants des billets.	Échéances.	Nombres.
75).	2000	3	6000
	3000	4	12000
	4000	6	24000
	Total... 9000		42000

$\frac{42000}{9000}=4\frac{2}{3}$; l'échéance commune est de 4 mois $\frac{2}{3}$.

	Sommes.	Échéances.	Nombres.
76).	6000	18 mois	108000
	2000	6	12000
	Reste 4000		96000.

$\frac{96000}{4000}=24$. Il pourra garder le reste 24 mois.

	Sommes.	Échéances.	Nombres.
77).	3000	12 mois	36000
	1800	18	32400
	Reste 1200		3600 $\frac{3600}{1200}=3$.

L'avance de 1200 fr. avait été faite 3 mois après la convention.

78). On peut ne pas tenir compte, dans le calcul, des 4000 fr. payables comptant.

Sommes.	Échéances.	Nombres.
3000	4	12000
5000	10	50000
8000		62000

$\frac{62000}{8000}=7\frac{3}{4}$. La date de l'échéance pour l'unique billet sera 7 mois $\frac{3}{4}$.

	Sommes.	Échéances.	Nombres.
79).	$\frac{1}{2}$ de $12600=6300$	4 mois	25200
	$\frac{1}{3}$ de $12600=4200$	6	25200
	$12600-10500=2100$	12	25200
	12600		75600.

$\frac{75600}{12600}=6$. L'échéance commune est à 6 mois.

	Sommes.	Échéances.	Nombres.
80).	5000	15 mois	75000
	$\frac{1}{4}$ de 5000 = 1250	30	37500
	Reste 3750	Reste	37500.

$\frac{37500}{3750} = 10$. Le marchand a fait une avance de 3750 fr. 10 mois après l'achat.

81). Cette question, un peu plus difficile que les précédentes, revient évidemment à partager 2000 en deux parties telles que le produit de l'une de ces parties par 2 plus le produit de l'autre partie par 12 donnent une somme égale à $2000 \times 6 = 12000$.

Or, si l'on partage 2000 en deux parties égales de manière que chacune de ces parties soit 1000, comme

$$1000 \times 2 + 1000 \times 12 = 14000,$$

l'excès $14000 - 12000 = 2000$

indique que la seconde partie est trop grande.

Mais chaque unité retranchée à la partie qui doit être multipliée par 12, et ajoutée à celle qui doit être multipliée par 2, diminue l'excès de $12 - 2 = 10$; donc autant de fois 10 sera contenu dans l'excès 2000, autant il faudra retrancher d'unités à l'une des parties pour les ajouter à l'autre.

$\frac{2000}{10} = 200$, les deux parties demandées sont donc

$$1000 + 200 = 1200, \quad 1000 - 200 = 800.$$

Le montant de chaque payement est donc 1200 et 800; en effet

$$1200 \times 2 = 2400$$
$$800 \times 12 = 9600.$$
Somme égale 12000.

	Sommes.	Échéances.	Totaux.
82).	6000	4	24000
	4000	5	20000
	8000	8	64000
Total	18000		108000.
	10000	6	60000
Reste	8000	Reste	48000.

$\frac{48000}{8000} = 6$. Le marchand peut garder le restant de la créance pendant six mois

83). 250 litres à 40 c. valent 100 fr. Bénéfice absolu $100 - 75 = 25^{fr}$.

Si 75 fr. rapportent 25 fr.

1 $\frac{25}{75}$

100 $\frac{25 \times 100}{75} = 33\frac{1}{3}$

Il gagne 33 $\frac{1}{3}$ pour 100.

84). 15 pièces à 75 fr. la pièce coûtent 1125 fr. Il faut donc que $1125 \times 12 = 13500$ soit égal au produit de $\frac{1125}{2} = 562{,}50$ par le nombre de mois à courir.

$\frac{13500}{562{,}50} = 24$. Le marchand payera l'autre moitié dans 2 ans.

85). 100 litres du mélange coûtent 25 francs. 1 litre coûte $\frac{25}{100} = 0{,}25$.

Le litre coûte 25 c.

86). $2{,}50 + 2{,}60 + 2{,}90 = 8$. Chaque groupe de 3 kilogrammes de ces qualités différentes coûte donc 8 fr. Comme elle a payé 24 fr. pour le tout, elle a eu $\frac{24}{8} = 3$ de ces groupes, c'est-à-dire 3 kilogrammes de chaque espèce, pour lesquels elle a dépensé 7,50; 7,80; 8,70. Total égal 24 fr.

87). Un décalitre plus un demi-litre valent 21 demi-litres, divisant 336 par $\frac{21}{2}$, le quotient 32 exprime le nombre de mesures de chaque espèce qu'on a employées.

En effet $10 \times 32 = 320$

$\frac{1}{2} \times 32 = \ \ 16$

Total égal $\ 336$

88). $\frac{455}{5+1+0.50} = \frac{455}{6.50} = 70$. On a employé 70 pièces de chaque espèce.

En effet $5 \times 70 = 350$

$1 \times 70 = \ \ 70$

$0{,}50 \times 70 = \ \ 35$

Total égal $\ 455$

89). $5 + 6 + 9 = 20$.

Si pour 5 heures de travail on a payé 2,50,

1 $\frac{2{,}50}{5} = 0{,}50$,

20 $0{,}50 \times 20 = 10$.

La somme à partager était donc de 10 fr., sur laquelle le second a reçu 3 fr., et le troisième 4 fr. 50 c.

90). On peut résoudre les problèmes de cette espèce par le tâtonnement, ainsi qu'il suit :

En prenant 1 pièce de 5 fr. il reste 102 fr., qu'on payera par $\frac{102}{2} = 51$ pièces de 2 fr. On ne peut prendre un nombre pair de pièces de 5 fr., parce que le reste à payer ne serait pas divisible par 2.

En prenant

Pièces de 5 fr.		Pièces de 2 fr.
3	il reste $107 - 15 = 92^{fr}$ qu'on paye avec	$\frac{92}{2} = 46$
5	$107 - 25 = 82^{fr}$	$\frac{82}{2} = 41$
7	$107 - 35 = 72^{fr}$	$\frac{72}{2} = 36$
9	$107 - 45 = 62^{fr}$	$\frac{62}{2} = 31$
11	$107 - 55 = 52^{fr}$	$\frac{52}{2} = 26$
13	$107 - 65 = 42^{fr}$	$\frac{42}{2} = 21$
15	$107 - 75 = 32^{fr}$	$\frac{32}{2} = 16$
17	$107 - 85 = 22^{fr}$	$\frac{22}{2} = 11$
19	$107 - 95 = 12^{fr}$	$\frac{12}{2} = 6$
21	$107 - 105 = 2^{fr}$	$= 1$

Maintenant on voit qu'il n'y a que la combinaison de 17 pièces de 5 fr. et de 11 de 2 fr. qui donne une somme égale à 28.

Deuxième manière. On peut arriver directement au même résultat par le raisonnement suivant :

En prenant $\frac{28}{2} = 14$ pièces de chaque espèce, la valeur de ces pièces $5 \times 14 + 2 \times 14 = 70 + 28 = 98$; différence $107 - 98 = 9$.

Mais chaque pièce de 5 fr. substituée à 1 pièce de 2 fr. diminue la différence de $5 - 2 = 3$ fr.; par conséquent autant de fois 3 sera contenu dans 9, autant il faudra faire de ces substitutions. Il faudra donc substituer 3 pièces de 5 fr. à autant de pièces de 2 fr., ce qui donne

$14 + 3 = 17$ pièces de 5 fr.

$14 - 3 = 11$ de 2 fr.

Troisième manière. La règle de double fausse position est applicable dans ce problème ; car si l'on prend trois nombres en proportion continue par différence, tels que 1, 2, 3 pour représenter trois nombres de pièces de 5 fr., on trouve que les résultats $5 \times 1 + 2 \times 27 = 59$, $5 \times 2 + 2 \times 26 = 62$, $5 \times 3 + 2 \times 25 = 65$, sont aussi en proportion par différence continue.

1re supposition.

Pièces de 5 fr.	Pièces de 2 fr.		
10	$28 - 10 = 18$	$5 \times 10 + 2 \times 18 = 86$	
	$107 - 86 = 21$,	erreur en moins	21
12	$28 - 12 = 16$	$5 \times 12 + 2 \times 16 = 92$	
	$107 - 92 = 15$,	erreur en moins	15

Différence des erreurs $21 - 15 = 6$.

$21 \times 12 = 252$

$15 \times 10 = 150$

Différence $\ 102$. $\qquad \frac{102}{6} = 17$.

On prendra donc 17 pièces de 5 fr. et 11 pièces de 2 fr.

91). $20+40=60$, $\frac{3000}{60}=50$.

Il faudra donc 50 heures.

92).

20 hectolitres	à 18 fr. valent	360 fr.
30	17	510
40	15	600
Somme 90	qui valent	1470^{fr}

donc l'hectolitre vaut $\frac{1470^{fr}}{90}=16$ fr. 33 cent. $\frac{1}{3}$.

93). $\frac{60}{0,50}=120$, $120-100=20$. Il faut donc ajouter 20 litres d'eau.

94).

	Décagrammes.		Kilogrammes.	
Pour	25	de sel il faut	4	de mélange.
	1		$\frac{4}{25}$	
	500		$\frac{4\times500}{25}=80.$	

Mais le mélange primitif est de $20+5=25$ kilogrammes, il faudra donc ajouter $80-25=55$ kilogrammes d'eau.

95). Puisqu'il faut 15 fois plus de pièces de 2 fr. que de 5 fr., pour 1 pièce de 5 fr., il faut 15 pièces de 2 fr., ce qui vaut en tout $5+30=35$ fr. $\frac{105}{35}=3$; il faut donc 3 pièces de 5 fr. et 45 pièces de 2 fr.

$$5\times3=15$$
$$2\times45=90$$
Somme égale 105

96). Le premier fait l'ouvrage en $\frac{7}{2}$ de jours, et par conséquent il n'en fait que $\frac{1}{7}$ dans $\frac{1}{2}$ de jour et $\frac{2}{7}$ dans un jour.

Le second fait l'ouvrage en $\frac{17}{4}$, et par conséquent il n'en fait que $\frac{1}{17}$ dans $\frac{1}{4}$ de jour et $\frac{4}{17}$ dans un jour.

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{17}=\frac{34+28}{119}=\frac{62}{119};$$

donc les deux ouvriers en un jour font les $\frac{62}{119}$ de l'ouvrage; pour en faire $\frac{1}{119}$, ils mettront $\frac{1}{62}$ de jour, et pour l'ouvrage entier $\frac{1}{62}\times119=\frac{119}{62}$ de jour $=1\frac{57}{62}$.

Ils mettront 1 jour et $\frac{57}{62}$ de jour, fraction équivalente

à 9 heures environ, à raison de 10 heures par journée de travail.

97). En 1 heure la 1re fontaine remplit $\frac{2}{21}$ du bassin,
la 2e $\frac{3}{34}$
les 2 fontaines ensemble $\frac{2}{21}+\frac{3}{34}=\frac{131}{714}$;
donc, pour remplir $\frac{1}{714}$ du bassin, elles mettront $\frac{1}{131}$ heure,
et pour $\frac{714}{714}$ $\frac{714}{131}$
$=5$ heures $\frac{59}{131}$.

98). $2,30+2,70=5$; $\frac{18}{5}=3,60$. Cette personne a acheté 3,60 kilogrammes de chaque espèce.

En effet, $2^{fr},30\times3,60=8^{fr},28$
$2,70\times3,60=9,72$
Somme égale 18^{fr}

99).

250 litres	à 60 c. valent	150 fr.
240	à 50	120
180	à 75	135
670 litres du mélange valent		405^{fr}

donc 1 — $\frac{405}{670}$
260 — $\frac{405\times260}{670}=157,16\frac{28}{67}$.

La pièce du mélange coûtera donc 157 fr. 16 c. $\frac{28}{67}$.

100).

Poids.	Titres en millièmes.	Métal fin.
3	900	2700
5	850	4250
6	800	4800
8	750	6000
22		17750

$$\frac{17750}{22}=806\frac{9}{11}.$$

Le titre est à 806 millièmes $\frac{9}{11}$.

101). Les trois fontaines remplissent chacune en 1 heure $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ du bassin, et par conséquent les trois réunies $\frac{47}{60}$ du bassin.

Elles mettront donc $\frac{60}{47}$ d'heure pour remplir le bassin, c'est-à-dire 1 heure $\frac{13}{47}$.

102). Les quatre ouvriers font en un jour chacun $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$ de l'ouvrage, et tous ensemble $\frac{3382}{7920}$ ils mettront donc $\frac{7920}{3382}$ de jour, ce qui équivaut à 2 jours et $\frac{578}{1691}$.

103). Les deux fontaines coulant ensemble remplissent les $\frac{2}{11}$ du bassin; la première fontaine coulant seule n'en donne que les $\frac{4}{31}$, par conséquent la seconde fontaine coulant seule remplit les $\frac{2}{11} - \frac{4}{31} = \frac{18}{341}$ du bassin en 1 heure; et par suite $\frac{1}{341}$ en $\frac{1}{18}$ d'heure; enfin le bassin entier est $\frac{341}{18} = 18$ heures $\frac{17}{18}$.

		Prix.	Nombres.
104).		50	10
	55		
		65	5.

Les nombres de litres que l'on prendra doivent être dans le rapport de 10 à 5 ou de 2 à 1.

En effet, en vendant 55 cent. un litre qui en coûte 50, le marchand fera un bénéfice de $55 - 50 = 5$ cent. En vendant 55 cent. 1 litre qui coûte 65, le marchand fera une perte de 10 cent.

Donc, pour 1 litre de la seconde espèce qui donne un bénéfice de 10 cent., le nombre de litres qu'il faudra prendre de la première espèce doit être tel, qu'en le multipliant par 5 cent., le produit soit égal à 10 cent. Ce nombre sera donc $\frac{10}{5}$ ou 2. On peut vérifier ce résultat en prenant des nombres quelconques dans le rapport indiqué. Si, par exemple, on prend 20 litres de la première espèce, on devra en prendre 10 de la seconde.

20 litres à 50 c.		10fr
10	65	6fr50
	Total	16fr50
$20 + 10 = 30$	à 55	16 ,50 résultat égal.

		Prix.	Nombres.
105).		50	20
	60		
		80	10.

Il n'y a plus qu'à partager 200 en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de 20 à 10 ou de 2 à 1; ce qui donne 133 $\frac{1}{3}$ pour la première espèce et 66 $\frac{2}{3}$ pour la seconde.

		Titres.	Nombres.
106).		0,900	40
	0,840		
		0,800	60

Les nombres que l'on prendra doivent être dans le rapport de 2 à 3.

		Prix.	Nombres.
107).		1,20	15
	95		
		0,80	25.

Les nombres qu'on prendra doivent être dans le rapport de 3 à 5.

		Prix.	Nombres.
108).		24	$4 + 6 = 10$
	26		
		30	2
		32	2.

Les nombres doivent être dans le rapport de 5, 1 et 1.

		Prix.		Nombres.
Deuxième manière.		24	gain 2	
	26			
		30	perte 4	20
		32	perte 6	10.

Je prends à volonté deux nombres, 10 et 20, pour les espèces à 32 et 30 fr. l'hectolitre. La perte totale serait $6 \times 10 + 4 \times 20 = 140$ fr.

Pour que le gain compense la perte, il faudra prendre $\frac{140}{2} = 70$ hectolitres de la première espèce, et les nombres que l'on devra prendre seront entre eux comme 70, 20 et 10, ou, plus simplement, comme 7, 2 et 1.

109). Après avoir trouvé, comme dans le problème précédent, que les nombres doivent être entre eux comme 7, 2 et 1, il ne reste plus qu'à partager 100 en trois parties qui seront dans le rapport de ces nombres, ce qui donne 70, 20 et 10 pour les trois nombres d'hectolitres demandés.

		Titres.	Nombres.
110).		0,910	50
		0,900	50
	0,890		
		0,840	$20 + 10 = 30$

Les trois nombres devront être comme 5, 5 et 3, et par conséquent on prendra $3\frac{11}{13}$ de la première et de la seconde espèce, et $2\frac{4}{13}$ de la troisième.

111). La plus grande surpasse donc la plus petite de $5 + 13 = 18$; et par conséquent, si l'on retranche de 67, $13 + 18 = 31$, le reste 36 exprimera le triple de la plus petite, qui est donc 12. La moyenne est $12 + 13 = 25$ et la plus grande $25 + 5 = 30$.

112). $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Le problème revient à trouver un nombre dont les $\frac{11}{6}$ font $111 - 1 = 110$.

Le $\frac{1}{6}$ de ce nombre sera $\frac{110}{11} = 10$,

et le nombre lui-même $10 \times 6 = 60$

la moitié 30

le tiers 20

1

Total égal 111.

Deuxième manière. En appliquant la règle de fausse position simple, on prendra, à volonté, un nombre divisible à la fois par 2 et par 3, tel que 24, auquel ajoutant sa moitié 12 et son tiers 8, on aura pour résultat 44.

Et l'on posera la proportion $44 : 110 :: 24 : x$, d'où $x = 60$.

113). $1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Les $\frac{10}{9}$ du nombre cherché font $60 - 10 = 50$; le nombre sera $\frac{50}{10} \times 9 = 45$.

114). Après la 1re spéculation, il reste au négociant les $\frac{2}{3}$ de ce qu'il avait ;

2e	les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
3e	les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{9} = \frac{8}{27}$
4e	les $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{27} = \frac{16}{81}$
5e	les $\frac{2}{3}$ de $\frac{16}{81} = \frac{32}{243}$.

D'après l'énoncé les $\frac{32}{243}$ de ce qu'il avait sont 640 fr.

$\frac{1}{243}$ sera $\frac{640}{32} = 20$.

Il avait donc $20 \times 243 = 4860$.

115). $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$. Les $\frac{19}{12}$ du nombre sont $48 - 10 = 38$. Le nombre sera $38 \times \frac{12}{19} = 24$.

116). $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Le $\frac{1}{6}$ de ce nombre est 4, et le nombre lui-même, $4 \times 6 = 24$.

117). $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. 1 hectare 75 ares représentent donc les $\frac{5}{12}$ du terrain. Le terrain était par conséquent de $1,75 \times \frac{12}{5} = 4,20$ ou 4 hectares 20 ares.

118). $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$. 80 est le $\frac{1}{15}$ du nombre des élèves, qui est par conséquent de 1200 élèves.

119). Si de 60 on retranche $1 + 3 + 8 = 12$, le reste 48 exprimera le quadruple du nombre de pièces vendues dans la 4e vente. Ce nombre est 12 pour la 4e vente.

$12 + 1 = 13$ 3e

$13 + 2 = 15$ 2e

$15 + 5 = 20$ 1re.

Total égal 60.

120). $\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$. Les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{4} = \frac{10}{12}$. Les $\frac{10}{12}$ du nombre étant 20, le nombre sera 24.

121). $40 - 8 = 32$, le double du nombre des pièces de la main gauche. Il y en avait donc 16 dans la gauche et 24 dans la droite.

On peut dire encore $40 + 8 =$ le double du nombre des pièces de la main droite; il y avait donc 24 pièces dans la droite et 16 dans la gauche.

122). L'une d'elles a eu $\frac{36000+8000}{2} = 22000$ fr.
l'autre $\frac{36000-8000}{2} = 14000$.

123). D'après la première condition, la 1re a 10 fr. de plus que la 2e.

Les deux nombres cherchés sont évidemment dans le rapport de 7 à 5, dont la différence est 2.

En désignant par x et y les deux nombres, on aura

la proportion $7 : 5 :: x : y$.

d'où $7 - 5 : 5 :: x - y : y$

ou $2 : 5 :: 10 : y, \quad y = \frac{10 \times 5}{2} = 25.$

$2 : 7 :: 10 : x, \quad x = \frac{7 \times 10}{2} = 35.$

La 1re a 35 fr. et la 2e 25.

124). En supposant que les deux parties soient égales chacune a $\frac{25000}{2} = 12500$, la somme des intérêts serait $12500 \times \frac{4}{100} + 12500 \times \frac{5}{100} = 500 + 625 = 1125$ au lieu de 1100. La différence en plus 25 indique que la partie placée à 5 pour 100 est trop forte et par conséquent l'autre trop faible.

Mais chaque 100 fr. ôtés à la 1re pour être ajoutés à la 2e, diminuent l'erreur de $5 - 4 = 1^{fr}$; pour qu'elle soit diminuée de 25 fr., il faut donc ôter $100 \times 25 = 2500$ à l'une pour l'ajouter à l'autre.

On a donc fait valoir,

à 5 pour 100, $12500 - 2500 = 10000$

à 4 pour 100, $12500 + 2500 = 15000$

Deuxième manière. Puisque 25000 fr. ont rapporté 1100 fr., le taux moyen est $\frac{1100 \times 100}{25000} = 4\frac{2}{5}$; les différences entre les taux donnés 4 et 5 et ce taux moyen sont, en intervertissant l'ordre, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$. Il faudra donc partager 25000 en deux parties qui soient entre elles comme $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$ ou, plus simplement, comme 3 est à 2; ce qui donne les mêmes nombres 15000 et 10000.

125). D'après l'énoncé, le $\frac{1}{4}$ de l'argent de la 1re plus le $\frac{1}{3}$ de la 2e font 40 fr., ou, ce qui revient au même, en réduisant au même dénominateur, le triple de la 1re plus le quadruple de la seconde font $40 \times 12 = 480^{fr}$.

Il ne s'agit plus que de partager 140 en deux parties telles que la somme des produits de la 1re par 3 et de la 2e par 4 soit égale à 480.

Si l'on suppose que chacune des deux parties soit $\frac{140}{2} = 70$, la somme des produits $70 \times 3 + 70 \times 4 = 490$, au lieu de 480. Différence en plus 10.

Mais chaque unité ôtée à la partie multipliée par 4 pour être ajoutée à la partie multipliée par 3, diminue l'erreur de $4 - 3 = 1$; il faudra donc ôter 10 à l'une et l'ajouter à l'autre, ce qui donnera pour les deux parties cherchées $70 - 10 = 60$, $70 + 10 = 80$.

La 1re personne avait donc 80 fr. et la 2e 60.

En effet les $\frac{3}{4}$ de $80 = 60$

les $\frac{2}{3}$ de $60 = 40$

Total 100. $\quad 140 - 100 = 40$.

126). En ramenant au cas d'un seul hectolitre de la première espèce, on voit que dans le premier achat 1 hectolitre de la première espèce et $\frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ hectolitre de la seconde auraient coûté $\frac{810}{20} = 40^{fr},50^{c}$.

Dans le deuxième achat, un hectolitre de la première espèce et $\frac{16}{25}$ de la seconde auraient coûté $\frac{690}{25} = 27^{fr},60^{c}$.

Par conséquent $40{,}50 - 27{,}60 = 12^{fr},90$ sont le prix de $\frac{3}{2}-\frac{16}{25}=\frac{43}{50}$ d'hectolitre de la deuxième espèce; donc 1 hectolitre de la deuxième espèce coûte

$$12,90\times\frac{50}{43}=15^{fr}.$$

Donc, les 30 hectolitres dans le premier achat, ont coûté $15\times30=450$; par suite les 20 hectolitres de la première espèce ont coûté $810-450=360^{fr}$, et 1 hectolitre de la première espèce $\frac{360}{20}=18$.

Les prix sont 18 et 15.

127). La différence entre le triple et le double du nombre des élèves est par conséquent égale à $20\times2=40$;

C'est donc le nombre lui-même.

128). En travaillant le premier 1 jour et le second $\frac{5}{3}$ de jour, les deux ouvriers auraient fait, la première fois, $\frac{59}{3}$ de mètre.

La seconde fois, le premier 1 jour et le second $\frac{6}{4}$ de jour, ils auraient fait $\frac{74}{4}$.

La différence $\frac{59}{3}-\frac{74}{4}=\frac{14}{12}$ mètres exprimera le nombre de mètres faits par le second ouvrier en $\frac{5}{3}-\frac{6}{4}=\frac{2}{12}$ de jour. Le second ouvrier a donc fait $\frac{14}{2}=7$ mètres.

Le premier ouvrier, d'après la première condition, fera par jour $\frac{59-7\times5}{3}=\frac{24}{3}=8$. On aurait pu trouver la même valeur en opérant d'une manière analogue à la précédente.

Deuxième manière. Appliquant la règle de fausse position double, on supposera que le premier fait 13 mètres, par exemple.

Le deuxième ferait $\frac{59-3\times13}{5}=4$.

Or, $13\times4+4\times6=76$ au lieu de 74; erreur en plus 2. Supposant en second lieu que le premier fait 18 mètres, le second fera $\frac{59-18\times3}{5}=1$.

Or, $18\times4+1\times6=78$ au lieu de 74; erreur en plus 4.

Suppositions.	Erreurs.
13	2
18	4

Multipliant en croix et retranchant les produits, puis divisant par la différence des erreurs, on trouve

$$\frac{13\times4-18\times2}{4-2}=\frac{52-36}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

Même résultat que précédemment.

On trouverait 7 d'une manière analogue.

129). D'après l'énoncé, la quantité d'eau fournie la première fois, par la première en 1 heure et par la seconde en $\frac{5}{3}$ d'heure, serait $\frac{590}{3}$ litres.

Et la seconde fois, par la première en 1 heure et par la seconde en $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$ d'heure, serait $\frac{1040}{6}=\frac{520}{3}$ litres.

Donc $\frac{590}{3}-\frac{520}{3}=\frac{70}{3}$ exprimera la quantité d'eau fournie par la seconde fontaine en $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$ d'heure; et par conséquent la seconde fontaine donne 70 litres par heure.

La première donnera donc $\frac{590-70\times5}{3}=80$ litres.

On appliquerait la règle de fausse position comme dans le numéro précédent.

130). L'une a mis le tiers de 2760 ou 920, et l'autre $920\times2=1840$.

131). $\frac{2500}{20+5}=\frac{2500}{25}=100$; donc l'une aura $5^{fr}\times100=500^{fr}$ et l'autre $20^{fr}\times100=2000$.

On pourrait encore partager 2500 en deux parties dont l'une soit le quadruple de l'autre; ce qui donne encore pour la plus petite part $\frac{2500}{5}=500$ fr. et pour la plus grande $500\times4=2000$ fr.

132). $\frac{30}{2.50}=12$; l'une aura $0,50\times12=6$ fr. et l'autre $2\times12=24$.

133). Les $\frac{9}{4}$ de la plus petite sont 234; cette partie est donc les $\frac{4}{9}$ de 234 ou 104; et la plus grande

$$104+\frac{104}{4}=104+26=130.$$

134). Les $\frac{7}{4}$ de la plus grande font 210; la plus grande est $\frac{210\times4}{7}=120$, et la plus petite 90.

135). Les $\frac{7}{3}$ de la plus petite sont 350 ; la plus petite sera $350 \times \frac{3}{7} = 150$; et la plus grande $150 + \frac{150}{3} = 200$.

136). La petite part sera $\frac{1800 \times 2}{9} = 400$, et la plus grande $\frac{1800 \times 7}{9} = 1400$.

137). $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$; les $\frac{9}{20}$ de ce que j'ai égalent $2^{fr},25$; donc ce que j'ai égale $2,25 \times \frac{20}{9} = 5$ fr.

138). $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$, $1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}$. Les $\frac{23}{35}$ du prix du cheval sont 276 fr.; le prix du cheval sera $\frac{276^{fr} \times 35}{23} = 420$ fr.

139). Les fractions $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{3}$ réduites au même dénominateur deviennent $\frac{3}{21}$ et $\frac{7}{21}$; la seconde condition de l'énoncé revient à celle-ci, le triple de la première partie augmenté du septuple de la seconde égale

$$10 \times 21 = 210;$$

mais d'après la première condition le triple de la première augmenté du triple de la seconde, donne

$$46 \times 3 = 138;$$

donc, $210 - 238 = 72$, est égal au septuple moins le triple ou au quadruple de la seconde, qui est par conséquent égale à $\frac{72}{4} = 18$. La première est donc

$$46 - 18 = 28.$$

En effet, $\frac{28}{7} = 4$, $\frac{18}{3} = 6$, $4 + 6 = 10$.

Deuxième manière. La seconde condition revient encore à dire que la première augmentée des $\frac{7}{3}$ de la seconde égale $10 \times 7 = 70$; donc $70 - 46 = 24$ représente les $\frac{7}{3}$ de la seconde moins la seconde elle-même ou les $\frac{4}{3}$ de la seconde; d'où l'on conclut encore que la seconde $= 24 \times \frac{3}{4} = 18$.

Troisième manière. On peut arriver au même résultat par le simple tâtonnement en retranchant successivement de 46 autant de fois 7 qu'il est nécessaire, pour

que le dernier reste soit divisible par 3, ainsi qu'il suit :

$46 - 7 = 39$ non divisible par 3,
$39 - 7 = 32$ non divisible par 3,
$32 - 7 = 25$ non divisible par 3,
$25 - 7 = 18$ divisible par 3.

Les deux nombres sont donc $7 \times 4 = 28$, et 18.

Quatrième manière. Enfin on peut appliquer la règle de fausse position de la manière suivante :

1° En supposant 14 pour la première partie, la seconde serait $46 - 14 = 32$; $\frac{14}{7} + \frac{32}{3} = 2 + 10\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$; erreur en plus $2\frac{2}{3}$, puisque la somme des quotients devrait être 10;

2° En supposant 21 pour la première partie, la seconde serait $46 - 21 = 25$; $\frac{21}{7} + \frac{25}{3} = 3 + 8\frac{1}{3} = 11\frac{1}{3}$; erreur en plus $1\frac{1}{3}$.

Et d'après la règle, la première partie sera

$$\frac{21 \times 2\frac{2}{3} - 14 \times 1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{112}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{112}{4} = 28.$$

140). La question revient à partager 129 en deux parties telles que la somme des quotients qu'on obtiendra en divisant l'une par 7 et l'autre par 3, soit égale à 23. Nous nous bornerons à indiquer la solution d'après la troisième méthode.

$129 - 7 = 122$ non divisible par 3,
$122 - 7 = 115$ non divisible par 3,
$115 - 7 = 108$ divisible; mais $\frac{108}{3} = 36$. Cette solution n'est pas admissible.
$108 - 7 = 101$ non divisible,
$101 - 7 = 94$ non divisible,
$94 - 7 = 87$ divisible; $\frac{87}{3} = 29$, non admissible.

En continuant ainsi on arrivera, après avoir soustrait 15 fois de suite le nombre 7, jusqu'à

$$31 - 7 = 24, \quad 15 + \frac{24}{3} = 23;$$

les deux nombres sont 105 et 24.

Elle a payé 105 fr. pour la première espèce, et 24 pour la seconde.

141). $\frac{5}{8} - \frac{2}{7} = \frac{19}{56}$. Les $\frac{19}{56}$ du nombre cherché sont 114; le nombre sera $\frac{114 \times 56}{19} = 336$.

142). Il y a donc 4 fois autant d'hommes que d'enfants, par conséquent le nombre des enfants n'est que le $\frac{1}{7}$ de 266, c'est-à-dire 38.

Il y a donc 38 enfants, 76 femmes, 152 hommes.

143). Le nombre des cavaliers sera le $\frac{1}{13}$ de 2600, c'est-à-dire 200. Le nombre des artilleurs sera $200 \times 3 = 600$, et celui des fantassins $200 \times 9 = 1800$.

144). Il suffit de partager le nombre 3040 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 1, $1 \times 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $\frac{7}{2} \times 2\frac{1}{3} = \frac{49}{6}$, ou comme les nombres $\frac{6}{6}$, $\frac{21}{6}$, $\frac{49}{6}$, et enfin comme les nombres 6, 21, 49, dont la somme $= 76$.

Il a donc parcouru à cheval $3040 \times \frac{6}{76} = 240$

par eau $3040 \times \frac{21}{76} = 840$

à pied $3040 \times \frac{49}{76} = 1960$

Somme égale 3040

145). Les $\frac{4}{3}$ du nombre $= 24$, le nombre est 18.

146). La première étant représentée par 1, la seconde sera $\frac{11}{5}$; et la troisième $1 + \frac{11}{5} = \frac{16}{5}$. Il s'agit de partager 8,64 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 5, 11 et 16, dont la somme $= 32$.

La 1re partie sera les $\frac{5}{32}$ de 8,64 $= 1,35$

La 2e $\frac{11}{32}$ de $= 2,97$

La 3e $\frac{16}{32}$ de $= 4,32$

Somme égale 8,64

147). L'âge de la seconde étant 1, celui de la première sera $\frac{2}{3}$, et celui de la troisième $\frac{4}{3}$, $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3}$.

Les $\frac{9}{3}$ ou le triple de la part de la seconde étant 1170 fr.

La 1re aura $\frac{1170}{3} = 390$

La 2e $390 \times \frac{2}{3} = 260$

La 3e $390 \times \frac{4}{3} = 520$

Somme égale 1170

148). La population de la seconde ville est les $\frac{5}{3}$ de la première, et celle de la troisième sera les $\frac{7}{8}$ des $\frac{5}{3}$ de la première $= \frac{35}{24}$. $1 + \frac{5}{3} + \frac{35}{24} = \frac{99}{24}$.

Les $\frac{99}{24}$ d'un nombre sont 594

Le $\frac{1}{24}$ sera $\frac{594}{99} = 6$,

et le nombre lui-même $6 \times 24 = 144$.

Le contingent de la 1re ville sera de 144 hommes,

de la 2e 240

de la 3e 210

Total égal 594

149). La créance du quatrième étant prise pour unité, celle du troisième sera $\frac{6}{7}$; du deuxième $\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{35}$; du premier $\frac{24}{35} \times \frac{2}{3} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$;

$$1 + \frac{6}{7} + \frac{24}{35} + \frac{16}{35} = \frac{105}{35} = 3.$$

Le triple de la créance du quatrième étant 21000 fr.,

elle sera $\frac{21000}{3} = 7000$

celle du 3e $= 6000$

celle du 2e $= 4800$

celle du 1er $= 3200$

Total égal... 21000

150). $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{80}{240} + \frac{30}{240} + \frac{24}{240} = \frac{134}{240}$; $1 - \frac{134}{240} = \frac{106}{240}$.

Les $\frac{106}{240}$ de ce qu'il gagne font 318 fr.

$\frac{1}{240}$ $\frac{318}{106} = 3$.

$\frac{240}{240}$ $3 \times 240 = 720$.

L'ouvrier gagne 720 fr. par an.

151). 115 fr. intérêt et capital proviennent
de 100 fr. de capital.

$1 \qquad \frac{100}{115}.$

$15571 \qquad \frac{100\times15571}{115}=13540.$

Le capital est de 13540 fr.

152). $104^{fr},50$ proviennent de 100 fr.

$1 \qquad \frac{100}{104.50}.$

$13167 \qquad \frac{100\times13167}{104.50}=12600.$

Le capital est de 12600 fr.

153). 100 fr. au bout de 5 ans donnent 15 fr. d'intérêt.

Donc, si 115 proviennent de 100 fr.

$1 \qquad \frac{100}{115}.$

$69000 \qquad \frac{100\times69000}{115}=60000.$

Le capital est de 60000 fr.

154). 108 fr. proviennent de 100 fr.

$1 \qquad \frac{100}{108}.$

$1890 \qquad \frac{100\times1890}{108}=1750.$

Le revenu de l'année précédente était de 1750 fr.

155). Les 100 kilogrammes seront vendus 180 fr.

Si $112\frac{1}{2}$ proviennent de 100 fr.

$1 \qquad \frac{100}{112\frac{1}{2}}=\frac{200}{225}.$

$180 \qquad \frac{200\times180}{225}=160.$

Les 100 kilogrammes lui coûtent 160 fr.

Ces problèmes, ainsi que quelques-uns des précédents se résolvent à l'aide des proportions de la manière suivante :

Soient x le capital et y l'intérêt de ce capital, puisque les capitaux sont proportionnels aux intérêts,

on aura $\qquad 100 : 12\frac{1}{2} :: x : y;$

d'où $\qquad 100+12\frac{1}{2} : 100 :: x+y : x;$

et comme $\qquad x+y=180.$

On aura $\qquad 112\frac{1}{2} : 100 :: 180 : x;$

d'où $\qquad x=\frac{180\times100}{112\frac{1}{2}}=160.$

156). 120 fr. proviennnent de 100 fr.

$1 \qquad \frac{100}{120}.$

$8208 \qquad \frac{100\times8208}{120}=6840.$

Le capital est de 6840 fr.

157). $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}; \quad \frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}.$

$\frac{1}{15}$ de la valeur totale des objets égale 3 fr.; la valeur totale est donc de $3^{fr}\times15=45$ fr.

158). $96-16=80$ représente le double du plus petit, qui est donc 40; $96+16=112$ représente le double du plus grand qui est 56.

Les deux parties sont 56 et 40.

159). Les $\frac{3}{2}$ de ce qui revient à celui qui doit avoir la plus grande part font 500—50=450; il aura donc $\frac{450\times2}{3}=300$, et l'autre $150+50=200$.

160). Si l'on retranche de 1520, $100+100+270=470$, le reste $1520-470=1050$ représentera le triple de la première part, qui sera par conséquent $\frac{1050}{3}=350$

la 2e part $350+100=450$

la 3e part $450+270=720$

Total égal 1520

161). En désignant la part

d'une fille par 1,	celle des 3 filles sera 3
celle du garçon sera 2,	2 garçons 4
celle de la mère sera	$3+4=7$
	Total 14

Donc $7500-500=7000$ représentera 14 parts de filles et par conséquent la part

de chaque fille sera $\frac{7000}{14}=500.$	
de chaque garçon	1000.
Pour les 3 filles	1500
pour les 2 garçons	2000
pour la mère $3500+500=$	4000
Total égal	7500

162). $90-(4\times 2+10)=90-18=72$ représente le quadruple du nombre de femmes, qui est par conséquent de $\frac{72}{4}=18$

celui des hommes $=$	22
celui des enfants $=$	50
Total égal	90

163). Si de 80 on retranche $2,76+11,12=13,88$, le reste 66,12 sera le triple de la part du deuxième, qui aura par conséquent 22 hectares et 4 ares

le premier	24	80
le troisième	33	16
Total égal	80	

164). [illegible] 1000 il faut retrancher

$$20+40+60+80+100=300,$$

ce qui donne pour reste 700, qui représente le quintuple de la part du plus jeune.

Le plus jeune aura donc $\frac{700}{5}=160$ fr.

165). $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$; $3000+1000-800=3200.$

Les $\frac{13}{12}$ de la somme diminuée de 3200 fr. devant être égaux à la somme elle-même ou à $\frac{12}{12}$, le $\frac{1}{12}$ de la somme sera égal à 3200, et par conséquent la somme à partager sera $3200\times 12=38400$ fr.

la part de la 1^re^	16200
de la 2^e^	11800
de la 3^e^	10400
Total égal	38400

166). $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$; le $\frac{1}{12}$ de l'héritage est donc représenté par 600 fr. L'héritage se monte par conséquent à $600^{fr}\times 12=7200$ fr.

167). La part du deuxième étant prise pour unité, celle du premier sera $\frac{11}{6}$, celle du deuxième $\frac{6}{6}$ et celle du troisième $\frac{17}{6}$ augmenté de 3 hectares ; $\frac{11+6+17}{6}=\frac{34}{6}$.

Les $\frac{34}{6}$ de la part du deuxième font $28^{h}50-3=25,50$,

par conséquent la part du 2^e^ sera $\frac{25^{h}50\times 6}{34}=4^{h}50$

celle du 1^er^	$8^{h}25$
celle du 3^e^	$15^{h}75$
Total égal	$28^{h}50$

168). La part du quatrième étant prise pour unité; celle du troisième est 360 fr.; celle du deuxième $1+360$ fr.; celle du premier sera $2+720^{fr}-1000^{fr}$.

$$360+360+720-1000=440;$$

$2520-440=2080$ représente donc quatre fois la part du 4^e^ qui est 520; celle du 2^e^, $520+360=880$; celle du 1^er^, $880\times 2-1000=760$.

169). La 1^{re} ayant 1

La 2^e aura	$2 + 200^{fr}$	
La 3^e	$3 - 400$	
La 4^e	$\frac{5}{2} + 50$	$(+200^{fr} - 400^{fr} + 300^{fr}$ divisés par 2 donnent $50^{fr})$
La 5^e	$\frac{17}{8} + 437^{fr},50^c$	

$1+2+3+\frac{5}{2}+\frac{17}{8}=\frac{85}{8}$; $200-400+50+437,50=287,50$.

Donc les $\frac{85}{8}$ de la 1^{re} part font $5600-287,50=5312,50$ et par conséquent la 1^{re} part est $5312,50 \times \frac{8}{85} = 500$ f.

la 2^e	1200
la 3^e	1100
la 4^e	1300
la 6^e	1500
Total égal	5600

170). La perte du 1^{er} étant 1

Celle du 2^e	$3 + 50^c$
3^e	$6 - 1^{fr}$
4^e	$4 + 25^c$
5^e	$5 - 2^{fr}$

$$50^c - 1^{fr} + 25^c - 2^{fr} = 75^c - 3^{fr} = -2^{fr},25^c$$

$1+3+6+4+6=20$; donc 20 fois la perte du premier diminuée de 2 fr. 25 c. valent 17 fr. 75 c., et, par conséquent, 20 fois la perte du premier vaut

$$17,75 + 2,25 = 20^{fr}$$

Donc le 1^{er} a perdu	$\frac{20}{20} = 1^{fr}$
le 2^e	$3,50^c$
le 3^e	5
le 4^e	4,25
le 5^e	4
Total égal	$17^{fr},75^c$

171). Le problème revient à trouver deux nombres dont la somme égale 40 et la différence 8.

Les deux nombres sont donc $\frac{40+8}{2} = 24$

$\frac{40-8}{2} = 16$.

Le marchand a vendu 16 kilogrammes.

172). J'ai dépensé le $\frac{1}{4}$ de 42 fr. ou 10 fr. 50 c.

173). A la fin de la dernière partie, la seconde n'a plus que le $\frac{1}{6}$ de $42 + 24 = 66$, c'est-à-dire 11 fr. Elle a donc perdu $24 - 11 = 13$ parties.

174). Il s'agit de partager 1250 en deux parties telles que la somme des produits de la première par 15 et de la seconde par 10 soit égale à 13500.

D'après cet énoncé, la première partie augmentée des $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ de la seconde devrait faire $\frac{13500}{15} = 900$.

Par conséquent $1250 - 900 = 350$ représente $(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ de la seconde, qui est donc $350 \times 3 = 1050$.

Il y avait donc 1050 fantassins et 200 cavaliers.

175).

Le maître reçoit		$3^{fr},45$
les 12 maçons reçoivent	$1^{fr},25 \times 12$	15
les 4 manœuvres	$0,85 \times 4$	$3,40$
		$21^{fr},85$.

Divisant 196,65 par 21,85 on trouve 9 pour le nombre de jours cherché.

176). L'intérêt d'un capital à 4 pour 100 est les $\frac{4}{100}$ de ce capital. Par suite l'intérêt au même taux des $\frac{4}{5}$ de ce capital sera $\frac{4}{100} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{500}$ du capital.

De même l'intérêt à 5 pour 100 du $\frac{1}{5}$ du capital, sera les $\frac{5}{500}$ de ce capital.

Donc les $(\frac{16+5}{500}) = \frac{21}{500}$ du capital demandé font 2940, et le capital sera $\frac{2940 \times 500}{21} = 70000$ fr.

En effet,

le $\frac{1}{5}$ de 70000	est 14000	dont l'intérêt	à 5 p. $\frac{0}{0}$	700^{fr}
les $\frac{4}{5}$ de 70000	56000		à 4 p. $\frac{0}{0}$	2240
			Total égal	2940^{fr}

177). En prenant un ordre inverse, on verra que le quotient de la division par 2 est $15+4=19$, et par conséquent le résultat précédent est $19\times2=38$; donc le produit par 7 est $38-3=35$ et le nombre cherché $\frac{35}{7}=5$.

178). Le 2^e étant représenté par 1

le 1^{er} sera	2 augmenté	de 1
le 3^e	3	de 3
	6	4

Si donc on retranche 4 de 70, le reste 66 sera le sextuple du deuxième nombre, qui sera $\frac{66}{6}=11$, le premier sera donc $11\times2+1=23$, et le troisième

$$11\times3+3=36.$$

179). Le produit du reste par 4 est, d'après l'énoncé, $230-2=228$; ce reste est donc $\frac{228}{4}=57$; le produit du nombre par 5 est par conséquent $57+3=60$; et le nombre demandé $\frac{60}{5}=12$.

180). D'après l'énoncé, 5 fois le nombre, diminué de 24, doit être égal à 6 fois le nombre diminué de $13\times6=78$; le nombre sera donc $78-24=54$.

Deuxième manière. En supposant que ce nombre soit 12, $12\times5=60$, $60-24=36$, $\frac{36}{6}=6$, $6+13=19$; erreur $19-12=7$.

En supposant que ce nombre soit 18,

$18\times5=90$, $90-24=66$, $\frac{66}{6}=11$, $11+13=24$;

erreur $24-18=6$.

Multipliant en croix les nombres supposés et les erreurs, et divisant la différence des produits par la différence des erreurs on aura pour le nombre cherché $\frac{18\times7-12\times6}{7-6}=54$.

181). Le premier en 10 jours aura fait $4^{myr}\times10=40$ myriamètres d'avance sur le second.

Mais celui-ci, en un jour, gagne $9-4=5$ myriamètres sur le premier; autant de fois donc que 5 est compris dans 40, autant il mettra de jours pour le rattraper; il mettra donc $\frac{40}{5}=8$ jours.

Deuxième manière. Appliquant la règle de fausse position, en prenant pour nombres 7 et 12, on aura

	$4\times10+4\times7=68$	
	$9\times7=63$	
Erreur en moins	5	7
	$4\times10+4\times12=88$	
	$9\times12=108$	
Erreur en plus	20	12

Multipliant en croix, ajoutant les produits, puisque les erreurs sont en sens inverse, et divisant par la somme des erreurs, on aura pour le nombre cherché

$$\frac{5\times12+7\times20}{5+20}=8.$$

182). Le premier, parti 12 jours avant le second aura une avance exprimée par 12, en prenant pour unité sa vitesse par jour. La vitesse du second sera $\frac{8}{3}$; et par conséquent, il gagne par jour une distance exprimée par $\frac{8}{3}-\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$.

Donc autant de fois 12 contient $\frac{5}{3}$, autant il mettra de jours pour rejoindre le premier; $12:\frac{5}{3}=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}$; le second courrier rejoindra le premier après $7\frac{1}{5}$ jours de marche.

183). Le premier courrier fait $\frac{7}{5}$ myriamètres en 1 heure; et par conséquent il a une avance de $\frac{7\times8}{5}=\frac{56}{5}$ myriamètres.

Le second courrier fait $\frac{5}{3}$ myriamètres en 1 heure, et par conséquent il gagne sur le premier $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{4}{15}$ myriamètres en 1 heure.

$\frac{56}{5}:\frac{4}{15}=42$. Le second courrier aura atteint le premier après 42 heures.

184). $8:\frac{4}{15}=30$. Le second le rejoindrait en 30 heures.

185). Le premier a une avance de $3\frac{1}{2}\times 8=28$ myriamètres. Chaque jour les deux courriers comblent l'intervalle de $3\frac{1}{2}+5\frac{1}{6}=\frac{52}{6}$ myriamètres. Or, cet intervalle, au moment du départ du second courrier, est $80-28=52$. $52:\frac{52}{6}=6$. Donc les deux courriers se rejoindront après 6 jours de marche du second, et par conséquent après $8+6=14$ jours pour le premier.

186). En 2 jours, la première division aura fait $4\frac{1}{2}\times 2=9$ myriamètres; pendant 6 jours, elle fera $4\frac{1}{2}\times 6=27$ myriamètres.

$9+27=36$. La seconde division devra donc faire $\frac{36}{6}=6$ myriamètres par jour.

187). A ce moment les aiguilles ont entre elles $12\frac{1}{2}$ divisions du cadran, et l'aiguille des minutes pour rencontrer celle des heures, doit parcourir $60-12\frac{1}{2}=47\frac{1}{2}$ divisions plus le nombre de divisions que parcourra celle des heures avant le moment de leur rencontre; autrement dit, l'aiguille des heures a $47\frac{1}{2}$ divisions sur celle des minutes.

Mais dans une heure l'aiguille des minutes parcourt 60 divisions, tandis que celle des heures n'en parcourt que 5. Donc en une heure, l'aiguille des minutes gagne 55 divisions sur celle des heures. Pour en gagner $47\frac{1}{2}$, elle mettra un nombre d'heures exprimé par

$$\frac{47\frac{1}{2}}{55}=51 \text{ minutes } 49 \text{ secondes et } \frac{1}{11} \text{ de seconde;}$$

il sera donc au moment de la rencontre des deux aiguilles $3^h-30^m+51^m49^s\frac{1}{11}$ ou $4^h21^m49^s\frac{1}{11}$.

188). Les quantités de liquide versées dans le même temps par les deux fontaines sont entre elles comme les produits 5×8 et 13×7 ou 40 et 91.

Si dans l'unité de temps, la première verse une quantité de liquide exprimée par 1, la quantité de liquide versée par la seconde sera $\frac{91}{40}$; $\frac{91}{40}-\frac{40}{40}=\frac{51}{40}$.

Dans l'unité de temps, la seconde fontaine donne de plus que la première $\frac{51}{40}$; donc autant de fois 561 contiendra $\frac{51}{40}$, autant il y aura d'unités de temps. $561:\frac{51}{40}=440$. La première fontaine donne dans ce temps une quantité de liquide exprimée par

$$1\times 440=440,$$

et la seconde une quantité exprimée par

$$\frac{91}{40}\times 440=1001.$$

La différence entre 1001 et 440 est en effet 561.

189). Pendant que le lièvre fait 1 saut, le lévrier en fait $\frac{5}{6}$ des siens, qui valent chacun les $\frac{9}{7}$ de ceux du lièvre.

Par conséquent pendant que le lièvre fait un saut, le lévrier parcourt une distance exprimée par $\frac{5}{6}\times\frac{9}{7}=\frac{45}{42}$ sauts de lièvre.

Le premier perd donc à chaque saut une distance exprimée par $\frac{45}{42}-1=\frac{3}{42}=\frac{1}{14}$.

Pour perdre une avance de 50 sauts, il fera un nombre de sauts exprimé par $50:\frac{1}{14}=700$.

Le lièvre fera 700 sauts avant d'être atteint par le lévrier.

Deuxième manière. Soient x et x' les nombres de sauts du lièvre et du lévrier, on a la proportion

$$x:x'::6:5$$

Désignant par l et l' les longueurs de chacun de ces sauts, on aura aussi la proportion

$$l:l'::7:9.$$

Multipliant terme à terme, il vient

$$x\times l : x'\times l' :: 6\times 7 : 5\times 9 \quad \text{ou} \quad :: 42 : 45$$

d'où $\quad x\times l : x'\times l' - x\times l :: 42 : 45-42.$

Mais $x\times l$, $x'\times l'$ expriment la distance parcourue par le lièvre et par le lévrier, et, d'après l'énoncé

$$x'\times l' - x\times l = 50\times l;$$

on a donc $\quad x\times l : 50\times l :: 42 : 3,$

ou $\quad x : 50 :: 42 : 3 \quad$ d'où $\quad x=\frac{42\times 50}{3}=700.$

190). Pendant que le second mortier envoie 1 bombe, le premier en envoie $\frac{8}{7}$; chaque bombe du second dépense les $\frac{3}{4}$ de la quantité de poudre de chaque bombe du premier.

Par conséquent, pendant que le second dépense une quantité de poudre exprimée par 1, le premier dépense une quantité exprimée par $\frac{8}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$. La différence entre 1 et $\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$.

Avec la quantité de poudre employée par le premier mortier pour fournir les 36 bombes, le second aurait envoyé $36\times\frac{3}{4}=27$ bombes.

Le nombre de bombes que doit lancer le second mortier sera exprimé par $27:\frac{1}{7}=27\times 7=189$.

Deuxième manière. On pourrait, comme dans le numéro précédent, résoudre ce problème au moyen des proportions.

Désignant par x, x' les nombres de bombes lancées par le premier et le second mortier, on a la proportion

$$x : x' :: 8 : 7,$$

désignant encore par p, p' les quantités de poudre nécessaires pour chaque bombe, on a la nouvelle proportion

$$p : p' :: 3 : 4.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, on a

$$p\times x : p'\times x' :: 3\times 8 : 4\times 7 :: 24 : 28 :: 6 : 7,$$

d'où $\quad p'\times x - p\times x : p'\times x' :: 7-6 : 7;$

mais d'après l'énoncé

$$p'\times x' - p\times x = p\times 36 = \tfrac{3}{4}p'\times 36 = 27p',$$

on a donc $\quad 27p' : p'\times x' :: 1 : 7,$

d'où $\quad 27 : x' :: 1 : 7 \quad$ et $\quad x'=27\times 7=189.$

191). La longueur du pas du premier voyageur est à la longueur du pas du second $:: 1 : \frac{1}{2}$; mais pendant le temps que le premier fait 1 pas, le second en fait 5.

Par conséquent, pour 1 pas du premier, le second en fait un nombre exprimé par $\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$; la différence entre $\frac{5}{2}$ et 1 est $\frac{3}{2}$; donc, à chaque pas du premier, il perdra de son avance une partie exprimée par $\frac{3}{2}$; donc aussi autant de fois $\frac{3}{2}$ sera contenu dans 3000, autant de pas le premier aura fait avant d'être atteint par le second. Il aura fait $\frac{3000\times 2}{3}=2000$ pas.

Pendant ce temps le second aura fait 5 fois la distance de 2000 pas du premier, qui valent 5 fois 2000 demi-pas du second, et par conséquent 5000 pas.

On appliquerait les proportions comme dans les deux numéros précédents.

192). L'intérêt de 5500 fr. à 4 pour 100 est pour un an $\frac{5500\times 4}{100}=220$ fr.; et pour 4 ans $\frac{1}{2}$, $220\times\frac{9}{2}=990$ fr. L'intérêt de 8000 fr. à 5 pour 100 pour un an est $\frac{8000\times 5}{100}=400$. Chaque année l'intérêt de la seconde somme diminue la différence primitive 990 francs de $400-220=180$; donc il faudra autant d'années pour annuler cette différence que 180 est contenu de fois dans 990; $\frac{990}{180}=5\frac{1}{2}$. Il faudra donc 5 ans $\frac{1}{2}$ à compter du placement de la seconde somme ou $5\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=10^{\text{ans}}$, à compter du moment où la première somme a été placée.

193). 1 tour de la roue de derrière fait parcourir à la voiture $2\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$ de mètre.

1 tour de la roue de devant lui fait parcourir $1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$ de mètre.

$\frac{19}{8} - \frac{14}{8} = \frac{5}{8}$, différence des longueurs parcourues pour un tour de chaque roue.

Les 2000 tours de la roue de devant ont fait parcourir à la voiture une distance de

$$\frac{14}{8} \times 2000 = 250 \times 14 = 3500 \text{ mètres}.$$

Autant de fois 3500 contient $\frac{5}{8}$, autant de tours la roue de derrière aura fait. Elle aura donc fait

$$\frac{3500 \times 8}{5} = 5600 \text{ tours},$$

alors la voiture a parcouru $\frac{19}{8} \times 5600 = 13300$ mètres, longueur de la route.

Comme vérification, on voit que la petite roue aura fait $5600 + 2000 = 7600$ tours; $\frac{14^{m}}{8} \times 7600 = 13300^{met.}$

194).

	36	10
30		
	20	6.

Les nombres de litres qu'on doit prendre doivent être entre eux comme 10 : 6 ou 5 : 3; par conséquent il suffit de partager 50 litres en deux parties qui soient dans le rapport de 5 à 3; ce qui donne 31 litres, 25 de la première espèce, et 18,75 de la seconde.

195).

	0,910	14
0,889		
	0,875	21.

Il faut partager 100 grammes en deux parties qui soient entre elles comme 2 est à 3. Ce qui donne 40 grammes pour la première et 60 pour la seconde.

196). Le mélange à 1 fr. 60 cent. le litre vaudra toujours $2^{fr} \times 136 = 272$ fr. La quantité de litres du mélange sera donc $\frac{272}{1,60} = 170$, $170 - 136 = 34$. Le marchand mettra donc 34 litres d'eau dans son vin.

197). Les 35 kilogrammes à 0,900 de fin contiennent $35 \times 0{,}900 = 31{,}50$ kilogrammes d'argent pur.

$\frac{31{,}50}{0{,}787\frac{1}{2}} = 40$; $40 - 35 = 5$. Il faut mêler 5 kilogrammes de cuivre.

198).

	0,780	0,080
0,720		
	0,640	0,060.

Au titre moyen de 0,720, les nombres qui doivent former l'alliage doivent être entre eux comme les nombres 4 et 3; mais le nombre correspondant au titre inférieur étant 3,20, le nombre cherché correspondant au titre supérieur sera les $\frac{4}{3}$ de 3,20 ou $4{,}26\frac{2}{3}$; il faudra donc allier 4 kilogrammes 26 décagrammes $\frac{2}{3}$.

199). $\frac{14^{fr}}{16} = 0{,}875$. En considérant 0,875 comme la valeur moyenne d'une pièce, les nombres de pièces de 2 fr. et de 50 cent. qu'il faudra prendre, doivent être entre eux comme les nombres 0,375 et 1,125 ou :: 1 : 3. Il ne s'agit donc plus que de partager 16 en deux parties qui soient dans ce rapport; on prendra donc 4 pièces de 2 fr. et 12 pièces de 50 cent.

200). La différence entre les deux âges devant rester toujours la même et égale à $40 - 9 = 31$, 31 est précisément l'âge qu'aura le fils à cette époque, et ce sera dans $31 - 9 = 22$ ans.

Le père aura alors $40 + 22 = 62$, qui est en effet le double de 31.

201). La différence entre les deux âges sera toujours, à l'époque demandée, $30 - 20 = 10$. $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$; 10 est donc le quart de l'âge qu'aura alors le plus jeune; il aura par conséquent $10 \times 4 = 40$. Le temps demandé est donc $40 - 20 = 20$ ans.

Le même raisonnement sert à résoudre ce problème: *Étant donnée une fraction quelconque, trouver le nom-*

bre qu'il faut ajouter au numérateur et au dénominateur pour que la fraction nouvelle soit égale à une autre fraction donnée.

202). A cette époque la différence 10 était le quintuple de l'âge du plus jeune; il avait donc $\frac{10}{5}=2$. Et cela a eu lieu il y a $20-2=18$ ans.

203). A cette époque l'âge des trois frères sera égal au double de celui de l'aîné; $20+6=26$, $40-26=14$; dans 14 ans.

204). A cette époque, d'après l'énoncé, la somme des quatre âges était égale au double de l'âge de l'oncle;

$$30+20+6=56,\quad 56-49=7.$$

7 représente donc le double du temps demandé, lequel sera par conséquent 3 ans $\frac{1}{2}$.

Deuxième manière. — 1. Les problèmes des numéros précédents 200, 202, 203, 204, se résolvent facilement à l'aide des proportions par différence; dont la théorie se résume dans les propositions suivantes :

PRINCIPE FONDAMENTAL. *Dans toute proportion par différence, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Soit la proportion par différence

$$10\,.\,7 : 12\,.\,9,$$

d'après la nature des rapports par différence, l'antécédent est égal au conséquent plus la raison, qui est ici 3, on a donc, en remplaçant 10 par $7+3$ et 12 par $9+3$,

$$7+3\,.\,7 : 9+3\,.\,9;$$

où l'on voit que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, puisque ces deux sommes se composent des mêmes nombres.

2. Cette propriété n'appartient qu'aux proportions par différence, ainsi qu'il est aisé de le démontrer; et par conséquent,

Si la somme de deux nombres est égale à celle de deux autres nombres, on peut former une proportion par différence avec ces quatre nombres, en prenant les deux premiers pour moyens ou pour extrêmes, et les deux derniers pour extrêmes ou pour moyens.

Si l'on a, par exemple, $8+5=10+3$, on formera la proportion $8\,.\,3 : 10\,.\,5$.

3. *Dans toute proportion par différence dont trois termes sont connus, le quatrième s'obtient*, s'il est extrême, *en faisant la somme des moyens et retranchant de cette somme l'extrême connu;* s'il est moyen, *en faisant la somme des extrêmes et retranchant de cette somme le moyen connu.*

Si l'on a $10\,.\,7 : 15\,.\,x$, comme on doit avoir, d'après le principe fondamental $10+x=7+15$, $x=(7+15)-10=12$.

APPLICATIONS. N° 200. Soit x l'âge qu'aura le fils à l'époque demandée; celui du père sera $2x$, et comme la différence entre les âges devra être la même, on aura la proportion

$$40\,.\,9 : 2x\,.\,x.$$

Simplifiant le second rapport en retranchant x aux deux termes, on aura $40\,.\,9 : x\,.\,0$, d'où $x=(40+0)-9=31$.

N°s 202, 203, 204. Les problèmes se résolvent d'une manière analogue.

Le problème du n° 201 se résout à l'aide des proportions par quotient de la manière suivante :

Soit x le temps cherché, à cette époque le premier aura $30+x$, et le second, $20+x$; et d'après l'énoncé, on aura la proportion

$$5:4::30+x:20+x,$$

d'où l'on tire $\quad 5-4:4::30-20:20+x,$

d'où $\quad 20+x=\frac{4\times10}{1},\quad x=20.$

205). Soit x le nombre d'années demandé, l'oncle avait $49-x$, les deux neveux $30-x$, $20-x$, dont la somme $=50-2x$; et d'après l'énoncé

$$5:4::49-x:50-2x;$$

d'où l'on tire $5-4:5::x-1:49-x$,

ou $\quad 1:5::x-1:49-x;$

et de cette proportion

$$1:1+5::x-1:48;$$

d'où $\quad x-1=\frac{48}{6}=8\;$ et $\;x=8+1=9.$

Il y a donc 9 ans.

Deuxième manière. Par la règle de fausse position, si l'on prend pour hypothèses les nombres 5 et 7, on trouve pour erreurs en plus 6 et 3.

Le nombre cherché est donc $\frac{6\times7-3\times5}{6-3}=9$.

206). Le soufre est donc les $\frac{3}{10}$ de 80 kilogrammes $=24$ kilogrammes. D'après la deuxième condition, le soufre doit être les $\frac{4}{15}$ de la masse totale du nouveau mélange. La masse totale sera donc $24\times\frac{15}{4}=90^{\text{kilog}}$. $90-80=10$. On a donc ajouté 10 kilogrammes de salpêtre.

En effet, il y avait primitivement 56 kilogrammes de salpêtre et 24 de soufre; dans le mélange il y aura $56+10=66$ et 24 de soufre : $\frac{66}{24}=\frac{11}{4}$.

207). Les $\frac{7}{10}$ de $80^{\text{kilog}}=56^{\text{kilog}}$. 56 sont donc les $\frac{11}{15}$ de la masse du mélange. Le mélange est donc $56\times\frac{15}{11}=76\frac{4}{11}$.

$80-76\frac{4}{11}=3\frac{7}{11}$. Il faudra donc retrancher $3\frac{7}{11}{}^{\text{kilog}}$ de soufre.

208). Il suffit de partager 80 en deux parties qui soient entre elles comme 11 et 4; ce qui donne $58\frac{2}{3}$ pour la première et $21\frac{1}{3}$ pour la seconde. On a donc ajouté et retranché $58\frac{2}{3}-56=2\frac{2}{3}$ kilogrammes.

209). Si l'on suppose 1° que le nombre des hommes est 30, celui des femmes sera $\frac{30}{3}=10$.

Après le départ de 8 hommes et de 8 femmes, le nombre des premiers sera $30-8=22$ et celui des femmes $10-8=2$. $2\times5=10$, au lieu de 22; erreur en moins 12.

2° que le nombre des hommes soit 36, celui des femmes sera $\frac{36}{3}=12$; et après le départ le nombre des hommes sera $36-8=28$ et celui des femmes $12-8=4$; $4\times5=20$; erreur en moins $28-20=8$.

Le nombre des hommes sera donc $\frac{36\times12-30\times8}{12-8}=48$; celui des femmes $\frac{48}{3}=16$.

210). En 1 heure le 1^er vide la $\frac{1}{2}$ du tonneau;

le 2^e $\frac{1}{3}$

le 3^e $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}.$$

En 1 heure les 3 robinets vident les $\frac{13}{12}$ du tonneau; ils mettront donc $\frac{12}{13}$ d'heure $=55$ minutes $\frac{5}{13}$.

211). En 1 heure la 1^re fontaine donne les $\frac{3}{4}$ du bassin;

la 2^e $\frac{3}{10}$

la 3^e $\frac{1}{5}$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{5}{4}.$$

Le bassin sera rempli en $\frac{4}{5}$ d'heure $=48$ minutes.

212). Le 1^er fait $\frac{8}{5}{}^{\text{met.cub}}$ en un jour;

le 2^e $\frac{9}{4}$

le 3^e $\frac{5}{3}$

Somme $\frac{331}{60}$ $\quad 756:\frac{331}{60}=137\frac{13}{331}$.

Les trois ouvriers mettront $137\frac{13}{331}$ jours.

213). La 1^re donne $\frac{48}{13}{}^{\text{met.cub}}$

la 2 $\frac{22}{15}$

la 3^e $\frac{17}{3}$

Somme $\frac{1007}{65}$ $\quad 755\frac{1}{4}:\frac{1007}{65}=48\frac{3}{4}$.

Elles mettront 48 heures $\frac{3}{4}$.

214). 1 centimètre cube du 1^er pèse $\frac{69\frac{3}{4}}{5}=\frac{279}{20}$ grammes.

1 du 2^e $\frac{41}{3\frac{1}{3}}=\frac{123}{10}$

1 du 3^e $\frac{91}{4\frac{2}{7}}=\frac{637}{30}$.

Somme $\frac{2849}{60}$

$$949\frac{2}{3}:\frac{2849}{60}=20.$$

Le volume de chaque lingot est de 20 centimètres cubes.

215). $16-10=6$, $300+240=540$. 6 fr. multiplié par le nombre de personnes doit faire 540 fr., par conséquent ce nombre est $\frac{540}{6}=90$

Et la somme est $16^{\text{fr}}\times90-240^{\text{fr}}=1200^{\text{fr}}$.

216). $30 - 22 = 8$. 8 fr. multiplié par le nombre de quintaux métriques doit faire $360 + 120 = 480$ fr. Le nombre de quintaux métriques est donc $\frac{480}{8} = 60$.

$60 \times 30 - 120 = 1680$; $\frac{1680}{60} = 28$ prix du quintal métrique auquel il a vendu sa marchandise.

217). $5 - 4 = 1$. 1 fr. multiplié par le nombre de billets doit faire $50 + 30 = 80$, nombre de billets. Le prix de la montre est $4^{fr} \times 80 + 30^{fr} = 350^{fr}$.

218). $1,75 - 1,40 = 0,35$. 35 centimes multiplié par le nombre d'ouvriers doit donner $3^{fr} + 2^{fr},25 = 5^{fr},25$. Le nombre des ouvriers est $\frac{5,25}{0,35} = 15$; et la somme accordée est $1,40 \times 15 + 3 = 24$ fr.

219). La différence entre le septuple et le quintuple d'un des nombres doit être égale à $34 - 10 = 24$.

Par conséquent le double de ce nombre étant 24, ce nombre sera $\frac{24}{2} = 12$.

L'autre nombre sera $12 \times 5 - 10 = 50$.

220). 6 fois ce nombre font 40; le nombre est $6\frac{2}{3}$.

221). Ce que gagne l'ouvrier multiplié par $3\frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}$, doit faire le double de 540; par conséquent ce qu'il gagne est égal à $1080 : 4\frac{1}{2} = 240$.

222). Le nombre de feuilles que le copiste écrirait par jour, dans le second cas, serait les $\frac{10}{4}$ de ce qu'il écrit dans le premier; et ce rapport sera le même pour la semaine.

$\frac{10}{4} + 1 = \frac{14}{4}$. $\frac{14}{4}$ multiplié par le nombre de feuilles écrites doit être égal au double de $70 = 140$; par conséquent ce nombre est $140 \times \frac{4}{14} = 40$.

223). La différence entre 44 mètres et 100 fois la longueur de mon pas doit être la même que la différence entre 100 fois les $\frac{6}{5}$ de mon pas et 44;

$$100 \times \tfrac{6}{5} + 100 = 100 \times \tfrac{11}{5} = 20 \times 11 = 220.$$

Donc la longueur du pas multiplié par 220 doit être égale à 88 mètres, et par conséquent la longueur du pas est $\frac{88}{220} = 0^m,40 = 40$ centimètres.

224). $(1 + \frac{1}{3}) \times 2\frac{1}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{3}$, $176 \times 2\frac{1}{2} = 440$, $1000 - 440 = 560$.

La question revient à trouver un nombre tel que la différence entre le produit de ce nombre par $\frac{10}{3}$ et 560 soit la même que la différence entre 1000 et ce même nombre.

$$\tfrac{10}{3} + 1 = \tfrac{13}{3}, \quad 1000 + 560 = 1560.$$

Donc le nombre cherché multiplié par $\frac{13}{3}$ doit donner pour produit 1560, ce nombre est donc $1560 \times \frac{3}{13} = 360$

La distance est de 360 mètres.

225). $1600 - 1250 = 350$; $10000 + 1200 = 11200$.

Le nombre des débiteurs multiplié par 350 doit donner pour produit 11200, le nombre est donc $\frac{11200}{350} = 32$, le prix de la maison $1250 \times 32 + 10000 = 50000$, et la somme à réclamer de chacun d'eux

$$\frac{50000^{fr}}{32} = 1562^{fr},50.$$

226). L'intérêt de 2832 fr. pendant 3 mois est le même

que celui de		2832 × 3 =	8496 pendant 1^{mois};
l'intérêt de	2760	9	23040
de	1450	16	23200
Somme	6842		54736.

$\frac{54736}{6842} = 8$. L'échéance sera donc à 8 mois.

227). Le temps demandé ne court qu'à partir du dernier prêt de 8000 fr.

L'intérêt de 16000 fr. pendant 15 mois est représenté par $16000 \times 15 = 240000$.

L'intérêt de 5000 pendant $6+8=14$ mois représentés par 70000

3000	8	24000
Total des deux derniers intérêts		94000

$240000-94000=146000$; $\frac{146000}{16000}=\frac{146}{16}=9\frac{1}{8}$.

Le marchand peut garder le capital prêté 9 mois $\frac{1}{8}$ après le dernier prêt.

228). 400 vaches, pendant 16 mois, représentent

$400\times16=6400$ pendant 1 mois.

200 vaches, pendant $7+8=15$ mois, représentent

$200\times15=3000$ pendant 1 mois.

250 vaches, pendant 8 mois, représentent

$250\times8=2000$ pendant 1 mois.

$3000+2000=5000$; $6400-5000=1400$; $\frac{1400}{600}=2\frac{1}{3}$

Le propriétaire doit laisser paître le troupeau pendant 2 mois $\frac{1}{3}$, après l'envoi des 150 vaches.

229). $1+2+3+4=10$; $750\times10=7500$.

4500 pendant 12 mois sont représentés par 54000;

$\frac{54000}{7500}=7\frac{1}{5}$.

L'intervalle d'un terme à l'autre sera de 7 mois $\frac{1}{5}$.

230). 1376 f. dans 5 mois donnent 6880

2560	$3+5=8$	20480
Total 3936	Total	27360

$5+3+5=13$, $13-10=3$.

3936 dans 13 mois donnent 51168.

$51168-27360=23808$; $\frac{23808}{3}=7936$.

Le capital est 7936 francs.

231). 2000 fr. pendant 3 mois $\frac{1}{2}$ donnent 7000 fr.

3500	4	14000
1500	14	21000
7000	Somme	42000

$\frac{42000}{\left(\frac{7000}{2}\right)}=12$. 12 représente le double du nombre de mois demandé plus 1. Le nombre de mois demandé sera donc $\frac{12-1}{2}=5\frac{1}{2}$.

La première échéance aura lieu 5 mois $\frac{1}{2}$ après.

232). 1200 pendant 8 mois donnent 9600

800	10	8000
600	14	8400
	Total	26000

Il s'agit de partager 500 fr. en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 9600, 8000 et 8400.

Le 1er aura	$184^{fr}\frac{8}{13}$
le 2e	$153\ \frac{11}{13}$
le 3e	$161\ \frac{7}{13}$
Somme égale	500

233). Le 1er négociant a mis dans la société 17000

le 2e	13000
le 3e	10000

Et comme il doit avoir 3 pour 100 en sus de son bénéfice, c'est comme s'il avait mis en sus les 3 pour 100 de 10000 — 300

Somme 40300

Il s'agit donc de partager 35262 fr. 50 c. en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 17000, 13000 et 10300; ce qui donne

pour la 1re part	14875^{fr}
la 2e	11375
la 3e	$9012^{fr}50^{c}$
Total égal	$35262^{fr}50$

234). Le titre du premier créancier est de	2000^{fr}	2000
celui du deuxième	2500	2750
et pour les 10 pour 100 en sus	250	
celui du troisième	3500	4375
et pour les 25 pour 100 en sus	875	
		9125

Il faut donc partager 3139 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2000, 2750 et 4375.

La part du 1^{er} sera	688^{fr}
du 2^e	946
du 3^e	1505
Total égal	3139

235). La somme des gains des deux premiers est

$$5020 - 2570 = 2450,$$

puisque, d'après l'énoncé, la mise du troisième dépasse de 300 fr. la somme des mises des deux premiers; donc 300 fr. ont donné $2570 - 2450 = 120$ fr. de bénéfice, et par conséquent 1 fr. de mise a donné de bénéfice $\frac{120}{300} = 0{,}40$. Donc enfin autant de fois 0,40 sera contenu dans 2570, autant de francs le troisième aura mis en société. $\frac{2570}{0.40} = 6425$.

Le troisième a mis 6425; les deux premiers ensemble $6425 - 300 = 6125$, et si l'on partage 6125 en deux parties qui soient entre elles comme $1 : \frac{3}{2}$ ou comme $2 : 3$, on trouvera pour la mise du 2^e $2165 \times \frac{3}{5} = 3675$

du 1^{er} $6125 \times \frac{2}{5} = 2450$

Les mises des trois associés sont donc 2450, 3675, 6425 fr.

236). Si la mise du deuxième était égale à celle du premier, comme elle est restée 2 fois plus de temps dans l'association, le gain du deuxième serait double de celui du premier. Mais la deuxième mise étant plus grande que la première de 320, le gain du deuxième sera

double de celui du premier augmenté de ce que rapporte 320 placé pendant 7 mois, ou 2240 pendant 1 mois.

La somme des gains du premier et du deuxième est donc égale aux $\frac{3}{2}$ du gain du deuxième ou $879\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ plus ce que rapporte 2240.

Or le gain total diminué de cette quantité donne précisément le gain du troisième, c'est-à-dire ce que rapporte 5600 placé pendant 12 mois, ou $5600 \times 12 = 67200$ pendant 1 mois.

Donc enfin $2402\frac{1}{6} - 879\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6496}{6}$ représentent ce que rapportent $67200 - 2240 = 64960$ fr.

Si donc 64960 fr. rapportent $\frac{6496}{6}$

1 rapportera $\frac{1}{60}$

Donc autant de fois $\frac{1}{60}$ sera contenu dans $879\frac{2}{3}$, autant de francs la mise du deuxième renfermera, supposée placée pendant 1 mois; $879\frac{2}{3} : \frac{1}{60} = 52780$. Divisant par 14, on aura pour la mise du 2^e 3770

et pour celle du 1^{er} $3770 - 320 = 3450$

Deuxième manière. Soit x la mise de la 1^{re} qui rapporte autant que $x \times 7 = 7x$ en 1 mois;

La mise du 2^e sera $x + 320$, qui rapporte autant que $14x + 320 \times 14$ ou 4480 en 1 mois;

La mise du 3^e est 5600, qui rapporte autant que 5600×12 ou 67200 en 1 mois.

On aura la proportion

gain total : gain du 2^e :: mise totale : mise du 2^e;

d'où gain total — gain du 2^e : gain du 2^e :: mise totale — mise du 2^e : mise du 2^e;

$$2402\frac{1}{6} - 879\frac{6}{9} = 1522\frac{1}{2};$$

$$1522\frac{1}{2} : 879\frac{2}{3} :: \frac{3045}{2} : \frac{2639}{3} :: 9135 : 5278;$$

et par conséquent

$$9135 : 5278 :: 7x + 67200 : 14x + 4480;$$

multipliant les antécédents par 2,

$$18270 : 5278 :: 14x + 134400 : 14x + 4480;$$

l'antécédent moins le conséquent est au conséquent comme etc. $12992 : 5278 :: 129920 : 14x + 4480$;

ou $1 : 5278 :: 10 : 14x + 4480$;

d'où

$14x + 4480 = 52780, \quad 14x = 52780 - 4480 = 48300$;

$\frac{48300}{14} = 3450$ pour la 1^re^ mise;

$3450 + 320 = 3770$ sera la 2^e^.

237). Chaque enfant a donc dépensé en un mois la quarantième partie du capital 1100 et des intérêts de ce capital pendant 10 mois, lesquels seront exprimés par $\frac{1100 \times 10 \times \text{taux}}{100} = 110 \times$ taux.

Dans le second cas, chaque enfant aurait dépensé en 1 mois la quarante-cinquième partie du capital 1200 et des intérêts de ce capital, pendant 15 mois, lesquels sont exprimés par $\frac{1200 \times 15 \times \text{taux}}{100} = 180 \times$ taux.

La différence $\frac{1100}{40} - \frac{1200}{45} = \frac{5}{6}$ sera donc égale au taux $\times \left(\frac{180}{45} - \frac{110}{40}\right) = \frac{5}{4}$; le taux sera par conséquent $\frac{5}{6} : \frac{5}{4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ pour 100 par mois.

La dépense d'un enfant par mois

$$= \frac{1100}{40} + \frac{1100 \times 10 \times \frac{2}{3}}{40 \times 100} = \frac{88}{3};$$

l'intérêt pour 1 mois de 1650 à $\frac{2}{3}$ pour 100 par mois est $\frac{1650 \times \frac{2}{3}}{100} = 11$. Par conséquent, d'après la dernière partie de l'énoncé, un enfant en 1 mois dépense $\frac{1650}{6}$ divisé par le nombre de mois plus $\frac{11}{6}$ fr, or $\frac{1650}{6} = 275$; $\frac{88}{3} - \frac{11}{6} = \frac{165}{6}$.

Donc $\frac{275}{\text{nombre de mois}}$ doit être égal à $\frac{165}{6}$; d'où l'on conclut que le nombre de mois est $\frac{275 \times 6}{165} = 10$.

238). La dépense par mois de chacun des cinq frères sera $\frac{4800}{45} + \frac{1}{45} \cdot \frac{4800 \times 9 \times \text{taux}}{100}$; la dépense par mois de chacune des deux personnes sera $\frac{3320}{32} + \frac{1}{32} \cdot \frac{3320 \times 16 \times \text{taux}}{100}$.

En simplifiant autant que possible ces deux expressions, on trouve pour la 1^re^ dépense $\frac{320}{3} + \frac{48}{5} \times$ taux,

et pour la 2^e^ $\frac{415}{4} + \frac{83}{6} \times$ taux.

Il suit de là que le taux $\times \left(\frac{83}{6} - \frac{48}{5}\right)$ est égal à $\frac{320}{3} - \frac{415}{4}$ ce qui se réduit à 7 fois le taux égale $\frac{35}{12}$. Le taux est donc de $\frac{5}{12}$ pour 100 par mois.

Si l'on multiplie par 5, l'expression $\frac{320}{3} + \frac{48}{5} \times \frac{5}{12}$, on aura la dépense par mois de chacun des cinq frères; cette dépense est donc $106\frac{2}{3} + 4 = 110\frac{2}{3}$ fr.

239). 37 fr. et la livrée représentent donc les $\frac{5}{12}$ de 240 fr. ou 100 fr., et les $\frac{5}{12}$ de la livrée. Par conséquent $(100 - 37) = 63$ fr. représentent les $\frac{7}{12}$ de la valeur de la livrée, laquelle est $63 \times \frac{12}{7} = 108$ fr.

240). Au 1^er^ il donne par jour $\frac{56}{56} = 1$ fr. plus $\frac{4}{56}$ de mesure; au 2^e^ $\frac{69}{84} = \frac{23}{28}$ francs $+ \frac{15\frac{1}{2}}{84} = \frac{5}{56}$ de mesure.

D'après l'énoncé il faut que les deux payements soient égaux; il faut donc que les différences entre les nombres de francs et de mesures se compensent, ce qui donne $\frac{5-4}{56} = \frac{1}{56}$ de mesure égale $1 - \frac{23}{28} = \frac{5}{28}$ de fr., par conséquent la mesure $\frac{5}{28} \times 56 = 10$ fr.

241). Si l'ouvrier avait travaillé les 50 jours, il aurait gagné $1,50 \times 50 = 75^{fr}$; la différence $75 - 49,80 = 25^{fr}20^{c}$ provient des jours d'absence. Mais pour chaque jour d'absence il perd $1,50 + 0,60 = 2,10$. $25,20 : 2,10 = 12$ nombre de jours d'absence demandé.

242). En cassant 5 œufs à 7 cent., la fermière fait une perte de $7 \times 5 = 35$ cent.

Mais en revendant le reste à 8 cent., elle gagne 1 cent. par œuf, donc pour compenser sa perte elle doit vendre 35 œufs. $35 + 5 = 40$, elle avait donc 40 œufs.

243). Le cuisinier a donc payé chaque orange $\frac{90}{12} = 7\frac{1}{2}$ c., s'il en avait 4 de plus, la douzaine lui eût coûté

$90 - 10 = 80$ cent.; et par conséquent chaque orange ne serait revenue qu'à $\frac{80}{12} = 6\frac{2}{3}$ cent. Donc pour une orange, il aurait économisé $7\frac{1}{2} - 6\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ de cent. Pour économiser les 4 oranges de surplus qui valent à ce prix $6\frac{2}{3} \times 4 = 26\frac{2}{3}$, il a dû acheter autant d'oranges que $\frac{5}{6}$ est contenu de fois dans $26\frac{2}{3}$. $26\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = 32$. Il a donc acheté 32 oranges.

244). Puisque le marchand perd à la vente de la pièce 13 pour 100, les prix d'achat et de vente de la pièce sont dans le rapport de $100 : 100 - 13\frac{1}{3} = \frac{260}{3}$ ou plus simplement dans le rapport de 15 à 13.

D'ailleurs les prix du mètre à l'achat et à la vente sont comme $10 : 8$ ou comme $5 : 4$; le rapport des nombres de mètres à l'achat et à la vente est $\frac{15}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{13}$. Mais à la vente la pièce se trouve avoir 5 mètres de plus, donc 5 mètres sont précisément le $\frac{1}{12}$ du nombre de mètres que le marchand supposait à la pièce en l'achetant. Il la croyait donc de 60 mètres tandis qu'elle en avait 65.

On suivra plus facilement cette analyse à l'aide des proportions. En effet si x désigne le nombre de mètres que le marchand a cru acheter, le prix d'achat de la pièce sera représenté par $10^{fr} \times x$.

Mais la pièce avait 5 mètres de plus et par conséquent $x + 5$ mètres qui, à raison de 8 fr. par mètre, vaudront à la vente $8^{fr} \times (x + 5)$.

Puisque le marchand perd $13\frac{1}{3}$ pour 100, il a acheté 100 fr. ce qui ne vaut que $(100 - 13\frac{1}{3}) = \frac{260}{3}$ fr., et par suite 300 fr. ce qui ne vaut que 260, on a donc la proportion

$$\frac{10 \times x}{8(x+5)} = \frac{300}{260} = \frac{15}{13};$$

ou

$$\frac{5}{4} \times \frac{x}{x+5} = \frac{15}{13};$$

et enfin

$$\frac{x}{x+5} = \frac{15}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{13},$$

d'où

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{1} \quad \text{et} \quad x = 12 \times 5 = 60.$$

245). Cette personne dépense par conséquent les $\frac{6}{7}$ de son revenu.

Si elle avait 400 fr. de plus, elle pourrait aves les $\frac{4}{5}$ de son nouveau revenu faire la même dépense qu'auparavant et y ajouter même 160 fr.

Or les $\frac{4}{5}$ de son nouveau revenu seraient égaux aux $\frac{4}{5}$ de son ancien revenu, plus les $\frac{4}{5}$ de 400 fr. qui sont 320 fr.

Il s'ensuit donc qu'avec les $\frac{4}{5}$ de son revenu actuel augmentés de 320 fr., elle aurait la même somme qu'avec les $\frac{6}{7}$ de ce même revenu augmentés de 100 fr.

$320 - 160 = 160$ fr. sont donc la différence entre les $\frac{6}{7}$ et les $\frac{4}{5}$ de son revenu. $\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{2}{35}$. Les $\frac{2}{35}$ de son revenu étant de 160 fr., son revenu sera $160 \times \frac{35}{2} = 2800$.

246). Les $\frac{3}{4}$ de l'ancien revenu ne sont que les $\frac{2}{3}$ du nouveau; le nouveau revenu est donc les $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ de l'ancien. Son revenu s'est donc augmenté de $\frac{1}{8}$.

247). Les $\frac{6}{7}$ de l'ancien revenu ne sont plus équivalents qu'aux $\frac{5}{6}$ du nouveau. Le nouveau doit donc être les $\frac{6}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{36}{35}$ de l'ancien. Le propriétaire augmentera donc le prix de ses loyers de $\frac{1}{35}$.

248). $120 - 70 = 50$ représente les $\frac{3}{4}$ de l'avant-dernier reste, lequel est par conséquent $50 \times \frac{4}{3} = 66\frac{2}{3}$; $66\frac{2}{3} - 50 = 16\frac{2}{3}$ sont les $\frac{2}{3}$ de la somme cherchée. Cette somme est donc $16\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 25$.

249). $10 + 20 = 30$ sont les $\frac{3}{4}$ de l'avant-dernier reste, qui est donc $30 \times \frac{4}{3} = 40$; $40 + 30 = 70$ sont les $\frac{4}{5}$ du reste précédent, qui est par conséquent $70 \times \frac{5}{4} = 87\frac{1}{2}$; $87\frac{1}{2} + 50 = 137\frac{1}{2}$ sont la moitié de la somme primitive; cette somme est donc $137\frac{1}{2} \times 2 = 275$.

250). $520 + 400 = 920$ sont les $\frac{4}{5}$ de l'avant-dernier reste, qui est par conséquent $920 \times \frac{5}{4} = 1150$;
$1150 + \frac{200}{2} = 1250$ sont la moitié de l'héritage; cet héritage est donc $1250 \times 2 = 2500$.

251). $2+6=8$ est la moitié de l'avant-dernier reste, qui est par conséquent $8\times 2=16$; $16+2=18$ est la moitié du reste précédent qui est donc $18\times 2=36$;
$36+4=40$ est la moitié du nombre cherché, lequel est par conséquent $40\times 2=80$.

252). Au bout de la première année l'avoir du marchand est les $\frac{4}{3}$ de sa fortune primitive moins 1000 fr.

Au bout de la deuxième année, il est les $\frac{4}{3}$ de l'avoir précédent moins 1000 fr. ou les $\frac{16}{9}$ de sa fortune moins $\frac{7000}{3}$ fr.

Au bout de la troisième, il est les $\frac{4}{3}$ de l'avoir précédent moins 1000 fr. ou les $\frac{64}{27}$ de sa fortune moins $\frac{37000}{9}$ fr.

Et comme alors ce qu'il a est le double de sa fortune ou les $\frac{54}{27}$ de sa fortune, $\frac{64}{27}-\frac{54}{27}=\frac{10}{27}$ de sa fortune font $\frac{37000}{9}$; et par conséquent sa fortune primitive était de $\frac{37000}{9}\times\frac{27}{10}=11100$ fr.

253). Au bout de la première année l'avoir du négociant est les $\frac{120}{100}=\frac{6}{5}$ de son capital primitif moins 4000 fr.

Au bout de la deuxième année, il est les $\frac{6}{5}$ de l'avoir précédent moins 4000 fr. ou les $\frac{36}{25}$ de son capital moins 8800 fr.

Au bout de la troisième année, il est les $\frac{6}{5}$ de l'avoir précédent moins 4000 fr. ou les $\frac{216}{125}$ du capital moins 14560.

D'après l'énoncé, cette somme doit être égale aux $\frac{8}{5}$ de son capital primitif plus 800 fr.

Par conséquent les $(\frac{216}{125}-\frac{8}{5})=$ les $\frac{16}{125}$ de ce capital sont $14560+800=15360$.

Le capital primitif est donc $15360\times\frac{125}{16}=120000$ fr.

254). 20 étant le dernier reste, $20-8=12$ est la moitié du reste précédent qui est par conséquent 24.
$24-8=16$ est la moitié du reste précédent qui est 32.
$32-8=24$ est la moitié du reste précédent qui est 48.
$48-8=40$ est la moitié du nombre lui-même ;
ce nombre est donc 80.

255). 30 est donc les $\frac{5}{2}$ du reste précédent ; ce reste est par conséquent $30\times\frac{2}{5}=12$.

$12+60=72$. Le nombre est donc les $\frac{7}{24}$ de $72=21$.

256). L'intérêt total 24375 fr. se compose des intérêts suivants :

1° Ce que rapporte, pendant 2 ans ou $\frac{24}{12}$ d'année, à 4 pour 100, le capital cherché, intérêt qui est exprimé par les $\frac{24}{12}$ des $\frac{4}{100}=\frac{2}{25}$ du capital ;

2° Ce que rapporte, pendant 7 mois $=\frac{7}{12}$ d'année, le capital diminué de $\frac{1}{4}$ ou les $\frac{3}{4}$ du capital, intérêt exprimé par les $\frac{7}{12}$ des $\frac{4}{100}$ des $\frac{3}{4}=\frac{7}{400}$ du capital ;

3° Ce que rapporte, pendant 13 mois $=\frac{13}{12}$ d'année, le capital diminué de $\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire diminué de $\frac{7}{16}$, ce qui donne les $\frac{9}{16}$ du capital, intérêt exprimé par les $\frac{13}{12}$ des $\frac{4}{100}$ des $\frac{9}{16}=\frac{39}{1600}$ du capital.

Ces trois parties font les $\frac{195}{1600}$ du capital. Donc les $\frac{195}{1600}$ du capital devant faire 24375 fr., le capital sera $24375\times\frac{1600}{195}=200000$ fr.

257). La part du premier se composera de 100 fr. plus le $\frac{1}{10}$ de la somme diminuée de 100 fr., autrement dit de $\frac{1}{10}$ de la somme plus $100-\frac{100}{10}=90$.

Après avoir prélevé 200 fr., il restera les $\frac{9}{10}$ de la somme moins $(200+90)=290$.

Le second aura donc 200 plus le $\frac{1}{10}$ de $\frac{9}{10}$ de la somme moins le $\frac{1}{10}$ de 290, autrement dit les $\frac{9}{100}$ de la somme moins 29.

Or, ces deux parts devant être égales, comme celles de tous les enfants, il faut que le $\frac{1}{10}$ de la somme augmenté de 90 fr. soit égal aux $\frac{9}{100}$ de cette même somme augmentés de $200-29=171$.

Par conséquent $(\frac{1}{10}-\frac{9}{100})=\frac{1}{100}$ de la somme est $171-90=81$, et par suite la somme cherchée est $81\times 100=8100$.

La part du premier enfant est donc $\frac{8100}{10}+90=900$.
Le nombre des enfants est par conséquent $\frac{8100}{900}=9$.

258). La part du premier enfant égale le $\frac{1}{9}$ de la somme augmenté de $\frac{240}{9}$ de franc.

La part du second égale les $\frac{8}{81}$ de la somme augmentés de $\frac{4080}{81}$ de franc.

Mais la première partie est égale aux $\frac{9}{81}$ de la somme augmentés de $\frac{2160}{81}$ de franc.

Par conséquent la somme demandée est

$$4080-2160=1920.$$

Et la part d'un enfant étant $\frac{1920+240}{9}=\frac{2160}{9}=240$, le nombre des enfants est $\frac{1920}{240}=8$.

259). Puisque après avoir fait le premier carré, il lui reste 39 hommes et qu'il lui en manque 50 pour faire le second, $39+50=89$ est la différence entre les nombres d'hommes qui entrent dans les deux carrés.

D'après le nº **446**, la différence des carrés de deux nombres consécutifs doit être le double du plus petit augmenté de 1; donc $89-1=88$ est le double du nombre d'hommes placés sur le côté du plus petit carré. Ce carré a donc $\frac{88}{2}=44$ hommes de côté. Il se compose donc de $44\times44=1936$; et comme il reste 39 hommes, le régiment se compose de

$$1936+39=1975 \text{ hommes.}$$

260). $130-31=99$ est la différence entre les deux carrés. Mais le côté du second carré étant la somme de deux nombres dont le premier est le nombre de pièces du côté du premier carré, et le second, 3, ce second carré se composera de trois parties, savoir : 1° le carré du premier nombre; 2° deux fois le produit de ce même nombre par 3; 3° le carré de $3=9$. La différence des deux carrés contiendra donc 6 fois le nombre de pièces du côté du premier carré plus 9. Par conséquent $99-9=90$ représente 6 fois ce nombre, et par suite ce nombre est $\frac{90}{6}=15$; $15\times15=225$.

$225+130=355$ sera le nombre de pièces demandé.

261). Le carré du nombre augmenté de 3, se composera du carré de ce nombre plus 6 fois ce même nombre plus 9.

Le carré du nombre augmenté de 5, se composera du carré de ce nombre plus 10 fois ce nombre plus 25.

La différence de ces deux carrés se composera par conséquent de $(10-6)=4$ fois ce nombre plus

$$25-9=16.$$

Mais d'après l'énoncé cette différence est 56. Donc $56-16=40$ est 4 fois ce nombre. Le nombre demandé est donc $\frac{40}{4}=10$.

262). Le premier est les $\frac{7}{9}$ du deuxième; le deuxième est les $\frac{3}{4}$ du troisième, et par conséquent le premier est les $\frac{7}{9}$ des $\frac{3}{4}$ du troisième ou les $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ du troisième; d'après l'énoncé $\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ du troisième font 50 litres.

Le troisième contient donc $50\times\frac{12}{5}=120$ litres.

Le deuxième contient $120\times\frac{3}{4}=90$ litres.

Le premier contient $90\times\frac{7}{9}=70$ litres.

263). Le deuxième est les $\frac{3}{7}$ du premier; le troisième est les $\frac{3}{4}$ du deuxième, et par conséquent les $\frac{3}{4}$ des $\frac{3}{7}$ du premier = les $\frac{9}{28}$ du premier; le quatrième est les $\frac{16}{9}$ du troisième, et par conséquent les $\frac{16}{9}$ des $\frac{9}{28}$ du premier $=\frac{16}{28}$ du premier; et puisque le troisième et le quatrième ensemble contiennent autant que le premier et 15 litres de moins, les $\frac{28}{28}-(\frac{9}{28}+\frac{16}{28})=$ les $\frac{3}{28}$ du premier font 15 litres. Par conséquent le premier contient $15\times\frac{28}{3}=140$ litres; le deuxième contient $140\times\frac{3}{7}=60$; le troisième contient $140\times\frac{9}{28}=45$; le quatrième contient $140\times\frac{16}{28}=80$.

XXXII.

Appendice sur les chiffres romains.

1). III, VI, VIII, XII, XVIII, XXVII, XXXIX.

2). XLVII, XLVIII, LIX.

3). LXXVIII, XCII, CV.

4). CCLXXVII, CCCXXIX.

5). CDXLIII, CDXC.

6). DLXVII, DCXXIV, DCCCIX.

7). CMXXXIV, MXLV.

8). MCDLIV, MMD ou II_{m}D.

9). MMDCXX ou II_{m}DCXX, MMMCDL ou III_{m}CDL.

10). $\text{XX}_{m}\text{DCCLIX}$.

11). $\text{MM}_{m}\text{LX}_{m}$.

12). Deux, quatre, douze, neuf.

13). Treize, dix-neuf, vingt-quatre, trente-huit.

14). Quarante-cinq, cinquante-six, soixante neuf, soixante-quatorze.

15). Cent quarante, deux cent vingt-quatre, trois cent soixante-deux.

16). Deux cent vingt, quatre cent cinquante-neuf, six cent cinquante.

17). Huit cent quatre, huit cent soixante-quinze, neuf cent un, neuf cent cinquante-quatre.

18). Mille dix, mille cent cinquante, mille quatre cent huit, mille quatre cent soixante-neuf.

19). Deux mille trois cent cinquante-quatre, deux mille huit cent quarante-cinq, trois mille quatre cent neuf.

20). Vingt mille deux cent quarante quatre, cent mille trois cent dix.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

RÉPONSES AUX EXERCICES.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES,

Paris. — Imprimerie de Ch. Lahure et Cie, rue de Fleurus, 9.

AUTRES OUVRAGES DE M. SONNET

QUI SE VENDENT A LA MÊME LIBRAIRIE.

réponses aux questions de mathématiques, de physique, de chimie et d'histoire naturelle, contenues dans le programme officiel; par MM. Sonnet, Saigey et Delafosse. 1 volume, avec planches. Prix, broché. 4 fr.

Notions de physique et de chimie; leçons d'histoire naturelle; principes raisonnés de la musique, à l'usage des jeunes personnes; par MM. Sonnet, Delafosse et Quicherat. 1 volume grand in-8°. Prix, broché. 6 fr.

Premières connaissances, ou Simples notions sur les phénomènes les plus intéressants de la nature et sur les faits les plus curieux dans les sciences, les arts et l'industrie, à l'usage des jeunes enfants; par MM. Cortambert, Sainte-Preuve, Delafosse et Sonnet. Prix, broché. 2 fr. 50 c

Polymnie, recueil classique de morceaux de chants extraits des plus célèbres compositeurs français et étrangers, contenant des solos, des duos, des trios, des quatuors et des chœurs; avec accompagnement de piano *ad libitum*, à l'usage des colléges, maisons d'éducation et écoles primaires des deux sexes; par MM. L. Quicherat et Sonnet. 1 beau volume in-4°. Prix, broché. 12 fr.

PREMIERS ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE

TEXTE

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

Paris. — Typographie de Firmin Didot frères, rue Jacob, 56.

PREMIERS ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE

AVEC

LES PRINCIPALES APPLICATIONS

AU DESSIN LINÉAIRE, AU LEVER DES PLANS, A L'ARPENTAGE, ETC.

A L'USAGE

Des Écoles primaires supérieures et des Écoles normales primaires

PAR H^te SONNET

DOCTEUR ÈS SCIENCES, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ,
EXAMINATEUR POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

TEXTE

PARIS
CHEZ L. HACHETTE
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12

1845

AVANT-PROPOS.

Ce volume n'est pas un simple abrégé de notre *Géométrie théorique et pratique* (*). Ce dernier ouvrage forme un traité complet, écrit pour les Colléges, les hautes Écoles commerciales et industrielles, les candidats à l'École centrale des arts et manufactures, etc. Celui que nous publions aujourd'hui est principalement destiné aux Écoles primaires supérieures, et aux Écoles normales primaires. En nous adressant à d'autres lecteurs, nous avons dû modifier essentiellement, non-seulement l'étendue de l'ouvrage, mais aussi le plan et les détails. Nous avons cru devoir nous borner à ce qu'il y a de plus essentiel dans la théorie et dans les applications; mais, en même temps, nous avons développé la rédaction de manière à rendre les principes de la Géométrie accessibles, nous l'espérons du moins, à toutes les intelligences. Cette partie de notre travail est celle à laquelle nous attachons le

(*) Deuxième édition, chez L. Hachette, libraire de l'Université. 2 volumes in-12; *texte* et *planches*. Prix, brochés, 5 fr.

plus de prix; et l'attention que nous y avons mise nous donne l'espoir que le public accueillera cette nouvelle publication avec la même bienveillance que les précédentes.

PREMIERS ELÉMENTS D'ALGÈBRE

AUTRES OUVRAGES DE M. SONNET,

PUBLIÉS PAR LA MÊME LIBRAIRIE.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE ET DE TENUE DES ÉCRITURES, faisant partie du *Cours complet d'éducation pour les filles*. 1 vol. grand in-8. Prix, broché, 3 fr. 75 c.

PETIT COURS D'ARITHMÉTIQUE, avec un grand nombre de problèmes. 2e édition. 1 vol. in-12. Prix, cartonné, 1 fr. 25 c.

SOLUTIONS RAISONNÉES DES PROBLÈMES contenus dans le *Petit Cours d'Arithmétique*. In-12. Prix, broché, 50 c.

SOLUTIONS RAISONNÉES DES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE DE M. SAIGEY. 1 vol. in-18. Prix, broché, 1 fr. 50 c.
Ouvrage autorisé par le Conseil de l'instruction publique.

GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, contenant de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, au lever des plans, à la perspective, aux ombres, etc., et les premiers éléments de la géométrie descriptive 3e édition. 2 vol. in-8. *Texte* et *planches*. Prix, brochés, 6 fr.
Ouvrage autorisé par le Conseil de l'instruction publique.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, contenant les principales applications à l'architecture, au lever des plans, à l'arpentage, etc. 3e édition. 2 vol. in-12. *Texte* et *planches*. Prix, brochés, 2 fr. 50 c.
Ouvrage autorisé par le Conseil de l'instruction publique.

NOTIONS DE MÉCANIQUE exigées pour l'admission à l'École polytechnique. Ouvrage complété d'après le programme officiel d'admission arrêté le 20 février 1852. 1 vol. in-8 avec planches. Prix, br. 5 fr.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE, comprenant la théorie des machines simples en mouvement et des notions générales sur les machines composées. 2 vol. in-12. *Texte* et *planches*. Prix, brochés, 4 fr.
Ouvrage autorisé par le Conseil de l'instruction publique.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, avec de nombreuses applications à la géométrie et aux questions les plus simples de physique, de mécanique; à l'usage des aspirants à l'école militaire de Saint-Cyr, à l'école navale, à l'école forestière et à l'école centrale des arts et manufactures, etc. 1 vol. in-8. Prix, broché, 6 fr.
Ouvrage autorisé par le Conseil de l'instruction publique.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE exigés pour l'admission à l'École polytechnique. In-8.

RECHERCHES SUR LE MOUVEMENT UNIFORME DES EAUX dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts, en ayant égard aux différences de vitesse de filets. 1 vol. in-4. Prix, broché, 4 fr.
Mémoire approuvé par l'Académie des Sciences.

NOTIONS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE, faisant partie du *Cours complet d'éducation pour les filles*. 1 vol. grand in-8. Prix, br. 2 fr. 25 c.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

PREMIERS ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

COMPRENANT

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

PAR H. SONNET

DOCTEUR ÈS SCIENCES, INSPECTEUR DE L'ACADÉMIE DÉPARTEMENTALE DE LA SEINE

OUVRAGE AUTORISÉ

PAR LE CONSEIL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14

(Près de l'École de Médecine)

1852

AVANT-PROPOS.

La matière de ce petit volume est extraite de l'ouvrage plus complet que nous avons publié sous le titre d'*Algèbre élémentaire*. Cependant elle forme à elle seule un tout sans solutions de continuité, et nous espérons que ces *Premiers Éléments*, réduits à ce que l'Algèbre offre de plus essentiel, c'est-à-dire à la résolution des équations du premier et du second degré, ne seront pas sans utilité pour les commençants.

PREMIERS ÉLÉMENTS

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. But de l'Algèbre.

1. L'Algèbre est la science qui a pour but de résoudre d'une manière générale les questions relatives aux nombres.

C'est-à-dire que, dans cette partie des mathématiques, on ne se contente pas de la solution particulière d'une question, on recherche encore la solution générale de toutes les questions du même genre.

Pour y parvenir, on représente par des lettres les grandeurs connues ou inconnues que l'on a à considérer, et à l'aide de signes abréviatifs on *écrit* les relations que la nature du problème établit entre ces grandeurs. L'Algèbre donne ensuite des règles pour *transformer* ces relations en d'autres plus simples, ou mieux appropriées au but qu'on se propose ; et c'est en déplaçant ainsi successivement la difficulté qu'on peut la diminuer et enfin la résoudre. On obtient alors la valeur de chaque inconnue sous la forme d'une expression *générale*, dans laquelle il n'y aura plus, dans chaque cas particulier, qu'à remplacer chaque lettre par sa valeur particulière, et à *effectuer* les calculs qui ne sont qu'indiqués. Une pareille expression générale est ce qu'on nomme une *formule algébrique*.

Un exemple éclaircira ces généralités.

2. Proposons-nous d'abord cette question particulière : *Trouver deux nombres dont la somme soit* 17 *et dont la différence soit* 5. Pour la résoudre, nous pourrons d'abord faire le raisonnement suivant :

La différence des deux nombres étant 5, le plus grand est égal au plus petit augmenté de 5; la somme des deux nombres est donc égale au plus petit nombre augmenté de 5, plus encore au plus petit nombre; ou, ce qui revient au même, à deux fois le plus petit nombre, plus 5. Mais cette somme doit faire 17; donc le double du plus petit nombre, plus 5, égale 17. Il en résulte que le double du plus petit nombre équivaut à 17 diminué de 5, ou à 12; et que par conséquent ce plus petit nombre lui-même est la moitié de 12, ou 6. Par suite, le plus grand nombre est égal à 6 plus 5, ou à 11.

On remarque que dans ce raisonnement certaines expressions se reproduisent un grand nombre de fois : ce sont *le plus petit nombre*, *le plus grand nombre*, *plus* ou *augmenté de*, *moins* ou *diminué de*, *égale* ou *équivaut à*. On pourra donc simplifier l'écriture de ce raisonnement en convenant, par exemple, de représenter *le plus petit nombre* par la lettre x, *le plus grand nombre* par la lettre y, les expressions *plus* ou *augmenté de* par le signe $+$, déjà employé en arithmétique, les expressions *moins* ou *diminué de* par le signe $-$, la division par 2, en mettant ce nombre 2 en

dénominateur, enfin les expression *égale* ou *équivaut à* par le signe $=$. A l'aide de ces conventions, le raisonnement ci-dessus pourra s'écrire de la manière suivante :

$$y - x = 5\,;$$

donc $$y = x + 5.$$

Mais $$y + x = 17\,;$$

donc $$x + 5 + x = 17,$$

ou $$2x + 5 = 17.$$

De là résulte $$2x = 17 - 5 = 12\,;$$

donc $$x = \frac{12}{2} \quad \text{ou} \quad x = 6.$$

Par suite, $$y = 6 + 5 = 11.$$

Chacune des lignes que nous venons d'écrire correspond à l'un des raisonnements partiels qui composent le raisonnement total écrit plus haut.

3. Les raisonnements seraient évidemment les mêmes si les nombres 17 et 5 étaient remplacés par des nombres quelconques. Mais les signes abréviatifs que nous avons employés ne suffisent pas pour mettre en évidence ce qu'il peut y avoir de commun dans les *résultats* des raisonnements, quelles que soient les données. Cela tient à ce que les résultats numériques auxquels on est conduit n'offrent aucune trace des opérations qui ont servi à les obtenir. Ainsi le nombre 6, qui a été obtenu en retranchant 5 de 17 et en prenant la moitié du reste, pourrait s'obtenir d'une infinité d'autres manières; et rien dans ce résultat brut 6 n'indique comment on y est parvenu.

Il n'en serait plus de même si, au lieu d'effectuer les opérations numériques au fur et à mesure qu'elles se présentent, on se contentait de les indiquer par des signes. C'est ce que nous allons montrer en reprenant le même problème ; mais afin de donner à la solution toute la généralité qu'elle comporte, nous remplacerons les données numériques par des lettres, auxquelles on pourra ensuite attribuer telles valeurs qu'on voudra. Nous désignerons donc par a la somme des deux nombres inconnus x et y, et par b leur différence, x désignant toujours le plus petit.

Cela posé, nous allons reprendre le raisonnement total ; nous le reproduirons ensuite en employant l'écriture algébrique ; et, afin de rendre la comparaison plus facile, nous aurons soin de marquer d'un numéro d'ordre commun les raisonnements partiels qui se correspondent :

[1] Le plus grand nombre, moins le plus petit, égale la différence donnée;

[2] Donc, le plus grand nombre équivaut au plus petit, plus la différence donnée.

[3] Le plus grand nombre, plus le plus petit, égale la somme donnée;

[4] Donc, le plus petit nombre augmenté de la différence donnée, plus encore le plus petit nombre, égale la somme donnée;

[5] Ou bien, deux fois le plus petit nombre, plus la différence donnée, égale la somme donnée.

[6] Il en résulte que : deux fois le plus petit nombre égale la somme donnée, moins la différence donnée;

[7] Et qu'enfin, le plus petit nombre égale la moitié de la différence donnée, moins la moitié de la somme donnée.

[8] Par suite, le plus grand nombre égale la moitié de la somme donnée, moins la moitié de la différence donnée, plus cette même différence ;

[9] Ce qui revient à la moitié de la somme donnée, plus la moitié de la différence donnée.

En écriture algébrique, les mêmes raisonnements deviendront :

[1] $y - x = b;$

[2] donc $y = x + b.$

[3] Mais $y + x = a;$

[4] donc $x + b + x = a;$

[5] ou bien $2x + b = a.$

[6] Il en résulte $2x = a - b,$

[7] et enfin $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$

[8] Par suite $y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b,$

[9] ou bien $y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$

Remarque. On voit que *lorsqu'on a la somme et la différence de deux nombres, on obtient le plus petit en retranchant la moitié de la différence de la moitié de la somme, et le plus grand en ajoutant la moitié de la différence à la moitié de la somme*; ce qui constitue un *théorème* de calcul.

4. Les valeurs générales

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

sont des *formules* qui donneront immédiatement les valeurs des inconnues dans chaque cas particulier; il suffira d'y remplacer a et b par les données particulières, et d'effectuer les calculs indiqués.

Si l'on demande, par exemple, de trouver deux nombres dont la somme soit 31 et la différence 13, on aura

$$x=\frac{31}{2}-\frac{13}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{31}{2}+\frac{13}{2},$$

ou

$$x=\frac{18}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{44}{2},$$

ou enfin

$$x=9 \quad \text{et} \quad y=22;$$

c'est-à-dire que le plus petit des deux nombres demandés est 9, et le plus grand 22. En effet, 22 diminué de 9 donne 13, et 22 augmenté de 9 donne 31.

5. La question très-simple que nous venons de traiter suffit néanmoins pour faire voir comment l'écriture algébrique, indépendamment de sa brièveté, permet de traiter un problème de la manière la plus générale, et conduit à des formules ou règles pour obtenir la solution dans chaque cas particulier.

La série des égalités [4], [5], [6], [7] du numéro (3) offre un exemple des transformations successives à l'aide desquelles on peut, d'une relation entre une inconnue et des quantités données, déduire une relation plus simple qui donne la valeur de cette inconnue.

Le but de l'Algèbre étant ainsi clairement établi, nous allons nous occuper des signes abréviatifs qu'elle emploie et des règles du calcul algébrique.

§ 2. Des signes algébriques.

6. Nous donnons dans ce paragraphe l'explication de

tous les signes abréviatifs usités en Algèbre, quoique plusieurs d'entre eux ne soient pas, du moins dès à présent, indispensables à connaître. Notre but est d'éviter au lecteur, qui aurait oublié le sens d'un signe, la peine d'en chercher la définition dans le corps de l'ouvrage, en lui offrant un tableau qu'il lui sera toujours facile de consulter.

7. Le signe $+$ s'énonce *plus*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la somme. Ainsi $x+5$ signifie la somme des quantités x et 5; de même $x+a+5$ exprime la somme des quantités x, a et 5.

8. Le signe $-$ s'énonce *moins*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la différence, ou que de la première on retranche la seconde. Ainsi $x-5$ exprime la différence des quantités x et 5, ou ce qui reste de la quantité représentée par x quand on en retranche 5. De même $x-a-5$ indique ce qui reste de la quantité x quand on en retranche successivement la quantité a et le nombre 5.

9. Le signe $\times$ s'énonce *multiplié par*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait le produit. Ainsi $x\times5$ indique le produit de x par 5. De même $x\times a\times5$ exprime le produit des trois facteurs x, a et 5.

On remplace souvent le signe $\times$ par un simple point. Ainsi au lieu de $a\times b$ on peut écrire $a.b$.

Plus souvent encore on se contente, pour exprimer la multiplication, d'écrire les facteurs à la suite les uns des autres, sans aucune interposition de signe. Mais cela ne se fait que lorsqu'il n'y a pas plus d'un facteur numérique, et ce facteur se place alors le premier. Ainsi au lieu de $x\times a\times5$ on peut écrire $x.a.5$, ou plus simplement $5ax$.

Le facteur numérique qui précède ainsi un produit de facteurs exprimés par des lettres, porte le nom de *coefficient*.

10. Quand un produit renferme plusieurs facteurs égaux, on se contente d'écrire l'un d'eux, et l'on place à sa droite, et un peu au-dessus, le nombre qui indique combien il y a de ces facteurs égaux. Ainsi, au lieu de 5×5 on peut écrire 5^2; au lieu de $x \times x \times x$ on peut écrire x^3.

Ce nombre qui indique combien il y a de facteurs égaux à celui qu'on n'écrit qu'une fois, porte le nom d'*exposant*, et le produit des facteurs égaux s'appelle *puissance* de l'un de ces facteurs. L'expression $5a^3b^2x$ indiquerait un produit composé du facteur 5, de 3 facteurs égaux à a, de 2 facteurs égaux à b, et enfin d'un facteur égal à x; ou bien le produit de 5 par la 3ᵉ puissance de a, par la 2ᵉ puissance de b, et par la 1ʳᵉ puissance de x.

11. Le signe : s'énonce *divisé par*; placé entre deux quantités, il indique que la première est divisée par la seconde. Ainsi $x : 5$ exprime le quotient de x par 5.

On indique encore la division en écrivant le quotient comme une fraction qui aurait pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur. Par exemple

$$x : 5 \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{x}{5}.$$

Le trait horizontal qui sépare le dividende du diviseur se nomme *barre de division*.

12. Le signe $\sqrt{}$ indique la *racine carrée* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduirait la quantité placée sous le signe.

Par exemple $\sqrt{49}$ exprime la racine carrée de 49, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 49.

Le signe $\sqrt[3]{}$ indique de même la *racine cubique* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 3 fois comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe. Ainsi $\sqrt[3]{64}$ exprime la racine cubique de 64, ou le nombre qui, pris 3 fois comme facteur, donnerait pour produit 64.

Les signes $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, etc., indiqueraient de même la *racine quatrième*, la *racine cinquième*, etc., de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 4 fois, 5 fois, etc., comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe.

Ce signe porte en général le nom de *radical*, et le nombre placé au-dessus dans son ouverture est ce qu'on nomme l'*indice* du radical. Ainsi, dans $\sqrt[3]{}$, c'est 3 qui est l'indice du radical.

13. Les parenthèses ( ) expriment le *résultat* des opérations indiquées sur les quantités qu'elles enveloppent; les signes qui affectent les parenthèses indiquent les opérations à effectuer sur ce résultat. Ainsi,

$$x - (a - 5)$$

indique que de la quantité x on retranche le résultat obtenu en retranchant 5 de a.

$$(x + 5) \times a$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5, on multiplie le résultat, ou la somme, par a.

$$(x - 2) : a$$

indique qu'après avoir retranché 2 de x on divise le résultat, ou la différence, par la quantité a.

$$(x+5)^3 : (a-2)^2$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5 et formé un produit de 3 facteurs égaux à cette somme, on divise ce produit par le produit de 2 facteurs égaux à la différence entre a et 2.

14. Le signe $=$ s'énonce *égale*; placé entre des expressions numériques ou algébriques, il indique que les deux expressions sont égales en valeur.

Le signe $>$ s'énonce *plus grand que*; placé entre deux quantités, il indique que la première est plus grande que la seconde. Ainsi, $x>5$ signifie que la quantité représentée par x est plus grande que 5.

Le signe $<$ s'énonce *plus petit que*; placé entre deux quantités, il indique que la première est plus petite que la seconde. Ainsi, $x<5$ signifie que la quantité représentée par x est plus petite que 5.

15. Lorsque, dans une question, on a représenté certaines quantités par des lettres, on représente des quantités analogues par les mêmes lettres chargées d'un ou plusieurs accents. Les lettres chargées d'un accent s'énoncent en y ajoutant le mot *prime*; celles qui sont chargées de deux accents s'énoncent en y ajoutant le mot *seconde*; pour trois accents on ajoute le mot *tierce*; et ainsi de suite. Par exemple,

$$a,\ a',\ a'',\ a''',$$

s'énonceraient a, a prime, a seconde, a tierce.

L'usage que nous ferons des divers signes dont il vient d'être question, en fixera peu à peu le sens dans la mémoire du lecteur.

§ 3. Des diverses espèces d'expressions algébriques.

16. Les expressions algébriques les plus simples sont les lettres mêmes de l'alphabet destinées à représenter certaines quantités connues ou inconnues. On emploie ordinairement les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d, etc., pour représenter des quantités supposées connues, mais dont on ne particularise pas la valeur numérique. Les quantités inconnues se distinguent, au contraire, par les dernières lettres x, y, z, etc.

17. On donne, en général, le nom d'*expression algébrique* à tout ensemble de lettres, ou de lettres et de nombres, réunis par quelques-uns des signes énumérés dans le paragraphe précédent. Ainsi

$$15a^3b(x+5) : \sqrt{a-b}$$

est une expression algébrique.

Une expression algébrique est dite *rationnelle* quand elle ne contient point de signe radical. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Une expression algébrique est dite *entière* lorsque aucune division n'y est indiquée. Elle est *fractionnaire* dans le cas contraire.

Nous nous occuperons d'abord des expressions algébriques rationnelles et entières. Telle est l'expression

$$5a^3x - 4a^2x^2 + 16ax^3.$$

18. Dans une expression algébrique rationnelle et entière où il n'entre point de parenthèses, les différentes parties séparées par les signes $+$ ou $-$ sont ce que l'on appelle les différents *termes* de l'expression. Telles sont dans l'expression ci-dessus les parties $5a^3x$, $-4a^2x^2$ ou $+16ax^3$.

Une expression algébrique qui n'a qu'un terme prend le nom de *monome*; telle est l'expression $-4a^2x^3$.

Une expression algébrique qui a deux termes prend le nom de *binome*; telle est $3a-5b$.

Une expression algébrique qui a trois termes porte le nom de *trinome*; telle est $2x^2-3ax+5ab$.

En général, une expression algébrique qui a plusieurs termes porte le nom de *polynome*.

19. Dans un monome, il y a quatre éléments à distinguer :

1° Le signe dont il est précédé, et qui peut être $+$ ou $-$. Tout monome qui n'a pas de signe est censé précédé du signe $+$. Les monomes précédés (ou supposés précédés) du signe $+$ sont des monomes *additifs* ou *positifs*. Les monomes précédés du signe $-$ sont des monomes *soustractifs* ou *négatifs*.

2° Le facteur numérique, s'il y en a un. Ce facteur qu'on écrit le premier porte, ainsi que nous l'avons vu, le nom de *coefficient*.

3° Les lettres qui forment les autres facteurs.

4° Les *exposants* de ces lettres, ou les nombres écrits à droite et un peu au-dessus, qui indiquent combien de fois chaque lettre entre comme facteur dans le produit total.

Ainsi, dans $-4a^2x^3$, le signe est $-$, le coefficient est 4, les lettres sont a et x, les exposants sont 2 et 3.

20. Remarque. Si dans un monome on imagine que chaque lettre prenne une valeur numérique déterminée, le produit indiqué par ce monome prendra lui-même une

certaine valeur numérique, laquelle devra être prise *positivement* ou *négativement*, c'est-à-dire additivement ou soustractivement, suivant que le monome est affecté du signe $+$ ou du signe $-$. Si, par exemple, dans le monome $4a^2x^3$ on imagine que a ait la valeur 3 et x la valeur 5, le monome reviendra à $-4.3.3.5.5.5$ ou à -4500.

On pourrait attribuer aux lettres des valeurs numériques fractionnaires, sans que pour cela le monome cessât d'être *entier*, algébriquement parlant. Si par exemple on attribue à a la valeur $\frac{1}{2}$ et à x la valeur $\frac{1}{3}$, le monome $-4a^2x^3$ reviendra à $-\frac{1}{27}$.

C'est toujours sous cette forme numérique qu'il faut se représenter un monome; c'est-à-dire qu'on doit se le représenter comme composé d'une valeur absolue, entière ou fractionnaire, et d'un signe qui est $+$ ou $-$.

21. On nomme *degré* d'un monome la somme des exposants des lettres qui y entrent. Les lettres qui n'ont point d'exposant n'entrant qu'une fois comme facteur, sont supposées avoir pour exposant 1. Ainsi le degré du monome $5a^3b^2x$ est $3+2+1$ ou 6.

22. On nomme *termes semblables* dans un polynome ceux qui ne diffèrent que par le coefficient et par le signe. Ils contiennent par conséquent les mêmes lettres affectées des mêmes exposants. Ainsi dans le polynome

$$15a^3b^2x-6a^2b^2x^2+8a^3b^2x+7ab^2x^3-9a^3b^2x-4a^3b^2x,$$

il y a quatre termes semblables :

$$15a^3b^2x,\ +8a^3b^2x,\ -9a^3b^2x \text{ et } -4a^3b^2x.$$

On peut toujours réduire les termes semblables en un seul. Il est clair, en effet, dans l'exemple précédent, que quelle que soit la valeur numérique de a^3b^2x il faut prendre 15 fois cette valeur, ajouter encore 8 fois la même valeur, puis en retrancher d'abord 9 fois cette même valeur, et encore 4 fois cette valeur. Le résultat sera donc le même que si de $15+8$ ou 23 fois la valeur numérique dont il s'agit, on retranchait $9+4$ ou 13 fois cette même valeur, ce qui donnerait $23-13$ ou 10 fois cette valeur. L'ensemble des quatre termes considérés revient donc à $10a^3b^2x$.

Si l'ensemble des termes négatifs l'emportait sur celui des termes positifs, le résultat serait lui-même négatif.

On tire de là cette règle : *Pour effectuer la réduction des termes semblables, on fait la somme de tous les coefficients qui ont le signe* $+$ *et la somme de tous les coefficients qui ont le signe* $-$; *on retranche la plus petite somme de la plus grande, on donne au reste le signe de la plus grande, et on écrit à la suite la partie littérale commune.*

23. Un polynome est dit *homogène* quand tous ses termes sont du même degré (**21**). Tel est le polynome

$$5ab^2x^3-6a^2b^2x^2+8a^4bx,$$

dont tous les termes sont du 6ᵉ degré.

24. *Ordonner* un polynome, c'est écrire ses différents termes dans un ordre tel que les exposants d'une même lettre aillent toujours en augmentant ou toujours en diminuant d'un terme à l'autre. La lettre que l'on choisit pour guide prend le nom de *lettre ordonnatrice*; si l'on écrit les termes de manière que les exposants de la lettre *ordonnatrice* aillent en augmentant, on dit que le polynome est

ordonné *par rapport aux puissances croissantes* de cette lettre ; si les exposants de la lettre ordonnatrice vont en diminuant, on dit que le polynome est ordonné *par rapport aux puissances décroissantes* de cette lettre.

Ainsi le polynome, déjà considéré ci-dessus,

$$5ab^2x^3-6a^2b^2x^2+8a^4bx$$

est ordonné par rapport aux puissances croissantes de a, ou par rapport aux puissances décroissantes de x.

Dans la plupart des calculs algébriques on a soin d'ordonner ainsi les polynomes ; cette opération facilite les calculs, en leur donnant plus de symétrie. Il est clair d'ailleurs que, quel que soit l'ordre dans lequel on écrit les termes, soit additifs, soit soustractifs, d'un polynome, sa valeur demeure la même. Cette valeur se compose évidemment de la somme des valeurs numériques des termes additifs ou positifs, diminuée de la somme des valeurs numériques des termes soustractifs ou négatifs.

CHAPITRE II.

DES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES, ET DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

25. Nous ne nous occuperons dans ce chapitre et dans le suivant que des expressions algébriques rationnelles, en commençant par celles qui sont entières. Nous supposerons de plus, si elles sont monomes, qu'elles sont positives, ou que, si elles sont polynomes, l'ensemble des termes positifs l'emporte en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs.

Nous verrons plus tard (chap. IV) le sens qu'il faut attribuer aux opérations algébriques et aux quantités mêmes sur lesquelles elles s'effectuent, lorsque la condition dont nous venons de parler n'est pas remplie.

§ 1. De l'addition.

26. En ayant égard à la restriction exprimée dans le numéro précédent, additionner deux expressions algébriques, c'est ajouter à la valeur absolue de la première, la valeur absolue de la seconde.

1° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes semblables (**22**), on additionnera les coefficients, et l'on écrira à la suite de la somme la partie littérale commune. Par exemple, les deux expressions $5a^2x^3$ et $7a^2x^3$ ont pour somme $12a^2x^3$.

2° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes dissemblables, il suffira d'écrire le second à la suite

du premier en les séparant par le signe $+$; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification. Par exemple, la somme des expressions $5a^2x^3$ et $7a^3x^2$ est

$$5a^2x^3 + 7a^3x^2.$$

27. Supposons maintenant que les expressions à additionner soient polynomes; et qu'à $a - b$, par exemple, on se propose d'ajouter $c - d$.

Si à la suite de $a - b$ on écrivait le premier terme de $c - d$ en le faisant précéder du signe $+$, ce qui donnerait $a - b + c$, on aurait ajouté à $a - b$ une quantité trop grande de d; le résultat serait donc lui-même trop grand de d. Pour lui donner sa véritable valeur, il faut donc le diminuer de d, ce qui se fera en écrivant à sa suite $-d$; et l'on aura

$$a - b + c - d.$$

On voit qu'il a suffi d'écrire à la suite de $a - b$ chacun des termes de $c - d$, avec le signe qu'il avait; car le terme c qui n'était précédé d'aucun signe, devait être regardé comme précédé du signe $+$ (**19**).

En répétant les raisonnements qui précèdent pour des polynomes composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que les termes positifs du second polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $+$, et que les termes négatifs de ce même polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $-$. En d'autres termes : *Pour additionner deux polynomes, on écrit le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe.*

Remarque. La règle serait évidemment la même pour ajouter un polynome à un monome.

28. Si la somme présente alors des termes semblables, il faut en opérer la réduction (**22**), ce qui simplifie le résultat.

Soient, par exemple, à additionner les polynomes

$$4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 7ax^4 - 9x^5$$

et $$5a^3x^2 + 2a^2x^3 - 11ax^4 + 10x^5,$$

on trouvera $$9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5.$$

Soient de même, les polynomes :

$$a^2b + 3ab^2 - 4b^3$$

et $$5a^2b - 3ab^2 + b^3,$$

on trouvera $$6a^2b - 3b^3.$$

§ 2. De la soustraction.

29. D'après l'hypothèse admise dans ce chapitre, soustraire deux expressions algébriques l'une de l'autre, c'est retrancher de la valeur absolue de la première la valeur absolue de la seconde.

1° Si les deux expressions sont deux monomes semblables, on retranchera le coefficient de la seconde du coefficient de la première, ce que nous supposerons possible, et l'on écrira à la suite de la différence la partie littérale commune. Par exemple, la différence entre $7a^2bx$ et $4a^2bx$ est évidemment $3a^2bx$.

2° Si les expressions à soustraire sont deux monomes dissemblables, on écrira le second à la suite du premier en les séparant par le signe —; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification. Ainsi la différence des monomes $5ax^4$ et $3a^2x^3$ est $5ax^4 - 3a^2x^3$.

30. Supposons maintenant que l'expression à soustraire

soit polynome, celle dont on soustrait pouvant être polynome ou monome. Par exemple, supposons que de $a - b$ on veuille soustraire $c - d$.

Si à la suite de $a - b$ on écrivait le terme c avec le signe —, c'est-à-dire si de $a - b$ on retranchait c, ce qui donnerait $a - b - c$, on aurait évidemment retranché une quantité trop grande de d; le résultat serait donc trop petit de d. Pour lui rendre sa vraie valeur il faudra donc lui ajouter d, ce qui se fera en écrivant $+d$ à la suite, et l'on aura $a - b - c + d$.

On remarquera que le terme c qui avait, ou était censé avoir, le signe + dans le polynome à soustraire, a le signe — au résultat; et que le terme d, qui avait le signe — dans le polynome à soustraire, a le signe + au résultat.

En répétant les mêmes raisonnements et les mêmes observations pour des polynomes composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que tout terme ayant le signe + dans le polynome à soustraire devra être écrit au résultat avec le signe —, et que tout terme ayant le signe — dans le polynome à soustraire, devra être écrit au résultat avec le signe +. De là cette règle : *Pour soustraire un polynome d'un autre, on l'écrit à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes.*

Si la différence ainsi obtenue présente des termes semblables, il faut, pour simplifier le résultat, opérer la réduction (**22**) de ces termes.

Exemples. I. Du polynome $9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5$

on veut soustraire $4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 7ax^4 - 9x^5$,

on aura d'abord pour résultat

$$9a^3x^2 - 4a^2x^3 - 4ax^4 + x^5 - 4a^3x^2 + 6a^2x^3 - 7ax^4 + 9x^5,$$

ou, en réduisant,

$$5a^3x^2 + 2a^2x^3 - 11ax^4 + 10x^5.$$

II. Si de $a^2 + 2ab + b^2$ on soustrait $a^2 - 2ab + b^2$, on trouvera pour reste

$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2,$$

ou, en réduisant, $4ab$.

31. *Remarque sur l'usage des parenthèses.* Il arrive souvent que l'on a intérêt à regarder un polynome, soit comme la somme, soit comme la différence de deux autres polynomes. Pour cela, on réunit entre parenthèses tous les termes qu'on regarde comme composant le polynome ajouté ou soustrait, et l'on fait précéder ces parenthèses du signe $+$ dans le premier cas, ou du signe $-$ dans le second. Mais, afin d'avoir égard aux règles données (**27**, **30**) pour l'addition ou pour la soustraction des polynomes, si l'on met $+$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses chacun avec le signe qu'il avait; tandis que si l'on met $-$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses, chacun avec un signe contraire. Si, dans la suite des calculs ou des raisonnements, on vient à supprimer les parenthèses, c'est-à-dire à effectuer l'opération indiquée sur le polynome qu'elle renfermait, ses termes conservent leur signe si les parenthèses étaient précédées du signe $+$, et chacun d'eux en change au contraire si les parenthèses étaient précédées du signe $-$. Dans un cas, comme dans l'autre, on reproduit ainsi le polynome total, tel qu'il était avant l'introduction des parenthèses.

Soit, par exemple, le polynome

$$a + b - c + d - e + f - g + h.$$

On pourra l'écrire de chacune des manières suivantes :

$$a + (b - c + d - e + f - g + h),$$
$$a + b - (c - d + e - f + g - h),$$
$$a + b - c + (d - e + f - g + h),$$
$$a + b - c + d - (e - f + g - h),$$

etc.,

et, en supprimant les parenthèses, c'est-à-dire en effectuant l'addition ou la soustraction indiquées, on reproduira le polynome primitif

$$a + b - c + d - e + f - g + h.$$

§ 3. De la multiplication.

32. D'après les restrictions établies au commencement de ce chapitre, le but que nous nous proposons dans la multiplication algébrique sera le même qu'en arithmétique ; c'est-à-dire qu'étant données deux expressions algébriques, monomes ou polynomes, nous chercherons à en former une troisième dont la valeur numérique ou absolue soit le produit des valeurs absolues des deux premières.

Supposons donc d'abord que les deux facteurs soient deux monomes ; par exemple $5a^3b^2x$ et $3a^2by^2$.

Le premier monome $5a^3b^2x$ représente le résultat qu'on obtiendrait en multipliant 5 par le produit de trois facteurs égaux à a, puis en multipliant le résultat de cette première multiplication par le produit de deux facteurs égaux à b, et en multipliant enfin le résultat de cette seconde multiplication par le facteur x. Or, on a vu en arithmétique que multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier ce nombre successivement par chacun de ces facteurs; et ce principe subsiste pour les quantités fractionnaires comme pour les nombres entiers. Le monome $5a^3b^2x$ pourra donc s'écrire

$$5 \times a \times a \times a \times b \times b \times x.$$

De même, le monome $3a^2by^2$ pourra s'écrire

$$3 \times a \times a \times b \times y \times y.$$

Et, en vertu du principe déjà invoqué ci-dessus, on obtiendra le produit demandé en multipliant le premier monome successivement par chacun des facteurs du second; ce qui donnera

$$5 \times a \times a \times a \times b \times b \times x \times 3 \times a \times a \times b \times y \times y.$$

Mais dans un produit de plusieurs facteurs, entiers ou fractionnaires, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit. On pourra donc, en rapprochant les facteurs égaux, écrire le produit de la manière suivante :

$$5 \times 3 \times a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times x \times y \times y.$$

Le produit de 5 par 3 est 15. Ce produit doit être multiplié successivement par cinq facteurs égaux à a, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces cinq facteurs, ou par a^5. On aura donc ainsi $15 \times a^5$. Ce produit doit donc être multiplié à son tour successivement par trois facteurs égaux à b, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces trois facteurs, ou par b^3. On aura ainsi $15 \times a^5 \times b^3$. Multipliant par x, il vient $15 \times a^5 \times b^3 \times x$. Multipliant enfin successivement par deux facteurs égaux à y, ou, ce qui revient au même, par le produit effectué de ces deux facteurs, ou par y^2, il vient

enfin $15 \times a^5 \times b^3 \times x \times y^2$; ou en supprimant les signes de multiplication :

$$15a^5b^3xy^2.$$

On voit 1° que le coefficient 15 du produit est le produit des coefficients 5 et 3 des deux facteurs monomes : 2° que toutes les lettres qui entrent dans l'un des facteurs entrent au produit; 3° que l'exposant 5 de la lettre a au produit est la somme des exposants 3 et 2 qu'elle avait dans les deux monomes; 4° que l'exposant 3 de la lettre b au produit est la somme des exposants 2 et 1 qu'elle avait dans les deux monomes; 5° que le facteur x, qui n'entre qu'au multiplicande, entre au produit avec le même exposant 1; 6° enfin que le facteur y^2, qui n'entre qu'au multiplicateur, entre au produit avec le même exposant 2.

De là cette règle : *Pour multiplier l'un par l'autre deux monomes positifs, il faut faire le produit des deux coefficients, écrire à la suite toutes les lettres qui entrent dans les deux facteurs monomes, et affecter chacune d'elles d'un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans ces deux facteurs.* (En appliquant cette règle, on voit que toute lettre qui n'entre que dans l'un des deux monomes entre au produit avec le même exposant.)

EXEMPLE. Le produit de $7a^5b^3cd^2$ par $4ab^2dx^3$ est $28a^6b^5cd^3x^3$.

REMARQUE. Il résulte de la règle de la multiplication des monomes, que le degré (**21**) du produit est la somme des degrés des deux monomes facteurs. Ainsi le degré de $5a^3b^2x$ étant 6, et le degré de $3a^2by^2$ étant 5, le degré de leur produit $15a^5b^3xy^2$ est $6 + 5$ ou 11. De même, le degré de $7a^5b^3cd^2$ étant 11, et le degré de $4ab^2dx^3$ étant 7, le degré de leur produit $28a^6b^5cd^3x^3$ est $11+7$ ou 18.

33. Soit maintenant à multiplier un polynome par un monome, par exemple $a+b-c$ par m. Les lettres a, b, c, m représentent des quantités numériques entières ou fractionnaires. Pour fixer les idées et faciliter le discours, supposons que le multiplicateur monome m ait pour valeur $\frac{4}{3}$; la multiplication aura pour but de prendre les $\frac{4}{3}$ du multiplicande. Si celui-ci se réduisait à $a+b$, on obtiendrait évidemment le produit en prenant les $\frac{4}{3}$ de a, puis les $\frac{4}{3}$ de b, et faisant la somme des produits partiels obtenus; c'est-à-dire que le produit total s'obtiendrait en multipliant séparément a et b par m et faisant la somme de ces produits partiels, ce qui donnerait $am+bm$. Mais en opérant ainsi on a pris les $\frac{4}{3}$ d'un polynome trop grand de c, puisque ce n'était pas $a+b$ qu'il fallait multiplier, mais bien $a+b-c$, ou $a+b$ diminué de c. Le produit obtenu $am+bm$ est donc trop grand des $\frac{4}{3}$ de c ou du produit cm; pour lui rendre sa véritable valeur il faut donc en retrancher cm, ce qui donnera

$$am+bm-cm.$$

Comme on pourrait répéter le même raisonnement pour chaque terme soustractif, on voit que *pour faire le produit d'un polynome par un monome* (positif), *il faut multiplier séparément chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur, en donnant à chaque terme du produit le signe du terme du multiplicande qui l'a fourni.*

Ainsi le produit de $5ax^2+3a^2x-4a^3$ par $6a^2bx$ serait

$$30a^3bx^3+18a^4bx^2-24a^5bx.$$

De même, le produit de $3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4$ par $4ab^2c$ serait

$$12a^4b^3c-8a^3b^4c+20a^2b^5c-4ab^6c.$$

34. Soit enfin à multiplier un polynome par un polynome, par exemple $a-b$ par $c-d$ pour plus de simplicité. Faisons d'abord le produit du multiplicande $a-b$ par le terme c du multiplicateur, ce qui donnera, d'après ce que l'on vient de voir, $ac-bc$.

En opérant ainsi, on a multiplié le multiplicande par une quantité trop grande de d, puisque ce n'était pas par c qu'il fallait multiplier, mais bien par c diminué de d. Il s'ensuit que le résultat est lui-même trop grand du produit de $a-b$ par d, c'est-à-dire de $ad-bd$.

Pour lui rendre sa véritable valeur, il faut donc en retrancher $ad-bd$, ce qui donne, d'après les règles de la soustraction, c'est-à-dire en changeant le signe de chaque terme du polynome à soustraire,

$$ac-bc-ad+bd.$$

En examinant ce résultat, on voit qu'il contient les produits partiels de chaque terme du multiplicande $a-b$ par chaque terme du multiplicateur $c-d$. Quant au signe dont chaque produit partiel est affecté, on remarque 1° que les termes a et c, qui avaient (ou étaient censés avoir) le signe $+$, ont donné un produit ac qui figure au résultat avec le signe $+$; 2° que les termes b et c, dont l'un avait le signe $-$ et l'autre le signe $+$, ont fourni au résultat le terme négatif $-bc$; 2° que les termes a et d, dont l'un avait le signe $+$ et l'autre le signe $-$, ont fourni au résultat le terme négatif $-ad$; 4° enfin que les termes b et d, qui avaient tous deux le signe $-$, ont fourni au résultat le terme positif $+bd$.

En résumant, on voit que deux termes de même signe ont donné un produit positif, et que deux termes de signe contraire ont donné un produit négatif.

Les mêmes raisonnements appliqués à deux polynomes quelconques montreraient que ces règles sont générales, et que *deux termes de même signe donnent toujours un produit affecté du signe* $+$, *et que deux termes de signe contraire donnent un produit affecté du signe* $-$. C'est en cela que consiste ce qu'on appelle la *règle des signes* dans la multiplication.

On l'énonce quelquefois en disant d'une manière abrégée que

$$\begin{array}{cccc} + & \text{multiplié par} & + & \text{donne } + \\ + & & - & - \\ - & & + & - \\ - & & - & + \end{array}$$

On dira donc que, *pour multiplier deux polynomes l'un par l'autre, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en ayant égard à la règle des signes.*

Si le résultat présente des termes semblables, on en opère la réduction.

35. Soit, par exemple, à multiplier

$$5ax^3-3a^2x^2-4a^3x+a^4 \text{ par } 6ax^2-2a^2x+3a^3.$$

On disposera ces calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrrrrrr}
\text{Multiplicande} & 5ax^3-3a^2x^2-4a^3x+a^4 & & & & & \\
\text{Multiplicateur} & 6ax^2-2a^2x+3a^3 & & & & & \\
\hline
1^{\text{er}} \text{ produit partiel} & 30a^2x^5 & -18a^3x^4 & -24a^4x^3 & +6a^5x^2 & & \\
2^{\text{e}} \quad \text{»} & & -10a^3x^4 & +6a^4x^3 & +8a^5x^2 & -2a^6x & \\
3^{\text{e}} \quad \text{»} & & & +15a^4x^3 & -9a^5x^2 & -12a^6x & +3a^7 \\
\hline
\text{Produit total réduit} & 30a^2x^5 & -28a^3x^4 & -3a^4x^3 & +5a^5x^2 & -14a^6x & +3a^7
\end{array}$$

On écrit d'abord le multiplicande; on écrit au-dessous le multiplicateur; on tire un trait horizontal au-dessous du multiplicateur. On fait le produit du multiplicande par le premier terme du multiplicateur; c'est le premier produit partiel qu'on écrit au-dessous du trait horizontal. On fait le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur; c'est le second produit partiel qu'on écrit au-dessous du premier. On obtient ainsi autant de produits partiels qu'il y a de termes au multiplicateur. Au-dessous du dernier produit partiel on tire un second trait horizontal, et au-dessous de ce trait on écrit le produit total, qui est la somme des produits partiels, somme dans laquelle on effectue, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Il convient d'ordonner (**24**) le multiplicande, le multiplicateur et le produit total par rapport aux puissances d'une même lettre; les calculs ayant alors plus de symétrie sont plus faciles à vérifier. Il convient aussi d'écrire chaque terme d'un produit partiel au-dessous du terme semblable, s'il y en a, dans le produit partiel précédent; la réduction des termes semblables se trouve ainsi facilitée; il est aussi plus facile d'ordonner le produit total.

36. Nous placerons ici trois produits dont on fait un fréquent usage en Algèbre, et qui fournissent autant de théorèmes du calcul.

I.
$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{+ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le carré de la somme de deux quantités renferme le carré de la première, plus le double produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

(On se rappelle qu'en arithmétique on nomme *carré* d'une quantité le produit de cette quantité par elle-même.)

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

II.
$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le carré de la différence de deux quantités renferme le carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

III.
$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{-ab-b^2} \\ a^2 -b^2. \end{array}$$

Cette multiplication montre que *le produit de la somme de deux quantités, par leur différence, équivaut à la différence de leurs carrés.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

37. Remarque I. Si le multiplicande et le multiplicateur sont homogènes (**23**), le produit est lui-même homogène; car chaque terme du produit s'obtenant en multipliant un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur, le degré de ce terme du produit est la somme des degrés des deux termes qui l'ont fourni (**32**), c'est-à-dire la somme des degrés du multiplicande et du multiplicateur, puisque ceux-ci sont homogènes. Tous les termes du produit sont donc du même degré, c'est-à-dire qu'il est homogène.

On voit de plus que son degré est la somme des degrés des deux polynomes facteurs.

Ainsi, dans l'exemple donné au nº **35**, le multiplicande est homogène et du 4e degré, le multiplicateur est homogène et du 3e degré, le produit est homogène et du 7e degré.

38. Remarque II. Par suite des réductions qui s'opèrent entre les termes semblables, certains termes du produit peuvent disparaître; c'est ce qu'on voit dans l'exemple III du nº **36**. Mais il y a toujours au moins deux termes qui ne disparaissent pas : ces termes sont, si le multiplicande et le multiplicateur ont été ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

En effet : si, pour fixer les idées, on suppose ces polynomes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, le premier terme du multiplicande et le premier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance plus élevée qu'aucun des termes qui suivent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance plus élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra conséquemment se réduire avec aucun autre. De même : le dernier terme du multiplicande et le dernier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance moins élevée qu'aucun des termes qui précèdent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance moins élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra en conséquence se réduire avec aucun autre. Tels sont, dans la multiplication du n° 35, le premier terme $30a^2x^5$ du produit et le dernier $+3a^7$.

Quelles que soient les réductions qui s'opèrent, il restera donc au moins deux termes au produit. La multiplication suivante offre un exemple du cas où il ne reste que ces deux termes :

$$\begin{array}{r} a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ a-b \\ \hline a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\ -a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5 \\ \hline a^5-b^5 \end{array}$$

§ 4. De la division.

39. La division, en Algèbre comme en arithmétique, est une opération par laquelle, étant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, on se propose de retrouver le second facteur. Le produit donné est le dividende, le facteur donné est le diviseur, le facteur cherché est le quotient.

Soit d'abord à diviser un monome (positif) par un autre monome (également positif), par exemple, $15a^5b^3xy^2$ par $5a^3b^2x$.

D'après les règles de la multiplication des monomes (**32**) le coefficient 15 du dividende a été formé en multipliant le coefficient 5 du diviseur par le coefficient inconnu du quotient; on obtiendra donc ce coefficient inconnu en divisant 15 par 5, ce qui donne 3. Le quotient ne peut contenir aucune lettre qui ne soit pas au dividende. Or, l'exposant 5 de la lettre a au dividende est la somme de l'exposant 3 de la même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 3 de 5, ce qui donne pour reste 2 et montre que le quotient doit contenir le facteur a^2. De même, l'exposant 3 de la lettre b au dividende est la somme de l'exposant 2 de cette même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 2 de 3, ce qui donne pour reste 1, et montre que le quotient contiendra le facteur b. La lettre x entrant avec le même exposant au dividende et au diviseur, ne saurait entrer au quotient. La lettre y n'entrant pas au diviseur, doit entrer au quotient avec le même exposant qu'au dividende. Le quotient sera donc $3a^2by^2$. Et, en effet, en multipliant $5a^3b^2x$ par $3a^2by^2$ on retrouve bien $15a^5b^3xy$.

De là cette règle : *Pour diviser deux monomes* (positifs) *l'un par l'autre, divisez le coefficient du monome dividende par le coefficient du monome diviseur, vous obtiendrez le* *coefficient du monome quotient. Examinez successivement chaque lettre du dividende. Si elle est commune au dividende et au diviseur, et que son exposant au dividende surpasse son exposant au diviseur, écrivez-la au quotient avec un exposant égal à la différence de ces exposants. Si elle a le même exposant au dividende et au diviseur, dispensez-vous de l'écrire au quotient. Si elle n'entre qu'au dividende, écrivez-la avec le même exposant au quotient.*

Exemple. Le quotient de $28a^6b^5cd^3x^3$ par $7a^5b^3cd^2$ est $4ab^2dx^3$.

40. Remarque I. La division serait impossible : 1° si le diviseur contenait une lettre qui n'entrât pas au dividende ; 2° si une lettre avait au diviseur un exposant plus élevé qu'au dividende ; 3° si le coefficient du dividende n'était pas exactement divisible par le coefficient du diviseur.

Remarque II. Lorsqu'une lettre entre au dividende et au diviseur avec le même exposant, si on lui appliquait la même règle qu'aux autres lettres, on devrait l'écrire au quotient avec un exposant égal à la différence des exposants qu'elle a au dividende et au diviseur, c'est-à-dire avec l'exposant *zéro*. Ainsi, le quotient de $15a^3b^2x$ par $3a^3b$ serait $5a^0bx$.

Or, nous avons vu que le quotient doit être $5bx$; le facteur a^0 représente donc un facteur qui n'altère pas le produit, c'est-à-dire qu'il représente l'unité.

On se sert quelquefois de ce symbole pour conserver au quotient la trace d'un facteur du dividende qui disparaîtrait sans cela. Mais il faut bien se rappeler qu'une expression telle que a^0 est le symbole de l'unité, ou que a^0 est égal à 1.

41. Soit maintenant à diviser un polynome par un monome (positif), par exemple $30a^3bx^3 + 18a^4bx^2 - 24a^5bx$ par $6a^2bx$.

Le quotient sera un polynome, car le produit d'un monome par un monome serait un monome. Or, on a vu (33) que le produit d'un polynome par un monome est un polynome composé du même nombre de termes affectés des mêmes signes, et qu'ils s'obtiennent en multipliant respectivement chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur. On formera donc le quotient demandé en divisant chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affectant chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.

Le quotient de $30a^3bx^3$ par $6a^2bx$ est $5ax^2$; on l'écrira au quotient total, où il sera censé avoir le signe $+$, attendu qu'il sera le premier. Le quotient de $18a^4bx^2$ par $6a^2bx$ est $3a^2x$; on l'écrira avec le signe $+$ à la suite du premier terme du quotient total. Le quotient de $24a^5bx$ par $6a^2bx$ est $4a^3$; on l'écrira avec le signe $-$ à la suite des deux premiers termes du quotient total. Le quotient total sera ainsi $5ax^2 + 3a^2x - 4a^3$. On peut vérifier, en effet, qu'en multipliant ce quotient par le diviseur $6a^2bx$ on reproduirait le polynome dividende.

On voit que *pour diviser un polynome par un monome* (positif), *il faut diviser chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affecter chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.*

Ainsi, le quotient de $12a^4b^3c - 8a^3b^4c + 20a^2b^5c - 4ab^6c$ par $4ab^2c$ est $3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4$.

Remarque. La division serait impossible si un terme quelconque du polynome dividende n'était pas exactement divisible (**40**) par le monome diviseur.

42. Lorsque tous les termes d'un polynome admettent un facteur commun, il est souvent utile de mettre ce facteur *en évidence*, c'est-à-dire de décomposer le polynome en deux facteurs dont l'un soit le facteur monome commun à tous ses termes, et dont l'autre soit le quotient du polynome proposé par le facteur commun ; ce quotient ou ce facteur polynome se met alors entre parenthèses. Par exemple, on a vu tout à l'heure que le polynome

$$30a^3bx^3 + 18a^4bx^2 - 24a^5bx$$

était divisible par $6a^2bx$ et donnait pour quotient

$$5ax^2 + 3a^2x - 4a^3.$$

On peut donc écrire ce polynome de la manière suivante :

$$(5ax^2 + 3a^2x - 4a^3)6a^2bx$$

qui exprime le produit du quotient par le diviseur (**13**). Le facteur monome peut se mettre indifféremment à droite ou à gauche de la parenthèse.

Soit de même le polynome

$$12a^4b^3c - 8a^3b^4c + 20a^2b^5c - 4ab^6c.$$

On reconnaît que le facteur $4ab^2c$ est commun à tous ses termes ; on peut donc mettre ce facteur en évidence, en écrivant entre parenthèses le quotient du polynome proposé par le facteur mis hors parenthèses. On aura ainsi

$$4ab^2c(3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4).$$

43. Soit enfin à diviser un polynome par un polynome ; par exemple,

$$30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$$

par $\qquad 5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4.$

On commencera par écrire le diviseur à la droite du dividende, en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre, s'ils n'étaient pas déjà ordonnés ; et on les séparera par un trait vertical. On tirera un trait horizontal au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient. Ces dispositions sont indiquées dans le tableau ci-contre, les polynomes y sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x.

	Dividende.	Diviseur.
	$30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$	$5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4$
	$-30a^2x^5 + 18a^3x^4 + 24a^4x^3 - 6a^5x^2$	$6ax^2 - 2a^2x + 3a^3$ Quotient.
1er reste. . . .	$-10a^3x^4 + 21a^4x^3 - a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$	
	$+10a^3x^4 - 6a^4x^3 - 8a^5x^2 + 2a^6x$	
2e reste.	$+15a^4x^3 - 9a^5x^2 - 12a^6x + 3a^7$	
	$-15a^4x^3 + 9a^5x^2 + 12a^6x - 3a^7$	
3e reste.	0	

Concevons que le quotient inconnu soit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Comme le dividende est le produit du diviseur par le quotient, le produit partiel du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient doit donner le premier terme du dividende ; car on a vu (**38**) que ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

Mais ici il sera nécessaire d'avoir égard aux signes, car en ordonnant les deux polynomes il peut également arriver que le premier terme ait le signe $+$ ou le signe $-$. Or, la *règle des signes* donnée pour la multiplication (34) nous apprend que si le produit de deux termes est positif, ces deux termes sont de même signe; et que si le produit est négatif, les deux termes sont de signe contraire. On peut donc former le tableau suivant :

$+$	divisé par	$+$	donne au quotient	$+$
$+$		$-$		$-$
$-$		$+$		$-$
$-$		$-$		$+$

ce qui montre que *le quotient de deux termes de même signe a le signe* $+$, *et que le quotient de deux termes de signe contraire a le signe* $-$; règle qui est la même que pour la multiplication.

Dans l'exemple actuel, le premier terme du dividende et le premier terme du diviseur étant positifs, le premier terme du quotient sera positif. On divisera donc $30a^2x^5$ par $5ax^3$, ce qui donne $6ax^2$, et l'on écrira ce premier terme du quotient au-dessous du diviseur.

Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, contient tous les produits partiels du diviseur par les différents termes du quotient. Le premier terme du quotient étant trouvé, on peut multiplier le diviseur par ce terme, et retrancher le produit ainsi obtenu du dividende; le reste ne contiendra plus que les produits du diviseur par les termes suivants du quotient, et sera par consé-

quent un nouveau dividende plus simple sur lequel on pourra opérer comme sur le premier. Ce calcul se fait de la manière suivante : $+5ax^3$ multiplié par $+6ax^2$ donne $+30a^2x^5$, et, pour soustraire, $-30a^2x^5$, qu'on écrit au-dessous du premier terme du dividende; $-3a^2x^2$ par $+6ax^2$ donne $-18a^3x^4$, et, pour soustraire, $+18a^3x^4$, qu'on écrit au-dessous du dividende, à la suite du terme précédent; $-4a^3x$ par $+6ax^2$ donne $-24a^4x^3$, et, pour soustraire, $+24a^4x^3$, qu'on écrit au-dessous du dividende à la suite des deux termes précédents; enfin $+a^4$ par $+6ax^2$ donne $+6a^5x^2$, et, pour soustraire, $-6a^5x^2$, qu'on écrit encore au-dessous du dividende à la suite des trois termes précédents. On tire un trait horizontal au-dessous du polynome soustrait; on opère la réduction des termes semblables, et l'on obtient pour premier reste

$$-10a^3x^4+21a^4x^3-a^5x^2-14a^6x+3a^7.$$

Ce premier reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné comme le diviseur et le quotient, par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On aura donc le second terme du quotient en divisant le premier terme du premier reste, ou second dividende, par le premier terme du diviseur. Or, $-10a^3x^4$ divisé par $+5ax^3$ donne $-2a^2x$; on écrit ce quotient partiel à la suite du premier terme du quotient total.

Connaissant le second terme du quotient, on peut faire le produit du diviseur par ce second terme, et retrancher ce produit du premier reste; le second reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient. En effectuant ces calculs de la même manière que ci-dessus, on obtient pour second reste

$$+15a^4x^3 - 9a^5x^2 - 12a^6x + 3a^7.$$

Ce second reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le troisième terme du quotient en divisant le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur. Or, $+15a^4x^3$ divisé par $+5ax^3$ donne $+3a^3$; on écrit ce quotient partiel à la suite des deux premiers termes du quotient total.

Connaissant le troisième terme du quotient, on peut multiplier le diviseur par ce terme, et soustraire le produit du second reste ; le troisième reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient, s'il y en a. En effectuant ces calculs, on trouve *zéro* pour troisième reste ; il en résulte que l'opération est terminée, et que le quotient total est

$$6ax^2 - 2a^2x + 3a^3.$$

En multipliant, en effet, le diviseur par ce quotient, on reproduirait le dividende (35).

De tout ce qui précède, on tire la règle suivante : *Pour diviser deux polynomes l'un par l'autre, on écrit le diviseur à la droite du dividende en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre; on les sépare par un trait vertical, et l'on tire un trait horizontal au-dessous du diviseur*

pour le séparer du quotient. On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtient ainsi le premier terme du quotient, qu'on écrit au-dessous du diviseur. On multiplie le diviseur par ce terme; on soustrait le produit du dividende, et l'on obtient un premier reste. On divise le premier terme de ce premier reste par le premier terme du diviseur; on obtient ainsi le second terme du quotient; on l'écrit à la suite du premier; on multiplie le diviseur par ce second terme; on soustrait le produit du premier reste, et l'on obtient un second reste. On opère sur ce second reste et sur les suivants, comme sur le premier; on obtient ainsi les termes successifs du quotient. Si le dividende est le produit exact du diviseur par un polynome entier, on obtient zéro *pour dernier reste, et l'opération est terminée.*

(*Dans chaque division partielle de monomes, il faut observer la* règle des signes, *qui consiste en ce que deux termes de même signe donnent un quotient positif, et deux termes de signe contraire un quotient négatif.*)

44. Remarque I. On reconnaît que la division ne peut s'effectuer exactement : 1° lorsque le diviseur contient une lettre qui n'entre pas au dividende ; 2° lorsque la plus haute puissance d'une lettre au diviseur surpasse la plus haute puissance de la même lettre au dividende ; 3° lorsque, après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport aux puissances, décroissantes par exemple, d'une même lettre, quelle qu'elle soit, le premier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur ; 4° lorsque le dernier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le dernier terme du diviseur ; 5° enfin lorsque, dans le courant de l'opération, le premier terme d'un reste n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur.

REMARQUE II. Lorsqu'il se manifeste une impossibilité dans le courant de l'opération, le reste auquel on est parvenu est ce qu'on appelle le *reste de l'opération*. Si l'on ajoute ce reste au produit du diviseur par l'ensemble des termes obtenus au quotient on doit reproduire le dividende.

Soit, par exemple, à diviser

$$12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5$$

par

$$4ax^2+5a^2x-6a^3.$$

En opérant comme précédemment,

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & 12a^2x^3 & +\ 7a^3x^2 & -\ 8a^4x & +\ 2a^5 & 4ax^2+5a^2x-6a^3 \\ \cline{6-6}
 & -12a^2x^3 & -15a^3x^2 & +18a^4x & & 3ax\ -2a^2 \\ \cline{2-5}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} & & -\ 8a^3x^2 & +10a^4x & +\ 2a^5 & \\
 & & +\ 8a^3x^2 & +10a^4x & -12a^5 & \\ \cline{3-5}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} & & & +20a^4x & -10a^5, &
\end{array}$$

on obtient d'abord au quotient les deux termes $3ax$ et $-2a^2$; puis l'on parvient à un second reste $20a^4x-10a^5$ dont le premier terme n'est pas divisible par le premier terme du diviseur, puisqu'il contient la lettre ordonnatrice à une puissance moindre. Il en résulte que l'opération ne peut s'effectuer exactement, et que le dividende est égal au produit du diviseur par $3ax-2a^2$, augmenté du reste $20a^4x-10a^5$; ce qu'il est facile de vérifier.

§ 5. Des fractions algébriques.

45. Lorsqu'une division est impossible, on se contente de l'indiquer : pour cela on écrit le diviseur au-dessous du dividende en les séparant par un trait horizontal appelé *barre de division* (**11**). Ainsi, dans l'exemple du nº **44**, lorsque l'on est parvenu au reste $20a^4x-10a^5$, l'opération ne pouvant être continuée, on indiquerait le quotient de ce reste par le diviseur, sous la forme

$$\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3},$$

et cette expression serait ce qu'il faut ajouter au quotient déjà obtenu pour le compléter.

Une expression de cette forme est ce qu'on nomme une *fraction algébrique;* mais le sens qu'on attache ici au mot fraction n'est point le même qu'en arithmétique. Dans une fraction ordinaire, en effet, les deux termes sont nécessairement entiers; dans une fraction algébrique, au contraire, les deux termes peuvent prendre des valeurs quelconques, entières ou fractionnaires, par suite des valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent. (Ils peuvent même prendre des valeurs négatives, mais nous faisons abstraction de ce cas dans le présent chapitre.) On ne doit donc entendre par fraction algébrique qu'un quotient dans lequel le dividende prend le nom de numérateur, et le diviseur celui de dénominateur.

Le calcul des fractions algébriques a d'ailleurs la plus grande analogie avec celui des fractions ordinaires.

46. *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant à la fois ses deux termes par une même quantité.*

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que, par suite des valeurs attribuées aux lettres qui entrent dans la fraction algébrique, son numérateur prenne la valeur $\frac{6}{5}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{11}$, la valeur de la fraction sera le quotient de ces deux expressions fractionnaires, c'est-à-dire

$$\frac{6\times 11}{5\times 7}.$$

Concevons maintenant que l'on multiplie les deux termes $\frac{6}{5}$ et $\frac{7}{11}$ par une même quantité qui ait la valeur $\frac{4}{3}$; ces deux termes deviendront respectivement $\frac{6\times 4}{5\times 3}$ et $\frac{7\times 4}{11\times 3}$; leur quotient deviendra donc

$$\frac{6\times 4\times 11\times 3}{5\times 3\times 7\times 4},$$

ou, en supprimant les facteurs communs 4 et 3,

$$\frac{6\times 11}{5\times 7},$$

c'est-à-dire que le quotient n'a pas changé.

On démontrerait de la même manière qu'*une fraction algébrique ne change pas de valeur quand on divise ses deux termes par une même quantité.*

Ainsi les expressions

$$\frac{2a}{3b},\quad \frac{4a^2}{6ab},\quad \frac{4a^2-2ab}{6ab-3b^2},$$

sont des fractions équivalentes; car on obtient la seconde en multipliant les deux termes de la première par $2a$, et la troisième en multipliant les deux termes de la première par $2a-b$; ou bien on obtiendrait la première en divisant les deux termes de la seconde par $2a$, ou les deux termes de la troisième par $2a-b$.

47. Pour simplifier une fraction, il faut supprimer les facteurs communs à ses deux termes. Ces facteurs sont faciles à apercevoir si les deux termes sont monomes.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{48a^3b^2x^4}{60a^2bx^6},$$

on aperçoit sur-le-champ que les deux termes sont divisibles par $12a^2bx^4$, et, en effectuant la division, il vient

$$\frac{4ab}{5x^2}.$$

Si les deux termes sont polynomes, il faut chercher les facteurs communs à tous les termes de chaque polynome, et les mettre en évidence (**42**); on aperçoit alors facilement les facteurs monomes qui peuvent être communs aux deux termes de la fraction. Quant aux polynomes mis entre parenthèses, il arrive quelquefois qu'ils se décomposent à vue en facteurs polynomes plus simples, et que cette décomposition met en évidence des facteurs polynomes communs aux deux termes de la fraction.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{36a^5b^2-36a^3b^4}{54a^4b^3-108a^3b^4+54a^2b^5}.$$

Le numérateur peut se mettre sous la forme

$$36a^3b^2(a^2-b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au n° **36**,

$$36a^3b^2(a+b)(a-b).$$

Le dénominateur peut s'écrire

$$54a^2b^3(a^2-2ab+b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au lieu cité,

$$54a^2b^3(a-b)(a-b).$$

La fraction proposée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{36a^3b^2(a+b)(a-b)}{54a^2b^3(a-b)(a-b)}.$$

On reconnaît alors que ses deux termes sont divisibles par $18a^2b^2$ et par $(a-b)$; supprimant ces facteurs communs, il reste

$$\frac{2a(a+b)}{3b(a-b)} \quad \text{ou} \quad \frac{2a^2+2ab}{3ab-3b^2}.$$

L'habitude de ces transformations est d'un grand secours dans les calculs algébriques.

48. Si l'on a une fraction algébrique jointe à une quantité entière, on peut réduire le tout en une seule expression fractionnaire d'après les mêmes règles qu'en arithmétique. En effet, il est clair qu'on ne change pas la valeur de la quantité entière en la multipliant et en la divisant en même temps par le dénominateur de la fraction; on obtient ainsi deux quantités fractionnaires de même dénominateur; et l'on peut les réunir en une seule, en faisant la somme des numérateurs et donnant à cette somme le dénominateur commun; car diviser une somme revient à diviser ses parties et à faire la somme des quotients.

Soit, par exemple, l'expression

$$4b+\frac{(a-b)^2}{a} \quad \text{ou} \quad 4b+\frac{a^2-2ab+b^2}{a},$$

on aura successivement

$$\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{a}$$

ou enfin (36) $\dfrac{(a+b)^2}{a}.$

Réciproquement : lorsqu'on a une expression fractionnaire dans laquelle, le numérateur et le dénominateur étant ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme du numérateur est exactement divisible par le premier terme du dénominateur, on peut opérer une ou plusieurs divisions partielles, qui fourniront un quotient partiel entier, et l'on complétera ce quotient par une fraction ayant pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur, c'est-à-dire le dénominateur de l'expression proposée.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

On a vu au n° **44** que si l'on divise le numérateur par le dénominateur on obtient pour quotient $3ax-2a^2$ et pour reste $20a^4x-10a^5$. On pourra donc mettre la fraction proposée sous la forme

$$3ax-2a^2+\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

Soit de même la fraction

$$\frac{(a-b)^2}{a-2b} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2-2ab+b^2}{a-2b}.$$

Effectuant la division, on obtient pour quotient a et pour reste b^2; on peut donc écrire la fraction proposée sous la forme

$$a+\frac{b^2}{a-2b}.$$

Ces diverses transformations sont au nombre de celles dont l'Algèbre fait un plus fréquent usage, soit dans la solution des problèmes, soit dans la démonstration des théorèmes de calcul.

49. Pour additionner deux fractions algébriques de même dénominateur, il suffit évidemment d'additionner les numérateurs et de donner à la somme le dénominateur commun; puisque, comme nous l'avons rappelé déjà, diviser une somme est la même chose que de diviser séparément les parties et de faire la somme des quotients.

Si les fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, on les réduira au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, ce qui ne changera pas leur valeur (**46**).

Soit, par exemple, à additionner les fractions

$$\frac{a^2-ab}{a+b},\quad \frac{a^2+ab}{a-b},\quad \frac{a^2-b^2}{a}.$$

Multipliant les deux termes de la première par $a-b$ et par a, les deux termes de la seconde par $a+b$ et par a, et les deux termes de la troisième par $a+b$ et par $a-b$, elles deviendront :

$$\frac{a^4-2a^3b+a^2b^2}{a^3-a^2b},\quad \frac{a^4+2a^3b+a^2b^2}{a^3-a^2b},\quad \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^3-a^2b};$$

ajoutant les numérateurs, et donnant à la somme le dénominateur commun, il viendra, après réductions,

$$\frac{3a^4+b^4}{a^3-a^2b}.$$

Si les dénominateurs des fractions proposées ont des facteurs communs, on peut obtenir un dénominateur commun plus simple que le produit des dénominateurs. Pour cela, on suivra la même marche qu'en arithmétique; ayant décomposé les dénominateurs en facteurs aussi simples qu'on le pourra, on fera le produit de tous ces facteurs simples, en affectant chacun de son plus haut exposant; on aura ainsi le dénominateur commun. On le divisera par le dénominateur de chaque fraction, et l'on multipliera son numérateur par le quotient obtenu. On aura ainsi les nouveaux numérateurs, sous lesquels on écrira le dénominateur commun. Les fractions étant ainsi réduites au même dénominateur, on les additionnera comme ci-dessus.

50. Pour soustraire l'une de l'autre deux fractions algébriques, on commence par les réduire au même dénominateur, on soustrait le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et l'on donne à la différence le dénominateur commun.

Soit, par exemple, à soustraire de $\frac{a+b}{a-b}$ la fraction $\frac{a-b}{a+b}$; ces fractions réduites au même dénominateur deviennent respectivement $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ et $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

Si du premier numérateur on retranche le second, on trouve pour reste $4ab$; donnant à cette différence le dénominateur commun, il vient

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

51. Pour multiplier l'une par l'autre une fraction algébrique et une quantité entière, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière et de donner au produit le dénominateur de la fraction.

Concevons, en effet, que par suite des valeurs attribuées aux lettres, le numérateur de la fraction prenne la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; concevons de même que la quantité algébrique entière prenne la valeur numérique fractionnaire $\frac{2}{9}$. La fraction algébrique aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5 \times 4}{3 \times 7}$; et le produit de cette quantité par $\frac{2}{9}$ sera $\frac{5 \times 4 \times 2}{3 \times 7 \times 9}$.

Multiplions maintenant le numérateur $\frac{5}{3}$ de la fraction algébrique par la quantité $\frac{2}{9}$, le produit sera $\frac{5 \times 2}{3 \times 9}$; si nous lui donnons pour dénominateur $\frac{7}{4}$, le résultat sera le quotient de $\frac{5 \times 2}{3 \times 9}$ par $\frac{7}{4}$ ou bien $\frac{5 \times 2 \times 4}{3 \times 9 \times 7}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avons obtenu d'abord, que par l'ordre des facteurs, lequel ordre est, comme on sait, indifférent.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{ab}{a^2 - b^2}$ par $a - b$, le produit sera $\frac{ab(a-b)}{a^2 - b^2}$ ou $\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\frac{ab}{a+b}$.

On aurait pu, au lieu de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière, diviser son dénominateur, le résultat eût été le même; c'est ce qu'on démontrerait facilement comme ci-dessus.

REMARQUE. Pour multiplier une fraction algébrique par son dénominateur, il suffit de le supprimer. Soit, en effet, pour plus de simplicité, la fraction $\frac{a}{b}$; si on la multiplie par b, on aura, d'après la règle précédente $\frac{ab}{b}$, ou, en effectuant la division indiquée, a simplement, résultat auquel on fût parvenu en supprimant le dénominateur.

52. Pour multiplier deux fractions algébriques l'une par l'autre, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Supposons, en effet, que le numérateur de la première fraction ait la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; que le numérateur de la seconde ait pour valeur $\frac{2}{9}$ et son dénominateur $\frac{11}{8}$. La première fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5 \times 4}{3 \times 7}$. La seconde fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{2}{9}$ par $\frac{11}{8}$ ou $\frac{2 \times 8}{9 \times 11}$. Le produit des deux fractions a donc pour valeur $\frac{5 \times 4 \times 2 \times 8}{3 \times 7 \times 9 \times 11}$.

Multiplions maintenant entre eux les numérateurs $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{9}$ des fractions algébriques proposées, le produit sera $\frac{5 \times 2}{3 \times 9}$; multiplions de même leurs dénominateurs $\frac{7}{4}$ et

$\frac{11}{8}$; le produit sera $\frac{7\times 11}{4\times 8}$. La fraction algébrique qui aura pour numérateur le produit des numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur le produit de leurs dénominateurs sera donc le quotient de $\frac{5\times 2}{3\times 9}$ par $\frac{7\times 11}{4\times 8}$, ou bien $\frac{5\times 2\times 4\times 8}{3\times 9\times 7\times 11}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avions obtenu d'abord que par l'ordre des facteurs.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{6ab}{a^2-b^2}$ par $\frac{a+b}{2a}$; le produit sera $\frac{6ab(a+b)}{2a(a^2-b^2)}$ ou $\frac{6ab(a+b)}{2a(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\frac{3b}{a-b}$.

La même règle s'étendrait sans peine à un nombre quelconque de fractions.

53. On démontrerait comme ci-dessus : 1° Que pour diviser une fraction algébrique par une quantité entière, il faut multiplier son dénominateur par cette quantité entière (ou diviser son numérateur si cela est possible).

EXEMPLE. Le quotient de $\frac{a^2-b^2}{2a}$ par $a-b$ est

$$\frac{a^2-b^2}{2a(a-b)} \text{ ou } \frac{(a+b)(a-b)}{2a(a-b)}, \text{ ou enfin } \frac{a+b}{2a}.$$

2° Que pour diviser une quantité entière par une fraction, il faut multiplier la quantité entière par le dénominateur de la fraction, et diviser le produit par le numérateur.

EXEMPLE. Le quotient de a^2-b^2 par $\frac{ab+b^2}{2a}$ est

$\frac{(a^2-b^2)2a}{ab+b^2}$ ou $\frac{(a+b)(a-b)2a}{(a+b)b}$, ou $\frac{(a-b)2a}{b}$, ou enfin $\frac{2a^2-2ab}{b}$.

3° Que pour diviser une fraction algébrique par une autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

EXEMPLE. Le quotient de $\frac{2a^2x-2b^2x}{5ab}$ par $\frac{4ab^2-4b^3}{15ax}$ est $\frac{(2a^2x-2b^2x).15ax}{5ab(4ab^2-4b^3)}$ ou $\frac{2.3.5.ax^2.(a+b)(a-b)}{2^2.5.a.b^3(a-b)}$; ou enfin $\frac{3x^2(a+b)}{2b^3}$.

Ces règles sont faciles à retenir, puisque, comme on a pu le remarquer, elles sont exactement les mêmes qu'en arithmétique.

54. Si l'on avait à multiplier ou à diviser des expressions algébriques formées d'une partie entière et d'une fraction, on commencerait par réduire la partie entière et la fraction en une seule expression fractionnaire (48); on opérerait ensuite comme pour des fractions.

Soit, par exemple, à diviser $3a-\frac{3b^2}{a}$ par $\frac{a^2}{b}-a$. Ces deux expressions reviennent à $\frac{3a^2-3b^2}{a}$ et $\frac{a^2-ab}{b}$. Leur quotient est donc $\frac{(3a^2-3b^2)b}{a(a^2-ab)}$, ou bien

$$\frac{3b(a+b)(a-b)}{a^2(a-b)}, \text{ ou bien } \frac{3b(a+b)}{a^2}.$$

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS ET DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Notions générales sur les égalités.

55. On a vu au nº **14** que pour exprimer que deux quantités sont égales, on les écrit à la suite l'une de l'autre en les séparant par le signe $=$. Deux expressions algébriques séparées par ce signe forment ce qu'on appelle, en général, une *égalité*; et les quantités placées de part et d'autre du signe sont les deux *membres* de l'égalité. Par exemple :

$$a+b=c-d;\quad (x-a)(x+a)=x^2-a^2;\quad \frac{3x-1}{8}=4$$

sont des égalités. La quantité $a+b$ est le premier membre de la première; $c-d$ en est le second membre; et ainsi des autres.

Mais ces égalités sont, comme on va le voir, d'espèces très-différentes.

I. Il peut arriver que, dans un problème où figurent des quantités données a, b, c, d auxquelles on n'attribue pas de valeurs particulières, ces quantités soient néanmoins assujetties, par la nature même de la question, à satisfaire à la condition

$$a+b=c-d;$$

cette condition serait plus particulièrement une *égalité*, ou une simple *relation*.

II. L'égalité $\quad (x-a)(x+a)=x^2-a^2$

se distingue de la précédente en ce que, si l'on effectue les calculs indiqués, le premier membre devient identiquement égal au second

$$x^2-a^2=x^2-a^2.$$

Elle jouit, en conséquence, de la propriété caractéristique d'être satisfaite, quelles que soient les valeurs qu'on attribue aux lettres qui y entrent. Si, par exemple, on remplace x par 2 et a par 1, elle donne :

$$(2-1)(2+1)=2^2-1^2 \text{ ou } 1\times3=4-1 \text{ ou } 3=3.$$

Si l'on remplace x par 5 et a par 2, elle donne :

$$(5-2)(5+2)=5^2-2^2 \text{ ou } 3\times7=25-4 \text{ ou } 21=21.$$

Si l'on remplace x par $\frac{4}{3}$ et a par 1, elle donne :

$$\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2-1^2 \text{ ou } \frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{16}{9}-1 \text{ ou } \frac{7}{9}=\frac{7}{9};$$

et ainsi de suite.

Les égalités de cette espèce portent le nom d'*identités*.

III. L'égalité $\quad \frac{3x-1}{8}=4$

est satisfaite lorsqu'on y remplace x par 11; car 3 fois 11 font 33; $33-1$ font 32; 32 divisé par 8 donne bien 4. Mais cette égalité cesserait d'être vérifiée si l'on y mettait à la place de x toute autre valeur que le nombre 11.

On donne le nom d'*équation* à toute égalité de cette espèce, exprimant une relation entre une quantité inconnue et des quantités données, et qui ne peut être satisfaite que par certaines valeurs déterminées de l'inconnue.

(Nous considérerons plus tard le cas où il y a plusieurs inconnues.)

Remarque. On peut remarquer que les simples relations d'égalité deviennent des équations lorsqu'on y regarde comme inconnue l'une des lettres qui y entrent. Si, par exemple, dans la relation

$$a+b=c-d$$

trois seulement des quantités a, b, c, d étant supposées données b, c, d, par exemple, on se proposait d'en déduire la quatrième, a, cette simple relation d'égalité deviendrait une équation où a serait l'inconnue.

56. On peut faire subir aux égalités toutes les transformations qui n'empêchent pas les deux membres de rester égaux; ainsi, on peut ajouter une même quantité aux deux membres, soustraire une même quantité des deux membres, multiplier les deux membres par une même quantité, diviser les deux membres par une même quantité.

I. Les deux premières propriétés servent à *faire passer un terme d'un membre dans un autre,* transformation qui est très-fréquemment employée. Pour l'effectuer, il suffit d'effacer du membre où il était le terme que l'on veut changer de membre, et de l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait.

Prenons pour exemple l'égalité

$$a+b=c-d,$$

et supposons qu'on veuille faire passer le terme b dans le second membre. Si, d'abord, on l'efface dans le premier,

comme il était additif, on diminue ce membre de la quantité b; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc diminuer aussi le second membre de b, ce qui se fera en y écrivant $-b$. On aura ainsi :

$$a=c-d-b.$$

Supposons maintenant qu'on veuille faire passer le terme d du second membre dans le premier. Si d'abord on l'efface dans le second, comme il était soustractif, on augmente ce second membre de la quantité d; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc augmenter aussi le premier membre de d, ce qui se fera en y écrivant $+d$; et l'on aura :

$$a+d=c-b.$$

Ainsi, *pour faire passer un terme d'un membre dans un autre, il faut changer son signe.*

Remarque. Cette faculté de faire passer un terme d'un membre dans un autre, permet de réduire entre eux les termes semblables qui se trouvent dans les deux membres. Ainsi l'égalité

$$3a^2-6ab+b^2=2a^2+2ab-15b^2$$

peut s'écrire $3a^2-6ab+b^2-2a^2-2ab+15b^2=0$,

ou, plus simplement, $a^2-8ab+16b^2=0$.

Lorsqu'un même terme se trouve dans les deux membres avec le même signe, on peut le supprimer de part et d'autre, car cela revient à retrancher une même quantité aux deux membres si ce terme est additif, ou à l'ajouter aux deux membres s'il est soustractif.

Ainsi l'égalité $a^2-4ab+b^2=b^2-4ab+c^2$.

revient à $a^2=c^2$.

57. II. La troisième propriété, qui permet de multiplier les deux membres par une même quantité, sert à *faire disparaître les dénominateurs* lorsqu'il y en a. Pour cela, on commence par réduire tous les termes de l'égalité, tant entiers que fractionnaires, au même dénominateur (**48**, **49**); il est alors permis de supprimer ce dénominateur, car cette suppression revient à multiplier tous les termes de l'égalité, et par conséquent les deux membres, par ce dénominateur même (**51**, Rem.).

Soit, par exemple, l'égalité

$$a-\frac{b^2}{a}=c+\frac{d^2}{c},$$

en réduisant tous les termes au même dénominateur ac, on a d'abord

$$\frac{a^2c}{ac}-\frac{b^2c}{ac}=\frac{ac^2}{ac}+\frac{ad^2}{ac},$$

et, en supprimant le dénominateur commun, ce qui revient à multiplier tous les termes par ac, il vient

$$a^2c-b^2c=ac^2+ad^2.$$

Ainsi, *pour faire disparaître les dénominateurs d'une égalité, il suffit de réduire tous les termes au même dénominateur, et de supprimer ensuite le dénominateur commun.*

58. III. La quatrième propriété, qui permet de diviser les deux membres par une même quantité, sert à supprimer les facteurs communs aux deux membres, quand il s'en trouve. Cette suppression simplifie les calculs. Soit pour exemple l'égalité

$$4a^3-8a^2b+4ab^2=6a^2b-6b^3,$$

si l'on met en évidence (**42**), dans chaque membre, les facteurs communs à tous les termes, il vient

$$4a(a^2-2ab+b^2)=6b(a^2-b^2)$$

ou $$4a(a-b)^2=6b(a+b)(a-b).$$

Sous cette forme, on voit que les deux membres sont divisibles par $2(a-b)$. Effectuant cette division, il reste l'égalité plus simple.

$$2a(a-b)=3b(a+b)$$

ou $$2a^2-2ab=3ab+3b^2.$$

59. Les équations à une seule inconnue se distinguent les unes des autres par leur *degré;* on nomme degré d'une équation, le plus haut exposant de l'inconnue lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, effectué les calculs indiqués, et opéré la réduction des termes semblables (**56**).

L'équation $3x+1=4-2x$ est du *premier degré*, parce que le plus haut exposant de x est l'unité.

L'équation $ax^2-bx=cx-d$ est du *second degré*, parce que le plus haut exposant de x est 2.

L'équation $ax^2+bx^4=c$ est du *quatrième degré*, parce que le plus haut exposant de x est 4. Et ainsi de suite.

L'équation $$(x-a)^2-x^2=b^2$$

qui paraît du second degré au premier abord, n'est réellement que du premier, parce que, lorsqu'on a développé $(x-a)^2$ et fait la réduction des termes semblables, il reste

$$a^2-2ax=b^2.$$

L'équation $$ax+\frac{b}{x}=c$$

au contraire, dans laquelle x n'entre qu'à la première puissance, est réellement du second degré, parce que, lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, elle devient

$$ax^2 + b = cx$$

où x entre avec l'exposant 2.

Nous ne nous occuperons d'abord que des équations du premier degré.

On distingue encore les équations en équations *numériques* et en équations *littérales*, suivant que les quantités données qui y entrent sont exprimées par des *nombres* ou représentées par des *lettres*.

§ 2. De la résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

60. *Résoudre* une équation, c'est déterminer les valeurs qui, mises à la place de l'inconnue, rendent le premier membre égal au second, et changent par conséquent l'équation en identité.

Pour résoudre une équation, on cherche à la transformer en une autre, dans laquelle l'inconnue soit seule et à la première puissance dans un membre, l'autre membre ne contenant que des quantités connues. Si, par exemple, en opérant de cette manière, on arrive à une équation telle que $x=4$, comme cette équation est évidemment satisfaite quand on y remplace x par 4, il s'ensuit que le nombre 4 est une valeur de l'inconnue.

Si, de même, on parvient à une équation telle que $x=a-b$, il s'ensuit que $a-b$ est la valeur de l'inconnue.

Pour résoudre une équation quelconque du premier degré à une seule inconnue, on suit une marche uniforme que l'on peut résumer de cette manière :

1° Faire disparaître les dénominateurs (**57**)

2° Effectuer les multiplications indiquées, s'il y en a.

3° Faire passer dans un même membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre membre tous les termes qui en sont indépendants (**56**).

4° Opérer la réduction des termes semblables (**22**).

Il convient de choisir le membre où l'on réunit les termes affectés de l'inconnue, de manière que, si les facteurs qui multiplient l'inconnue sont numériques, l'ensemble des termes positifs l'emporte sur l'ensemble des termes négatifs, et que, si ces facteurs sont littéraux, il y ait au moins un terme positif, ce qui sera toujours possible.

5° Mettre l'inconnue en facteur commun (**42**) dans le membre où elle se trouve (s'il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue qui n'aient pu se réduire).

6° Diviser les deux membres par la quantité qui multiplie l'inconnue (**58**).

De cette manière, on aura passé par une suite d'équations équivalentes, dont la dernière présentera l'inconnue seule dans un membre et des quantités connues dans l'autre; c'est-à-dire que l'on aura obtenu la valeur de l'inconnue.

Soit pour premier exemple l'équation numérique :

$$\frac{2x-1}{5}-3=\frac{x+3}{8}.$$

Faisant disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$2x\times8-8-3\times5\times8=x\times5+3\times5.$$

Effectuons les multiplications, l'équation deviendra

$$16x - 8 - 120 = 5x + 15.$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes en x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$16x - 5x = 15 + 8 + 120;$$

ou, en faisant la réduction des termes semblables,

$$11x = 143.$$

Divisons les deux membres par le nombre 11 qui multiplie x, nous aurons enfin

$$x = \frac{143}{11}, \text{ ou, en effectuant la division, } x = 13.$$

On peut vérifier, en effet, que si dans l'équation proposée on met 13 à la place de x, chacun des deux membres se réduit à 2; en sorte que l'équation est satisfaite.

Soit pour second exemple l'équation littérale

$$\frac{2x + 8b}{a + b} = \frac{x - 2a}{a - b} + 5.$$

Faisons disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$(2x + 8b)(a - b) = (x - 2a)(a + b) + 5(a + b)(a - b),$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$2ax + 8ab - 2bx - 8b^2 = ax - 2a^2 + bx - 2ab + 5a^2 - 5b^2.$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes affectés de x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$2ax - 2bx - ax - bx = -2a^2 - 2ab + 5a^2 - 5b^2 - 8ab + 8b^2,$$

ou, en opérant la réduction des termes semblables,

$$ax - 3bx = 3a^2 - 10ab + 3b^2.$$

Mettons x en évidence dans le premier membre, l'équation prendra la forme

$$(a - 3b)x = 3a^2 - 10ab + 3b^2.$$

Divisons enfin les deux membres par la quantité $a-3b$ qui multiplie x, nous obtiendrons

$$x = \frac{3a^2 - 10ab + 3b^2}{a - 3b},$$

ou, en effectuant la division indiquée,

$$x = 3a - b.$$

La valeur de l'inconnue est donc $3a-b$; et, en effet, il est facile de vérifier que si l'on remplace x par cette valeur, les deux membres de l'équation proposée se réduisent tous deux à 6.

Exemples. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$\frac{5x - 2}{3} - 6 = \frac{4x - 3}{5} \quad (\text{d'où } x = 7);$$

$$\frac{2x + 7b}{2a + b} - 1 = \frac{x + a}{2a - b} \quad (\text{d'où } x = 3a - 2b).$$

§ 3. Problèmes qui conduisent à une équation du premier degré à une seule inconnue.

61. La résolution d'un problème d'Algèbre se compose nécessairement de deux parties. Dans la première on cherche à exprimer les relations que l'énoncé établit entre les inconnues et les données, ce qui conduit toujours à un certain nombre d'équations, si le problème est réellement du ressort de l'Algèbre. Dans la seconde on cherche à déduire de ces équations les valeurs des inconnues.

L'Algèbre donne des règles certaines pour la résolution des équations; quant à la première partie, qu'on appelle la *mise en équations,* elle ne saurait être astreinte à des lois aussi certaines, vu l'immense variété des problèmes qu'on peut avoir à résoudre. Il existe cependant une sorte de *marche à suivre* qu'on peut formuler de cette manière : INDIQUER *sur les lettres qui représentent les inconnues et sur les données numériques ou littérales les opérations* QUE L'ON EFFECTUERAIT, *si, après avoir trouvé les valeurs des inconnues, on se proposait de les vérifier.* L'usage que nous ferons de cette règle en fera comprendre l'esprit et la portée.

Nous ne nous occuperons dans ce paragraphe que des problèmes qui conduisent à une seule équation du premier degré à une seule inconnue.

62. PREMIER PROBLÈME. *Un père a 37 ans; son fils en a 12; on demande dans combien d'années l'âge du père sera le double de celui du fils.*

Désignons par x le nombre d'années cherché. Si ce nombre d'années était connu, et que l'on voulût le vérifier, on dirait :

Le père ayant 37 ans, dans x années il en aura $37+x$; à la même époque, le fils en aura $12+x$; d'après l'énoncé, le double de cet âge, c'est-à-dire $(12+x)\times 2$ doit valoir l'âge du père; on doit donc avoir l'égalité

$$(12+x)\times 2=37+x.$$

On a ainsi obtenu l'équation du problème. En la résolvant (**60**), on trouve

$$x=13.$$

Et, en effet, dans 13 ans, le fils aura $12+13$ ou 25 ans; le père en aura $37+13$ ou 50, qui est bien le double de 25.

63. DEUXIÈME PROBLÈME. *On a 60 hectolitres de blé à 30 fr. l'hectolitre; combien faut-il y joindre de blé à 22 fr. pour faire un mélange valant 25 fr. l'hectolitre?*

Désignons par x le nombre d'hectolitres cherché, et opérons comme si nous voulions vérifier ce nombre. Le prix des 60 hectolitres à 30 fr. est $30^f\times 60$ ou 1800 fr.; le prix des x hectolitres à 22 fr. est $22^f\times x$ ou $22x$; le prix total est donc $1800+22x$. Pour avoir le prix d'un hectolitre du mélange, il faut diviser le prix total par le nombre total d'hectolitres, qui est $60+x$. Mais, d'après l'énoncé, ce prix doit être de 25 fr.; on a donc l'égalité

$$\frac{1800+22x}{60+x}=25.$$

C'est l'équation du problème. En la résolvant, on trouve $x=100$. Il faut donc prendre 100 hectolitres à 22 fr.

Le même problème, traité généralement, donnera une *formule* pour résoudre toutes les questions analogues. Soient n le nombre d'hectolitres donné, à a francs l'hectolitre, x le nombre d'hectolitres cherché à b francs l'hectolitre, soit enfin c le prix d'un hectolitre du mélange. Le prix total du blé sera $na+bx$ et le nombre total d'hectolitres $n+x$; on aura donc

$$\frac{na+bx}{n+x}=c,$$

d'où l'on tire $$x=\frac{n(a-c)}{c-b},$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier le nombre n d'hectolitres donnés par la différence $a-c$, entre le premier prix et le prix moyen, et diviser le produit par la différence $c-b$, entre le prix moyen et le second prix.

Si, par exemple, on suppose $n=40$; $a=24$, $b=19$; $c=21$, on trouvera

$$x=\frac{40\times 3}{2}=60.$$

64. Troisième problème. *Un ouvrier peut faire un certain ouvrage en 18 heures de travail; un second ouvrier ferait le même ouvrage en 24 heures de travail; un troisième le ferait en 36 heures. On demande combien d'heures les trois ouvriers travaillant ensemble emploieront à faire ce même ouvrage.*

Soit x le nombre d'heures cherché. Le premier ouvrier faisant l'ouvrage proposé en 18 heures, fera en 1 heure $\frac{1}{18}$ de cet ouvrage. En x heures il en fera donc une fraction marquée par $\frac{x}{18}$. Par une raison analogue, le second ouvrier, en x heures, fera $\frac{x}{24}$ de l'ouvrage proposé; et le troisième ouvrier en fera $\frac{x}{36}$. Or, la somme de ces fractions de l'ouvrage doit faire l'ouvrage entier, qui est pris ici pour unité; on doit donc avoir

$$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}+\frac{x}{36}=1,$$

ou
$$\frac{x(4+3+2)}{72}=1,\ \text{d'où}\ x=\frac{72}{9}=8.$$

Les trois ouvriers emploieront donc 8 heures.

On voit, en effet, qu'en 8 heures, le premier ouvrier fera les $\frac{8}{18}$ ou les $\frac{4}{9}$ de la tâche; le second en fera les $\frac{8}{24}$ ou le tiers, qui revient à $\frac{3}{9}$; le troisième en fera les $\frac{8}{36}$ ou les $\frac{2}{9}$. Or, la somme

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\ \text{fait}\ \frac{9}{9}\ \text{ou}\ 1,$$

c'est-à-dire la tâche tout entière.

65. Le lecteur pourra s'exercer sur quelques-uns des problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Partager 24 en deux parties telles que le 5me de la première, plus le 7me de la seconde, fassent 4.* (Réponse : 10 et 14.)

II. *Un enfant, interrogé sur son âge, répond : « Dans 16 ans mon âge sera le triple de ce qu'il était il y a 2 ans. » On demande l'âge actuel de l'enfant.* (Réponse : 11 ans.)

III. *Une fontaine peut remplir un bassin en 6 heures, une autre peut le remplir en 8 heures, une troisième en 10 heures. Lorsqu'elles coulent ensemble pendant 2 heures, il s'en faut de 26 hectolitres que le bassin ne soit rempli. Quelle est sa capacité?* (Réponse : 120 hectolitres.)

IV. *Une personne charitable partage 50 fr. entre 20 pauvres, parmi lesquels il y a un certain nombre d'hommes et de femmes, et un seul enfant; elle donne 3 fr. à chaque homme, 2 fr. à chaque femme, et 1 fr. à l'enfant. On demande combien il y avait d'hommes et combien il y avait de femmes.* (Réponse : 11 hommes et 8 femmes.)

§ 4. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

66. Lorsque, dans un problème, il y a deux inconnues, il faut que l'énoncé fournisse deux équations entre ces inconnues. Si, en effet, il n'en fournissait qu'une, on pourrait attribuer à l'une des inconnues une valeur arbitraire; on n'aurait plus alors qu'une équation ne contenant que la seconde inconnue, pour laquelle on trouverait un nombre limité de valeurs (une seule, par exemple, si l'équation était du premier degré par rapport à cette inconnue); et, comme on pourrait répéter ce calcul pour toutes les valeurs arbitraires attribuées à la première inconnue, on voit qu'il y aurait, en général, un nombre illimité de systèmes de valeurs propres à vérifier l'équation. On dit, dans ce cas, que le problème est *indéterminé*.

Si, par exemple, on n'avait entre deux inconnues x et y que l'équation unique

$$x-y=1,$$

on pourrait attribuer à y une valeur quelconque, la valeur correspondante de x serait

$$x=y+1,$$

ou la valeur attribuée à y, augmentée d'une unité. Il y aurait donc une infinité de solutions, et le problème serait indéterminé.

Nous supposerons donc dans ce paragraphe que l'énoncé du problème fournit deux équations du premier degré à deux inconnues.

67. Une équation à deux inconnues est dite du *premier degré* lorsqu'après y avoir fait disparaître les dénominateurs et effectué les multiplications indiquées, s'il y en a, les inconnues n'y entrent qu'à la première puissance, et n'y sont point multipliées entre elles. D'après cela : une équation du premier degré à deux inconnues, x et y, ne peut renfermer que trois espèces de termes; savoir : des termes contenant x à la première puissance, des termes contenant y à cette même puissance, et des termes indépendants de x et de y. Concevons qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs (**57**), on ait réuni dans un même membre tous les termes qui contiennent les inconnues, et dans l'autre membre les termes qui en sont indépendants; puis, qu'après avoir opéré les réductions, on ait mis x en évidence parmi tous les termes qui le contiennent, et qu'on en ait fait autant pour y; l'équation se présentera sous la forme

$$ax+by=c,$$

dans laquelle a, b et c peuvent être des quantités numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

La quantité a se nomme ordinairement le *coefficient* de x, et la quantité b se nomme le coefficient de y.

Nous admettrons donc que le problème fournisse deux équations de cette forme. *Résoudre* ces équations c'est trouver les valeurs qu'il faut attribuer aux inconnues pour satisfaire à la fois aux deux équations. Pour y parvenir on remarque d'abord que, si l'une des deux équations proposées ne renfermait que l'une des deux inconnues, les valeurs des deux inconnues s'obtiendraient immédiatement. Soit, en effet, une équation à deux inconnues

$$5x+2y=33 \qquad [1]$$

et une équation à une seule inconnue, qu'on peut toujours supposer résolue; par exemple

$$x=5 \qquad [2]$$

si l'on met pour x la valeur 5 dans l'équation [1], elle devient

$$25+2y=33 \qquad [3],$$

d'où $\qquad 2y=33-25=8$ et $y=4$.

Et ces valeurs $x=5$, $y=4$ sont les seules qui puissent satisfaire aux équations proposées [1] et [2]; car la seconde exige que x soit égal à 5; et si x est égal à 5, l'équation [1] se change en l'équation [3], qui revient à $y=4$, et n'est satisfaite que quand on y met 4 à la place de y.

On voit donc que si l'une des équations proposées ne contenait que l'une des inconnues, x par exemple, cette équation donnerait immédiatement la valeur de x; et en substituant cette valeur à la place de x dans l'équation à deux inconnues, on en tirerait la valeur correspondante de y; et l'on aurait ainsi le système de valeurs de x et de y propre à satisfaire à la fois aux deux équations.

Tout l'artifice de la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, consiste donc à déduire de ce système d'équations un système équivalent de deux autres équations, telles que l'une d'elles ne contienne que l'une des deux inconnues. C'est ce que l'on appelle *éliminer* une inconnue. Il y a pour cela plusieurs méthodes que nous allons exposer, en traitant d'abord des exemples particuliers.

68. Soient les deux équations :

$$5x+2y=33 \qquad [1]$$

$$7x-3y=23 \qquad [2];$$

proposons-nous d'éliminer l'inconnue y. Observons pour cela qu'il est toujours permis d'ajouter ou de soustraire deux équations membre à membre; car si deux quantités sont respectivement égales à deux autres quantités, la somme ou la différence des deux premières est évidemment égale à la somme ou à la différence des deux dernières. Or, si y avait le même coefficient dans les deux équations, on ferait disparaître cette inconnue en retranchant ces deux équations membre à membre; et si y avait dans les deux équations des coefficients égaux et de signe contraire, on atteindrait le même but en ajoutant ces deux équations membre à membre.

Dans l'exemple qui nous occupe, y n'a pas le même coefficient dans les deux équations; mais il est facile de faire en sorte qu'il en soit ainsi : il suffit pour cela de multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient 3 de y dans la seconde, et tous les termes de la seconde par le coefficient 2 de y dans la première, ce qui est permis (56).

On obtient ainsi les équations :

$$15x+6y=99 \qquad [3]$$

$$14x-6y=46 \qquad [4],$$

et, en les ajoutant membre à membre, puisque y a maintenant, dans les deux équations, des coefficients égaux et de signe contraire, il vient

$$29x=145,$$

d'où $\qquad x=\frac{145}{29}$ ou $x=5 \qquad [5]$.

Nous sommes ainsi ramenés au cas du numéro précédent, et nous avons vu que les valeurs qui satisfont aux équations [1] et [5] sont

$$x=5 \text{ et } y=4.$$

e là cette règle :

Lorsqu'on a deux équations du premier degré à deux inconnues, pour éliminer l'une de ces inconnues, il faut multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient de cette inconnue dans la seconde, et tous les termes de la seconde, par le coefficient de cette même inconnue dans la première. On soustrait alors, ou bien l'on ajoute les deux équations membre à membre, selon que l'inconnue à éliminer se trouve avoir dans les deux équations des coefficients de même signe ou de signe contraire.

Remarque I. Cette règle, qui a beaucoup d'analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur, est aussi susceptible des mêmes simplifications; si les coefficients de l'inconnue à éliminer avaient des facteurs communs, il suffirait de multiplier tous les termes de chaque équation par les facteurs non communs du coefficient de l'inconnue à éliminer dans l'autre.

Remarque II. Si l'inconnue à éliminer n'avait dans l'une des équations d'autre coefficient que l'unité, il suffirait de multiplier tous les termes de cette équation par le coefficient de cette inconnue dans l'autre; ce qui rentre au reste dans la règle générale.

69. Nous donnerons ici deux exemples de ce mode d'élimination.

I. Soient d'abord les équations numériques

$$7x+9y=140,$$
$$5x+6y=\ 97.$$

On remarque que les coefficients de y ont le facteur commun 3, et que les facteurs non communs sont 3 et 2; multipliant donc tous les termes de la première équation par 2 et tous ceux de la seconde par 3, il vient

$$14x+18y=280,$$
$$15x+18y=291;$$

retranchant, membre à membre, la première de la seconde, puisque les coefficients de y ont le même signe, on obtient

$$x=11.$$

Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$77+9y=140; \quad \text{d'où} \quad 9y=63$$

et $$y=7.$$

II. Soient maintenant les deux équations littérales :

$$ax-by=a^2+b^2$$
$$bx+ay=a^2+b^2.$$

Multiplions tous les termes de la première par a, et tous ceux de la seconde par b, nous aurons

$$a^2x-aby=a^3+ab^2$$
$$b^2x+aby=a^2b+b^3.$$

Ajoutons membre à membre, puisque les coefficients de y ont des signes contraires ; il viendra

$$a^2x+b^2x=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

ou $$(a^2+b^2)x=a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$

d'où $$x=\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad x=a+b.$$

Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$a^2 + ab - by = a^2 + b^2, \quad \text{d'où} \quad by = ab - b^2,$$

puis $$y = \frac{ab - b^2}{b} \quad \text{ou} \quad y = a - b.$$

Remarque III. Le lecteur pourra s'exercer sur les deux exemples suivants :

$$12x - 5y = 6; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4}{3}.$$
$$9x + 4y = 20 \qquad y = 2.$$
$$(2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \quad \text{d'où} \quad x = 2a + b$$
$$(2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \qquad y = 2a - b.$$

70. Nous avons exposé la première la méthode d'élimination qui offre dans la pratique le plus de commodité. On lui donne ordinairement le nom de *méthode par réduction* (au même coefficient). Mais l'élimination peut s'opérer de plusieurs autres manières.

I. Soient les deux équations traitées plus haut (68).

$$5x + 2y = 33 \qquad [1],$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [2].$$

Supposons, pour un instant, que la valeur de x ait été déterminée par un procédé quelconque; en la mettant pour x dans l'une des deux équations proposées, dans la première, par exemple, on en tirerait la valeur correspondante de y. Or, si l'on tire de la première équation la valeur de y, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y = \frac{33 - 5x}{2} \qquad [3].$$

Cette valeur, jointe à la valeur qu'on suppose avoir trouvée

pour x, doit satisfaire à la seconde équation proposée. Si donc on met dans l'équation [2], à la place de y, la valeur [3], l'égalité

$$7x - 3\left(\frac{33 - 5x}{2}\right) = 23 \qquad [4],$$

à laquelle on parvient, sera une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition, traitée comme une équation où l'inconnue est x, donnera donc la valeur de x. En la résolvant, on trouve $x = 5$, comme on l'a trouvé par une autre méthode; et cette valeur, mise pour x dans l'équation [3], donne de même $y = 4$.

On voit que cette méthode consiste à prendre la valeur de l'une des inconnues dans l'une des deux équations, en y regardant l'autre inconnue comme déterminée, et à *substituer* cette valeur dans la seconde équation, qui ne contient plus alors qu'une seule inconnue. En conséquence on a donné à cette méthode le nom de méthode *par substitution*.

71. II. Reprenons encore les équations [1] et [2] du numéro précédent. Nous avons vu que, si l'on y regarde x comme déterminé, et qu'on tire de la première la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{33 - 5x}{2}.$$

Si l'on tire de même de la seconde la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{7x - 23}{3}.$$

Or, ces deux valeurs de y doivent être égales, puisque les mêmes valeurs de x et de y doivent satisfaire à la fois aux deux équations ; en les égalant, on aura donc une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition

$$\frac{7x-23}{3}=\frac{33-5x}{2},$$

traitée comme une équation où l'inconnue est x, donne encore $x=5$; et cette valeur, mise pour x dans l'une quelconque des deux valeurs de y ci-dessus, donne $y=4$.

Cette méthode est connue sous le nom de méthode *par comparaison*.

72. III. Enfin, reprenons une dernière fois les équations [1] et [2] du nº **70**. Si l'on multiplie la première par une quantité indéterminée m, et qu'on les ajoute membre à membre, on obtient

$$5mx+7x+2my-3y=33m+23 \qquad [5].$$

Les valeurs qui vérifieront les équations [1] et [2] vérifieront aussi l'équation [5] qui en est une conséquence ; et cela, quelle que soit la valeur qu'on attribue à l'indéterminée m. Or, on peut en disposer de manière à faire disparaître de l'équation [5] tous les termes en y. Pour cela, il suffit de poser $2m=3$, d'où $m=\frac{3}{2}$. Cette valeur, mise pour m dans l'équation [5], la réduit à

$$\frac{15}{2}x+7x=\frac{99}{2}+23,$$

d'où l'on tire encore $x=5$; et par suite $y=4$.

Si les coefficients de y dans les deux équations proposées avaient eu le même signe, il eût été préférable de soustraire les équations au lieu de les ajouter.

Cette méthode est connue sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés*.

§ 5. Problèmes qui conduisent à deux équations du premier degré à deux inconnues.

73. Parmi les problèmes qui présentent plusieurs inconnues, il en est un grand nombre qu'on peut résoudre en n'employant qu'une seule inconnue.

Prenons pour exemple ce problème : *Partager* 15 *en deux parties telles que la première surpasse d'une unité les* $\frac{4}{3}$ *de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $15-x$, et l'énoncé du problème fournit immédiatement l'équation

$$x=\frac{4}{3}(15-x)+1 \qquad [1],$$

d'où l'on tire $x=9$. Les deux parties sont donc 9 et 6, et, en effet, 9 surpasse d'une unité le nombre 8 qui est les $\frac{4}{3}$ de 6.

Mais lorsqu'on traite ainsi, à l'aide d'une seule inconnue, un problème qui en comporte plusieurs, c'est qu'on opère mentalement une véritable élimination. Dans le problème qui précède, par exemple, si l'on désigne par x la première partie et par y la seconde, on a les deux équations

$$x+y=15$$
$$x=\frac{4}{3}y+1,$$

et si l'on tire de la première la valeur de y pour la substituer dans la seconde, c'est-à-dire si l'on élimine y entre les deux équations, on retombe sur l'équation [1]. C'est cette élimination de y qu'on a opérée mentalement quand on a traité le problème avec la seule inconnue x.

Ces éliminations tacites, qui abrégent évidemment le calcul écrit, compliquent en revanche les opérations mentales que nécessite la mise en équation du problème; en sorte que, hors des cas très-simples, comme celui qui précède, ou ceux des problèmes I, IV, proposés au n° **65**, on perd plus qu'on ne gagne à diminuer le nombre des inconnues.

Nous croyons donc devoir donner comme conseil général d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte; si, parmi les équations qui les lient il y en a de très-simples, comme l'équation $x+y=15$ de tout à l'heure, on opérera par écrit les éliminations très-simples qu'on eût opérées mentalement; voilà toute la différence.

Quant à la mise en équation, elle est soumise à la seule règle générale que nous avons donnée au n° **61**. Il ne nous reste donc qu'à donner quelques exemples de problèmes conduisant à deux équations du premier degré à deux inconnues.

74. Premier problème. *Deux espèces de pièces de monnaie sont telles : que* 2 *pièces de la première, plus* 5 *pièces de la seconde font* 13 *fr.; et que* 18 *pièces de la seconde surpassent de* 1 *fr.* 5 *c. la valeur de* 5 *pièces de la première. Quelle est la valeur, en francs et centimes, de chacune de ces deux espèces de pièces de monnaie?*

Désignons par x la valeur d'une des pièces de la première espèce, et par y la valeur d'une des pièces de la seconde. Nous aurons, d'après l'énoncé, les deux équations :

$$2x+5y=13^{f},$$
$$18y=5x+1^{f},05.$$

On éliminera x en multipliant la première équation par 5, la seconde par 2 et ajoutant; on trouve ainsi :

$$36y+25y=65^{f}+2^{f},10,$$

ou $$61y=67^{f},10, \quad \text{d'où} \quad y=1^{f},10.$$

Cette valeur, mise pour y dans la première équation, donne

$$2x+5^{f},50=13^{f}, \quad \text{d'où} \quad x=3^{f},75.$$

Chaque pièce de la première espèce vaut donc $3^{f},75$, et chaque pièce de la seconde espèce $1^{f},10$.

75. Deuxième problème. *Trouver une fraction telle que si l'on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devienne égale à* $\frac{3}{4}$; *et que si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devienne égale à* $\frac{2}{3}$.

Soient x le numérateur et y le dénominateur; l'énoncé fournit sur-le-champ les deux équations suivantes :

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3},$$

ou $$3y-4x=1 \quad \text{et} \quad 3x-2y=1,$$

qui donnent $x=5$ et $y=7$. La fraction demandée est donc $\frac{5}{7}$. Si, en effet, on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devient $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$; et si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devient $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$.

76. Troisième problème. *Un nombre est composé de deux chiffres dont la somme absolue est* 14; *et si on le retourne, il augmente de* 36; *quel est ce nombre?*

Soient x le chiffre des dizaines, et y celui des unités; on aura d'abord

$$x+y=14 \qquad [1].$$

Maintenant, le nombre demandé a pour valeur $10x+y$, et le nombre retourné a pour valeur $10y+x$. Or, d'après l'énoncé, ce second nombre surpasse le premier de 36, on a donc

$$10y+x=10x+y+36,$$

ou
$$9y-9x=36,$$

ou encore
$$y-x=4 \qquad [2].$$

On connaît donc la somme et la différence des deux chiffres; en vertu du théorème démontré au nº 3 (Rem.), le plus grand, y, est égal à la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7+2$ ou 9; et le plus petit, x, est égal à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7-2$ ou à 5; c'est ce qu'on verrait d'ailleurs en résolvant le système des équations [1] et [2].

Le nombre demandé est donc 59; en effet, la somme de ses chiffres est 14; et lorsqu'on le retourne, en obtient 95 qui surpasse 59 de 36.

77. Quatrieme problème. *Une personne qui possède* 60000 *fr., en a placé une partie à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et l'autre à* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100; *ce qui lui fait un revenu de* 2500 fr. *On demande combien elle a placé au taux de* $4\frac{1}{2}$, *et combien au taux de* $3\frac{1}{2}$.

Soient x et y les deux sommes placées; on aura d'abord

$$x+y=60000^{f}.$$

Maintenant, le capital x, au taux de $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{x\times\frac{9}{2}}{100}$ ou $\frac{9x}{200}$. Le capital y, au taux de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{y\times\frac{7}{2}}{100}$ ou $\frac{7y}{200}$. La somme de ces revenus partiels doit faire le revenu total 2500 fr.; on a donc pour seconde équation

$$\frac{9x}{200}+\frac{7y}{200}=2500 \text{ fr.},$$

ou bien
$$9x+7y=500000 \text{ fr.}$$

Mettant pour y sa valeur $60000^{f}-x$ tirée de la première équation, et effectuant la multiplication par 7, il vient

$$9x+420000-7x=500000^{f},$$

d'où
$$x=40000^{f},$$

par suite
$$y=20000^{f}.$$

En effet, 40000 fr. à $4\frac{1}{2}$ pour 100, rapportent 1800 fr.; et 20000 fr. à $3\frac{1}{2}$ pour 100 rapportent 700 fr.; la somme de ces deux revenus fait bien 2500 fr.

78. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 5 *on ait pour reste* 2; *qu'en le divisant par* 8 *on ait pour reste* 5; *et que le quotient de la première division surpasse de* 3 *unités le quotient de la seconde.* (Réponse : Les quotients sont 7 et 4; le nombre demandé est 37.)

II. *L'âne dit un jour au mulet : « Si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait le double de la tienne. — Et moi, lui répondit le mulet, si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait triple de la tienne. » On demande la charge de chacun.* (Réponse : L'âne portait 110 kilogrammes et le mulet 130 kilogrammes.)

III. *La distance de Paris à Tours est de* 225 *kilomètres. Un convoi de wagons part de Paris pour Tours avec une vitesse de* 25 *kilomètres à l'heure;* 1 *heure* 48 *minutes après, un convoi part de Tours pour Paris avec une vitesse de* 35 *kilomètres à l'heure. On demande au bout de quel temps et à quelle distance de Paris les deux convois se croiseront.* (Réponse : Au bout de 3 heures à partir du second départ, et à 120 kilomètres de Paris.)

IV. *Deux joueurs conviennent que celui qui perdra la première partie doublera l'argent de son adversaire; que celui qui perdra la seconde triplera l'argent de son adversaire, que celui qui perdra la troisième quadruplera l'argent de son adversaire; et ainsi de suite. Au bout de trois parties, la perte ayant été alternative, ils se retirent chacun avec* 48 *francs. On demande ce qu'ils avaient en commençant le jeu.* (Réponse : Le premier perdant avait 62 fr. et son adversaire 34 francs.)

§ 6. Résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues; et en général d'un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

79. Supposons d'abord qu'on ait à résoudre les trois équations

$$4x-7y+6z=10 \qquad [1],$$
$$5x+2y=33 \qquad [2],$$
$$7x-3y=23 \qquad [3],$$

dont la première seule renferme les trois inconnues x, y, z, les deux dernières ne renfermant que les deux inconnues x et y.

Les deux dernières équations pourront être remplacées par les valeurs

$$x=5,$$
$$y=4,$$

qu'on en tire (**68**); et ces deux valeurs, mises pour x et y dans l'équation [1], la réduisent à

$$20-28+6z=10 \qquad [4],$$

ou $$6z=38-20=18,$$

d'où l'on tire $$z=3.$$

Et ces valeurs des inconnues sont les seules qui puissent satisfaire au système des trois équations proposées; car les deux dernières n'admettent pas d'autres solutions que $x=5$ et $y=4$; et si x et y ont respectivement ces valeurs, l'équation [1] se change en l'équation [4] qui n'admet pas d'autre solution que $z=3$.

Pour résoudre un système quelconque de trois équations du premier degré à trois inconnues, il faut donc tâcher d'en déduire un système équivalent, dans lequel deux des trois équations ne renferment que deux des inconnues.

80. Soient les trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 27 \qquad [1],$$
$$3x + 6y - 4z = 2 \qquad [2],$$
$$5x + 4y + 2z = 40 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2]; pour cela multiplions l'équation [1] par 4, l'équation [2] par 5, et ajoutons membre à membre ; nous trouverons :

$$23x + 18y = 118 \qquad [4].$$

Éliminons de même z entre les équations [1] et [3]; pour cela multiplions l'équation [1] par 2, l'équation [3] par 5, et retranchons la première de la dernière ; nous obtiendrons :

$$21x + 26y = 146 \qquad [5].$$

Les équations [4] et [5] ne renfermant plus que x et y, on sait en tirer les valeurs de ces inconnues. Si, par exemple, on multiplie l'équation [4] par 13, l'équation [5] par 9, et qu'on retranche la seconde de la première, y disparaîtra, et il restera

$$110x = 220, \quad \text{d'où} \quad x = 2.$$

Cette valeur, mise pour x dans l'équation [4], donne

$$46 + 18y = 118 \quad \text{ou} \quad 18y = 72,$$

d'où $y = 4.$

Si maintenant dans l'une des trois équations proposées, dans l'équation [1] par exemple, on remplace x par 2 et y par 4, cette équation devient

$$4 - 12 + 5z = 27 \quad \text{ou} \quad 5z = 35,$$

d'où $z = 7.$

On voit, par cet exemple, que *pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues* x, y, z, *il faut éliminer l'une des trois inconnues*, z *par exemple*, *deux fois, savoir : entre la première équation et la seconde, par exemple, puis entre la première et la troisième; on obtient ainsi deux équations entre les deux inconnues* x *et* y; *on en tire les valeurs de ces inconnues; on substitue ces valeurs dans l'une des trois équations proposées, et l'on en tire la valeur de la troisième inconnue* z.

Remarque. C'est pour plus de symétrie dans le choix des lettres que nous avons d'abord éliminé z; il eût été plus simple et plus commode d'éliminer d'abord y; savoir, entre les équations [1] et [2], puis entre les équations [2] et [3], à cause des facteurs communs que présentent les coefficients de cette inconnue. On aurait eu ainsi à résoudre les deux équations plus simples :

$$7x + 6z = 56,$$
$$9x + 14z = 116;$$

qui donnent $x = 2$ et $z = 7$. Ces valeurs mises dans l'équation [1], donnent ensuite $y = 4$.

81. Comme exemple d'équations littérales, nous traiterons les suivantes :

$$ax + by + cz = a^2 + c^2 \qquad [1],$$
$$bx + cy - az = b^2 + c^2 \qquad [2],$$
$$-cx + ay + bz = a^2 + b^2 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2], nous trouverons

$$(a^2 + bc)x + (c^2 - ab)y = a^3 + ac^2 + b^2c + c^3 \qquad [4].$$

Éliminons z entre les équations [2] et [3], il viendra

$$(b^2 - ac)x + (a^2 + bc)y = a^3 + ab^2 + bc^2 + b^3 \qquad [5].$$

L'élimination de y entre ces deux dernières, donne

$$(a^4+a^2bc+ab^3+ac^3)x=a^5+a^4b+a^3bc+a^2b^3+a^2b^2c+a^2c^3 \\ +ab^4+abc^3,$$

ou $(a^3+abc+b^3+c^3)\,x=a^4+a^3b+a^2bc+ab^3+ab^2c$
$$+ac^3+b^4\quad+bc^3,$$

d'où, en divisant les deux membres par $a^3+abc+b^3+c^3$,

$$x=a+b.$$

Cette valeur mise pour x dans l'équation [5] donne

$$(a^2+bc)\,y=a^3+a^2c+abc+bc^2,$$

d'où, en divisant les deux membres par a^2+bc,

$$y=a+c.$$

Mettant pour x et y leurs valeurs dans l'équation [1], elle devient

$$a^2-bc+cz=a^2+c^2 \quad \text{ou} \quad cz=bc+c^2;$$

d'où $$z=b+c.$$

82. Il est facile maintenant de généraliser la marche que nous avons suivie. Supposons qu'on ait 5 équations du premier degré entre les 5 inconnues x, y, z, u, t. On éliminera t quatre fois; par exemple entre la première équation et chacune des quatre autres; on obtiendra ainsi 4 équations entre les inconnues x, y, z, u. On éliminera u trois fois : par exemple entre la première de ces quatre équations, et chacune des trois autres; on obtiendra ainsi 3 équations entre les 3 inconnues x, y, z. On éliminera z deux fois : par exemple entre la première de ces trois équations et chacune des deux autres; on obtiendra ainsi 2 équations entre les 2 inconnues x et y.

On éliminera y entre ces deux équations, et l'on obtiendra une équation qui ne contiendra plus qu'une seule inconnue x. On en tirera la valeur de cette inconnue. On portera cette valeur à la place de x dans l'une des deux équations entre x et y; et l'on en tirera la valeur de y. On portera les valeurs de x et de y dans l'une des trois équations entre x, y et z; et l'on en tirera la valeur de z. On portera les valeurs de x, y et z dans l'une des quatre équations entre x, y, z et u; et l'on en tirera la valeur de u. On portera enfin les valeurs de x, y, z et u dans l'une des cinq équations proposées entre x, y, z, u et t; et l'on en tirera la valeur de t.

On suivrait une marche analogue pour un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

83. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

I. $$\begin{aligned} 2x-6y+3z&=5, &\text{d'où}\quad x&=10,\\ x+2y-12z&=4, & y&=3,\\ 8y+6z-3x&=0, & z&=1. \end{aligned}$$

II. $$\begin{aligned} ax+by-cz&=b^2, &\text{d'où}\quad x&=c,\\ bx-cy+az&=a^2, & y&=b,\\ cx+ay-bz&=c^2, & z&=a. \end{aligned}$$

III. $$\begin{aligned} 6x+3y-3z+u&=5, &\text{d'où}\quad x&=0,\\ 3x+5y+2z-2u&=4, & y&=2,\\ 5x-2y-2z+2u&=2, & z&=2,\\ 2x+5y+3z-3u&=1, & u&=5. \end{aligned}$$

§ 7. Problèmes qui conduisent à un nombre quelconque d'équations du premier degré, renfermant le même nombre d'inconnues.

84. La mise en équations de ces problèmes est soumise à la règle générale donnée au nº **61**. Nous rappellerons ici le conseil que nous avons donné au nº **73**, d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte. Sans doute, quand le nombre d'inconnues est grand, il semblerait qu'on doit chercher à le restreindre; mais l'avantage qu'il en pourrait résulter pour le calcul serait presque toujours compensé, et au delà, par l'embarras que la suppression de quelques inconnues introduirait dans la mise en équations.

Cela dit, il ne nous reste qu'à donner quelques exemples.

PREMIER PROBLÈME. *On a trois lingots qui contiennent :*

Le premier,	20 *gr. d'or,*	30 *d'argent,*	40 *de cuivre*
Le second,	30	40	50
Le troisième,	40	50	90

Combien faut-il prendre de chacun d'eux pour former un quatrième lingot qui contienne :

75 gr. d'or, 100 d'argent et 149 de cuivre?

Soient x, y, z les nombres de grammes de chacun des trois premiers lingots, qu'il faut prendre pour former le quatrième. On remarquera que, dans le premier lingot, il y a 20^{gr} d'or, sur $20+30+40$ ou 90; c'est-à-dire que l'or y entre pour $\frac{2}{9}$. Dans le second lingot, il entre pour $\frac{3}{12}$, et dans le troisième, pour $\frac{4}{18}$. Ce métal entrera en mêmes proportions dans les parties x, y, z qu'on prendra des

trois lingots, et, comme la somme des quantités d'or contenues dans ces parties doit faire 75^{gr}, on devra avoir l'équation :

$$\tfrac{2}{9}x+\tfrac{3}{12}y+\tfrac{4}{18}z=75^{gr}.$$

L'argent, dans le premier lingot, entre pour $\frac{3}{9}$, dans le second, pour $\frac{4}{12}$, dans le troisième, pour $\frac{5}{18}$; on verrait donc, par un raisonnement analogue au précédent, qu'on doit avoir :

$$\tfrac{3}{9}x+\tfrac{4}{12}y+\tfrac{5}{18}z=100^{gr},$$

et, en opérant de même pour les quantités de cuivre, on trouverait de même l'équation

$$\tfrac{4}{9}x+\tfrac{5}{12}y+\tfrac{9}{18}z=149^{gr}.$$

Telles sont les équations du problème. En faisant disparaître les dénominateurs et simplifiant, elles deviennent :

$$8x+9y+8z=2700 \quad [1],$$
$$12x+12y+10z=3600 \quad [2],$$
$$16x+15y+18z=5364 \quad [3].$$

Éliminant d'abord x entre [1] et [2], puis entre [1] et [3], on obtient :

$$3y+4z=900 \quad [4],$$
$$3y-2z=36 \quad [5].$$

Éliminant ensuite y entre ces deux dernières on trouve

$$6z=864, \quad \text{d'où} \quad z=144^{gr}.$$

Cette valeur, mise dans [5], donne

$$3y-288=36, \quad \text{d'où} \quad y=108^{gr},$$

et ces valeurs, mises dans [1], donnent

$$8x+972+1152=2700, \quad \text{d'où} \quad x=72^{gr}.$$

85. DEUXIÈME PROBLÈME. *Un nombre est tel : que, si on le divise par* 7, *on a pour reste* 4; *que, si on le divise par* 9, *on a pour reste* 6; *que, si on le divise par* 13, *on a pour reste* 8; *et de plus la somme des trois quotients surpasse de* 3 *unités le quart du nombre lui-même. On demande quel est ce nombre?*

Soit x le nombre cherché, et soient y, z et u les quotients respectifs qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13; on aura en vertu de la division même :

$$x = 7y + 4,$$
$$x = 9z + 6,$$
$$x = 13u + 8,$$

et, en vertu de la dernière partie de l'énoncé,

$$y + z + u = \frac{1}{4}x + 3.$$

Si l'on tire des trois premières équations les valeurs de y, z, u, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y = \frac{x-4}{7}, \quad z = \frac{x-6}{9}, \quad u = \frac{x-8}{13};$$

et, si l'on met pour y, z, u ces valeurs dans la quatrième équation, on obtient

$$\frac{x-4}{7} + \frac{x-6}{9} + \frac{x-8}{13} = \frac{1}{4}x + 3,$$

équation qui ne contient plus que l'inconnue x. On en tire, en faisant disparaître les dénominateurs :

$$468x - 1872 + 364x - 2184 + 252x - 2016 = 819x + 9828,$$

ou $$265x = 15900, \quad \text{d'où} \quad x = 60.$$

Tel est le nombre demandé. Les quotients qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13, sont 8, 6 et 4, dont la somme 18 dépasse de 3 unités le nombre 15 qui est le quart de 60.

REMARQUE. Ce problème offre un exemple d'une question qui comporte réellement quatre inconnues, bien que l'énoncé semble n'en admettre qu'une.

86. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Un homme chargé de transporter des vases de trois grandeurs, est convenu de payer pour chaque vase cassé par lui autant qu'il aurait reçu s'il l'eût rendu en bon état. On lui donne* 3 *grands vases,* 5 *moyens et* 9 *petits. On apprend qu'en route il a cassé tous les vases de l'une des trois grandeurs, mais l'on ne sait laquelle. Si ce sont les grands ou les petits, le porteur touchera* 10 *fr.; mais si ce sont les moyens, il ne touchera que* 8 *fr. On demande ce qu'il doit toucher pour un vase de chaque espèce rendu en bon état.*

(Réponse : 3 fr. pour un grand vase, 2 fr. pour un moyen, 1 fr. pour chaque petit.)

II. *On demande quel est le nombre de quatre chiffres qui jouit des propriétés suivantes : 1° que la somme des deux premiers chiffres, soit à sa droite, soit à sa gauche, est égale à* 7; *2° que le chiffre de ses unités est le triple de celui des centaines; 3° enfin que si l'on écrit ses quatre chiffres dans un ordre contraire, le nombre augmente de* 909. (Réponse : 5216.)

III. *Une personne a divisé son capital en trois parties qu'elle a placées, la première à* 5 *pour* 100, *la seconde à*

4 pour 100, la troisième à 3 pour 100. Elle se fait ainsi un revenu annuel de 4000 fr., comme si tout son capital eût été placé à 4 pour 100. On sait de plus que la partie placée à 5 pour 100 rapporte annuellement 600 fr. de plus que celle qui est placée à 3 pour 100. On demande quel est le capital entier et quelles sont les trois parties.

(Réponse : le capital entier est de 100000 fr. ; les trois parties sont 30000 fr., 40000 fr. et 30000 fr.)

CHAPITRE IV.

DES QUANTITÉS NÉGATIVES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Des quantités négatives.

87. Jusqu'ici, lorsque nous avons eu à considérer des expressions algébriques polynomes, nous avons toujours supposé que l'ensemble des termes positifs l'emportait en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs; et quant aux monomes isolés, nous les avons toujours supposés positifs. Nous avons à examiner maintenant, dans l'hypothèse contraire, le sens qu'il convient d'attacher aux expressions algébriques, et ce que deviennent les règles du calcul littéral, qui n'ont été établies, on se le rappelle, que dans la supposition où les quantités sur lesquelles on opère ont une valeur positive.

Considérons un polynome, dans lequel la partie négative soit supposée l'emporter en valeur absolue sur la positive; et pour plus de simplicité, choisissons le binome $a - b$. Si l'on attribue à b une valeur plus grande qu'à a, ce binome n'offre plus en apparence d'autre sens à l'esprit que celui d'une opération impossible.

On peut, à la vérité, donner une forme plus simple à l'expression $a - b$; car, si l'on désigne par d l'excès de la valeur absolue b sur la valeur absolue a, en sorte que b soit égal à $a + d$, on aura à retrancher de a la somme $a + d$; et si l'on en retranche d'abord a, ce qui donne *zéro* pour reste, on n'aura plus à indiquer que la soustrac-

4 pour 100, *la troisième à* 3 *pour* 100. *Elle se fait ainsi un revenu annuel de* 4000 *fr.*, *comme si tout son capital eût été placé à* 4 *pour* 100. *On sait de plus que la partie placée à* 5 *pour* 100 *rapporte annuellement* 600 *fr. de plus que celle qui est placée à* 3 *pour* 100. *On demande quel est le capital entier et quelles sont les trois parties.*

(Réponse : le capital entier est de 100000 fr. ; les trois parties sont 30000 fr., 40000 fr. et 30000 fr.)

CHAPITRE IV.

DES QUANTITÉS NÉGATIVES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. Des quantités négatives.

87. Jusqu'ici, lorsque nous avons eu à considérer des expressions algébriques polynomes, nous avons toujours supposé que l'ensemble des termes positifs l'emportait en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs; et quant aux monomes isolés, nous les avons toujours supposés positifs. Nous avons à examiner maintenant, dans l'hypothèse contraire, le sens qu'il convient d'attacher aux expressions algébriques, et ce que deviennent les règles du calcul littéral, qui n'ont été établies, on se le rappelle, que dans la supposition où les quantités sur lesquelles on opère ont une valeur positive.

Considérons un polynome, dans lequel la partie négative soit supposée l'emporter en valeur absolue sur la positive; et pour plus de simplicité, choisissons le binome $a-b$. Si l'on attribue à b une valeur plus grande qu'à a, ce binome n'offre plus en apparence d'autre sens à l'esprit que celui d'une opération impossible.

On peut, à la vérité, donner une forme plus simple à l'expression $a-b$; car, si l'on désigne par d l'excès de la valeur absolue b sur la valeur absolue a, en sorte que b soit égal à $a+d$, on aura à retrancher de a la somme $a+d$; et si l'on en retranche d'abord a, ce qui donne *zéro* pour reste, on n'aura plus à indiquer que la soustraction de d, ce qui conduira à l'expression plus simple $-d$. On peut même remarquer que cette simplification revient à soustraire a de b et à affecter le reste d du signe $-$; c'est ainsi, par exemple, que $7-12$ reviendrait à $7-7-5$, et se réduirait par conséquent à -5.

Mais ces expressions négatives isolées, $-d$, -5, n'en sont pas moins des symboles d'impossibilité, si l'on s'en tient aux notions et aux conventions de l'arithmétique. Or, on va voir que, dans un autre ordre d'idées, ces expressions deviennent susceptibles d'une interprétation parfaitement rationnelle; et que, bien loin d'être les symboles d'une opération impossible, elles deviennent quelquefois la seule réponse raisonnable que puisse comporter une question.

Concevons, par exemple, qu'un thermomètre marquant 10^0 au-dessus de *zéro*, la température vienne à baisser de 6^0; pour avoir la température nouvelle, il faudra retrancher 6^0 de 10^0, ce qui donnera 10^0-6^0 ou 4^0. Point de difficulté jusqu'ici.

Mais, le thermomètre marquant toujours 10^0 au-dessus de *zéro*, supposons que la température vienne à baisser de 14^0; si l'on veut, comme tout à l'heure, retrancher de la température primitive le nombre de degrés dont elle s'est abaissée, on est conduit à l'expression 10^0-14^0 ou -4^0, d'après la simplification indiquée ci-dessus. D'un autre côté, si partant du $10^{\text{ième}}$ degré au-dessus de zéro, on compte 14 degrés en descendant l'échelle thermométrique, on arrive à zéro quand on en a compté 10, et les 4 restants se trouvent comptés *au-dessous de zéro*. Remarquons cette correspondance entre le symbole -4^0 et le résultat réel 4^0 *au-dessous de zéro*.

Prenons un second exemple. Un lieu est situé sous le $40^{\text{ième}}$ degré de latitude nord, un second lieu est situé à 30 degrés au sud du premier, sur le même méridien pour plus de clarté. Si l'on veut connaître à quelle latitude répond ce second lieu, on retranchera les 30^0 de la latitude 40^0, ce qui donnera 40^0-30^0 ou 10^0 *de latitude nord*. Point de difficulté.

Mais si le second lieu était à 50^0 au sud du premier, et que, pour obtenir sa latitude, on retranchât encore les 50^0 de la latitude 40^0, on arriverait à l'expression 40^0-50^0 ou -10^0. D'un autre côté, si, en partant du $40^{\text{ième}}$ degré de latitude nord on descend vers le sud en comptant 50 degrés, quand on en aura compté 40, on sera sur l'équateur, et les 10 qui restent seront comptés vers le sud; la latitude demandée sera donc 10^0 *de latitude sud*. Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -10^0 et le résultat réel 10^0 *de latitude sud*.

Pour dernier exemple, imaginons qu'un événement ait eu lieu 600 ans après J. C., et qu'un autre événement ait eu lieu 400 ans auparavant. Pour avoir la date de celui-ci, il faudra retrancher 400 ans de 600 ans, ce qui donnera $600-400$ ou 200 ans après J. C. Mais si l'on suppose que le deuxième événement considéré ait eu lieu 800 ans avant celui dont on a parlé d'abord, et que pour avoir sa date on retranche encore les 800 ans des 600 ans, on arrive à l'expression $600-800$ ou -200 ans. D'un autre côté, il est facile de voir que l'événement en question a eu lieu 200 ans *avant J. C.* Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -200 ans, et le résultat réel 200 ans *avant J. C.*

Dans les exemples que nous venons de prendre, et il serait facile de les multiplier, on trouve cette circonstance commune que la quantité cherchée est, par sa nature, susceptible d'être comptée dans deux sens opposés. Et l'on remarque que, l'un de ces deux sens étant celui qui est le plus ordinaire, et dans lequel on compte habituellement les quantités regardées comme positives, il arrive que si la quantité cherchée doit être comptée en sens contraire, le calcul de cette quantité, effectué d'après les mêmes règles que si elle devait être positive, conduit à un résultat négatif.

Il n'y a qu'un pas de cette remarque à la convention de compter dans l'un des deux sens opposés les quantités positives, et dans le sens contraire les quantités négatives. De cette manière, toutes les fois qu'une quantité sera ainsi susceptible d'être comptée dans deux sens contraires, il sera aussi rationnel de lui attribuer des valeurs négatives que des positives; et les monomes négatifs isolés ne seront des symboles d'impossibilité absolue que lorsqu'ils représenteront une quantité qui, par sa nature, ne peut être comptée que dans un sens. Si, par exemple, il s'agit de la longitude d'un lieu, comme elle peut être comptée vers l'est ou vers l'ouest, on pourra admettre pour cette quantité des valeurs indistinctement positives ou négatives. S'il s'agit au contraire du nombre des côtés d'un polygone, comme il ne peut être compté que dans un sens, il n'admettra pas de valeurs négatives; et une valeur négative, dans ce cas, serait un symbole d'impossibilité absolue.

88. La convention dont on vient de parler peut être justifiée par une autre considération qui nous servira en même temps à montrer sous son véritable jour le calcul des quantités négatives et l'Algèbre en général.

Reprenons l'exemple du thermomètre. Supposons qu'il marque 6^0 *au-dessus de zéro*, et que la température vienne à s'élever de 10 degrés; pour savoir le nombre de degrés que l'instrument marquera, il faudra *ajouter* aux 10 degrés d'élévation, les 6 degrés que le thermomètre marquait d'abord, ce qui donnera $10+6$ ou 16^0 *au-dessus de zéro*.

En général, si t désigne dans ce cas la température primitive, a l'accroissement, et T la température finale, on aura la relation

$$T = a + t \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la température primitive soit de 6^0 *au-dessous de zéro*, et qu'elle s'élève encore de 10^0; la température finale s'obtiendra en remarquant que, si elle s'élève d'abord de 6 degrés, le thermomètre marquera zéro, et que les 4 degrés d'élévation restants seront comptés *au-dessus de zéro*. C'est-à-dire que pour avoir la température finale, il faudra des 10 degrés d'élévation *retrancher* les 6 degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre; ce qui donne en effet $10^0 - 6^0$ ou 4^0 *au-dessus de zéro*.

En général, si t désigne alors la température primitive ou le nombre de degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre, si a désigne toujours l'accroissement de température et T la température finale, on aura la relation

$$T = a - t \qquad [2].$$

On voit que les relations [1] et [2] ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe qui précède la température initiale t. Cette remarque suffirait pour justifier la convention qui consiste à regarder comme *positives* les températures comptées *au-dessus* de zéro, et comme *négatives* celles qui sont comptées *au-dessous*.

Mais il y a plus, c'est que cette convention permet de réunir les deux formules [1] et [2] en une seule, qui comprendra tous les cas, et donnera ainsi la réponse la plus générale à la question proposée. Il suffit pour cela d'étendre la signification des mots *quantité* et *addition*. Nous appellerons *quantités algébriques* celles qui, comme la température, la latitude, le temps, etc., sont susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés; ces quantités étant positives si on les compte dans l'un de ces deux sens, et négatives si on les compte dans l'autre. Nous appellerons *addition algébrique* une opération ayant pour but de réunir deux ou plusieurs quantités algébriques *en conservant à chacune son signe;* de telle sorte que la *somme algébrique* de $+10$ et de -6 sera $10-6$, comme celle de $+10$ et de $+6$ est $10+6$. Nous pourrons alors ne conserver que la formule [1], et l'énoncer en disant : que si un thermomètre marque t degrés et que la température s'élève de a degrés, la température finale T sera la *somme algébrique* de a et de t. Cette formule répondra alors à tous les cas. Si, par exemple, la température initiale est de 10^0 au-dessous de zéro, et qu'elle s'élève de 7 degrés, pour avoir la température finale, on remplacera a par $+7$ et t par -10, et faisant la *somme algébrique*, on aura

$$T=+7-10 \quad \text{ou} \quad T=-3,$$

ce qui voudra dire que la température finale est de 3^0 *au-dessous* de zéro. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

89. Prenons un dernier exemple. Supposons que deux villes soient situées sur le même méridien : l'une à 48^0 de latitude nord, l'autre à 35^0 de latitude nord; pour avoir leur distance en latitude, on n'aura qu'à *retrancher* 35 de 48, ce qui donnera 48^0-35^0 ou 13^0 de latitude nord.

En général, si L et l désignent les deux latitudes nord, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d=L-l \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la première ville étant toujours à 48^0 de latitude nord, la seconde soit à 35^0 de latitude sud; il est clair que pour obtenir leur distance en latitude, il faudra *faire la somme* des nombres 48 et 35, ce qui donnera 48^0+35^0 ou 83^0.

En général, si L désigne le nombre de degrés de latitude nord, l le nombre de degrés de latitude sud, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d=L+l \qquad [2].$$

Les relations [1] et [2] ne diffèrent que par le signe qui précède la latitude l. Il est donc naturel de regarder la latitude comme une *quantité algébrique*, qui sera positive ou négative, suivant qu'elle sera comptée vers le nord ou vers le sud. On pourra ensuite renfermer tous les cas de la question qui nous occupe dans la formule [1], en étendant le sens du mot *soustraction*. On appellera *soustraction algébrique* une opération par laquelle on écrit une quantité algébrique à la suite d'une autre *en changeant son signe;* en sorte que la différence entre $+48$ et $+35$ sera $48-35$; mais que la différence entre $+48$ et -35 sera $48+35$. On énoncera alors la formule [1] d'une manière générale en disant : que pour obtenir la distance en latitude de deux lieux donnés, il faut faire la *différence algébrique* entre leurs latitudes.

90. En résumé, on voit qu'il existe des quantités susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés ; et que, suivant qu'elles sont comptées dans l'un ou l'autre de ces deux sens, elles figurent avec un certain signe ou avec le signe contraire dans la solution d'une même question. Les quantités de cette espèce ont reçu le nom de *quantités algébriques;* on leur attribue le signe $+$ lorsqu'elles sont comptées dans l'un des deux sens dont on vient de parler, et le signe — lorsqu'elles sont comptées dans le sens contraire. L'avantage qu'on retire de cette convention est non-seulement de trouver une interprétation pour les quantités négatives isolées que le calcul fournit quelquefois sans qu'on ait pu le prévoir, mais encore de pouvoir généraliser les formules auxquelles conduit la solution d'un problème particulier.

Cette tendance de l'Algèbre à généraliser les opérations et les résultats est un de ses caractères distinctifs. Nous aurons occasion d'y revenir. Il nous suffit pour le moment d'avoir essayé de faire comprendre l'origine des quantités négatives et des règles suivant lesquelles on les introduit dans le calcul. Nous allons maintenant exposer ces règles en détail.

91. *On appelle* QUANTITÉ ALGÉBRIQUE *une quantité qui se compose de deux éléments* : 1° *d'une valeur numérique* qui peut être entière ou fractionnaire; 2° *d'un signe* qui peut être $+$ ou $-$.

Ainsi $+4$, -4, $+\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $+a$, $-a$, $+4a^2b$, $-4a^2b$, etc., sont des quantités algébriques. Si elles contiennent des lettres, il faut toujours imaginer que ces lettres tiennent lieu de certaines valeurs numériques entières ou fractionnaires.

Quant à l'ordre de grandeur des quantités négatives

entre elles, ou comparées aux quantités positives, il faut remarquer que si d'un nombre quelconque, 5, par exemple, on retranche successivement une unité, on obtient des nombres de plus en plus petits 4, 3, 2, 1, 0. Arrivé à ce point, si l'on continue à retrancher toujours successivement une unité, on obtient les quantités négatives -1, -2, -3, -4, etc., dont la valeur absolue est croissante. Mais, comme c'est à l'aide d'une même opération, la soustraction d'une unité, qu'on a obtenu toute cette série de nombres, les uns positifs décroissants, les autres négatifs croissants en valeur absolue, l'analogie a conduit à regarder les quantités négatives comme moindres, algébriquement parlant, que les quantités positives, et comme d'autant moindres que leur valeur absolue est plus grande. Ainsi -1 est regardé comme moindre que 0; -2 est moindre que -1, et ainsi de suite.

Conformément à cette convention, lorsqu'on veut exprimer qu'une quantité a est positive, on écrit $a>0$; et si l'on veut exprimer qu'elle est négative, on écrit $a<0$.

92. L'ADDITION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités algébriques en conservant à chacune son signe.*

Ainsi, la somme algébrique de $+a$ et de $+b$ est $a+b$; la somme algébrique de $+a$ et de $-b$ est $a-b$; la somme algébrique de $-a$ et de $+b$ est $-a+b$; la somme algébrique de $-a$ et de $-b$ est $-a-b$.

Un polynome peut être considéré comme la somme algébrique de ses termes.

Pour additionner deux polynomes, il suffit d'écrire le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe. Cette règle a déjà été donnée au n° **27**; mais nous avions supposé alors que, dans chaque polynome, l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs. Cette restriction devient inutile.

93. *La* SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on écrit la quantité à soustraire à la suite de la quantité dont on la soustrait, en changeant le signe de la quantité à soustraire.*

Ainsi, la différence algébrique entre $+a$ et $+b$ est $a-b$; la différence algébrique entre $+a$ et $-b$ est $a+b$; la différence algébrique entre $-a$ et $+b$ est $-a-b$; la différence algébrique entre $-a$ et $-b$ est $-a+b$.

Pour soustraire un polynome d'un autre, il faut l'écrire à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes. Cette règle a été donnée au nº **30**, en supposant que dans chaque polynome l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs; cette restriction n'est plus nécessaire.

94. *La* MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on cherche une quantité algébrique, appelée* produit, *qui soit composée avec une quantité algébrique, appelée* multiplicande, *comme une autre quantité algébrique, appelée* multiplicateur, *est composée avec l'unité positive.*

Cette définition n'est, comme on le voit, qu'une extension de la définition donnée en arithmétique; on y a introduit l'élément qui distingue les quantités algébriques des quantités purement numériques, c'est-à-dire le signe.

Soit $+A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera composée avec la valeur absolue A du multiplicande, comme la valeur absolue B du multiplicateur est composée avec l'unité; c'est-à-dire que, d'après les notations admises, cette valeur absolue du produit sera AB. Quant au signe du produit, comme le multiplicateur $+B$ a le même signe que l'unité positive, ce produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $+A$ par $+B$ est $+AB$.

Soit $+A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera, comme ci-dessus, AB. Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande, c'est-à-dire $-$.

Ainsi, le produit de $+A$ par $-B$ est $-AB$.

Soit $-A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera encore AB. Mais le multiplicateur $+B$ ayant le même signe que l'unité positive, le produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-à-dire $-$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $+B$ est $-AB$.

Soit enfin $-A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera AB. Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande $-A$, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $-B$ est $+AB$.

La *règle des signes* établie au nº **34** par la considération de deux polynomes dans chacun desquels la partie positive était supposée l'emporter sur la partie négative, se trouve donc étendue à des monomes isolés, en partant de la distinction établie entre les quantités algébriques et les quantités purement numériques, et de la définition plus générale adoptée pour la multiplication.

Quant à la multiplication des polynomes, les règles établies au n° 34, dans la supposition où la partie positive de chaque polynome l'emporte sur la partie négative, subsisteront encore dans l'hypothèse contraire.

Soit, en effet, à multiplier $a-b$ par $c-d$, et supposons d plus grand que c en valeur absolue; le binome $c-d$ revient à $-(d-c)$; expression dans laquelle, d'après notre supposition, $d-c$ sera positif. Nous aurons donc à multiplier $+(a-b)$ par $-(d-c)$. Pour obtenir ce produit, il faudra d'abord multiplier entre elles les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ des deux facteurs, et changer ensuite le signe du résultat, puisque ces deux facteurs sont de signe contraire, car les règles démontrées ci-dessus ne supposent pas que A et B représentent des monomes plutôt que des polynomes. En multipliant d'abord les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ on obtient, d'après les règles du n° 34, qui sont applicables ici, puisque $a-b$ et $d-c$ sont positifs l'un et l'autre :

$$ad-bd-ac+bc.$$

Et en changeant le signe du résultat, ce qui se fait en changeant le signe de chaque terme, on obtient :

$$-ad+bd+ac-bc$$

ou $$ac-bc-ad+bd,$$

comme on l'a obtenu au n° 34.

Les règles de la multiplication subsistent donc sans la restriction faite alors.

95. *La* DIVISION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle, étant donnés le produit de deux facteurs algébriques et l'un de ces facteurs, on cherche l'autre facteur.*

On a vu, aux nos 39 à 43, comment les règles de la division se déduisent de celles de la multiplication. Ces dernières étant maintenant établies sans restriction pour les monomes positifs ou négatifs, et pour les polynomes dans lesquels la partie positive est plus grande ou plus petite en valeur absolue que la partie négative, il en est de même des règles de la division.

96. Les règles données aux nos 46 à 54 pour le calcul des fractions algébriques, n'étant fondées que sur celles des quatre opérations fondamentales, elles acquièrent la même généralité que celles-ci.

97. Deux quantités algébriques sont égales lorsqu'elles ont même valeur absolue et même signe. Si on les multiplie chacune par une même troisième, les produits seront égaux; car il est évident qu'ils auront aussi même valeur absolue et même signe.

Il suit de là qu'on peut, sans troubler une égalité, multiplier ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation indiquée au n° 57.

On démontrerait de même qu'on peut, sans troubler une égalité, diviser ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation du n° 58.

REMARQUE. On peut dans une égalité changer les signes de tous les termes, car cette transformation revient à multiplier ou à diviser à la fois les deux membres par -1.

§ 2. Discussion des problèmes du premier degré à une seule inconnue.

98. Lorsqu'on a résolu un problème d'une manière générale, c'est-à-dire en représentant les données par des lettres, comme nous l'avons fait, par exemple, au n° 63, il est utile de rechercher les principales circonstances que peut présenter la solution, suivant les valeurs particulières qu'on peut attribuer à ces données. L'examen méthodique de ces circonstances est ce qu'on nomme la *discussion* du problème.

Nous nous occuperons dans ce paragraphe de la discussion des problèmes qui conduisent à une seule équation, à une seule inconnue.

Une pareille équation, lorsqu'on y a fait disparaître les dénominateurs, qu'on a rassemblé dans un membre tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre tous les termes indépendants de cette inconnue, qu'enfin on a mis l'inconnue en facteur commun parmi les termes où elle se trouve, peut toujours être ramenée à la forme

$$Ax = B \qquad [1],$$

dans laquelle A et B peuvent être des quantités quelconques, monomes ou polynomes, algébriques ou numériques.

On tire de cette équation $x = \frac{B}{A}$;

c'est cette valeur qu'il s'agit de discuter.

99. Lorsqu'on attribue aux données de la question des valeurs particulières, les quantités A et B prennent elles-mêmes diverses valeurs. Il peut arriver que A et B soient de mêmes signes, ou bien qu'ils soient de signe contraire; que l'une d'elles s'annule, ou qu'elles s'annulent toutes deux à la fois. Nous allons examiner ces divers cas.

I. Si A et B sont de même signe, leur quotient est positif; la valeur $x = \frac{B}{A}$ est alors une réponse directe à la question, et ne donne lieu à aucune remarque.

II. Si A et B sont de signes contraires, leur quotient est négatif; on peut alors distinguer deux cas.

Ou la quantité que x représente est susceptible d'être comptée dans deux sens opposés, qui correspondent, l'un à ses valeurs positives, l'autre à ses valeurs négatives. Dans ce cas, une valeur négative trouvée pour l'inconnue est encore une réponse directe à la question. Si, par exemple, l'inconnue x représentait un certain nombre de degrés du thermomètre, comptés à partir du zéro, une valeur telle que -6 n'aurait rien que de parfaitement admissible, et répondrait à 6° *au-dessous* de zéro, comme la valeur $+6$ répondrait à 6° *au-dessus* de zéro. Cela résulte des conventions dont nous avons parlé au n° **87**.

Ou la quantité que x représente n'est susceptible d'être comptée que dans un seul sens. Alors, une valeur négative trouvée pour x est un caractère d'impossibilité du problème, tel qu'il a été posé du moins. Cette valeur négative indique un vice dans l'énoncé, ou au moins dans la manière de l'entendre; elle montre qu'une quantité qu'on avait regardée comme additive devait être regardée comme soustractive, ou *vice versa*; et l'on peut, en rectifiant l'énoncé, être conduit à une valeur positive numériquement égale à la valeur négative trouvée en premier lieu.

Pour opérer cette rectification dans l'énoncé, on remarque que, si l'on a trouvé, par exemple, la valeur

$$x = -6$$

et qu'on change x en $-x$ dans l'équation du problème, les calculs demeureront les mêmes, à l'exception du signe de x; en sorte qu'on parviendra à l'équation

$$-x = -6, \text{ ce qui revient à } x = 6.$$

Ainsi donc, on changera x en $-x$ dans l'équation du problème ; il sera facile alors de reconnaître le changement qu'il faut faire subir à l'énoncé pour qu'il conduise à l'équation ainsi modifiée, au lieu de conduire à l'équation primitive.

100. Soit proposé, par exemple, ce problème :

Un ouvrier fait, par jour, a *mètres d'une certaine étoffe; un second ouvrier en fait* b *mètres dans le même temps. Le premier a déjà fait* c *mètres, et le second en a fait* m *de plus. On demande dans combien de jours les deux ouvriers en auront fait autant l'un que l'autre.*

Désignons par x le nombre de jours demandé. Le premier ouvrier faisant a mètres par jour, en fera en x jours un nombre qui sera le produit de a par x, c'est-à-dire ax ; au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera donc $c+ax$. Le second ouvrier faisant b mètres par jour, en fera en x jours un nombre marqué par bx, et, au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera $c+m+bx$. Or, d'après l'énoncé, ces deux nombres doivent être égaux ; on doit donc avoir l'équation

$$c+ax=c+m+bx \qquad [1]$$

d'où l'on tire
$$x=\frac{m}{a-b} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que, pour obtenir le nombre de jours demandé, il faut diviser l'avance du second ouvrier par la différence entre les nombres de mètres que les deux ouvriers font par jour; résultat auquel on aurait pu d'ailleurs parvenir directement. On remarquera de plus que la donnée c n'a servi que dans la mise en équation, et a complétement disparu du résultat, qui en est par conséquent indépendant.

Si l'on fait les hypothèses particulières $a=8$, $b=5$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x=4.$$

Mais si l'on fait, au contraire, les hypothèses $a=5$, $b=8$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{5-8} \quad \text{ou} \quad x=-4.$$

Cette valeur négative indique qu'il y a alors un vice dans l'énoncé. Et en effet, le premier ouvrier travaillant moins vite que le second, ne pourra jamais rattraper celui-ci, qui a une avance de 12 mètres. La quantité x, qu'on avait regardée comme additive, doit donc être regardée comme soustractive. Changeons donc x en $-x$ dans l'équation [1] du problème, il viendra :

$$c-ax=c+m-bx \qquad [3],$$

et l'on voit facilement que pour que l'énoncé conduise à l'équation ainsi modifiée, il faut poser la question en ces termes :

Combien s'est-il écoulé de jours depuis celui où le nombre de mètres faits par chacun des deux ouvriers était le même?

En résolvant l'équation [3] on obtient

$$x=\frac{m}{b-a} \qquad [4],$$

et, si l'on met pour a, b, m, les valeurs 5, 8, 12, qui avaient conduit tout à l'heure à une valeur négative, on trouve

$$x=\frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x=4.$$

REMARQUE. Si l'on avait, dès l'abord, regardé le nombre de jours x comme susceptible d'être compté indifféremment vers l'avenir ou vers le passé, c'est-à-dire si on avait considéré x comme une quantité algébrique (**91**), on aurait pu sur-le-champ admettre la valeur négative, sans être obligé de modifier l'énoncé, autrement qu'en remplaçant ces mots *dans combien de jours* par les mots *depuis combien de jours*, et le mot *sera* par les mots *a été*, ce qui est simplement une nécessité de langage. Et la valeur négative trouvée pour x eût indiqué que l'époque cherchée était *antérieure* au lieu d'être *postérieure* à l'instant que l'on prend pour point de départ.

101. III. Il peut arriver que, par suite des valeurs particulières attribuées aux données, le numérateur B de la valeur

$$x = \frac{B}{A}$$

devienne nul, sans que le dénominateur le soit, ce qui donne

$$x = \frac{0}{A}.$$

Une valeur de cette forme n'est autre que *zéro*; car *zéro* divisé par une quantité quelconque, donne évidemment pour quotient *zéro*. Si l'on conservait quelque doute à cet égard, il suffirait de remonter à l'équation

$$Ax = B,$$

qui se réduit alors à

$$Ax = 0,$$

et ne peut être satisfaite que par la valeur

$$x = 0,$$

car, pour annuler un produit tel que Ax, il faut annuler un de ses facteurs; et le facteur A est supposé différent de *zéro*.

Le problème précédent conduirait à une valeur nulle si l'on faisait l'hypothèse particulière $m = 0$. Et, en effet, les quantités d'ouvrage faites par chaque ouvrier étant alors égales, la condition indiquée par l'énoncé se trouve remplie dès le jour même, et par conséquent le nombre de jours cherché est *zéro*.

102. IV. Il peut arriver que les hypothèses faites sur les données annulent le dénominateur A, sans annuler le numérateur, et qu'on ait

$$x = \frac{B}{0}.$$

Remarquons d'abord que l'équation $Ax = B$ se réduit alors à $0 = B$, et ne saurait par conséquent être satisfaite par aucune valeur de x. L'hypothèse $A = 0$ répond donc à un cas d'impossibilité.

Pour voir ce que peut signifier en lui-même le symbole $\frac{B}{0}$, supposons d'abord que A, au lieu de devenir nul, prenne seulement une valeur très-petite, par exemple, 0,001; on aura

$$x = \frac{B}{0,001} \quad \text{ou} \quad x = 1000B.$$

Supposons en second lieu que, par de nouvelles hypothèses, le dénominateur A prenne une valeur encore plus petite, 0,000001 par exemple; il viendra

$$x = \frac{B}{0,000001} \quad \text{ou} \quad x = 1000000B.$$

Si A prenait une valeur plus petite encore, par exemple, 0,000000001, on aurait

$$x=\frac{B}{0,000000001} \quad \text{ou} \quad x=1000000000B.$$

On voit qu'à mesure que le dénominateur A acquiert des valeurs de plus en plus petites, la valeur $\frac{B}{A}$ prend au contraire des valeurs de plus en plus grandes. Si donc on attribue à A la valeur zéro, c'est-à-dire une valeur moindre que toute quantité assignable, la fraction $\frac{B}{A}$ prendra au contraire une valeur plus grande que toute quantité assignable ; c'est ce qu'on appelle une valeur *infiniment grande*, ou *infinie*. On dit, en conséquence, que l'expression $\frac{B}{0}$ est le *symbole de l'infini*.

Si, par exemple, dans le problème du nº **100**, on fait l'hypothèse $a=b$, on trouve $x=\frac{m}{0}$. Or, si l'on remonte à l'énoncé du problème, il est facile d'interpréter ce résultat. Au lieu de supposer $a=b$, c'est-à-dire au lieu de supposer que les deux ouvriers font chaque jour le même nombre de mètres, supposons d'abord que a surpasse b d'une très-petite quantité, c'est-à-dire que la quantité d'ouvrage faite journellement par le premier ouvrier ne surpasse que de très-peu celle que fait journellement le second ; il est clair qu'il faudra au premier ouvrier un temps considérable pour rattraper le second. Si donc l'excès de a sur b est plus petit que toute quantité assignable, il faudra au premier ouvrier pour rattraper le second un temps plus long que toute quantité donnée ; c'est-à-dire que si $a=b$, le temps cherché sera *infini*.

Une solution *infinie*, ou de la forme $\frac{B}{0}$, est donc un caractère d'impossibilité.

Remarque I. Il est utile de remarquer que les solutions infinies peuvent être en même temps négatives. Si, par exemple, dans le problème du nº **100**, on fait l'hypothèse $a<b$, on a vu que la valeur de x devenait négative ; c'est-à-dire que si l'on suppose que le premier ouvrier travaille moins vite que le second, ce n'est qu'à une époque *antérieure* qu'ils ont pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre. Or, cette époque antérieure sera d'autant plus éloignée que l'excès de b sur a sera plus petit ; si donc on suppose cet excès nul, ou $a=b$, les deux ouvriers n'auront pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre qu'à une époque antérieure *infiniment éloignée*. En sorte que la solution est à la fois négative et infinie. On trouve, en effet,

$$x=-\frac{m}{0}.$$

Ce caractère d'impossibilité est de même nature que l'infini positif ; il n'y a de différence que dans le sens.

Remarque II. On représente quelquefois l'infini positif par le signe $+\infty$ et l'infini négatif par $-\infty$.

103. V. Il peut arriver enfin que les hypothèses faites sur les données représentées par des lettres, annulent à la fois le numérateur B et le dénominateur A de la valeur de l'inconnue x, auquel cas cette valeur prend la forme

$$x=\frac{0}{0}.$$

Comme on ignore ce que peut signifier un pareil symbole, et qu'on ne sait d'ailleurs s'il pourrait être légitimement déduit de l'équation $Ax = B$, puisqu'il faudrait diviser ses deux membres par *zéro*, il faut remonter à l'équation même.

Or, dans le cas où A et B sont nuls, cette équation est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur qu'on attribue à x, puisque les deux membres sont égaux à *zéro*. Le problème admet donc autant de solutions qu'on voudra; et par conséquent *l'expression* $\frac{0}{0}$ *est un symbole d'indétermination*.

Si, par exemple, dans le problème du n° **100**, on fait en même temps les deux hypothèses $m = 0$ et $a = b$, la valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$. Or, il est clair en effet que si aucun des deux ouvriers n'a d'avance sur l'autre, et s'ils font chaque jour le même nombre de mètres, le nombre total de mètres fait par chacun d'eux sera continuellement le même, et que par conséquent toute valeur imaginable de x sera une solution du problème.

On peut, en étudiant l'expression $\frac{0}{0}$ en elle-même, reconnaître également une quantité indéterminée. Concevons en effet une fraction algébrique $\frac{B}{A}$ dont les deux termes décroissent en conservant entre eux le même rapport. Ce rapport restant, par hypothèse, le même, quelque petits que soient ses deux termes en valeur absolue, on doit admettre qu'il restera encore le même à la limite, c'est-à-dire quand les deux termes seront nuls et que la fraction sera réduite à la forme $\frac{0}{0}$. Cette forme peut donc représenter le rapport dont nous parlons. Mais, comme ce rapport est quelconque d'ailleurs, on voit que $\frac{0}{0}$ peut représenter telle quantité que l'on voudra.

Remarque. Il faut observer toutefois que la valeur de x peut prendre la forme $\frac{0}{0}$, sans qu'il y ait indétermination réelle, lorsqu'on a négligé de supprimer les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Supposons, par exemple, qu'un problème ait conduit à la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 9b^2},$$

et qu'on fasse les hypothèses particulières $a = 6$ et $b = 2$, on trouvera

$$x = \frac{0}{0},$$

ce qui semble indiquer, dans ce cas, une indétermination du problème. Mais si l'on observe, que les deux termes de la valeur de x sont divisibles par $a - 3b$, et qu'on effectue cette division, il restera

$$x = \frac{a + b}{a + 3b},$$

et si l'on fait, dans cette valeur ainsi simplifiée, les hypothèses $a = 6$ et $b = 2$, qui avaient donné $\frac{0}{0}$, on trouve

$$x = \frac{8}{12} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3},$$

valeur parfaitement déterminée.

On voit combien il est important de supprimer les facteurs qui peuvent être communs aux deux termes de la valeur de l'inconnue, puisque, indépendamment d'une plus grande complication dans l'expression de cette valeur, ils peuvent induire en erreur dans certains cas particuliers de la discussion du problème.

§ 3. Discussion des problèmes du premier degré à deux inconnues.

104. Soient les deux équations

$$ax + by = c \qquad [1],$$

$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Pour en tirer les valeurs de x et de y, nous allons employer la méthode des coefficients indéterminés, déjà indiquée au nº **72**. Multiplions la première équation par une indéterminée m et retranchons-en la seconde membre à membre, il viendra

$$(ma - a')x + (mb - b')y = mc - c' \qquad [3].$$

Or, on peut profiter de l'indétermination de m pour tirer à volonté de l'équation [3], soit la valeur de x, soit celle de y.

Si, par exemple, on égale à zéro le coefficient de y, et qu'on pose

$$mb - b' = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{b'}{b},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(ma - a')x = mc - c', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{mc - c'}{ma - a'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{b'}{b}$,

$$x = \frac{\frac{b'c}{b} - c'}{\frac{b'a}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad [4].$$

Si, au contraire, on égale à zéro le coefficient de x, et qu'on pose

$$ma - a' = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{a'}{a},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(mb - b')y = mc - c', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{mc - c'}{mb - b'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{a'}{a}$,

$$y = \frac{\frac{a'}{a}c - c'}{\frac{a'}{a}b - b'} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \qquad [5],$$

en changeant les signes au numérateur et au dénominateur, afin de donner à la valeur de y le même dénominateur qu'à celle de x.

105. Il y a un moyen mnémonique très-simple de se rappeler ces valeurs générales, ou de les reformer directement au besoin. On écrit sur une même ligne les deux combinaisons ab et ba; on les sépare par le signe —, et dans chaque terme on accentue la seconde lettre, ce qui donne $ab' - ba'$; on a ainsi le dénominateur commun aux deux valeurs.

Pour former le numérateur de la valeur de x, il suffit de remplacer, dans ce dénominateur, les lettres a et a', par les lettres c et c'; c'est-à-dire chaque coefficient de x par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient en effet, ainsi, $cb'-bc'$, qui est bien le numérateur de la valeur de x.

Pour former le numérateur de la valeur de y, il faut remplacer dans le dénominateur les lettres b et b' par les lettres c et c', c'est-à-dire chaque coefficient de y par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient ainsi, en effet, $ac'-ca'$, qui est bien le numérateur de la valeur de y.

106. On peut se servir de ces valeurs générales pour résoudre deux équations particulières. Il suffit pour cela d'y remplacer les lettres a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs.

Soient, par exemple, les deux équations

$$5x+2y=33,$$
$$7x-3y=23,$$

déjà traitées au nº **68**. On aura, dans cet exemple,

$$a=5,\ b=2,\ c=33,\ a'=7,\ b'=-3,\ c'=23.$$

Par suite, en substituant dans les valeurs générales [4] et [5], on trouvera

$$x=\frac{33\times(-3)-2\times 23}{5\times(-3)-2\times 7}=\frac{-99-46}{-15-14}=\frac{-145}{-\ 29}=5,$$

$$y=\frac{5\times 23-33\times 7}{5\times(-3)-2\times 7}=\frac{115-231}{-15-14}=\frac{-116}{-\ 29}=4,$$

comme au numéro cité.

Mais il sera, presque toujours, préférable de traiter directement chaque exemple particulier. Le principal usage

des valeurs générales est dans la discussion que nous allons faire.

107. Cette discussion a pour but d'examiner les formes les plus remarquables que peuvent prendre ces valeurs lorsqu'on vient à faire des hypothèses particulières sur la valeur des lettres qui y entrent.

I. D'abord, si les hypothèses particulières donnent pour x et y des valeurs positives, ces valeurs sont une réponse directe à la question, et ne donnent lieu à aucune remarque.

II. Si les valeurs particulières attribuées aux lettres donnent pour l'une des inconnues ou pour chacune d'elles une valeur négative, il pourra arriver que ce soit le signe d'une impossibilité dans le problème; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit n'est susceptible par sa nature d'être comptée que dans un seul sens. Dans ce cas on suivra la marche déjà indiquée à l'occasion des problèmes à une seule inconnue : on changera dans les équations du problème le signe de l'inconnue pour laquelle on aura trouvé une valeur négative, et l'on cherchera le changement qu'il faut introduire dans l'énoncé pour qu'il conduise aux équations ainsi modifiées au lieu de conduire aux équations primitives. Il pourra arriver aussi que la valeur négative trouvée puisse être admise comme réponse à la question; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit est susceptible d'être comptée indifféremment dans deux sens opposés.

Nous allons donner des exemples de ces deux cas.

108. PROBLÈME. *Un ouvrier a travaillé une première fois dans une maison pendant* 7 *jours, sur* 3 *desquels il a eu avec lui un apprenti, et il a touché* 29 *francs. Une se-*

conde fois, le même ouvrier a travaillé pendant 11 *jours, sur* 4 *desquels il a eu avec lui son apprenti, et il a touché* 47 *francs. On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour et ce que lui rapportait le travail de son apprenti.*

La traduction de cet énoncé conduit immédiatement aux deux équations

$$7x + 3y = 29$$
$$11x + 4y = 47,$$

dans lesquelles x représente le gain journalier de l'ouvrier, et y ce que lui rapporte par jour le travail de son apprenti.

En éliminant y on trouve $x = 5$; et cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$35 + 3y = 29; \quad \text{d'où} \quad y = -2,$$

résultat inadmissible.

Changeons donc le signe de y dans les équations du problème, qui deviendront

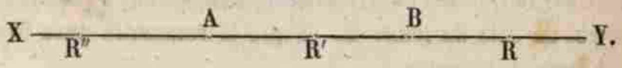
$$7x - 3y = 29,$$
$$11x - 4y = 47.$$

On voit que les quantités $3y$ et $4y$, qu'on avait d'abord regardées comme additives, doivent être au contraire regardées comme soustractives; c'est-à-dire que l'apprenti, au lieu de rapporter chaque jour à son maître une somme y, lui coûte au contraire une certaine somme. Il faudra donc poser la question de cette manière : *On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour, et ce que lui coûtait son apprenti.*

Avec cette modification, on trouve $x = 5$ et $y = 2$, qui répondent alors directement à l'énoncé.

109. Problème. *Deux courriers parcourent la même*

route; l'un fait a *kilomètres par heure, l'autre fait* b *kilomètres dans le même temps; le premier a passé à minuit en un point* A *situé sur la route; le second,* h *heures après, a passé en un point* B *situé à* d *kilomètres au delà du point* A. *On demande le lieu et l'heure de leur rencontre.*



Nous supposerons d'abord que les deux courriers marchent dans le même sens, de X vers Y. Soit R le lieu de la rencontre, supposé situé au delà du point B. Désignons par x la distance BR, et par y le nombre d'heures écoulées depuis minuit jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le premier courrier aura parcouru la distance AR ou $d + x$ en y heures; et comme il fait a kilomètres par heure, on aura l'équation

$$ay = d + x \qquad [1].$$

Le second courrier aura parcouru la distance BR ou x en $y - h$ heures; et comme il fait b kilomètres par heure, on aura pour seconde équation

$$b(y - h) = x \qquad [2].$$

Éliminant x, on obtient

$$ay = d + b(y - h), \quad \text{d'où} \quad y = \frac{d - bh}{a - b} \qquad [3].$$

Par suite $y - h = \dfrac{d - bh - ah + bh}{a - b} = \dfrac{d - ah}{a - b};$

et enfin $$x = \frac{b(d - ah)}{a - b} \qquad [4].$$

Si l'on a $a > b$ et $d > ah$, on aura à plus forte raison

$d > bh$; les termes des valeurs de x et de y étant positifs, ces valeurs seront positives elles-mêmes, et répondront directement à la question. Si, par exemple, on suppose $a = 12^k$, $b = 9^k$, $d = 63^k$ et $h = 4$ heures, on trouve

$$x = 45^k \quad \text{et} \quad y = 9^h.$$

C'est-à-dire que les courriers se rencontreront à 45 kilomètres au delà du point B, et que la rencontre aura lieu à 9 heures du matin.

Supposons, au contraire, que l'on ait $a > b$ et $d > bh$; mais en même temps $d < ah$, on trouvera pour y une valeur positive, mais pour x une valeur négative. Comme la distance BR est susceptible d'être comptée indifféremment à droite ou à gauche du point B, c'est-à-dire comme x est une quantité *algébrique*, nous savons que les valeurs négatives n'ont rien d'absurde et peuvent s'interpréter; ayant admis comme positives les valeurs comptées vers la droite, nous admettrons comme négatives celles qui seront comptées vers la gauche. La solution s'interprétera donc en disant que la rencontre, au lieu de se faire *au delà* du point B, se fera *en deçà* de ce point, en R′ par exemple.

C'est ce qui doit être, en effet; car ah étant le chemin parcouru par le premier courrier dans h heures, la condition $d < ah$ indique que, à h heures après minuit, il aura parcouru une distance plus grande que d, et dépassé par conséquent le point B au moment où le second courrier y arrive; et comme il va plus vite que celui-ci, la rencontre ne pourra avoir lieu au delà du point B.

Soient, par exemple, $a = 12^k$, $b = 9^k$, $d = 42^k$ et $h = 4$, on trouvera

$$y = 2^h \quad \text{et} \quad x = -18^k;$$

c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre aura lieu à 2 heures du matin, et à 18 kilomètres en deçà du point B.

On arriverait aux mêmes résultats en traitant la question directement dans l'hypothèse d'une rencontre entre A et B. Soit, en effet, R′ le point de rencontre, et faisons $BR' = x$. Le chemin parcouru par le premier courrier sera AR′ ou $d - x$; on aura donc pour première équation

$$ay = d - x.$$

Le chemin parcouru par le second courrier sera BR′ ou x; quant au temps employé, ce ne sera plus $y - h$, mais bien $h - y$; car pour que la rencontre ait lieu entre A et B, il faut nécessairement que l'instant de la rencontre précède celui où le second courrier arrive en B, c'est-à-dire que y doit être moindre que h. On aura donc l'équation

$$b(h - y) = x.$$

Or, ces deux équations pourraient se déduire des équations primitives [1] et [2], en y changeant x en $-x$; elles conduiront donc aux mêmes valeurs, sauf le signe de x.

Si l'on faisait les hypothèses $a > b$ et $d < bh$, on aurait à plus forte raison $d < ah$, et les valeurs de x et de y seraient toutes deux négatives. On trouvera l'interprétation de ce résultat en regardant à son tour y comme une quantité algébrique, c'est-à-dire en supposant que y désigne un nombre d'heures susceptible d'être compté indifféremment avant ou après minuit; la rencontre aurait lieu alors un certain nombre d'heures avant minuit, et à gauche du point B; le point de rencontre serait même situé à gauche du point A, en R″, par exemple. Cela résulte de ce que la valeur absolue de x, qui est alors

$$\frac{b(ah-d)}{a-b} \quad \text{ou} \quad \frac{bah - bd}{a-b},$$

est plus grande que $\frac{ad-bd}{a-b}$, puisqu'on a $bh>d$; c'est-à-dire qu'elle est plus grande que $\frac{(a-b)d}{a-b}$ ou que d.

C'est ce qu'on voit encore en remarquant que bh est le chemin parcouru dans h heures par le second courrier; et que, puisque bh est plus grand que d, le second courrier était, à minuit, à gauche du point A, et que, par conséquent, la rencontre n'a pu avoir lieu que de ce côté.

Si, par exemple, on a $a=12^k$, $b=9^k$, $d=30^k$ et $h=4$; on trouve $y=-2$ et $x=-54^k$, c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre a eu lieu 2 heures avant minuit, et à 54 kilomètres à gauche du point B (ou à 24 kilomètres à gauche du point A).

On peut encore vérifier ces résultats en traitant directement le problème pour le cas où la rencontre serait supposée avoir lieu en un point R″, situé à gauche du point A.

En effet, soient x la distance BR″, et y le nombre d'heures écoulées depuis l'instant de la rencontre jusqu'à l'arrivée du premier courrier en A, c'est-à-dire jusqu'à minuit. Le chemin parcouru par le premier courrier en y heures sera AR″ ou $x-d$; on aura donc pour première équation

$$ay=x-d.$$

Le chemin R″B ou x aura été parcouru par le second courrier dans un temps qui se compose de $y+h$, puisque le second courrier n'arrive en B que h heures après que le premier est arrivé en A; on aura donc pour seconde équation

$$a(y+h)=x.$$

Or, ces deux équations se déduisent des deux équations primitives [1] et [2] en y changeant à la fois x en $-x$ et y en $-y$. Elles donneront donc les mêmes valeurs avec des signes contraires.

110. Remarque I. Nous avons supposé jusqu'ici que le second courrier passait en B, un nombre h d'heures *après* que le premier a passé en A; on pourrait supposer que cela a lieu au contraire h heures *avant*. On va voir qu'il suffit pour introduire cette hypothèse nouvelle de changer partout h en $-h$; en sorte que les formules primitives resteraient applicables si l'on regardait h comme une quantité algébrique susceptible d'être comptée indifféremment en plus ou en moins. En effet, reprenons le premier cas où la rencontre a lieu en R; on aura comme plus haut

$$ay=d+x.$$

Le temps employé par le second courrier à parcourir l'espace BR ou x, sera alors $h+y$, puisque le second part de B un nombre h d'heures avant que le premier parte du point A; on aura donc pour seconde équation

$$b(y+h)=x,$$

équation qui ne diffère de celle obtenue dans le numéro précédent qu'en ce que $-h$ est remplacé par $+h$, ou que h est changé en $-h$. Il suffira donc pour obtenir les valeurs de x et y de changer, dans celles obtenues plus haut, le signe des termes où entre h, ce qui donnera

$$y=\frac{d+bh}{a-b} \quad \text{et} \quad x=\frac{b(d+ah)}{a-b}.$$

111. Remarque II. Nous avons supposé jusqu'à présent que le premier courrier va plus vite que le second, ou qu'on a $a > b$; on pourrait faire l'hypothèse contraire. Le dénominateur des valeurs de x et de y devenant alors négatif, les valeurs positives trouvées plus haut deviendraient négatives et les négatives deviendraient positives. On trouverait d'ailleurs facilement l'interprétation de tous ces résultats; nous ne nous y arrêterons point.

Mais nous avons admis jusqu'ici que les deux courriers marchaient dans le même sens; voyons si les formules primitivement obtenues seraient encore applicables au cas où les deux courriers marcheraient à la rencontre l'un de l'autre.

Admettons, par exemple, que, le premier courrier allant de A vers B et le second de B vers A, la rencontre se fasse en R', entre A et B. Soit x la distance BR'; et supposons que le second courrier arrive en B, un nombre h d'heures après que le premier est arrivé en A. Soit enfin, comme ci-dessus, y le nombre d'heures écoulées depuis le passage du premier courrier en A, c'est-à-dire depuis minuit, jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le chemin parcouru en y heures par le premier courrier sera AR' ou $d-x$; on aura donc

$$ay = d - x.$$

Le chemin x sera parcouru par le second courrier dans un temps marqué par $y-h$, comme dans le premier cas; on aura donc pour seconde équation

$$b(y-h) = x.$$

De ces deux équations, on tire

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b}.$$

Or, ces valeurs pourraient se déduire des valeurs primitives en y changeant le signe de b et celui de x; car elles donnent alors

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad -x = \frac{-b(d-ah)}{a+b} \quad \text{ou} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b}.$$

On voit donc que les valeurs primitives seraient applicables au cas qui nous occupe, si, d'une part, on continuait à regarder x comme négatif lorsque cette distance est comptée à gauche du point B, et si, de l'autre, ayant regardé b comme positif lorsque ce nombre de kilomètres parcourus dans une heure par le second courrier représentait un chemin fait vers la droite, on convenait de regarder b comme négatif lorsqu'il représente un chemin fait vers la gauche.

Il résulte de tout ce que nous avons dit dans ces trois derniers numéros que les formules établies pour un cas particulier du problème que nous avons en vue deviennent applicables à tous les cas de ce problème, lorsqu'on y regarde les quantités x, y, h, b, etc., comme des quantités algébriques, c'est-à-dire comme susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés. Et toutes les fois que les quantités considérées sont effectivement de cette nature, les formules établies dans un cas particulier deviennent applicables à tous; c'est là une vérité qui ne peut être directement démontrée, mais qui a été vérifiée un assez grand nombre de fois pour qu'on puisse la regarder comme bien établie.

Nous allons maintenant reprendre la discussion des valeurs générales du n° **104** :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

112. III. Nous venons d'examiner, dans ce qui précède, tous les cas où aucun des deux termes de ces valeurs générales ne devient nul. Il nous reste à examiner ceux dans lesquels l'un de ces termes ou tous deux à la fois prennent la valeur zéro.

Si l'un des numérateurs prend seul la valeur zéro, celui de x par exemple, il en résulte une valeur nulle pour x, ce qui n'offre aucun caractère d'impossibilité.

Si les deux numérateurs sont nuls, sans que le dénominateur commun le soit, x et y sont nuls en même temps. C'est ce qui a lieu quand on fait les hypothèses $c=0$ et $c'=0$. Il est clair d'ailleurs que cela ne peut avoir lieu que dans ce cas. Car les valeurs $x=0$ et $y=0$ rendant nuls les premiers membres des équations

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c',$$

ces équations ne peuvent être satisfaites par ces valeurs qu'autant que les seconds membres sont nuls.

113. IV. Si le dénominateur commun prend la valeur zéro, sans que les numérateurs soient nuls, les valeurs de x et de y prennent la forme $\frac{B}{0}$ que nous avons déjà rencontrée (**102**) dans la discussion des problèmes à une seule inconnue, et qui s'est présentée à nous comme le symbole de l'infini ou d'une impossibilité.

Remontons aux équations mêmes :

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c'.$$

Pour les mieux comparer, multiplions la première par b' et la seconde par b; elles deviennent

$$ab'x+bb'y=cb' \quad \text{et} \quad a'bx+bb'x=bc' \qquad [A].$$

Or, si le dénominateur des valeurs de x et de y est nul, on a

$$ab'-ba'=0 \quad \text{ou} \quad ab'=ba';$$

dans les deux équations [A] les premiers membres sont donc identiques sans que les seconds le soient; ces deux équations et par conséquent les deux proposées sont donc *incompatibles*.

114. Prenons pour exemple le problème des courriers.

Si l'on suppose $a=b$ dans les valeurs de x et de y du nº **109**, on trouve

$$y=\frac{d-bh}{0} \quad \text{et} \quad x=\frac{b(d-ah)}{0};$$

si l'on fait la même hypothèse dans les équations primitives

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad b(y-h)=x,$$

elles deviennent

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad a(y-h)=x \quad \text{ou} \quad ay=ah+x;$$

sous cette forme, l'incompatibilité est manifeste, puisque l'on a les mêmes premiers membres et des seconds membres différents.

En considérant le problème en lui-même, l'impossibilité n'est pas moins évidente. Car, si la vitesse du premier courrier surpasse de très-peu celle du second, il lui faudra un temps considérable pour le rattraper, et la rencontre n'aura lieu qu'à une distance très-grande. Si donc les deux vitesses deviennent égales, on peut dire qu'il faudra au premier courrier un temps infini pour rattraper le second, et que la rencontre aura lieu à une distance infinie.

115. V. Si les deux termes de la valeur de l'une des inconnues deviennent nuls, il en sera en général de même des deux termes de la valeur de la seconde, et ces deux valeurs se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, qui, dans les problèmes à une seule inconnue, est un caractère d'indétermination (**103**).

Supposons, par exemple, que la valeur générale de x se présente sous cette forme, et qu'on ait a la fois

$$cb' - bc' = 0 \quad \text{et} \quad ab' - ba' = 0,$$

ou

$$cb' = bc' \quad \text{et} \quad ab' = ba'.$$

En divisant ces relations membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on en tire

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \text{ou} \quad ac' = a'c, \quad \text{ou} \quad ac' - a'c = 0,$$

c'est-à-dire que le numérateur de la valeur de y est nul; et comme elle a le même dénominateur que celle de x, il s'ensuit qu'elle prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Remontons aux équations mêmes, ou plutôt aux équations [A] que nous en avons déduites.

En comparant ces équations, on reconnaît qu'elles sont identiques, puisque ab' est égal à $a'b$, et cb' à bc'. Ces deux équations, et par conséquent les deux proposées, rentrent donc l'une dans l'autre; on n'a, pour résoudre le problème, qu'une même équation sous deux formes différentes; il est donc indéterminé.

116. Prenons encore pour exemple le problème des courriers. Si l'on suppose à la fois $a = b$ et $d = bh$, auquel cas la valeur de y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on

déduit de ces relations cette autre relation très-simple $d = ah$. Par suite, la valeur de x prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Si l'on remonte aux équations mêmes

$$ay = d + x \quad \text{et} \quad b(y - h) = x,$$

elles deviennent, en ayant égard aux hypothèses ci-dessus,

$$ay = d + x \quad \text{et} \quad ay = bh + x \quad \text{ou} \quad ay = d + x,$$

c'est-à-dire qu'elles sont identiques.

On se rend également compte de l'indétermination en considérant le problème en lui-même. On suppose, en effet, $a = b$, c'est-à-dire que les deux courriers ont la même vitesse. On suppose de plus $d = bh$, c'est-à-dire qu'il faut h heures au second courrier pour parcourir la distance d; en d'autres termes, il était en A, un nombre h d'heures avant d'arriver en B. Il se trouvait donc en A à minuit, en même temps que le premier courrier; et comme ils ont la même vitesse, ils doivent se trouver et s'être trouvés ensemble en tous les points de la route, c'est-à-dire que le problème qui consiste à trouver le lieu et l'heure de la rencontre est un problème indéterminé*.

---

* Voir, pour le cas de trois équations à trois inconnues, notre *Algèbre élémentaire*.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1. De la formation du carré des quantités algébriques, et de l'extraction de leur racine carrée.

117. Le *carré* d'une quantité algébrique est le produit de cette quantité par elle-même.

Pour former le carré d'un monome, *il faut*, d'après les règles de la multiplication des monomes, multiplier le coefficient par lui-même, et ajouter à lui-même l'exposant de chaque lettre; il faut donc, en d'autres termes, *faire le carré des coefficients et doubler tous les exposants*.

Ainsi, le carré de $5a^2b^3x$ sera $25a^4b^6x^2$.

118. On a vu (**36**) que *le carré d'un binome se compose du carré du premier terme, de deux fois le produit du premier par le second et du carré du second*.

Voyons comment se compose le carré d'un trinome.

Soit le trinome $a+b+c$. Représentons par une seule lettre x l'ensemble des deux premiers termes; nous aurons à former le carré de $x+c$, ce qui, d'après la règle rappelée ci-dessus, donnera

$$x^2+2cx+c^2,$$

ou, en remettant pour x sa valeur,

$$(a+b)^2+2c(a+b)+c^2,$$

ou encore $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$;

c'est-à-dire que *le carré d'un trinome se compose du carré*

du premier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun des deux premiers par le troisième, plus le carré du troisième.

On trouverait de même que, s'il y avait un quatrième terme, le carré contiendrait, outre les parties qu'on vient d'énumérer, *deux fois le produit de chacun des trois premiers termes par le quatrième, plus le carré du quatrième.*

119. Pour former le carré d'une fraction algébrique, il faut, d'après les règles de la multiplication des fractions (**52**) faire le carré de son numérateur et le carré de son dénominateur.

Ainsi le carré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$,

le carré de $\frac{2a-3b}{5ab}$ est $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{25a^2b^2}$,

et ainsi de suite.

120. La *racine carrée* d'une quantité algébrique est une seconde quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première.

Mais cette racine se distingue de la racine carrée considérée en arithmétique par une différence essentielle. La racine *arithmétique* d'une quantité numérique est essentiellement positive; la racine *algébrique* d'une quantité, soit numérique, soit algébrique, peut être prise indifféremment avec deux signes contraires. En effet, soit à extraire la racine carrée de 49; au point de vue arithmétique, la racine est $+7$, mais au point de vue algébrique, cette racine est aussi bien -7 que $+7$; car -7, multiplié par -7, donne, d'après la règle des signes (**94**), $+49$, aussi bien que $+7$

multiplié par $+7$. De même $+a^2$ étant aussi bien le carré de $-a$ que le carré de $+a$, la racine de $+a^2$ est donc, à volonté, $+a$ ou $-a$.

On indique cette double solution en affectant la racine du double signe $\pm$, et l'on écrit

$$\sqrt{a^2}=\pm a;\quad \sqrt{49}=\pm 7.$$

Nous pouvons toutefois, quant à présent, faire abstraction de ce double signe, sauf à nous rappeler, lorsque nous aurons extrait la racine d'une quantité algébrique, que cette racine peut être prise indifféremment telle que nous l'aurons trouvée ou en signe contraire.

121. D'après la règle donnée (**117**) pour former le carré d'un monome, on peut voir que, pour qu'un monome soit un carré parfait, il faut : 1° que son coefficient soit un carré parfait; 2° que les exposants de toutes les lettres qui y entrent soient pairs.

Si ces deux conditions sont remplies, on obtiendra la racine carrée du monome proposé en extrayant la racine de son coefficient, et en divisant par 2 les exposants de toutes les lettres. Ainsi la racine de $49a^4b^6x^2$ est $7a^2b^3x$, abstraction faite du double signe $\pm$.

Si ces conditions ne sont pas remplies, on se contente d'indiquer la racine. Soit, par exemple, le monome $24a^3b^4x$; sa racine sera indiquée par $\sqrt{24a^3b^4x}$.

122. On reconnaît qu'un trinome, ordonné par rapport aux puissances d'une certaine lettre, est un carré parfait, lorsque son premier et son dernier terme sont des carrés, et que le terme intermédiaire, considéré indépendamment de son signe, est le double produit des racines des termes extrêmes; on extrait alors la racine de ce trinome en extrayant séparément la racine du premier terme et celle du dernier, et en mettant entre ces racines le signe du terme intermédiaire dans le trinome proposé.

Soit, par exemple, le trinome

$$4a^2x^4-12a^3x^3+9a^4x^2;$$

on remarque que son premier terme $+4a^2x^4$ est le carré de $2ax^2$, que son dernier terme $+9a^4x^2$ est le carré de $3a^2x$, et que le terme intermédiaire $12a^3x^3$, considéré indépendamment de son signe, est le double du produit de $2ax^2$ par $3a^2x$. Ce trinome est donc un carré parfait; et l'on obtiendra sa racine en prenant les racines des termes extrêmes, et en les réunissant par le signe $-$ qui précède le terme intermédiaire; ce qui donnera

$$2ax^2-3a^2x.$$

On trouvera de même que le trinome

$$9a^2+30ab+25b^2$$

est le carré de

$$3a+5b.$$

123. Pour extraire la racine carrée d'une fraction algébrique, il faut extraire la racine de chacun de ses termes; cela résulte de la loi de formation du carré d'une fraction (**119**). Ainsi la racine carrée de la fraction

$$\frac{25a^2-60ax+36x^2}{144a^2}\quad\text{est}\quad\frac{5a-6x}{12a}.$$

Si l'un des deux termes n'est pas un carré parfait, on se contente d'indiquer la racine; ainsi la racine de

$$\frac{13ab}{9x^2}\quad\text{s'écrira}\quad\frac{\sqrt{13ab}}{3x}.$$

§ 2. De la résolution des équations du second degré à une seule inconnue.

124. Une équation à une seule inconnue est du *second degré* quand, après qu'on a fait disparaître les dénominateurs et effectué les calculs, elle contient un ou plusieurs termes où l'inconnue entre à la seconde puissance.

Soit d'abord l'équation très-simple

$$x^2 = 25,$$

qui ne renferme qu'un terme en x^2 et un terme indépendant de x.

Lorsque deux quantités algébriques sont égales, on ne peut pas affirmer que leurs racines carrées soient égales, car ces racines peuvent différer par le signe (**120**); mais si l'on prend la racine de l'une avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, on peut être assuré d'avoir en même temps une racine de l'autre. On peut donc, en extrayant la racine des deux membres de l'équation ci-dessus, écrire généralement

$$\pm x = \pm 5.$$

Cette équation offre quatre combinaisons de signes :

$$+x = +5,$$
$$+x = -5,$$
$$-x = +5,$$
$$-x = -5.$$

Mais les deux dernières reproduisent les deux premières quand on y change à la fois tous les signes, ce qui est per-

mis. On aura donc toutes les combinaisons distinctes en écrivant simplement

$$x = \pm 5.$$

Si l'on avait l'équation $x^2 = A$,

on en tirerait de même $x = \pm\sqrt{A}$.

125. Soit maintenant l'équation

$$14x - x^2 = 40 \qquad [1],$$

ou

$$x^2 - 14x = -40 \qquad [2],$$

qui renferme un terme en x^2, un terme en x et un terme indépendant de x. Si l'on pouvait convertir le premier membre en un carré parfait, en extrayant ensuite la racine carrée des deux membres, l'équation se trouverait ramenée au premier degré; car la racine d'un polynome du second degré en x doit être du premier degré par rapport à cette lettre.

Or, on remarque que $x^2 - 14x$ peut être considéré comme formant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2, le carré du premier terme de ce binome inconnu, et $-14x$ le double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit $-14x$ des deux termes du binome inconnu par le double $2x$ du premier, ce qui donne -7. Le binome cherché est donc $x - 7$, et l'on complétera son carré en ajoutant à $x^2 - 14x$ le carré du second terme -7, c'est-à-dire 49. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra ajouter aussi 49 au second membre de l'équation [2], ce qui donnera

$$x^2 - 14x + 49 = -40 + 49$$

ou $$(x-7)^2 = 9.$$

Extrayant alors la racine de chaque membre, en remarquant que, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, il suffit de mettre le double signe $\pm$ devant la racine du second membre, on obtient

$$x - 7 = \pm 3;$$

ou, en faisant passer le terme -7 dans le second membre,

$$x = 7 \pm 3.$$

En adoptant le signe supérieur, on trouve

$$x = 7 + 3 = 10;$$

et en adoptant le signe inférieur, on trouve

$$x = 7 - 3 = 4.$$

L'équation peut donc être satisfaite de deux manières : soit en remplaçant x par 10, soit en remplaçant x par 4. C'est ce qu'il est facile de vérifier, car on a dans le premier cas

$$14 \times 10 - 100 = 140 - 100 = 40,$$

et dans le second,

$$14 \times 4 - 16 = 56 - 16 = 40.$$

126. Généralement, quand on aura fait disparaître les dénominateurs, une équation du second degré ne pourra contenir que trois espèces de termes, savoir : des termes en x^2, des termes en x, et des termes indépendants de x. Si l'on fait passer tous les termes dans un même membre, qu'on mette x^2 en facteur parmi ceux qui le contiennent, et qu'on en fasse autant pour x, l'équation aura la forme générale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle a, b, c, peuvent être des quantités quelconques, numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

Divisant tous les termes par a, il vient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

ou, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par q, pour abréger l'écriture,

$$x^2 + px + q = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Faisons passer le terme q dans le second membre, et écrivons

$$x^2 + px = -q \qquad [1].$$

Le premier membre peut être considéré comme renfermant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2 carré du premier terme de ce binome inconnu, et px double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit px des deux termes du binome inconnu, par le double $2x$ du premier, ce qui donne $\frac{p}{2}$. Le binome cherché est donc $x + \frac{p}{2}$; et l'on complétera son carré en ajoutant à $x^2 + px$ le carré de $\frac{p}{2}$ ou $\frac{p^2}{4}$. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra aussi ajouter $\frac{p^2}{4}$ au second membre de l'équation [1], ce qui donnera

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=-q+\frac{p^2}{4},$$

ou $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Extrayant la racine des deux membres, en mettant le double signe $\pm$ devant la racine du second, on obtient

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

ou, en faisant passer le terme $\frac{p}{2}$ dans le second membre,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Cette expression de x est une *formule générale* qui peut servir à trouver immédiatement l'inconnue dans une équation du second degré quelconque, sans répéter les raisonnements ci-dessus, et que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans toute équation du second degré ramenée à la forme

$$x^2+px+q=\ ,$$

l'inconnue est égale à la moitié du coefficient de la première puissance de x, *plus ou moins la racine carrée du carré de cette moitié, suivi du terme indépendant de* x, *pris avec le signe qu'il a dans le second membre.*

127. I. Si on applique cette règle à l'équation

$$x^2-5x+6=0,$$

on trouvera immédiatement

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6},$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3,$$

et $$x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2;$$

en sorte que l'équation est satisfaite par les deux valeurs 3 et 2.

II. Soit encore l'équation algébrique

$$x^2-(2a+3b)x+6ab=0,$$

on trouvera, en appliquant la règle,

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2a+3b}{2}\right)^2-6ab},$$

ou bien $$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2+12ab+9b^2}{4}-6ab}.$$

Réduisant tout au dénominateur 4 sous le radical, et réduisant, il vient

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2-12ab+9b^2}{4}}.$$

Or la racine peut s'extraire exactement (**122**), ce qui donne

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\frac{2a-3b}{2}.$$

De là deux valeurs

$$x=\frac{2a+3b+2a-3b}{2}=2a$$

et $$x=\frac{2a+3b-2a+3b}{2}=3b.$$

128. Il est bon de savoir résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sans être obligé de diviser par a.

Or, si, dans les valeurs obtenues plus haut,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

on remplace p et q par leurs valeurs, il vient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Réduisant au même dénominateur sous le radical, on trouve

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

ou, en extrayant la racine du dénominateur $4a^2$, et mettant $2a$ en dénominateur commun,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On peut arriver à cette expression d'une manière plus simple. Multiplions par $4a$ les deux membres de l'équation proposée, après avoir fait passer le terme c dans le second membre, elle devient

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Ajoutons b^2 à chaque membre, nous aurons

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ou, en remarquant que le premier membre est un carré parfait,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extrayant la racine, on obtient

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

d'où $$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

et $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On peut énoncer cette expression en disant que : *dans toute équation du second degré de la forme* $ax^2+bx+c=0$, *l'inconnue est égale au coefficient de la première puissance de* x *pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ce coefficient, diminué de quatre fois le produit du coefficient de* x^2 *par le terme indépendant de* x; *le tout divisé par le double du coefficient de* x^2.

Soit pour exemple l'équation

$$3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

on en tirera $$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 3 \times 2}}{6},$$

ou $$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x = \frac{5+7}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$7x^2 - 22x + 15 = 0,$$

$$x^2 - (4a - 2b)x + 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0,$$

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2,$$

$$\frac{3a}{x+b} + \frac{x-2b}{a-b} = 4.$$

§ 3. Problèmes qui conduisent à une équation du second degré à une seule inconnue.

129. Quant à la mise en équation des problèmes, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit d'une manière générale au n° **61**. Nous nous bornerons donc à traiter quelques questions choisies.

PROBLÈME I. *Un banquier a escompté en dedans un billet de* 2080 *fr. payable dans* 8 *mois, et un billet de* 3150 *fr. payable dans* 10 *mois; l'escompte total a été de* 230 *fr.; on demande quel était le taux de l'escompte.*

Soit x le taux de l'escompte. Puisque 100 fr., au bout de 1 an, rapportent x, au bout de 8 mois, ils rapporteraient $\frac{8x}{12}$ ou $\frac{2x}{3}$; par conséquent, si un billet payable dans 8 mois énonçait la somme $100^f + \frac{2x}{3}$, l'escompte *en dedans* de ce billet serait $\frac{2x}{3}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 2080 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{2}{3}x : \frac{2}{3}x :: 2080^f : \text{ce quatrième terme,}$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{2080^f \times \frac{2}{3}x}{100 + \frac{2}{3}x}$$

ou, en multipliant, haut et bas, par 3,

$$\frac{4160x}{300 + 2x} \qquad [1].$$

En second lieu, 100 fr. au bout de 1 an rapportant x, au bout de 10 mois ils rapporteront $\frac{10x}{12}$ ou $\frac{5x}{6}$; par conséquent, si un billet payable dans 10 mois énonçait la somme $100^f + \frac{5x}{6}$, l'escompte en dedans de ce billet serait $\frac{5x}{6}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 3150 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{5x}{6} : \frac{5x}{6} :: 3150^f : \text{ce quatrième terme,}$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{3150^f \times \frac{5x}{6}}{100 + \frac{5x}{6}}$$

ou, en multipliant, haut et bas, par 6,

$$\frac{15750x}{600 + 5x} \qquad [2].$$

Mais, d'après l'énoncé, la somme de ces deux escomptes doit faire 230 fr.; on doit donc avoir l'équation

$$\frac{4160x}{300 + 2x} + \frac{15750x}{600 + 5x} = 230 \qquad [3].$$

Faisant disparaître les dénominateurs, transposant et réduisant, il vient

$$50000x^2 + 6600000x = 41400000,$$

ou

$$x^2 + 132x = 828 \qquad [4],$$

d'où l'on tire $\quad x = 6 \quad$ et $\quad x = -138.$

Le taux de l'escompte étant essentiellement positif, la seconde valeur doit être rejetée; le taux cherché est donc

6 pour 100. On trouvera ensuite pour l'escompte des deux billets 80 fr. et 150 fr., en mettant pour x la valeur 6 dans les expressions [1] et [2].

REMARQUE. En changeant x en $-x$ dans l'équation [3], il serait facile de trouver un énoncé auquel convînt la solution -138 prise positivement; mais, outre que cet énoncé serait incompatible avec la notion d'escompte, la valeur positive $+6$ se trouverait alors convertie en une valeur négative -6.

On pourra être surpris, au premier abord, de voir l'Algèbre donner ainsi une solution étrangère à la question, quel que soit le signe que l'on donne à x dans l'équation du problème. Mais il faut bien remarquer que l'Algèbre doit donner la réponse à toutes les questions qui pourraient conduire à la même équation [4], et dont le nombre est illimité.

130. PROBLÈME II. *Partager 17 en deux parties telles que le carré de la première surpasse de 2 unités le double du carré de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $(17-x)$; et en traduisant algébriquement l'énoncé, on aura

$$2(17-x)^2+2=x^2,$$

ou, en réduisant,

$$x^2-68x+580=0;$$

d'où l'on tire $\quad x=34\pm24,$

c'est-à-dire $\quad x=58 \quad \text{et} \quad x=10.$

La seconde valeur satisfait à la question, et donne pour les deux parties 10 et 7.

Quant à la première valeur, elle est, quoique positive, étrangère à la question proposée, puisqu'une des parties de 17 ne saurait surpasser 17.

REMARQUE. L'explication de cette circonstance, en apparence singulière, est facile à trouver. Le problème que nous venons de résoudre avec une seule inconnue, en comporte réellement deux, qui sont les deux parties de 17.

En appelant x et y ces deux parties, les équations du problème seraient

$$x+y=17,$$

$$2y^2+2=x^2.$$

Or, il ne suffit pas que x soit positif pour que la solution réponde à l'énoncé, il faut encore que y le soit, ce qui ne peut avoir lieu si x surpasse 17.

Si l'on change y en $-y$, la première équation devient

$$x-y=17$$

et la seconde ne change point. Ces équations répondraient à ce problème : *Trouver deux nombres qui diffèrent de 17, et tels que le carré du plus grand surpasse de 2 unités le double du carré du plus petit.* Dans ce cas, les valeurs de x restant les mêmes, on trouve que la valeur $x=58$ satisfait et donne pour y une valeur positive $y=41$; tandis que $x=10$ donne $y=-7$.

Mais les valeurs, tant négatives que positives de y, deviendraient admissibles si l'on prenait pour énoncé : *Trouver deux quantités dont la somme algebrique soit 17, et telles que le carré de la première surpasse de 2 unités le double du carré de la seconde.*

On voit ici, comme dans le problème précédent, que l'équation à laquelle on est parvenu est plus générale que le problème qui y a conduit, et que c'est à cette plus grande généralité qu'il faut attribuer les valeurs étrangères au problème particulier que l'on a en vue, fournies par les procédés de l'Algèbre.

151. Problème III. *Une personne qui a* 120000 *fr. de capital en a fait deux parts qu'elle a placées à deux taux différents; la première lui rapporte annuellement* 2800 *fr.; la seconde, qui est placée à un taux plus élevé de* 1 *fr., lui rapporte* 2500 *fr. On demande quelles sont les deux parts, et à quels taux elles ont été placées.*

Désignons par x le taux auquel la première part est placée. Si la première part était connue, on obtiendrait son intérêt annuel en la multipliant par le taux x, et en divisant par 100; ce qui devrait donner 2800 fr. On aura donc l'expression de la première part en faisant les opérations inverses, c'est-à-dire en multipliant 2800 fr. par 100, et en divisant le produit par x; ce qui donne

$$\frac{280000}{x}.$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera pour l'expression de la seconde part

$$\frac{250000}{x+1}.$$

Et puisque la somme des deux parts doit faire le capital entier, on devra avoir

$$\frac{280000}{x}+\frac{250000}{x+1}=120000,$$

ou

$$\frac{28}{x}+\frac{25}{x+1}=12,$$

ou encore $\quad 12x^2-41x-28=0,$

d'où l'on tire $\quad x=4 \quad \text{et} \quad x=-\frac{7}{12}.$

La valeur positive $+4$, qui est seule admissible, donne $4+1$ ou 5 pour le taux auquel a été placée la seconde part. La première est alors

$$\frac{280000}{4} \quad \text{ou} \quad 70000^{\text{f}},$$

et la seconde est

$$\frac{250000}{5} \quad \text{ou} \quad 50000^{\text{f}}.$$

La somme de ces deux parts forme bien le capital 120000 fr.

Ici, comme dans le problème I, la valeur négative $-\frac{7}{12}$ ne pourrait être interprétée qu'en partant d'un énoncé incompatible avec la notion d'intérêt. Rappelons que si l'Algèbre fournit ainsi une solution étrangère, cela tient à ce que l'équation à laquelle on est parvenu a plus de généralité que le problème particulier qui y a conduit, et que l'Algèbre doit répondre à toutes les questions qui conduiraient à cette même équation, et dont quelques-unes pourraient admettre la solution négative $-\frac{7}{12}$.

152. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Une personne a acheté du drap pour* 300 *fr. Si elle avait payé le mètre* 5 *fr. de moins elle aurait eu, pour la même somme,* 2^{m} *de drap de plus. On demande combien elle a acheté de mètres de drap.*

(Réponse : 10^{m}. Solution négative -12^{m}).

II. *Un amateur de tableaux achète pour original une copie qu'il est obligé de revendre ensuite* 24 *fr.; à ce marché il perd* *autant pour* 100 *que le tableau lui avait coûté. On demande quel a été le prix d'achat.*

(Réponse : 60 fr. et 40 fr.)

III. *Partager* 12 *en deux parties telles que le carré de la première soit inférieur d'une unité au double du carré de la seconde.*

(Réponse : la première partie est 7; par suite la seconde est 5. De plus une solution inadmissible, 41 pour la première partie, ce qui donnerait pour la seconde —29. (Voy. le n° **130**.)

IV. *On a payé* 96 *fr. à* 14 *ouvriers, hommes et femmes; chaque homme a reçu autant de francs qu'il y avait de femmes, et chaque femme autant de francs qu'il y avait d'hommes. Combien y avait-il d'hommes et combien y avait-il de femmes?*

(Réponse : 8 hommes et 6 femmes, ou bien 6 hommes et 8 femmes.)

V. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant que la raison est* 3, *que la somme des antécédents est* 5, *et que la somme des carrés des quatre termes est* 130.

(Réponse : 2 : 6 :: 3 : 9 ou 3 : 9 :: 2 : 6.)

VI. *Deux ouvriers ont un ouvrage à faire. Si chacun d'eux en faisait la moitié, il leur faudrait en tout* 25 *heures de travail pour le terminer; mais s'ils travaillent ensemble, l'ouvrage sera fait en* 12 *heures. Combien d'heures chacun d'eux emploierait-il à faire l'ouvrage entier s'il travaillait seul?*

(Réponse : L'un des ouvriers emploierait 30 heures, et l'autre 20 heures.)

CHAPITRE VI.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES DU SECOND DEGRÉ, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1. Des quantités irrationnelles et des quantités imaginaires du second degré.

133. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, on sait que sa racine carrée ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire; mais que l'on peut en approcher aussi près qu'on le désire. Ainsi une expression telle que $\sqrt{2}$ représente une quantité dont la valeur ne peut être assignée exactement en nombres, mais qui a néanmoins une existence réelle, puisqu'on peut toujours trouver deux quantités numériques, différant entre elles d'aussi peu qu'on le voudra, et entre lesquelles elle soit comprise. Une pareille quantité est ce qu'on appelle une quantité *incommensurable*, si on la considère sous le rapport de son évaluation numérique, ou une quantité *irrationnelle*, si l'on ne s'attache qu'au signe $\sqrt{\ }$ par lequel elle est représentée.

Une quantité telle que $\sqrt{3ab}$, dans laquelle a et b sont des quantités numériques quelconques, est encore une quantité *irrationnelle*. On pourrait bien, à la vérité, trouver pour a et b des valeurs numériques telles que $3ab$ devînt un carré parfait, auquel cas $\sqrt{3ab}$ deviendrait rationnel et commensurable; mais comme cela n'a pas lieu pour toutes les valeurs qu'on pourrait attribuer à a et à b, il convient *autant pour* 100 *que le tableau lui avait coûté. On demande quel a été le prix d'achat.*

(Réponse : 60 fr. et 40 fr.)

III. *Partager* 12 *en deux parties telles que le carré de la première soit inférieur d'une unité au double du carré de la seconde.*

(Réponse : la première partie est 7; par suite la seconde est 5. De plus une solution inadmissible, 41 pour la première partie, ce qui donnerait pour la seconde —29. (Voy. le n° **130**.))

IV. *On a payé* 96 *fr. à* 14 *ouvriers, hommes et femmes; chaque homme a reçu autant de francs qu'il y avait de femmes, et chaque femme autant de francs qu'il y avait d'hommes. Combien y avait-il d'hommes et combien y avait-il de femmes?*

(Réponse : 8 hommes et 6 femmes, ou bien 6 hommes et 8 femmes.)

V. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant que la raison est* 3, *que la somme des antécédents est* 5, *et que la somme des carrés des quatre termes est* 130.

(Réponse : $2 : 6 :: 3 : 9$ ou $3 : 9 :: 2 : 6$.)

VI. *Deux ouvriers ont un ouvrage à faire. Si chacun d'eux en faisait la moitié, il leur faudrait en tout* 25 *heures de travail pour le terminer ; mais s'ils travaillent ensemble, l'ouvrage sera fait en* 12 *heures. Combien d'heures chacun d'eux emploierait-il à faire l'ouvrage entier s'il travaillait seul?*

(Réponse : L'un des ouvriers emploierait 30 heures, et l'autre 20 heures.)

CHAPITRE VI.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES DU SECOND DEGRÉ, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1. Des quantités irrationnelles et des quantités imaginaires du second degré.

133. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, on sait que sa racine carrée ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire; mais que l'on peut en approcher aussi près qu'on le désire. Ainsi une expression telle que $\sqrt{2}$ représente une quantité dont la valeur ne peut être assignée exactement en nombres, mais qui a néanmoins une existence réelle, puisqu'on peut toujours trouver deux quantités numériques, différant entre elles d'aussi peu qu'on le voudra, et entre lesquelles elle soit comprise. Une pareille quantité est ce qu'on appelle une quantité *incommensurable*, si on la considère sous le rapport de son évaluation numérique, ou une quantité *irrationnelle*, si l'on ne s'attache qu'au signe $\sqrt{}$ par lequel elle est représentée.

Une quantité telle que $\sqrt{3ab}$, dans laquelle a et b sont des quantités numériques quelconques, est encore une quantité *irrationnelle*. On pourrait bien, à la vérité, trouver pour a et b des valeurs numériques telles que $3ab$ devînt un carré parfait, auquel cas $\sqrt{3ab}$ deviendrait rationnel et commensurable; mais comme cela n'a pas lieu pour toutes les valeurs qu'on pourrait attribuer à a et à b, il convient de traiter l'expression $\sqrt{3ab}$ comme si le radical (**12**) ne pouvait jamais disparaître, c'est-à-dire qu'il convient de la traiter comme si elle devait rester irrationnelle pour toutes les valeurs de a et de b.

Généralement, toutes les fois qu'un radical du second degré porte sur une quantité algébrique qui n'est point un carré parfait, *algébriquement parlant*, c'est-à-dire indépendamment des valeurs particulières qu'on peut attribuer aux lettres qui y entrent, l'expression doit être regardée comme irrationnelle, bien que pour certaines valeurs particulières attribuées aux lettres, elle puisse cesser de l'être. C'est ainsi que $\sqrt{a^2+b^2}$ doit être considérée comme une quantité irrationnelle, attendu que a^2+b^2 ne peut être ni le carré d'un monome, ni celui d'un polynome; et cela, quoique certaines valeurs particulières, attribuées à a et à b, ou à l'une des deux seulement, puissent rendre a^2+b^2 un carré parfait, ce qui arriverait, par exemple, pour $b=\frac{3}{4}a$, auquel cas a^2+b^2 se réduirait à $\frac{25a^2}{4}$ et serait le carré de $\frac{5a}{2}$.

134. La première chose à faire, dans le calcul des quantités irrationnelles, est de simplifier les radicaux s'il y a lieu. Cette simplification repose sur le principe suivant :

La racine carrée d'un produit équivaut au produit des racines carrées de ses facteurs.

Soient, par exemple, a, b, c, d les facteurs du produit; je dis qu'on a

$$\sqrt{a.b.c.d}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.$$

En effet, le premier membre élevé au carré, donne $a.b.c.d$ par définition. Voyons ce qu'on obtient en élevant

au carré le second membre. Ce carré se présente d'abord sous la forme

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d})(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}).$$

En admettant, pour les quantités irrationnelles les règles de multiplication établies pour les quantités rationnelles, on pourra l'écrire :

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d},$$

ou bien $\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{d},$

ou encore

$$(\sqrt{a}.\sqrt{a})\times(\sqrt{b}.\sqrt{b})\times(\sqrt{c}.\sqrt{c})\times(\sqrt{d}.\sqrt{d}).$$

Mais, par définition, $\sqrt{a}.\sqrt{a}$ est égal à a; de même $\sqrt{b}.\sqrt{b}$ est égal à b, et ainsi des autres. Le produit obtenu peut donc s'écrire

$$a.b.c.d.$$

Ainsi le carré du second membre de l'égalité ci-dessus revient au carré du premier membre. Donc ces deux membres sont égaux eux-mêmes en valeur absolue. Et comme, quel que soit le signe qu'on prenne pour chacun des radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, etc., le produit aura nécessairement le signe $+$ ou le signe $-$, c'est-à-dire l'un des deux signes que l'on peut donner au premier membre; il s'ensuit que les deux membres sont égaux pour la valeur absolue et pour les signes.

135. Supposons maintenant qu'il s'agisse de simplifier un radical; par exemple,

$$\sqrt{75a^3b^4x}.$$

On décomposera la quantité placée sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait; on pourra écrire ainsi

$$\sqrt{25a^2b^4 \times 3ax}.$$

Or, en vertu du principe précédent, on peut extraire séparément (ou indiquer si l'on ne peut l'extraire) la racine de chacun des deux facteurs, ce qui donnera

$$\sqrt{25a^2b^4} \times \sqrt{3ax}.$$

La première racine s'extrait exactement (**121**); il vient donc

$$5ab^2\sqrt{3ax},$$

et le signe radical porte maintenant sur une quantité plus simple.

On trouvera de même que les quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2}, \quad \sqrt{363a^3b^3x^4}, \quad \sqrt{864a^5b^2x^3},$$

peuvent s'écrire respectivement

$$6b^2x\sqrt{3ab}, \quad 11abx^2\sqrt{3ab}, \quad 12a^2bx\sqrt{6ax}.$$

Remarque. On nomme quantités irrationnelles *semblables* celles qui, lorsqu'elles ont été simplifiées, présentent la même quantité sous le radical.

Telles sont les deux quantités $6b^2x\sqrt{3ab}$ et $11abx^2\sqrt{3ab}$ obtenues ci-dessus.

136. On peut, au contraire, dans certains calculs, avoir intérêt à faire passer sous le radical un facteur placé devant; il est clair qu'il faut alors élever ce facteur au carré.

Si l'on a, en effet, l'expression $a\sqrt{b}$, on peut l'écrire

$$\sqrt{a^2} \,.\, \sqrt{b},$$

ou, en vertu du principe démontré au n° **134**,

$$\sqrt{a^2b}.$$

137. Ce que nous venons de dire d'un facteur peut se dire d'un dénominateur, car diviser une quantité par m, par exemple, revient à la multiplier par $\frac{1}{m}$.

Soit l'expression

$$\sqrt{\frac{a}{m^2}}, \text{ qui revient à } \sqrt{\frac{1}{m^2}.a} \text{ ou à } \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2.a}.$$

En vertu de ce qui précède (**134**), on pourra l'écrire

$$\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2}\cdot\sqrt{a}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m}\sqrt{a}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{\sqrt{a}}{m}.$$

On a donc $$\sqrt{\frac{a}{m^2}}=\frac{\sqrt{a}}{m},$$

ce qui permet de faire passer un dénominateur hors d'un radical en en extrayant la racine, ou de l'y faire entrer en l'élevant au carré.

138. Nous pouvons maintenant passer en revue les différentes opérations qu'on peut avoir à effectuer sur les radicaux du second degré.

L'addition et la soustraction ne peuvent que s'indiquer, si les radicaux sont dissemblables. Ainsi, la somme de $\sqrt{a}$ et de $\sqrt{b}$, s'écrira simplement $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; leur différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Si les radicaux sont semblables, on opère l'addition ou la soustraction des quantités placées devant le radical; ce radical est un facteur commun dont on affecte le résultat. Ainsi la somme des quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{363a^3b^3x^4},$$

qui reviennent à

$$6b^2x\sqrt{3ab} \quad \text{et} \quad 11abx^2\sqrt{3ab},$$

est
$$(6b^2x + 11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

Leur différence est

$$(6b^2x - 11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

139. Multiplication. *Pour faire le produit de deux radicaux du second degré, on peut faire le produit des quantités placées sous chacun d'eux et affecter le produit du radical commun.*

On a, en effet (**134**),

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

Cette règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Il peut arriver que le produit soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le produit de $\sqrt{5a^3b}$ par $\sqrt{15ab^2x}$ est $\sqrt{75a^4b^3x}$; qui revient à $5a^2b\sqrt{3bx}$.

Le produit de $\sqrt{2a^3x}$ par $\sqrt{18ab^4x^5}$ est $\sqrt{36a^4b^4x^6}$, qui revient à $6a^2b^2x^3$.

Division. *Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on peu diviser l'une par l'autre les quantités placées sous chacun d'eux et affecter le quotient du radical commun.*

Désignons, en effet, par q le quotient des radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$; en sorte qu'on ait

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=q \quad \text{ou} \quad \sqrt{a}=\sqrt{b}.q$$

En élevant les deux membres au carré, il viendra

$$a=b.q^2,$$

d'où
$$q^2=\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad q=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Par conséquent
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Il peut arriver que le quotient soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le quotient de $\sqrt{15a^3bx^2}$ par $\sqrt{10ab^2x^3}$ est $\sqrt{\frac{15a^3bx^2}{10ab^2x^3}}$,

ou, en simplifiant la fraction (**47**), $\sqrt{\frac{3a^2}{2bx}}$.

Le quotient de $\sqrt{21ab^3x}$ par $\sqrt{12a^3x^3}$ est $\sqrt{\frac{21ab^3x}{12a^3x^3}}$,

ou $\sqrt{\frac{7b^3}{4a^2x^2}}$, ou $\frac{b\sqrt{7b}}{2ax}$.

Le quotient de $\sqrt{18a^3bx^4}$ par $\sqrt{8ab^3x^2}$ est $\sqrt{\frac{18a^3bx^4}{8ab^3x^2}}$,

ou $\sqrt{\frac{9a^2x^2}{4b^2}}$, ou $\frac{3ax}{2b}$.

140. Lorsqu'une fraction algébrique contient un ou plusieurs radicaux du second degré à son dénominateur, on peut les faire passer à son numérateur.

1. Soit d'abord l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}}$. En multipliant ses deux termes par $\sqrt{b}$, on obtient $\frac{a\sqrt{b}}{mb}$, expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, on obtiendra, en multipliant ses deux termes par $\sqrt{3}$,

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\times 3} \quad \text{ou} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

II. Soit, en second lieu, l'expression $\frac{a}{b+m\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $b-m\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(b-m\sqrt{c})}{b^2-m^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{5}{4+2\sqrt{3}}$; en multipliant ses deux termes par $4-2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{5(4-2\sqrt{3})}{16-4\times 3}, \quad \text{ou} \quad \frac{5(4-2\sqrt{3})}{4} \quad \text{ou encore} \quad \frac{5(2-\sqrt{3})}{2}.$$

III. Soit l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $m\sqrt{b}-n\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; en multipliant les deux termes par $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{9\times 2-4\times 3}, \quad \text{ou} \quad \frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6},$$

ou encore $$\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{2}.$$

141. Nous avons fait remarquer, au commencement du paragraphe précédent, que la racine carrée d'une quantité positive, qu'elle soit commensurable ou non, a toujours une existence réelle, puisqu'on peut toujours assigner deux limites numériques, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles elle soit comprise. Il n'en serait plus de même si la quantité dont on veut extraire la racine était une quantité négative. Non-seulement la racine carrée d'une quantité négative ne saurait être assignée en nombres, mais elle n'a même aucune existence réelle; car il résulte de la règle des signes (**94**) qu'aucune quantité réelle, soit positive, soit négative, ne peut, lorsqu'on la multiplie par elle-même, donner un produit négatif.

Ainsi $+2$, multiplié par lui-même, donne $+4$; et -2, multiplié par lui-même, donne également $+4$. Mais il n'existe aucune quantité réelle qui, multipliée par elle-même, puisse donner pour produit -4. La racine carrée de -4 n'a donc pas d'existence réelle; et l'expression $\sqrt{-4}$ n'est que le symbole d'une opération impossible.

Les expressions de cette espèce sont ce que l'on appelle des quantités *imaginaires*.

Toute racine de degré pair d'une quantité négative est encore une quantité *imaginaire*; car, d'après la règle des signes, toute puissance paire d'une quantité réelle, soit positive, soit négative, est nécessairement positive. Mais nous nous occuperons spécialement dans ce qui va suivre des imaginaires du second degré.

On donne ordinairement à ces quantités une forme plus commode. Reprenons comme exemple l'expression $\sqrt{-4}$. On regarde la quantité -4, placée sous le radical, comme le produit de $+4$ par -1; et pour extraire la racine carrée du produit on convient d'appliquer encore la règle du n° **134**, c'est-à-dire qu'on extrait, ou que du moins on indique la racine carrée de chaque facteur. On obtient ainsi $2.\sqrt{-1}$. De même l'expression $\sqrt{-a^2}$ pourrait s'écrire $a\sqrt{-1}$; l'expression $\sqrt{-3}$ s'écrirait $\sqrt{3}.\sqrt{-1}$. En un mot, la racine d'une quantité négative s'écrit en multipliant par $\sqrt{-1}$ la racine de la même quantité prise positivement.

142. Toute expression algébrique dans laquelle il entre des quantités de la forme $a\sqrt{-1}$ est une expression imaginaire. Celles qui sont les plus importantes à considérer, et auxquelles on peut ramener toutes les autres, sont les expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui se composent d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. On étend aux quantités imaginaires de cette forme les règles établies pour le calcul des quantités réelles.

§ 2. Discussion des problèmes du second degré.

143. Nous avons vu (**126**, **128**) qu'une équation du second degré peut toujours être ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, ou à la forme plus générale $ax^2+bx+c=0$. Pour cela nous avons dit qu'il fallait faire disparaître les dénominateurs, effectuer les calculs et transposer. Nous pouvons ajouter à présent que, si l'équation contenait un ou deux radicaux du second degré, sous lesquels l'inconnue fût engagée, il faudrait les faire disparaître.

A cet effet, s'il n'y a qu'un seul radical, on l'isole dans un membre; et, en élevant les deux membres au carré, on

le fait disparaître. Soit, par exemple, l'équation

$$2x+3\sqrt{x-5}=24,$$

on en tirera successivement

$$3\sqrt{x-5}=24-2x, \quad \text{d'où} \quad 9(x-5)=(24-2x)^2,$$

où il n'y aura plus qu'à effectuer les calculs et à transposer.

S'il y a deux radicaux, on les isole dans un membre; on élève au carré; le membre qui contenait les radicaux ne contient plus alors que leur double produit. On isole le double produit dans un seul membre; et en élevant une seconde fois au carré, on obtient une équation débarrassée de radicaux. Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{13-x}=5,$$

on en tirera successivement

$$x+13-x+2\sqrt{x(13-x)}=25 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x(13-x)}=6;$$

puis $$x(13-x)=36,$$

où il n'y aura plus que les calculs à effectuer.

Cela posé, reprenons l'équation du second degré sous la forme

$$x^2+px+q=0 \qquad [1].$$

Nous avons vu (**126**) qu'en la résolvant on obtient les deux valeurs

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Ces valeurs, que nous désignons par x' et x'', sont ce que l'on a l'habitude d'appeler les *racines* de l'équation du second degré. Il est important de ne pas les confondre avec le *radical* qu'elles renferment.

Si on les ajoute on obtient

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p,$$

et si on les multiplie, on trouve pour produit

$$x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Ainsi : 1° *la somme des racines d'une équation du second degré, de la forme* $x^2 + px + q = 0$, *est égale au coefficient de la première puissance de* x, *pris en signe contraire; et,* 2° *le produit de ces mêmes racines est égal au terme indépendant de* x.

Réciproquement : si deux quantités a et b remplissent ces conditions, en sorte qu'on ait à la fois

$$a + b = -p \quad \text{et} \quad ab = q;$$

ces quantités sont racines de l'équation [1], c'est-à-dire que, mises à la place de x, elles satisfont à l'équation. Car, on tire de la première relation

$$b = -p - a,$$

et, en mettant pour b cette valeur dans la seconde, il vient

$$-pa - a^2 = q \quad \text{ou} \quad a^2 + pa + q = 0.$$

On démontrerait, en éliminant a au contraire, qu'on a aussi

$$b^2 + pb + q = 0.$$

144. Remplaçons, dans l'équation [1], p et q par leurs

valeurs $-(x' + x'')$ et $x'x''$; il viendra

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0,$$

ou

$$x^2 - x'x - x''x + x'x'' = 0,$$

ou encore

$$x(x - x') - x''(x - x') = 0,$$

ou enfin

$$(x - x')(x - x'') = 0 \qquad [2].$$

Ainsi, *le premier membre de l'équation* $x^2 + px + q = 0$ *se décompose en deux facteurs du premier degré, formés de l'inconnue* x *diminuée alternativement des deux racines.*

Si, par exemple, on a l'équation

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui a pour racines 2 et 3; son premier membre pourra se mettre sous la forme $(x-2)(x-3)$, ce qu'il est facile de vérifier.

Pareillement, le premier membre de l'équation

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

qui a pour racines $+2$ et -3, pourra se mettre sous la forme

$$(x - 2)(x + 3),$$

attendu que la différence entre x et -3 est $x + 3$.

Remarque. Le théorème que nous venons de démontrer fait comprendre pourquoi une équation du second degré peut être satisfaite de deux manières; c'est que, son premier membre pouvant se décomposer en deux facteurs du premier degré, on peut annuler ce premier membre en égalant à zéro l'un ou l'autre des deux facteurs.

Si, par exemple, on a l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, et qu'on la mette sous la forme

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

on voit qu'elle peut être satisfaite, soit en posant $x-2=0$, d'où $x=2$; soit en posant $x-3=0$, d'où $x=3$.

145. Discutons maintenant les valeurs tirées de l'équation $x^2+px+q=0$, savoir

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{et} \quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

I. Faisons d'abord l'hypothèse $q>0$.

En même temps, il peut arriver que la quantité placée sous le radical soit positive, nulle ou négative.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles; et comme $\frac{p^2}{4}-q$ est alors moindre que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est moindre que $\frac{p}{2}$; c'est-à-dire que le radical est alors moindre, en valeur absolue, que le terme $-\frac{p}{2}$; c'est donc ce terme qui donne son signe aux deux racines; ainsi elles sont de même signe; toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif. (On ne peut supposer $p=0$, puisque $\frac{p^2}{4}-q$ est positif.)

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, le radical disparaît; les deux racines se réduisent à $-\frac{p}{2}$; elles sont donc égales; négatives si p est positif; nulles, si p est nul; positives, si p est négatif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, le radical porte sur une quantité négative; les deux racines sont donc imaginaires. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

II. Faisons, en second lieu, l'hypothèse $q=0$.

Dans ce cas,

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0,$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

Ainsi, l'une des racines est nulle, l'autre est de signe contraire à p; elle serait nulle aussi si l'on avait, en même temps, $p=0$.

III. Faisons, enfin, l'hypothèse $q<0$.

Dans ce cas, $-q$ est positif; la quantité placée sous le radical est donc positive; les deux racines sont réelles. Mais comme $\frac{p^2}{4}-q$ est alors plus grand que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est plus grande que $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que le radical est alors plus grand, en valeur absolue, que le terme $\frac{p}{2}$; c'est donc le radical qui donne son signe à chaque racine; l'une d'elles est donc positive et l'autre négative, quel que soit le signe de p. La plus grande, en valeur absolue, est celle où le radical est de même signe que $-\frac{p}{2}$, c'est-à-dire celle qui est de signe contraire à p. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

146. Cette discussion peut être présentée d'une autre manière, fondée sur les théorèmes du nº **143**, et plus facile à retenir.

I. Soit $q>0$. Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles. De plus, elles sont de même signe, puisque leur produit q est positif. Elles sont positives si leur somme $-p$ est positive, c'est-à-dire si p est négatif; elles sont négatives si leur somme $-p$ est négative, c'est-à-dire si p est positif. On ne peut, dans ce cas, supposer $p=0$.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, les deux racines sont égales; chacune vaut la moitié de leur somme, c'est-à-dire $-\frac{p}{2}$; elles sont positives, nulles ou négatives, selon que p est négatif, nul ou positif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, les deux racines sont imaginaires. Elles sont égales et de signe contraire si leur somme $-p$ est nulle, c'est-à-dire si $p=0$.

II. Soit $q=0$. Le produit des deux racines étant nul, il faut que l'une d'elles le soit. L'autre est alors égale à leur somme $-p$, et est positive, nulle ou négative, suivant que p est négatif, nul ou positif.

III. Soit $q<0$. Les deux racines sont réelles. Elles sont de signe contraire puisque leur produit q est négatif. La plus grande en valeur absolue est de même signe que leur somme $-p$, c'est-à-dire positive si p est négatif, et négative si p est positif. Si p était nul, les deux racines étant de signe contraire devraient être égales en valeur absolue.

147. On peut, à l'aide de ces remarques, reconnaître la nature des racines d'une équation du second degré avant de l'avoir résolue.

Soit par exemple, l'équation

$$x^2-7x+12=0.$$

Ici $\frac{p^2}{4}-q$ est égal à $\frac{49}{4}-12$ ou à $\frac{49}{4}-\frac{48}{4}$, quantité

positive. Les deux racines sont donc réelles. Elles sont de même signe, puisque leur produit est $+12$; elles sont positives, puisque leur somme est $+7$.

Soit l'équation $x^2+7x+12=0$.

Les deux racines sont encore réelles et de même signe; mais elles sont négatives, puisque leur somme est -7.

Soit l'équation $x^2+7x-12=0$.

Les deux racines sont réelles; elles sont de signe contraire, puisque leur produit est -12. La plus grande est négative, puisque leur somme est -7.

148. Remarque I. Lorsque les racines sont égales, le premier membre est un carré parfait. Cela résulte du théorème du n° **144**, puisque ce premier membre revient alors à $(x-x')(x-x')$ ou à $(x-x')^2$. Mais il est bon de le voir directement. On a alors $\frac{p^2}{4}-q=0$ ou $q=\frac{p^2}{4}$. Si, dans l'équation proposée, on remplace q par cette valeur, on obtient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Remarque II. Lorsque les racines sont imaginaires, le premier membre est la somme de deux quantités positives, et ne saurait par conséquent devenir nul pour aucune valeur réelle de x, ce qui rend l'impossibilité manifeste. On a, en effet, dans ce cas, $\frac{p^2}{4}-q<0$ ou $q>\frac{p^2}{4}$. On peut donc poser $q=\frac{p^2}{4}+\alpha^2$, en désignant par α^2 une quantité essentiellement positive. Mettant pour q cette valeur dans l'équation, elle devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+\alpha^2=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\alpha^2=0.$$

Sous cette forme, on voit bien qu'aucune valeur réelle mise à la place de x ne saurait satisfaire à l'équation; car que $x+\frac{p}{2}$ soit positif ou négatif, son carré est toujours positif.

149. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on pouvait mettre l'équation sous la forme $x^2+px+q=0$, c'est-à-dire que dans l'équation plus générale $ax^2+bx+c=0$, a n'était pas nul, et qu'alors on pouvait diviser par a. Il s'agit de voir maintenant ce qui arriverait si des hypothèses particulières faites sur les données du problème venaient à annuler a.

Pour cela, changeons d'abord x en $\frac{1}{y}$; aux plus grandes valeurs de y correspondront les plus petites valeurs de x, *et vice versa*. On obtient ainsi

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$a+by+cy^2=0.$$

Faisons maintenant l'hypothèse $a=0$; l'équation se réduit à

$$by+cy^2=0 \quad \text{ou} \quad y(b+cy)=0.$$

On satisfait à cette équation, soit en posant $y=0$, soit en posant

$$b+cy=0, \quad \text{d'où} \quad y=-\frac{b}{c};$$

mais puisque $x=\frac{1}{y}$, on déduit de ces valeurs de y

$$x=\frac{1}{0} \quad \text{et} \quad x=-\frac{c}{b}.$$

La première de ces valeurs est une valeur *infinie* (**102**), que l'on n'aurait pas soupçonnée si l'on se fût contenté de faire $a=0$ dans l'équation proposée, puisqu'elle se réduit alors à

$$bx+c=0,$$

et ne donne pour x que la seconde valeur $-\frac{c}{b}$.

Si l'on fait en même temps $a=0$ et $b=0$, l'équation en y ci-dessus se réduit à

$$cy^2=0,$$

et donne pour y deux valeurs nulles. Il en résulte pour x deux valeurs infinies, et c'est ce qu'on pouvait prévoir, puisque la seconde valeur $-\frac{c}{b}$ se réduit alors à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini.

150. On aurait pu faire les mêmes hypothèses dans les valeurs générales tirées de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Ces valeurs sont (**128**),

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si l'on suppose $a=0$, on trouve

$$x'=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0} \quad \text{et} \quad x''=\frac{-2b}{0}=\text{l'infini}.$$

On trouve bien une valeur infinie, mais l'autre se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour faire voir que cette indétermination n'est qu'apparente, on multiplie les deux termes de x' par

$$-b-\sqrt{b^2-4ac},$$

ce qui donne

$$x'=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=-\frac{4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}.$$

Sous cette forme, on voit que, si l'on fait $a=0$, la valeur de x' se réduit à $\frac{0}{0}$; mais que si, avant de faire cette hypothèse, on supprime le facteur $2a$ commun aux deux termes (**103**, Remarque), on obtient

$$-\frac{2c}{b+b} \quad \text{ou} \quad -\frac{c}{b},$$

qui est bien la valeur finie et déterminée qu'on devait obtenir.

Si l'on fait à la fois $a=0$ et $b=0$, les deux valeurs de x se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Quant à la première, on vient de voir que l'indétermination n'est qu'apparente, et que la véritable valeur est $-\frac{c}{b}$, qui, pour $b=0$, se réduit à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini. Pour la seconde, multiplions ses deux termes par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, ce qui donne

$$x''=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})}=-\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})},$$

ou, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x''=-\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si maintenant on fait $a=0$ et $b=0$, cette valeur se réduit à $-\frac{2c}{0}$, c'est-à-dire à l'infini.

Ainsi, pour $a=0$ et $b=0$, les deux racines sont infinies, comme cela devait être, d'après ce qui a été dit au numéro précédent.

Enfin, si l'on faisait à la fois $a=0$, $b=0$ et $c=0$, les deux valeurs de x se présenteraient encore toutes les deux sous la forme $\frac{0}{0}$; mais dans ce cas l'indétermination serait réelle. Car il est évident que l'équation pourrait alors être satisfaite par une valeur quelconque de x.

151. Nous allons appliquer cette discussion à quelques exemples particuliers.

PROBLÈME I. *Trouver le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est* a, *sachant que, si l'on ajoute* b *à chacun des deux termes, la fraction augmente de* m.

Soit x le dénominateur demandé. On devra avoir

$$\frac{a+b}{x+b}-\frac{a}{x}=m,$$

ou $$mx^2-(1-m)bx+ab=0,$$

d'où $$x=\frac{(1-m)b\pm\sqrt{(1-m)^2b^2-4mab}}{2m}.$$

1° Ces deux valeurs seront réelles et positives si l'on a :

$$(1-m)^2b^2>4mab \quad \text{et} \quad 1-m>0.$$

Soient, par exemple, $a=3$, $b=2$, $m=\frac{1}{12}$, on trouvera

$$x=\frac{\frac{11}{12}.2\pm\sqrt{\left(\frac{11}{12}\right)^2.4-4.\frac{1}{12}.3.2}}{2.\frac{1}{12}}=11\pm7,$$

d'où $x'=18$ et $x''=4$.

Si l'on adopte la première valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{18}$, et se change en $\frac{5}{20}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{20}-\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ vaut effectivement $\frac{1}{12}$.

Si l'on adopte la seconde valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{4}$, et se change en $\frac{5}{6}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$.

2° Les deux valeurs deviendraient égales si l'on avait

$$(1-m)^2b^2=4mab.$$

Soient, par exemple, $a=1$, $b=8$, $m=\frac{1}{2}$; on trouvera pour ces deux valeurs $x=4$. La fraction demandée est alors $\frac{1}{4}$, et se change en $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ quand on ajoute 8 à chacun de ses termes. Or, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

3° Les deux valeurs seraient imaginaires si l'on avait :

$$(1-m)^2b^2<4mab.$$

C'est ce qui arriverait si l'on avait, par exemple, $a=1$, $m=\frac{1}{3}$, $b=2$.

Dans ce cas le problème serait impossible.

4° On trouverait une racine positive et une négative, si l'on supposait b négatif; c'est-à-dire si l'on supposait qu'au lieu d'ajouter un même nombre aux deux termes de la fraction on en retranchât un même nombre.

Soient, par exemple, $a=11$, $b=-2$, $m=\frac{5}{12}$; on trouvera

$$x=\frac{-\frac{7}{12}.2\pm\sqrt{\frac{49}{144}.4+4.\frac{5}{12}.11.2}}{2.\frac{5}{12}}=\frac{-7\pm37}{5},$$

d'où $x'=6$ et $x''=-8\frac{4}{5}$.

La seconde solution est purement algébrique; la première donne pour la fraction demandée $\frac{11}{6}$. Cette fraction, quand on retranche 2 à chacun de ses termes, devient $\frac{9}{4}$. Or, $\frac{9}{4}-\frac{11}{6}$ égale en effet $\frac{5}{12}$.

5° On trouverait une solution infinie si l'on faisait $m=0$, c'est-à-dire si l'on demandait que la seconde fraction fût équivalente à la première.

Les deux valeurs de x sont alors

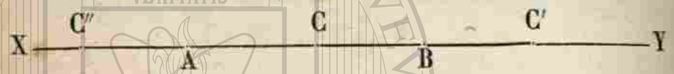
$$x'=\frac{b}{0} \quad \text{et} \quad x''=a.$$

La seconde solution est évidente : car si le dénominateur est égal au numérateur, auquel cas la fraction équivaut à l'unité, en ajoutant un même nombre aux deux termes on ne change pas sa valeur.

La première solution s'explique avec la même facilité; car si le dénominateur x est infini, il en est de même du dénominateur $x+b$; les deux fractions $\frac{a+b}{x+b}$ et $\frac{a}{x}$ sont donc nulles toutes les deux, et, par conséquent, leur différence est également nulle.

152. Problème II. *Trouver sur la droite* XY, *qui joint deux points lumineux* A *et* B, *le point qui reçoit de chacun d'eux la même quantité de lumière.*

(On suppose connu ce principe de physique : que la quantité de lumière reçue est en raison inverse du carré de la distance au point lumineux.)



Prenons pour inconnue la distance AC du point cherché à l'un des deux points lumineux, et désignons-la par x; soit d la distance AB des deux lumières. Représentons par α^2 la quantité de lumière que recevrait un point situé à 1 mètre du point A, et par β^2 celle qu'il recevrait à 1 mètre du point B.

Si l désigne pour un moment la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point A, on devra avoir, d'après le principe cité :

$$l:\alpha^2::1:x^2 \quad \text{d'où} \quad l=\frac{\alpha^2}{x^2}.$$

En raisonnant de même, on trouvera que la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point B est

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2}.$$

Ces deux quantités de lumière reçue par le point cherché C devant être égales d'après l'énoncé, on doit avoir l'équation :

$$\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(d-x)^2} \qquad [1].$$

On pourrait la traiter comme à l'ordinaire, et nous conseillons cet exercice aux élèves ; mais il est plus simple de remarquer que les deux membres étant des carrés parfaits, on peut en extraire la racine, ce qui donne les deux équations du premier degré

$$\frac{\alpha}{x}=\pm\frac{\beta}{d-x} \qquad [2].$$

Si l'on prend le signe $+$ devant le second membre, on trouve, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$\alpha d-\alpha x=\beta x, \quad \text{d'où} \quad x'=d\,.\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Si l'on prend le signe $-$ devant le second membre, on trouve, de la même manière,

$$\alpha d-\alpha x=-\beta x, \quad \text{d'où} \quad x''=d\,.\frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

valeurs réelles qu'il s'agit de discuter.

1° Supposons d'abord la première lumière plus intense que la seconde, ou $\alpha>\beta$. Dans ce cas les deux valeurs x' et x'' sont toutes deux positives.

Considérons d'abord la valeur x'. Comme $\alpha+\beta$ est plus grand que α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est moindre que 1 ; la valeur x' est donc moindre que d, et répond à un point C compris entre les points lumineux A et B. De plus, comme $\alpha+\beta$ est moindre que $\alpha+\alpha$ ou 2α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est plus grande que $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\frac{1}{2}$; ainsi x' est plus grand que la moitié de d. Le point C est donc plus près du point B que du point A.

Considérons, en second lieu, la valeur x''; comme $\alpha - \beta$ est moindre que α, l'expression $\dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}$ est plus grande que 1; ainsi x'' est plus grand que d, et répond à un point C′, situé au delà du point lumineux B qui a la moindre intensité. On conçoit, en effet, qu'on puisse trouver de ce côté un point pour lequel la différence d'intensité des deux lumières soit compensée par la différence des distances au point éclairé.

2° Supposons que l'intensité de la seconde lumière aille en augmentant et que par conséquent β augmente en se rapprochant ainsi de α, la valeur x' ira en diminuant et la valeur x'' ira en augmentant. Ainsi le point C se rapprochera du milieu de AB, et le point C′ s'éloignera de plus en plus de la lumière B.

Si l'on suppose maintenant $\alpha = \beta$, ou les deux lumières d'égale intensité, on aura $x' = \dfrac{d}{2}$ et $x'' = \dfrac{\alpha d}{0}$, c'est-à-dire que le point C se trouvera alors au milieu de AB, et que le point C′ se sera éloigné à une distance infinie à droite du point B. On conçoit, en effet, que pour compenser la différence d'intensité des deux lumières, il faut éloigner le point C′ d'autant plus que cette différence est moindre; et que si enfin elle devient nulle, ce n'est qu'à une distance infinie que la différence due aux distances devient insensible.

3° Supposons que β, continuant à croître, devienne plus grand que α, ou que la lumière B soit plus intense que la lumière A.

La valeur x' reste positive et moindre que d, c'est-à-dire qu'elle répond toujours à un point compris entre A et B. Mais comme β est plus grand que α, il s'ensuit

que $\alpha + \beta$ est plus grand que 2α, et que, par conséquent, $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$ est moindre que $\dfrac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\dfrac{1}{2}$; ainsi x' est moindre que $\dfrac{d}{2}$, c'est-à-dire que le point C est alors plus près de la lumière A que de la lumière B.

Quant à la valeur x'', elle devient négative; et, puisqu'on a regardé comme positives les distances comptées à droite du point A, on devra, pour la généralité des formules (90), regarder comme négatives celles qui sont comptées à gauche de ce point. La valeur négative trouvée pour x'' correspondra donc à un point C″, situé à gauche du point lumineux A qui a la moindre intensité, et à une distance de ce point d'autant plus grande que la différence absolue $\beta - \alpha$ sera plus petite.

4° Si l'on faisait maintenant décroître l'intensité de la lumière B jusqu'à ce qu'on en fût revenu à l'hypothèse $\beta = \alpha$, on trouverait pour x'' des valeurs négatives de plus en plus grandes, et enfin une valeur infinie qu'on devrait regarder comme négative, puisqu'elle serait la limite vers laquelle tend une quantité négative de plus en plus grande en valeur absolue. Ainsi, pour $\alpha = \beta$ la solution infinie répond à un point que l'on peut supposer placé indifféremment à droite ou à gauche des deux lumières, ce qui doit être.

Il ne faudrait pas en conclure que l'équation du second degré a, dans ce cas, trois racines; elle n'en a que deux; mais la valeur infinie peut être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'on la considère comme limite de quantités croissantes positives, ou de quantités croissantes en valeur absolue, mais négatives.

5° Si l'on fait en même temps les deux hypothèses $\alpha = \beta$

et $d=0$, c'est-à-dire si l'on suppose que les deux lumières soient de même intensité, et placées en outre au même point A, on trouve

$$x'=0 \quad \text{et} \quad x''=\frac{0}{0}.$$

La première valeur donne le point A, cela devrait être, puisque le point C, qui est au milieu de AB pour $\alpha=\beta$, se confond alors avec A et B.

La seconde est indéterminée; et, en effet, en quelque point de la droite XY qu'on place alors le point éclairé, il recevra des deux points lumineux la même quantité de lumière.

6° Si, sans faire aucune hypothèse sur d, on fait les deux suppositions $\alpha=0$ et $\beta=0$, on trouve pour x' et x'' deux valeurs indéterminées. Et, en effet, si les deux lumières sont éteintes, un point quelconque situé soit entre A et B, soit en deçà ou au delà, reçoit de chacun de ces points une quantité de lumière nulle et par conséquent une quantité égale.

155. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que la somme de leurs racines carrées soit égale à un nombre* b.

II. *Un voyageur a* n *kilomètres à faire, et marche d'une manière régulière. S'il faisait chaque jour* a *kilomètres de plus, il emploierait à son voyage* b *jours de moins. Quelle serait alors la durée de son voyage?*

III. *Partager* a *en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit égale à* b.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

PREMIERS ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

1. — La Géométrie est la science qui traite de la forme des corps et de la mesure de l'étendue.

Pour étudier la forme des corps, la Géométrie fait abstraction de toutes leurs autres propriétés physiques, telles que le poids, la couleur, le degré de dureté ou de mollesse, etc.

Parmi les formes si diverses que les corps peuvent affecter, la Géométrie élémentaire n'étudie que celles qui sont susceptibles d'une définition simple, et que, pour cette raison, on nomme *corps géométriques*.

2. — Chaque *corps* occupe une certaine portion de l'espace sans bornes qui nous environne.

Il est séparé du reste de l'espace par une limite que l'on nomme sa *surface*. Pour étudier une surface, on fait souvent abstraction du corps auquel elle sert de limite ; on peut même, une fois l'idée de surface acquise, concevoir des surfaces qui n'appartiennent à aucun corps.

Lorsque deux surfaces se rencontrent, leur limite commune est ce qu'on appelle une *ligne*. On peut, pour étudier une ligne, faire abstraction de la surface qu'elle limite ; on peut même concevoir des lignes qui n'appartiennent à aucune surface.

Lorsque deux lignes se rencontrent, leur limite commune est ce qu'on nomme un *point*. On peut considérer un point indépendamment de la ligne qu'il termine, et concevoir même des points qui n'appartiennent à aucune ligne.

3. — L'étendue d'un corps se nomme son *volume*. L'étendue d'une surface se nomme son *aire*. L'étendue d'une ligne se nomme sa *longueur*. Un point n'a pas d'étendue.

4. — La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite* : un fil tendu, quand on fait abstraction de son épaisseur, en donne une image assez précise. Sa définition est la suivante : *la ligne droite est la ligne la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre.*

Par abréviation on dit souvent *une droite* au lieu d'*une ligne droite.*

Quoique la définition de la ligne droite semble lui assigner des bornes, rien n'empêche de prolonger indéfiniment cette ligne par la pensée au delà des deux points qui lui servent de limite; et c'est toujours d'une droite *indéfinie* que l'on parle quand on n'exprime pas formellement le contraire.

5. — On appelle *ligne brisée* une ligne composée de différentes portions de ligne droite; ces portions de ligne droite sont les *côtés* de la ligne brisée.

Une ligne brisée dont les côtés sont infiniment petits et en nombre infiniment grand, ou, en d'autres termes, une ligne dont aucune partie appréciable n'est rigoureusement droite, est ce qu'on nomme une *ligne courbe*, ou, par abréviation, une *courbe*.

La Géométrie élémentaire n'étudie que la plus simple

des lignes courbes, c'est la *circonférence de cercle*, dont il sera question plus loin.

6. — La plus simple des surfaces est la *surface plane* ou le *plan* : la surface d'une eau tranquille et de peu d'étendue en offre un exemple. Sa définition est la suivante : *le plan est une surface sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer exactement dans tous les sens.*

Les surfaces planes que l'on a à considérer dans la pratique ont nécessairement une étendue limitée; mais rien n'empêche de les prolonger indéfiniment dans tous les sens, par la pensée; et c'est toujours d'un plan *indéfini* que l'on parle, quand le contraire n'est pas formellement exprimé.

7. — On appelle *surface brisée* une surface composée de différentes portions de plan; ces différentes portions de plan sont les *faces* de la surface brisée.

Une surface brisée dont les faces sont infiniment petites et en nombre infiniment grand, ou, en d'autres termes, une surface dont aucune portion appréciable n'est rigoureusement plane, forme ce que l'on nomme une *surface courbe*.

La Géométrie élémentaire n'étudie que les surfaces courbes les plus simples; ce sont les surfaces *cylindriques*, les surfaces *coniques*, et les surfaces *sphériques*, dont il sera question plus tard.

8. — La Géométrie se divise en deux parties principales, savoir : la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace. La première partie a pour objet les propriétés des lignes situées dans un même plan, celles des *figures planes*, ou surfaces planes limitées, et les mesures de longueurs et d'aires qui en dépendent. La seconde partie s'occupe des propriétés des surfaces, de la forme des corps géométriques, et des mesures d'aires et de volume qui s'y rapportent.

9. — On nomme AXIOME une vérité évidente par elle-même, et qui n'a pas besoin de preuve.

On nomme THÉORÈME une vérité qui, pour devenir évidente, a besoin d'être prouvée. Pour établir la preuve d'une vérité géométrique, on a souvent besoin de recourir à des points, des lignes, des surfaces, et même des corps auxiliaires; c'est ce qu'on appelle faire une *construction;* l'ensemble des *constructions* et des *raisonnements* nécessaires pour prouver un théorème, forme la *démonstration* de ce théorème.

L'énoncé d'un théorème se compose souvent d'une hypothèse et d'une conséquence que l'on se propose d'en déduire; s'il arrive que cette conséquence, prise à son tour pour hypothèse, redonne comme conséquence l'hypothèse primitive, on obtient un second théorème qui est dit *réciproque* du premier. C'est ainsi que, dans ce théorème d'arithmétique: *tout nombre terminé par un chiffre pair est divisible par* 2, l'hypothèse est que le nombre soit terminé par un chiffre pair, et la conséquence qu'il est divisible par 2. Si l'on part au contraire de ce que le nombre est divisible par 2, on en déduit comme conséquence qu'il est terminé par un chiffre pair; ce qui constitue un théorème réciproque du précédent.

Toute vérité n'a pas nécessairement sa réciproque; ainsi, l'on sait que: *tout nombre dans lequel la somme des chiffres est un multiple de* 9 *est nécessairement divisible par* 3; mais il serait faux de dire que *si un nombre est divisible par* 3, *la somme de ses chiffres est nécessairement un multiple de* 9 (car il suffit qu'elle soit un multiple de 3). On dit, dans ce cas, que *la réciproque est fausse.*

On nomme POSTULATUM OU DEMANDE une vérité moins évidente qu'un axiome, mais que pourtant on peut *demander* d'admettre sans démonstration.

On nomme LEMME un théorème préparatoire, destiné à faciliter la démonstration d'un théorème plus important.

On nomme COROLLAIRE une vérité accessoire qui ressort de la démonstration d'un théorème.

Un PROBLÈME est une question qu'il s'agit de résoudre en s'appuyant sur des théorèmes précédemment établis. La solution d'un problème exige, le plus souvent, des opérations graphiques à l'ensemble desquelles on donne le nom de *construction.*

Les théorèmes, demandes, lemmes, corollaires et problèmes, se désignent aussi sous le nom commun de *propositions.*

10. — Les lignes, les surfaces, les corps, se représentent par des figures.

Les différents points d'une même figure se distinguent les uns des autres par des lettres de l'alphabet placées à côté de ces points. On dit ainsi : le point A, le point B, etc. (fig. 1).

On désigne généralement une ligne par les lettres qui correspondent à deux de ses points : on dit ainsi, la ligne AB, pour indiquer celle qui va du point désigné par A au point désigné par B. Si plusieurs lignes passent par ces deux points, il devient nécessaire de les distinguer par une troisième lettre; on dira, par exemple, la ligne ACB, la ligne ADB; en réservant l'indication AB pour la ligne droite qui joint les points A et B.

On distingue d'une manière semblable les surfaces et les corps. Quelquefois on représente par une seule lettre une longueur, une aire, un volume; cette convention est toujours énoncée dans le texte.

Lorsqu'on a employé certaines lettres, A, B, C, etc., pour désigner certains points ou certaines étendues, si l'on veut désigner des points ou des étendues analogues, on emploie les mêmes lettres accentuées, A′, B′, C′, etc., qui se prononcent A *prime*, B *prime*, C *prime*, etc.; quelquefois on a recours aux mêmes lettres chargées de deux accents, A'', B'', C'', etc.; elles se prononcent A *seconde*, B *seconde*, C *seconde*, etc. Avec trois accents, A''', B''', C''', etc., elles se prononcent A *tierce*, B *tierce*, et ainsi de suite.

On emploie aussi des lettres minuscules conjointement avec des majuscules; on les distingue alors, dans le discours, par le mot *grand* placé devant les majuscules, et le mot *petit* devant les minuscules. Les expressions ABCD, *abcd*, s'énonceraient ainsi : *grand* ABCD, petit *abcd*.

11. — On se sert en Géométrie de quelques signes abréviatifs empruntés à l'algèbre.

Le signe $=$ se prononce *égale*, et indique l'égalité des quantités qu'il sépare. Ainsi $A=B$ signifie que A égale B.

Le signe $+$ se prononce *plus*, et indique l'addition. Ainsi $A+B$ signifie A augmenté de B.

Le signe $-$ se prononce *moins*, et indique la soustraction. Ainsi $A-B$ signifie A diminué de B.

Le signe $\times$ se prononce *multiplié par*, et indique la multiplication. Ainsi $A\times B$ signifie A multiplié par B.

Le signe : se prononce *divisé par*, et indique la division. Ainsi $A:B$ signifie A divisé par B. On se sert dans le même sens de la notation

$$\frac{A}{B}$$

qui rappelle celle des fractions.

Les parenthèses ( ) représentent le *résultat* des opérations qui ne sont qu'indiquées sur les quantités qu'elles embrassent. Ainsi $(A+B-C)\times D$ signifie qu'à A il faut ajouter B, retrancher C de cette somme, et que c'est le *résultat* de ces opérations qui doit être multiplié par D.

Les expressions A^2, $\overline{AB}^2$, etc., désignent la seconde puissance, soit de la quantité représentée par A, soit de la ligne représentée par AB, etc.

Les expressions A^3, $\overline{AB}^3$, etc., indiquent de même la troisième puissance de A ou de AB.

Le signe $\sqrt{}$ indique la racine carrée de la quantité placée au-dessous. Ainsi $\sqrt{A\times B}$ exprime la racine carrée du produit de A par B.

Le signe $\sqrt[3]{}$ indique la racine cubique de la quantité placée au-dessous. Ainsi $\sqrt[3]{A\times B\times C}$ indique la racine cubique du produit des trois facteurs A, B et C.

Le signe $>$ se prononce *plus grand que*, et indique que la quantité placée à sa gauche est plus grande que celle qui est placée à sa droite. Ainsi $A>B$ signifie que A est plus grand que B.

Le signe $<$ se prononce *plus petit que*, et indique que la quantité placée à sa gauche est plus petite que celle qui est placée à sa droite. Ainsi $A<B$ signifie que A est plus petit que B.

L'étude de la Géométrie ne suppose d'ailleurs d'autres connaissances préliminaires que celles de l'arithmétique, comprenant les proportions et l'extraction des racines carrées et cubiques.

Nota. Les numéros placés entre parenthèses ( ) indiquent les renvois à des propositions précédentes.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

PREMIÈRE SECTION.

DES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

De la ligne droite, des lignes brisées, et du cercle.

§ I. — De la ligne droite.

12. — Axiome. *D'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite.* En d'autres termes, parmi les lignes que l'on peut mener d'un point à un autre, il n'y en a qu'une qui soit la plus courte.

13. — Théorème. *Deux droites qui ont deux points communs,* A *et* B (fig. 2), *coïncident dans toute leur étendue.*

Les deux droites coïncident de A jusqu'en B, en vertu de l'axiome précédent. Je dis que leurs prolongements coïncident aussi. Car si l'une d'elles avait un point C qui ne fût pas situé sur l'autre, en faisant tourner celle-ci autour du point A jusqu'à ce qu'elle vînt passer par le point C, comme tous ses points, à l'exception de A, auraient changé de place dans ce mouvement, les deux droites cesseraient de coïncider en B. On pourrait donc, de A en C, mener deux droites différentes, ce qui est impossible d'après l'axiome précédent. Donc, tout point pris sur l'une des droites appartient en même temps à l'autre; et par conséquent, elles coïncident dans toute leur étendue.

COROLLAIRE. *Deux points suffisent pour déterminer une ligne droite.*

14. — APPLICATIONS. Tout le monde sait comment on se sert de la *règle* pour mener une ligne droite par deux points donnés, sur le papier, sur un tableau, sur un mur, etc.

Les jardiniers et les terrassiers tracent une ligne droite sur le terrain en suivant, à l'aide d'un piquet, la direction d'une corde tendue, fixée par ses deux extrémités aux deux points qui servent à déterminer cette droite.

Quand il s'agit de tracer sur le terrain une droite d'une étendue considérable, on se contente de marquer un certain nombre de points sur sa direction, à l'aide de *jalons* ou piquets plantés de distance en distance. C'est ce que l'on appelle *jalonner* une direction. Chaque jalon est ordinairement surmonté d'une petite plaque peinte de deux couleurs, et qui sert à le faire distinguer dans l'éloignement. Si A et B (fig. 3) sont les jalons extrêmes, pour déterminer un jalon intermédiaire, on se place en dehors de la ligne AB, de façon que le jalon B soit caché par le jalon A, et l'on fait planter un jalon entre ces deux points, de manière à ce qu'il soit également caché par le jalon A.

15. — On a souvent besoin de prolonger une droite déjà tracée. Si l'on opère avec la règle, il suffit de la placer de manière qu'une partie de l'un de ses bords coïncide avec la droite tracée; l'autre partie du même bord détermine le prolongement de cette droite. Avec le cordeau, l'opération est analogue. S'il s'agit de prolonger une ligne jalonnée, dont A et C (fig. 3) sont les deux derniers jalons, on se place en deçà du jalon A, de façon qu'il cache le jalon C; on fait alors planter un jalon B au delà du point C, de manière que ce jalon B soit également caché par le jalon A. Le point B est sur le prolongement de AC.

16. — La *distance* de deux points est la longueur de la droite qui les joint. Les longueurs sont susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres grandeurs.

Pour faire la somme de deux longueurs, tirez une droite indéfinie XY (fig. 4), et marquez-y un point A; sur cette droite, à partir du point A, portez, à l'aide d'un *compas*, une distance AB égale à l'une des longueurs proposées, puis, à partir du point B, et dans le même sens, une distance BC égale à la seconde longueur proposée; la distance AC sera la somme demandée.

Pour faire la différence de deux longueurs données, portez sur XY, à partir du point A, une distance AC égale à la plus grande des longueurs proposées, puis, à partir du point C, mais en sens contraire, une distance CB égale à la plus petite; la distance AB sera la différence demandée.

Pour multiplier une longueur donnée par un nombre entier quelconque, par 5 par exemple, il suffirait de porter sur XY, à partir du point A, et toujours dans le même sens, 5 distances égales à la longueur donnée; la distance entre l'extrémité de la 5^{e} ouverture de compas et le point de départ A serait le produit demandé.

Nous verrons plus tard comment on divise une longueur donnée en parties égales.

17. — *Mesurer* la longueur d'une droite, c'est la comparer à une autre longueur prise pour unité. Il suffit, pour opérer cette comparaison, de porter l'unité sur la droite à mesurer autant de fois que cela est possible. S'il y a un reste, on l'évalue à l'aide d'une unité plus petite ayant avec l'unité principale un rapport simple. Si cette seconde opération donne encore un reste, on l'évalue à l'aide d'une unité encore plus petite; et ainsi de suite, jusqu'à ce que le reste, s'il y en a un, soit inappréciable, ce qui finit toujours par arriver dans la pratique.

On emploie, au contraire, des multiples de l'unité principale pour mesurer les distances considérables.

En France, l'unité linéaire principale est le *mètre*, ou la dix-millionnième partie du quart du méridien terrestre. Il se subdivise en 10 *décimètres* ou dixièmes de mètre; chaque décimètre en 10 *centimètres* ou centièmes de mètre; chaque centimètre en 10 *millimètres* ou millièmes de mètre.

Une longueur de 10 mètres forme un *décamètre*; 10 décamètres ou 100 mètres forment un *hectomètre*; 10 hectomètres ou 1000 mètres, forment un *kilomètre*; 10 kilomètres ou 10000 mètres forment un *myriamètre*. Ces deux dernières unités servent à évaluer les distances géographiques. Dans l'arpentage on fait usage de la *chaîne d'arpenteur* (fig. 5), qui se compose de 50 chaînons rectilignes ayant chacun 2 décimètres, et a par conséquent un décamètre de long. Dans les travaux de construction on emploie une règle de 2 mètres de long, divisée en décimètres et centimètres, à laquelle on donne le nom de *toise métrique*. Dans le dessin linéaire il est commode d'adopter le *double décimètre*, divisé en centimètres et millimètres, et taillé en biseau, de manière que son tranchant puisse venir affleurer la ligne à mesurer.

18. — Les longueurs évaluées en unités et parties d'unité sont des nombres concrets, sur lesquels on peut effectuer toutes les opérations de l'arithmétique. Pour obtenir graphiquement le résultat, on n'a plus qu'à porter sur une ligne indéfinie le nombre d'unités et de parties d'unité que ce résultat exprime.

Si, par exemple, on veut prendre la 5ᵉ partie d'une longueur donnée, on mesurera d'abord cette longueur; supposons qu'on la trouve égale à $8^{m},375$; on prendra le 5ᵉ de ce nombre, qui est $1^{m},675$; et l'on portera sur une droite indéfinie 1 mètre, puis 6 décimètres, puis 7 centimètres, et enfin, 5 millimètres.

Pour obtenir le rapport de deux longueurs, on les mesure et l'on cherche le rapport des deux nombres obtenus. Si, par exemple, ces deux longueurs sont exprimées par $1^{m},855$ et $2^{m},597$, leur rapport sera celui de 1855 à 2597, ou de 5 à 7 (en divisant les deux nombres par leur plus grand commun diviseur 371).

§ II. — Des lignes brisées.

19. — Une ligne brisée plane est dite *convexe*, lorsqu'elle ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points. Telle est la ligne brisée ABCD (fig. 6). La ligne brisée ABCDP, au contraire, n'est point convexe, parce qu'une même droite pourrait rencontrer les trois côtés AB, CD et DP.

THÉORÈME. *Si d'un point* A *à un autre* D (fig. 6), *on mène, d'un même côté de la droite* AD, *deux lignes brisées convexes* ABCD, AMNPD, *dont l'une enveloppe l'autre, la ligne brisée enveloppante sera plus longue que la ligne brisée enveloppée.*

Pour le démontrer, prolongeons AB jusqu'en I, et BC jusqu'en O; par la définition même de la ligne droite (4), nous aurons :

$$AB+BI<AM+MI$$
$$BC+CO<BI+IN+NO$$
$$CD<CO+OP+PD.$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, ce qui est permis, puisqu'elles sont toutes dans le même sens, retranchant les termes BI et CO qui entrent chacun dans les deux membres, et observant que $MI+IN$ équivaut à MN, et $NO+OP$ à NP, il viendra :

$$AB+BC+CD<AM+MN+NP+PD;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Corollaire. La démonstration étant indépendante du nombre et de la grandeur des côtés, la proposition peut être étendue à des lignes brisées d'un nombre infini de côtés infiniment petits, c'est-à-dire à des lignes courbes, si elles sont convexes, c'est-à-dire si elles ne peuvent être rencontrées par une ligne droite en plus de deux points.

Dans ce cas, *la courbe enveloppante est plus grande que la courbe enveloppée.*

§ III. — Du cercle.

20. — *On appelle* circonférence de cercle, *une courbe plane dont tous les points sont également distants d'un point intérieur nommé* centre.

Le mot *cercle* lui-même ne s'applique rigoureusement qu'à la portion de plan limitée par la circonférence; néanmoins, on donne souvent, pour abréger, le nom de cercle à

la circonférence; le sens du discours indique toujours suffisamment si c'est de la courbe, ou de l'espace qu'elle limite que l'on veut parler.

La figure 7 représente un cercle. Le point O est son centre.

Les droites telles que OA, OB, OC, etc., menées du centre aux différents points de la circonférence, sont ce qu'on appelle des *rayons*. D'après la définition même du cercle, *tous les rayons sont égaux.*

Une ligne droite telle que AB, qui passe par le centre et se termine de part et d'autre à la circonférence, se nomme un *diamètre* du cercle. Chaque diamètre est le double du rayon, et *tous les diamètres sont égaux.*

On désigne un cercle par son rayon, par son diamètre ou par son centre; ainsi l'on dira le cercle OA, le cercle AB, ou le cercle O.

On sait comment on trace un cercle à l'aide du compas. Sur le terrain, on substitue au compas un cordeau tendu, fixé par un de ses bouts au centre, et armé à l'autre bout d'un piquet qui sert à tracer la courbe.

21. — Théorème. *Tout diamètre* AB (fig. 7) *divise la circonférence en deux parties égales.*

En effet : si l'on conçoit que la figure soit pliée le long de AB, et que la partie A*m*B vienne s'appliquer sur ACB, ces deux parties devront coïncider dans toute leur étendue; car, dans le cas contraire, il y aurait des points inégalement distants du centre.

22. — Toute portion de circonférence, telle que AMC, se nomme un *arc* de cercle; la droite AC, qui joint les deux extrémités de l'arc, se nomme sa *corde*. On dit que la corde *sous-tend* l'arc, et que l'arc est sous-tendu par la corde.

Toute corde, telle que AC, *qui ne passe pas par le cen-*

tre, divise la circonférence en deux parties inégales; car l'une d'elles, A*m*BC, se compose d'une demi-circonférence plus l'arc BC; et l'autre, AMC, est égale à une demi-circonférence AMCB moins le même arc BC.

Cette remarque démontre la *réciproque* de la proposition du n° 21; c'est-à-dire *que toute corde qui divise la circonférence en deux parties égales est un diamètre.*

La même corde AC sous-tend à la fois deux arcs, AMC et A*m*BC. Quand on parle de l'arc sous-tendu par une corde, c'est toujours du plus petit de ces deux arcs qu'il est question, à moins que l'on n'exprime positivement le contraire.

23. — Théorème. *Toute corde* AC (fig. 7) *est plus petite que le diamètre* AB.

Car si l'on joint OC, on aura (4)

$$AC < AO + OC.$$

Mais on peut remplacer le rayon OC par son égal OB; on aura donc :

$$AC < AO + OB \quad \text{ou} \quad AC < AB.$$

24. — Théorème. *Dans un même cercle, deux arcs égaux* AB, A′B′ (fig. 8), *sont sous-tendus par des cordes égales.*

En effet : soit C le milieu de l'arc AA′; menons le diamètre CD, et concevons que la figure soit pliée le long de CD, les deux demi-circonférences coïncideront; les arcs CA′ et CA étant égaux, le point A′ tombera en A; et, les deux arcs A′B′ et AB étant égaux, le point B′ tombera en B. Les droites A′B′ et AB ayant alors les mêmes extrémités, coïncideront; donc ces droites sont égales.

25. — Théorème. *Dans un même cercle, à un plus grand arc correspond une plus grande corde.*

Soit l'arc AB (fig. 9) plus grand que l'arc A′C′; je dis que la corde AB est plus grande que la corde A′C′. Pour le démontrer, soit l'arc AC égal à l'arc A′C′; sa corde AC sera égale à la corde A′C′, en vertu du théorème précédent. Joignons OB et OC, qui coupera AB en un point I. On aura (4)

$$AI + IC > AC$$
$$\text{et} \quad OI + IB > OB.$$

Ajoutant ces deux inégalités membre à membre, et remarquant que AI + IB équivaut à AB, et OI + IC à OC, il viendra

$$AB + OC > AC + OB;$$

mais on peut retrancher d'une part OC, et de l'autre son égal OB; il restera donc

$$AB > AC,$$

et par conséquent

$$AB > A'C'.$$

Remarque. Dans cette proposition, on suppose essentiellement qu'il s'agit du plus petit des deux arcs sous-tendus par chaque corde. S'il s'agissait du plus grand, il est facile de voir qu'au plus grand arc correspondrait au contraire la plus petite corde.

26. — Les deux propositions précédentes démontrent leurs *réciproques.* Ainsi :

Deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux; car si les arcs étaient inégaux, les cordes seraient inégales (25).

A une plus grande corde correspond un plus grand arc; car si les arcs étaient égaux, les cordes seraient égales (24); et si à la corde qu'on suppose la plus grande correspondait le plus petit arc, la proposition du n° 25 montrerait que cette soi-disant plus grande corde est réellement la plus petite, ce qui est contraire à la supposition.

27. — THÉORÈME. *Deux cercles de même rayon sont égaux.*

Si l'on transporte, en effet, les deux cercles l'un sur l'autre, de manière que leurs centres coïncident, les deux circonférences coïncideront, sans quoi il y aurait des points inégalement distants du centre.

Remarques. I. Quand deux circonférences de même rayon sont placées de manière à avoir même centre, elles coïncident dans toutes leurs parties, de quelque manière qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de ce centre. Le cercle est la seule courbe qui jouisse de cette propriété.

II. Les propositions des nos 24, 25 et 26 s'appliquent à des arcs pris sur des circonférences de même rayon.

28. — On vient de voir que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, l'égalité des arcs entraîne celle de leurs cordes, et *vice versâ.* Cette considération permet d'ajouter, de soustraire les arcs d'un même rayon, comme s'il s'agissait de lignes droites.

Pour obtenir, par exemple, la différence de deux arcs donnés, ayant le même rayon, on décrira, avec ce même rayon, un arc indéfini AX (fig. 10). Sur cet arc indéfini et à partir d'un point A, on portera une ouverture de compas AB égale à la corde du plus grand des deux arcs donnés; à partir du point B, et en sens contraire, on portera une ouverture de compas BC égale à la corde du plus petit des deux arcs donnés. Les arcs AB et BC seront respectivement égaux aux deux arcs donnés, puisqu'ils ont des cordes égales à celles de ces arcs et sont d'ailleurs décrits du même rayon. L'arc AC sera donc égal à leur différence.

Pour répéter un arc donné un certain nombre de fois, il suffit de porter sur un arc indéfini, décrit du même rayon, un même nombre d'ouvertures de compas égales à la corde de l'arc donné.

Nous parlerons plus tard de la division des arcs en parties égales.

29. — On a souvent besoin de comparer un arc à la circonférence dont il fait partie. Pour cela, on suppose cette circonférence divisée en 360 parties égales, à chacune desquelles on donne le nom de *degré;* chaque degré, en 60 parties appelées *minutes;* et chaque minute, en 60 parties appelées *secondes.* Pour évaluer un arc en parties de la circonférence dont il fait partie, on énonce le nombre de degrés, minutes, secondes (et fractions de seconde) dont il se compose. On dira ainsi, par exemple : un arc de 69 degrés, 51 minutes et 28 secondes; ce qu'on écrira $69^{\circ}\ 51'\ 28''$; en désignant les degrés par un petit zéro, les minutes par un accent, et les secondes par deux accents.

Le quart de la circonférence, ou 90 degrés, forment ce qu'on appelle un *quadrans.*

30. — Dans le système décimal, le quadrans se divise en 100 parties appelées *grades*, chaque grade en 100 *minutes*, et chaque minute en 100 *secondes.* Un arc évalué de cette manière s'exprime immédiatement par un nombre décimal : ainsi 72 grades 16 minutes 4 secondes s'écriront $72^{gr},1604$. De plus, il suffit, pour convertir un pareil nombre en unités de l'espèce inférieure, de transporter la virgule de deux rangs vers la droite : ainsi $72^{gr},1604$ équivalent à $7216^{min},04$ ou à 721604 secondes.

Malgré ces avantages, l'ancienne division de la circonférence a prévalu.

Pour convertir un nombre de grades en degrés, il suffit de le multiplier par $\frac{9}{10}$, puisque 90 degrés font 100 grades, ou 9 degrés 10 grades. Par exemple : $16^{gr},25$ multipliés par $\frac{9}{10}$ donnent $14^{\circ},625$ ou $\frac{14625}{1000}$ de degré, ou enfin $14^{\circ}37'30''$.

Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés en grades, il suffit de le multiplier par $\frac{10}{9}$. Par exemple : $14^{\circ}37'30''$ reviennent à $14^{\circ}\ 2250''$ ou à $14^{\circ}\ \frac{2250}{3600}$, puisqu'un degré vaut 3600 secondes. Réduisant cette fraction en décimales, on trouve $14^{\circ},625$, qui, multipliés par $\frac{10}{9}$, donne $16^{gr},25$.

CHAPITRE II.

Des angles.

31. — Lorsque deux droites ont deux points communs, nous avons vu qu'elles coïncident (13). Lorsque deux droites n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles se rencontrent, qu'elles concourent, qu'elles se coupent; et le point commun se nomme leur point de rencontre, de concours ou d'intersection.

On appelle *angle* le plus ou moins d'écart de deux droites qui se rencontrent; ces droites sont les *côtés* de l'angle, et leur point commun en est le *sommet*.

Pour désigner un angle, on se contente quelquefois de nommer son sommet; on dirait ainsi l'angle A (fig. 11). Mais comme il arrive fréquemment que plusieurs angles aient le même sommet, on convient de désigner chaque angle par trois lettres, dont l'une est celle du sommet, et dont les deux autres sont prises sur ses côtés; mais on a soin que celle du sommet soit au milieu. On dira ainsi l'angle BAC ou CAB indifféremment.

Il est important de remarquer que dans la considération des angles on n'a point égard à la longueur des côtés.

Les angles sont des quantités susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres quantités. Ainsi l'angle AOC (fig. 12) est la *somme* des angles AOB et BOC; l'angle AOB est la *différence* des angles AOC et BOC; si les angles AOB et BOC sont égaux, l'angle AOC est le *produit* de AOB par 2; et AOB est au contraire le *quotient* de AOC par 2.

32— Théorème. *Deux angles quelconques* AOB, CO'D (fig. 13) *sont entre eux comme les arcs* AB *et* CD, *décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon.*

Évaluons les arcs AB et CD à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact; ce qui finira toujours par arriver dans la pratique. Pour fixer les idées, supposons que AB contienne 5 fois l'unité, et que CD la contienne 3 fois : ces arcs seront entre eux comme 5 est à 3.

Après avoir divisé ces arcs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division m, n, p, q, r, s, les rayons mO, nO, pO, qO, rO', sO'. Je dis d'abord que tous les angles partiels AOm, mOn, etc., $CO'r$, $rO's$, etc., ainsi formés, seront égaux. Considérons, en effet, les deux angles mOn et $rO's$, par exemple. Si l'on fait coïncider les circonférences O et O' qui ont même rayon, et qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de leur centre devenu commun, jusqu'à ce que les arcs égaux mn et rs coïncident, les rayons mO et rO' coïncideront aussi, puisqu'ils auront les mêmes extrémités; il en sera de même des rayons nO et sO'; donc les angles mOn et $rO's$ coïncideront et sont par conséquent égaux. On démontrerait de même que l'un quelconque des angles partiels qui forment AOB est égal à l'un de le multiplier par $\frac{9}{10}$, puisque 90 degrés font 100 grades, ou 9 degrés 10 grades. Par exemple : $16^{gr},25$ multipliés par $\frac{9}{10}$ donnent $14^{o},625$ ou $\frac{14625}{1000}$ de degré, ou enfin $14^{o}37'30''$.

Réciproquement, pour convertir un nombre de degrés en grades, il suffit de le multiplier par $\frac{10}{9}$. Par exemple : $14^{o}37'30''$ reviennent à $14^{o}\ 2250''$ ou à $14^{o}\ \frac{2250}{3600}$, puisqu'un degré vaut 3600 secondes. Réduisant cette fraction en décimales, on trouve $14^{o},625$, qui, multipliés par $\frac{10}{9}$, donne $16^{gr},25$.

CHAPITRE II.

Des angles.

31. — Lorsque deux droites ont deux points communs, nous avons vu qu'elles coïncident (13). Lorsque deux droites n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles se rencontrent, qu'elles concourent, qu'elles se coupent ; et le point commun se nomme leur point de rencontre, de concours ou d'intersection.

On appelle *angle* le plus ou moins d'écart de deux droites qui se rencontrent ; ces droites sont les *côtés* de l'angle, et leur point commun en est le *sommet*.

Pour désigner un angle, on se contente quelquefois de nommer son sommet ; on dirait ainsi l'angle A (fig. 11). Mais comme il arrive fréquemment que plusieurs angles aient le même sommet, on convient de désigner chaque angle par trois lettres, dont l'une est celle du sommet, et dont les deux autres sont prises sur ses côtés ; mais on a soin que celle du sommet soit au milieu. On dira ainsi l'angle BAC ou CAB indifféremment.

Il est important de remarquer que dans la considération des angles on n'a point égard à la longueur des côtés.

Les angles sont des quantités susceptibles d'être ajoutées, soustraites, multipliées et divisées comme les autres quantités. Ainsi l'angle AOC (fig. 12) est la *somme* des angles AOB et BOC ; l'angle AOB est la *différence* des angles AOC et BOC ; si les angles AOB et BOC sont égaux, l'angle AOC est le *produit* de AOB par 2 ; et AOB est au contraire le *quotient* de AOC par 2.

32. — Théorème. *Deux angles quelconques* AOB, CO'D (fig. 13) *sont entre eux comme les arcs* AB *et* CD, *décrits de leurs sommets comme centre avec un même rayon.*

Évaluons les arcs AB et CD à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact ; ce qui finira toujours par arriver dans la pratique. Pour fixer les idées, supposons que AB contienne 5 fois l'unité, et que CD la contienne 3 fois : ces arcs seront entre eux comme 5 est à 3.

Après avoir divisé ces arcs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division m, n, p, q, r, s, les rayons mO, nO, pO, qO, rO', sO'. Je dis d'abord que tous les angles partiels AOm, mOn, etc., CO'r, rO's, etc., ainsi formés, seront égaux. Considérons, en effet, les deux angles mOn et rO's, par exemple. Si l'on fait coïncider les circonférences O et O' qui ont même rayon, et qu'on les fasse tourner dans leur plan autour de leur centre devenu commun, jusqu'à ce que les arcs égaux mn et rs coïncident, les rayons mO et rO' coïncideront aussi, puisqu'ils auront les mêmes extrémités ; il en sera de même des rayons nO et sO' ; donc les angles mOn et rO's coïncideront et sont par conséquent égaux. On démontrerait de même que l'un quelconque des angles partiels qui forment AOB est égal à l'un quelconque de ceux qui forment C O′D; donc tous ces angles partiels sont égaux.

Or, A O B contient 5 de ces angles partiels, et C O′D en contient 3; les angles A O B et C O′D sont donc entre eux comme 5 est à 3, c'est-à-dire dans le même rapport que les arcs A B et C D; et l'on peut écrire :

$$AOB : CO'D :: AB : CD.$$

Remarque. Les angles tels que A O B et C O′D, qui ont leur sommet au centre d'une circonférence, sont nommés pour cette raison *angles au centre;* et la proposition précédente s'énonce habituellement en disant que : *dans un même cercle* (*ou dans des cercles égaux*) *les angles au centre sont entre eux comme les arcs compris entre leurs côtés.*

33.—On déduit du même théorème que : *tout angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés;* c'est-à-dire que si l'on prend pour unité d'angle, l'angle au centre qui correspond à l'unité d'arc, un angle au centre quelconque est à l'unité d'angle, comme l'arc compris entre ses côtés est à l'unité d'arc.

On prend pour unité d'angle, l'angle au centre qui correspond au quadrans; on lui donne le nom d'angle *droit.* On subdivise l'angle droit en 90 parties appelées *degrés,* dont chacun correspond par conséquent à l'arc d'un degré. Chaque angle d'un degré se divise en 60 *minutes,* dont chacune correspond à l'arc d'une minute; et enfin chaque angle d'une minute se divise en 60 *secondes*, dont chacune correspond à l'arc d'une seconde. D'après cela, un angle de $68^\circ\,17'\,30''$ est l'angle au centre qui comprend entre ses côtés un arc de $68^\circ\,17'\,30''$.

34.— Pour mesurer les angles sur une surface de peu d'étendue, on emploie un instrument appelé *rapporteur.* Il se compose d'un demi-cercle en cuivre, en corne ou en bois (fig. 14), dont la circonférence, nommée *limbe,* est divisée en degrés.

Soit X O Y l'angle à mesurer. On porte l'instrument sur cet angle, de manière que son centre tombe au sommet O, et que le diamètre A B coïncide avec la direction O Y de l'un des côtés de l'angle. Le côté O X vient alors couper la circonférence extérieure du rapporteur en un certain point M, et l'on note le nombre de degrés compris entre les points A et M. Ce nombre de degrés est la mesure de l'arc A M, et par suite celle de l'angle proposé.

Sur le terrain, on fait usage d'un grand rapporteur qui porte le nom de *graphomètre* (fig. 15). Il repose sur un support à trois branches, auquel il est articulé au moyen d'un genou, ce qui permet de donner au limbe telle position que l'on désire. Le diamètre A B, que l'on nomme *ligne de foi*, est muni à ses extrémités de deux petites fenêtres appelées *pinnules,* qui sont partagées dans le sens de leur hauteur par un fil très-fin. Au centre O est un pivot sur lequel tourne, à frottement doux, une règle C D, semblable à la règle A B, et munie comme elle de deux pinnules; cette règle mobile se nomme *alidade.*

Pour mesurer un angle à l'aide du graphomètre, on place son centre au-dessus du sommet de l'angle, et l'on dispose le plan du limbe de manière à ne pencher dans aucun sens. (Nous verrons plus tard comment on peut remplir ces conditions.) On dirige la ligne de foi suivant un des côtés de l'angle, et l'alidade suivant l'autre côté, les fils des pinnules faisant ici l'office de jalons. On n'a plus qu'à lire sur le limbe la valeur de l'arc compris entre la ligne de foi et l'alidade.

Quand on doit opérer sur une grande étendue de terrain, on remplace les pinnules par deux lunettes, dont l'une est dirigée suivant la ligne de foi, et dont l'autre, dirigée suivant l'alidade, est mobile avec elle.

35. — Problème. *Faire un angle égal à un angle donné,* CID (fig. 16).

Soit XY une droite donnée, et O le point où l'on doit faire un angle égal à CID.

Du point I comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez l'arc CD.

Du point O comme centre, avec le même rayon, décrivez l'arc indéfini AM. Sur cet arc, à partir du point A, portez une ouverture de compas AB, égale à la corde de l'arc CD; et joignez OB. L'angle AOB sera l'angle demandé. Car les arcs AB et CD sont égaux, comme ayant leurs cordes égales; les angles au centre AOB et CID correspondants à ces arcs, sont donc égaux aussi.

Remarque. En répétant cette construction, il est facile de faire un angle égal à la somme ou à la différence de deux angles donnés; ou encore, de répéter un angle donné un certain nombre de fois.

36. — Lorsqu'une droite OC (fig. 17) en rencontre une autre AB, de manière à faire avec cette droite, et d'un même côté, deux angles AOC, BOC, ces angles sont dits *adjacents.*

Théorème. *La somme de deux angles adjacents équivaut à deux angles droits.*

En effet : du sommet O de ces angles, comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une demi-circonférence ACB : ces angles auront pour mesure les arcs AC et BC, dont la somme équivaut à deux quadrans. La somme des angles proposés équivaut donc à deux angles droits (33).

Corollaire. *Lorsque deux angles adjacents sont égaux, ils sont droits.*

Tels sont AOD et BOD.

Remarques. I. Lorsque deux angles adjacents sont inégaux, l'un d'eux est plus grand qu'un angle droit, et l'autre plus petit. Le premier s'appelle un angle *obtus*, le second un angle *aigu.*

II. Deux angles dont la somme vaut deux droits sont dits *supplémentaires;* et chacun est dit *supplément* de l'autre. Deux angles adjacents sont supplémentaires.

Étant donné un angle, il est facile de trouver son supplément. Si l'on demandait, par exemple, le supplément de BOC, il suffirait de prolonger le côté BO, et l'angle AOC ainsi obtenu serait le supplément demandé.

Si c'est la mesure de l'angle qui est donnée, on en déduit la mesure de l'autre, en remarquant que la somme de leurs mesures doit faire 180°. Si l'un des angles est, par exemple, de $31^\circ\ 47'$, l'autre sera de 180° moins $31^\circ\ 47'$, c'est-à-dire de $148^\circ\ 13'$.

37. — Réciproque du théorème précédent. *Si deux angles* AOC, BOC (fig. 17), *ayant même sommet* O *et un côté commun* OC, *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AO *et* BO *sont en ligne droite.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon quelconque, on décrit un arc ACB, cet arc équivaudra à une demi-circonférence, puisque la somme des angles AOC et BOC équivaut à deux droits. Donc la corde qui joindrait les points A et B serait un diamètre (22), et passerait conséquemment par le centre O. Donc AO et OB sont en ligne droite.

38. — Théorème. *La somme de tous les angles successifs* AOB, BOC, COD, DOE (fig. 18), *formés d'un même* *côté d'une droite* AE, *et ayant pour sommet un même point* O *de cette droite, est égale à deux angles droits.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une demi-circonférence ABCDE, les angles AOB, BOC, COD, DOE, auront respectivement pour mesure les arcs AB, BC, CD, DE, dont la somme équivaut à deux quadrans. La somme de ces angles équivaut donc à deux angles droits.

39. — Théorème. *La somme de tous les angles successifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 19), *formés autour d'un même point* O, *équivaut à quatre angles droits.*

Car, si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence, ces angles auront respectivement pour mesure les arcs AB, BC, CD, DE, EA, dont la somme équivaut à quatre quadrans. La somme de ces angles équivaut donc à quatre angles droits.

40. — Théorème. *Lorsque deux droites* AB, CD (fig. 20), *se coupent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet : la somme des angles AOC et COB équivaut à deux angles droits (36). Il en est de même de la somme des angles COB et BOD. Ces deux sommes sont donc égales, et l'on peut écrire

$$AOC + COB = COB + BOD.$$

Retranchant de part et d'autre COB, il reste

$$AOC = BOD.$$

On démontrerait de même que COB égale AOB.

CHAPITRE III.

§ I. — Des perpendiculaires.

41. — Deux droites sont dites *perpendiculaires* entre elles, lorsqu'elles font un angle droit. Telles sont les droites AB et CD (fig. 21).

On peut remarquer que, dans ce cas, les trois autres angles formés par ces droites sont droits aussi. Car si AOC, par exemple, est droit, BOC, qui en est le supplément (36), est droit aussi ; et les angles BOD et AOD sont respectivement égaux aux deux premiers, comme leur étant opposés par le sommet (40).

42. — Nous indiquerons plus loin un moyen rigoureux de tracer des droites perpendiculaires entre elles. Dans la pratique, on emploie à cet usage l'instrument qui porte le nom d'*équerre*. Il se compose de deux règles dont les bords se rencontrent à angle droit (fig. 22). Lorsqu'on veut, à l'aide de cet instrument, mener une perpendiculaire à une droite par un point donné hors de cette droite, ou sur la droite même, on fait affleurer contre la droite le bord d'une bonne règle, on appuie contre ce bord l'un des côtés de l'équerre, et on la fait glisser contre la règle jusqu'à ce que son autre côté vienne passer par le point donné ; on se sert alors de ce côté comme règle pour tracer la perpendiculaire demandée.

A défaut d'équerre on pourra, surtout pour un dessin de petites dimensions, employer une feuille de papier pliée soigneusement en quatre.

On peut aussi tracer les perpendiculaires à l'aide du rapporteur, puisque cet instrument permet de faire des angles de 90°.

43. — Sur le terrain, on pourrait aussi déterminer les perpendiculaires à l'aide du graphomètre, mais on se sert plus communément de l'*équerre d'arpenteur* (fig. 23). La partie essentielle de cet instrument consiste en quatre pinnules placées aux extrémités de deux droites qui se coupent à angles droits; ces pinnules sont le plus souvent pratiquées dans une sorte de boîte ronde ou octogone. Cette boîte se visse sur une tige, terminée par un piquet de fer, au moyen duquel on plante l'instrument sur le terrain.

Si l'on veut, à l'aide de cet instrument, en un point O d'une droite AB (fig. 21), lui *élever* une perpendiculaire, on plante l'équerre au point O, et on la fait tourner de manière que la direction de deux pinnules opposées soit celle de la ligne AB; la direction des deux autres pinnules est alors celle de la perpendiculaire demandée, et il n'y a plus qu'à faire planter un jalon dans cette direction.

Si l'on veut, au contraire, *abaisser* d'un point donné C une perpendiculaire sur une droite AB, on fait d'abord planter un jalon au point C, si toutefois il n'y a rien en ce point qui puisse servir de mire. On place l'équerre sur la direction AB, de manière que deux pinnules opposées soient dans cette direction; puis on transporte l'instrument le long de AB, dans cette position, jusqu'à ce qu'en regardant par les deux autres pinnules on aperçoive le jalon C coupé longitudinalement par les fils réunis de ces pinnules. Le point O, où se trouve alors l'équerre, appartient à la perpendiculaire demandée, qui se trouve dès lors déterminée par deux points, C et O.

44. — Théorème. *Par un même point on ne peut mener à une même droite qu'une seule perpendiculaire.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un point O (fig. 17) pris sur une droite AB. Du point O comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons une demi-circonférence. Si OD est une droite perpendiculaire à AB, les angles AOD et BOD seront égaux; par suite les arcs AD et BD le seront, et le point D sera le milieu de la demi-circonférence ADB. Or, il n'y a qu'un point D qui puisse être le milieu de cette demi-circonférence, et du point D au point O on ne peut mener qu'une seule droite.

Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'un point O (fig. 24) pris hors d'une droite AB; et soient, s'il est possible, OC et OD deux perpendiculaires à cette droite. Faisons tourner la figure COD autour de AB jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre en CO'D. L'angle O'CD sera égal à OCD, et par conséquent droit, puisque OC est supposé perpendiculaire sur AB. Ces deux angles étant dès lors supplémentaires, leurs côtés extérieurs O'C et OC sont en ligne droite (37). Et comme on en pourrait dire autant de O'D et de OD, on pourrait du point O au point O' mener deux lignes droites, ce qui est impossible. Donc on ne peut mener par le point O qu'une seule perpendiculaire à AB.

45. — Toute droite telle que OD est dite *oblique*, par rapport à la perpendiculaire OC.

Théorème. *Si par un point* O (fig. 24), *extérieur à une droite* AB, *on lui mène une perpendiculaire* OC *et une oblique* OD, *la perpendiculaire sera plus courte que l'oblique.*

Car si l'on répète le mouvement indiqué dans la démonstration précédente, on verra comme ci-dessus que $O'C = OC$, que $O'D = OD$, et que OCO' est une ligne droite. Or, cette droite OO' est plus courte que la ligne brisée $OD + DO'$; donc OC, qui est la moitié de OO', est plus court que OD, qui est la moitié de $OD + DO'$.

Corollaire I. Réciproquement, *Si une droite* OC *est* *la plus courte de celles que l'on peut mener d'un point* O *à une droite* AB, *elle est perpendiculaire à* AB.

Car, dans le cas contraire, on pourrait toujours mener par le point O une perpendiculaire à AB, et, en vertu du théorème précédent, cette perpendiculaire serait plus courte que OC; ce qui est contraire à la supposition.

COROLLAIRE II. *La plus courte distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.*

Remarque. Le point C se nomme le *pied* de la perpendiculaire OC; le point D est pareillement le *pied* de l'oblique OD.

46. — THÉORÈME. *Si par un point* O (fig. 25) *extérieur à une droite* AD, *on mène deux obliques* OB, OD, *telles que le pied de la perpendiculaire* CO *soit également distant du pied de chaque oblique, ces obliques sont égales.*

Car si l'on fait tourner la figure OCD autour de OC, les angles OCD et OCB étant droits, la droite CD viendra s'appliquer sur CB; et comme CD = CB par hypothèse, le point D tombera en B. Les droites OD et OB ayant alors les mêmes extrémités coïncideront; donc elles sont égales.

47. — THÉORÈME. *Si par un point* O (fig. 25) *extérieur à une droite* AD, *on mène deux obliques quelconques, celle dont le pied s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est la plus longue.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse des obliques OA et OB situées d'un même côté de la perpendiculaire OC. Faisons tourner la figure autour de AD jusqu'à ce que le point O vienne se rabattre en O'; on aura O'B = OB et O'A = OA. Or, la ligne brisée enveloppante OA + AO' est plus longue que la ligne brisée enveloppée OB + BO' (19); donc OA, moitié de OA + AO', est plus grand que OB, moitié de OB + BO'.

Supposons en second lieu qu'il s'agisse des obliques OA et OD situées de part et d'autre de la perpendiculaire; et admettons que CA soit plus grand que CD. Prenons CB = CD et joignons OB, qui sera égal à OD, en vertu de la proposition précédente. Mais, en vertu de la première partie de la proposition actuelle, OA sera plus grand que OB; donc OA est aussi plus grand que OD.

48. — Du rapprochement des deux propositions précédentes résultent ces deux réciproques :

I. *Si par un point extérieur à une droite, on lui mène deux obliques égales, le pied de la perpendiculaire sera également distant du pied de chaque oblique.*

II. *Si par un point extérieur à une droite, on lui mène deux obliques inégales, le pied de la plus longue sera plus éloigné du pied de la perpendiculaire, que ne le sera le pied de la plus courte.*

49. — THÉORÈME. *Chaque point de la perpendiculaire* CD (fig. 26) *élevée sur le milieu d'une droite* AB, *est également distant des extrémités de cette droite.*

Car, soit O un de ces points; joignons OA et OB; ces droites seront deux obliques égales (46), puisque CA = CB. Donc le point O est à égale distance des extrémités de AB.

50. — THÉORÈME. *Tout point* K (fig. 26), *pris hors de la perpendiculaire* CO *élevée sur le milieu d'une droite* AB, *est inégalement distant des extrémités de cette droite.*

Car si l'on joint KA et KB, l'une de ces droites coupera la perpendiculaire, en un point O. Joignons OB. Nous aurons KB < KO + OB. Mais OB est égal à OA en vertu du théorème qui précède; on peut donc écrire KB < KO + OA ou KB < KA.

51. — Du rapprochement des deux propositions qui précèdent résultent ces deux réciproques :

I. *Tout point également distant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.*

II. *Tout point inégalement distant des extrémités d'une droite est situé hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.*

Les propositions directes (49, 50) et leurs réciproques (51) se résument ordinairement en disant que : *la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le* LIEU GÉOMÉTRIQUE *de tous les points du plan qui sont également éloignés des deux extrémités de cette droite.*

52. — THÉORÈME. *Si une droite* CD (fig. 21) *a deux de ses points*, C *et* D, *également distants des extrémités d'une autre droite* AB, *la première droite est perpendiculaire sur le milieu de la seconde.*

En effet : chacun des points C et D étant également distant des extrémités de AB, appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite (51); or, deux points suffisent pour déterminer une droite; cette perpendiculaire n'est donc autre chose que la droite CD elle-même.

§ II. — Propriétés du cercle qui dépendent des perpendiculaires.

53. — THÉORÈME. *Le milieu d'un arc, le milieu de sa corde et le centre du cercle sont toujours sur une même perpendiculaire à cette corde.*

Soit C (fig. 27) le milieu d'un arc AB. Puisque les arcs CA et CB sont égaux, leurs cordes sont égales; le point C est donc à égale distance des points A et B. De même, le point O étant le centre du cercle, est également distant des deux points A et B. Si l'on mène OC, cette droite aura donc deux de ses points à égale distance des extrémités de la corde AB,

et sera par conséquent perpendiculaire sur le milieu I de cette corde (52).

COROLLAIRE. Par un même point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une même droite (44); il en résulte :

1° Que, *si du centre* O *d'une circonférence on abaisse une perpendiculaire sur une corde* AB, *elle divisera cette corde et l'arc sous-tendu chacun en deux parties égales;*

2° Que, *si l'on élève une perpendiculaire sur le milieu* I *d'une corde* AB, *cette perpendiculaire passera par le centre, et par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde.*

54. — PROBLÈME. *Par trois points* A, B, C (fig. 28), *non en ligne droite, faire passer une circonférence du cercle.*

Joignez AB et BC; ces droites seront des cordes de la circonférence demandée. Sur les milieux de ces cordes élevez les perpendiculaires *mm'* et *nn'*; ces perpendiculaires devant toutes deux passer par le centre (53, coroll. 2°), se couperont au centre même. Du point de rencontre O, avec un rayon égal à OA, décrivez une circonférence, elle passera par les trois points A, B, C.

On peut s'en rendre compte *à posteriori* en observant que le point O, appartenant à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, est également distant des points A et B; et qu'appartenant à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC, il est également distant des points B et C; d'où il suit qu'il est également distant des trois points A, B, C.

COROLLAIRE. Pour trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné, prenez à volonté trois points sur ce cercle ou sur cet arc, et cherchez le centre de la circonférence qui passe par ces trois points.

Remarque. Si les trois points donnés étaient en ligne droite, les perpendiculaires *mm'* et *nn'* ne pourraient se rencontrer; car si elles se rencontraient, on pourrait, du point de rencontre, abaisser deux perpendiculaires sur une même droite, ce qui est impossible (44).

Ainsi donc : *on ne peut pas faire passer une circonférence par trois points situés en ligne droite.*

En d'autres termes : *une droite ne peut avoir plus de deux points communs avec une circonférence.*

55. — Théorème. *Une droite* AB (fig. 29) *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *ne peut avoir qu'un point commun avec la circonférence.*

Car, soit OD une droite quelconque menée du centre O à un point D de la droite AB ; cette droite OD sera une oblique, plus longue que la perpendiculaire OC. Le point D est donc plus éloigné du centre que le point C, et est par conséquent situé hors du cercle. Et comme on en pourrait dire autant de tout autre point de AB, il s'ensuit que cette droite ne peut avoir avec la circonférence d'autre point commun que le point C.

Remarques. I. Une droite qui *touche* ainsi une circonférence, c'est-à-dire qui n'a et ne peut avoir avec elle qu'un point commun, est dite *tangente* à cette circonférence ; et le théorème précédent peut s'énoncer ainsi : *toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.*

La circonférence, à son tour, est dite *tangente* à la droite. Leur point commun se nomme point de *tangence* ou de *contact*.

II. Une droite qui rencontre une circonférence en deux points, ou en d'autres termes une corde prolongée, est dite *sécante* par rapport à cette circonférence, qui, à son tour, est dite *sécante* par rapport à la droite. On dit aussi que la droite *coupe* la circonférence, et *vice versâ*.

56. — Réciproque du théorème précédent. *Toute tangente* AB (fig. 29) *à une circonférence* O, *est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *qui aboutit au point de contact.*

Car, tout point D de cette droite, différent du point C, étant situé hors du cercle, le rayon OC mesure la plus courte distance du centre à la droite, et est par conséquent perpendiculaire sur cette droite (45, coroll. II).

Corollaire. Les deux propositions précédentes démontrent que, *par un point pris sur une circonférence on ne peut lui mener qu'une seule tangente* ; c'est la perpendiculaire élevée à l'extrémité du rayon qui aboutit au point donné.

57. — Problème. *Par un point* A (fig. 30) *pris hors d'une circonférence* O, *mener une tangente à cette circonférence.*

Par le point A et par le centre O menons la droite AC. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, décrivons un arc indéfini OE. Portons sur cet arc, à partir du point O, une ouverture de compas OD égale au diamètre BC de la circonférence donnée (ce qui sera toujours possible, car OB étant moindre que OA, BC qui est le double de OB est moindre que le double de OA, ou moindre que le diamètre du cercle OA (23)). Joignons DO, qui coupera la circonférence donnée en un point I. Enfin, tirons AI, qui sera la tangente demandée.

En effet : DO étant égal à BC, le rayon OI est la moitié de DO ; la droite AI, menée du centre A de la seconde circonférence au milieu I de la corde DO, est donc perpendiculaire sur cette corde (53) ; par conséquent perpendiculaire à l'extrémité du rayon OI de la circonférence donnée, et enfin tangente à cette circonférence.

Remarque. On aurait pu faire au-dessous de AC une construction pareille, en sorte que le problème admet deux solutions.

§ III. — Des circonférences sécantes et tangentes.

58. — Deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs sans coïncider; car lorsqu'elles ont trois points communs, la construction du n° 54 montre qu'elles ont même centre et même rayon. Deux circonférences qui n'ont que deux points communs sont dites *sécantes;* si elles n'ont qu'un point commun, elles sont *tangentes* l'une à l'autre, et le point commun est le point de *tangence* ou de *contact*.

59. — THÉORÈME. *Si deux circonférences* O *et* C (fig. 31) *ont un point commun* A *hors de la ligne* OC *qui joint leurs centres, elles en ont nécessairement un second.*

En effet : faisons tourner la figure OAC autour de OC, jusqu'à ce que le point A vienne se rabattre en A'; on aura évidemment $A'O = AO$, ainsi le point A' appartiendra à la circonférence O; on aura de même $A'C = AC$, ainsi le point A' appartiendra aussi à la circonférence C. Le point A' sera donc un second point commun aux deux circonférences.

REMARQUE. *Lorsque deux circonférences* O *et* C *se coupent, la ligne des centres* OC *est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune* AA'.

Car la droite OC a deux de ses points, O et C, à égales distances des extrémités de AA' (52).

COROLLAIRE. *Lorsque deux circonférences se touchent, le point de contact est sur la ligne des centres.*

Car si le point commun était situé hors de la ligne des centres, il y aurait un second point commun; les circonférences seraient donc sécantes et non tangentes.

60 — De ce qui précède résultent des caractères simples pour apprécier la position relative de deux circonférences.

I. *Si deux circonférences sont* EXTÉRIEURES *l'une à l'autre* (fig. 32), *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

On a en effet : $OC = OA + AB + BC$, et par conséquent : $OC > OA + BC$.

II. *Si deux circonférences sont* TANGENTES EXTÉRIEUREMENT (fig. 33), *la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

Car le point de contact A étant situé sur la ligne des centres (59, coroll.), on a : $OC = OA + AC$.

III. *Si deux circonférences sont* SÉCANTES (fig. 31), *la distance des centres est moindre que la somme des rayons, mais plus grande que leur différence.*

Car on a 1° : $OC < OA + AC$ (4).
On a aussi 2° : $OA < OC + AC$;
d'où l'on tire $OA - AC < OC$.

IV. *Si deux circonférences sont* TANGENTES INTÉRIEUREMENT (fig. 34), *la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

Car le point de contact A étant situé sur la ligne des centres, on a $OC = OA - AC$.

V. *Si l'une des deux circonférences est* INTÉRIEURE *à l'autre* (fig. 35), *la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

On a en effet : $OC = OA - AB - BC$,
et par conséquent : $OC < OA - BC$.

§ IV. — Problèmes relatifs aux perpendiculaires.

61. — Problème I. *Par un point* O (fig. 36) *donné sur une droite* AB, *lui élever une perpendiculaire.*

Prenons sur AB, de part et d'autre du point O, deux longueurs égales OB et OB'; des points B et B' comme centres, avec un même rayon plus grand que OB, décrivons deux arcs de cercle qui se couperont en un point C (60); joignons CO, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car si l'on joignait CB et CB', ces distances seraient égales; le point C appartient donc à la perpendiculaire élevée sur le milieu O de la droite BB' (51); donc CO est cette perpendiculaire.

62. — Problème II. *D'un point* O (fig. 37) *donné hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Du point A comme centre, avec AO pour rayon, décrivons une circonférence. Du point B comme centre, avec BO pour rayon, décrivons une seconde circonférence. Ces deux circonférences, qui ont un point commun O, hors de la ligne des centres, se couperont en un second point O' (59). Joignons OO', qui sera la perpendiculaire demandée. Car la droite AB a deux de ses points, A et B, à égales distances des extrémités de OO' (52).

63. — Problème III. *Diviser une droite donnée* AB (fig. 38) *en deux parties égales.*

Des points A et B comme centres, avec un même rayon, plus grand (à vue d'œil) que la moitié de AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point C (60). Des mêmes centres, avec un même rayon plus grand que la

moitié de AB, décrivez deux autres arcs qui se couperont en un point C'. Joignez CC', qui coupera AB en un point I, milieu de AB.

Car chacun des deux points C ou C' étant également distant des extrémités de AB, appartient à la perpendiculaire qu'on élèverait sur le milieu de cette droite (51). Donc CC' est cette perpendiculaire; et le point I où elle coupe AB est le milieu de cette droite.

Corollaire. La même construction sert à *élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée*, sans qu'il soit nécessaire de déterminer préalablement ce milieu.

64. — Problème IV. *Diviser un arc donné* AMB (fig. 39) *en deux parties égales.*

Tirez la corde AB, et sur le milieu de cette corde élevez la perpendiculaire CC' (63, coroll.); cette perpendiculaire passera par le milieu M de l'arc donné (53, coroll. 2°).

Remarque. On peut, dans l'exécution, se dispenser de tirer la corde AB.

65. — Problème V. *Diviser un angle donné* MON (fig. 40) *en deux parties égales.*

Du sommet O comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez l'arc AB; des points A et B comme centres, avec un même rayon, plus grand (à vue d'œil) que la corde de l'arc AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point C. Joignez OC, qui divisera l'angle MON en deux parties égales MOC, CON.

En effet : par construction les points O et C sont chacun à égale distance des points A et B; la droite OC serait donc perpendiculaire sur le milieu de la corde AB (52). Donc elle passe par le milieu I de l'arc AB. Les arcs AI et IB étant égaux, il en est de même des angles au centre AOI et IOB (32).

Remarque. La droite OC qui divise un angle en deux parties égales, se nomme la *bissectrice* de cet angle.

CHAPITRE IV.

§ I. — Des parallèles.

66. — Théorème. *Deux droites* AC, BD (fig. 41), *perpendiculaires à une troisième* XY, *ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, si elles pouvaient se rencontrer en un certain point, il y aurait de ce point deux perpendiculaires abaissées sur une même droite; ce qui est impossible (44).

Remarque. Deux droites qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sont ce que l'on appelle des droites *parallèles*.

Le théorème précédent peut donc s'énoncer comme il suit: *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.*

67. — Postulatum. *Si sur une même droite* XY (fig. 41) *on élève une perpendiculaire* BD *et une oblique* AE, *l'oblique et la perpendiculaire suffisamment prolongées se rencontreront.*

Cette proposition, qui, sans avoir l'évidence d'un axiome, peut être admise sans démonstration, est connue sous le nom de *Postulatum d'Euclide*, et sert de base à la théorie des parallèles.

68. — Réciproque du théorème 66. *Si deux droites* AC, BD (fig. 41) *sont parallèles, toute droite* XY, *perpendiculaire à l'une d'elles*, BD, *est perpendiculaire à l'autre* AC.

Car, si XY n'était pas perpendiculaire à AC, cette droite AC serait une oblique, qui, en vertu du postulatum, rencontrerait la perpendiculaire BD, et ne lui serait par conséquent point parallèle; ce qui est contraire à la supposition.

69. — Problème. *Par un point* A (fig. 41) *donné hors d'une droite* BD, *mener une parallèle à cette droite.*

Du point A abaissez sur BD la perpendiculaire AB; au point A élevez AC perpendiculaire à AB; la droite AC sera parallèle à BD (66).

Remarque. Au point A on ne peut élever sur AB qu'une seule perpendiculaire AC; toute autre droite, telle que AE, serait une oblique qui rencontrerait BD; ainsi donc: *par un point donné hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle.*

70. — Théorème. *Deux parallèles sont partout également distantes.*

En d'autres termes: si des points C et D (fig. 42), pris où l'on voudra sur l'une des deux droites parallèles AB, CD, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre, ces perpendiculaires CA, DB seront égales.

Pour le démontrer, élevons par le milieu I de AB la perpendiculaire IH. La droite IH étant perpendiculaire à AB, le sera aussi à sa parallèle CD (68). Cela posé, faisons tourner la figure IBDH autour de IH, pour la rabattre sur IACH. Les angles en I étant droits, la droite IB prendra la direction de IA; et comme IB est égal à IA, le point B tombera au point A. Les angles en B et en A étant droits, la ligne BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC. Les angles en H étant droits, la ligne HD prendra la direction de HC, et le point D tombera quelque part sur HC. Mais déjà le point D doit tomber sur AC; il tombera donc à l'intersection des droites AC et HC, *Remarque.* La droite OC qui divise un angle en deux parties égales, se nomme la *bissectrice* de cet angle.

CHAPITRE IV.

§ I. — Des parallèles.

66. — Théorème. *Deux droites* AC, BD (fig. 41), *perpendiculaires à une troisième* XY, *ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, si elles pouvaient se rencontrer en un certain point, il y aurait de ce point deux perpendiculaires abaissées sur une même droite; ce qui est impossible (44).

Remarque. Deux droites qui ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sont ce que l'on appelle des droites *parallèles.*

Le théorème précédent peut donc s'énoncer comme il suit: *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.*

67. — Postulatum. *Si sur une même droite* XY (fig. 41) *on élève une perpendiculaire* BD *et une oblique* AE, *l'oblique et la perpendiculaire suffisamment prolongées se rencontreront.*

Cette proposition, qui, sans avoir l'évidence d'un axiome, peut être admise sans démonstration, est connue sous le nom de *Postulatum d'Euclide*, et sert de base à la théorie des parallèles.

68. — Réciproque du théorème 66. *Si deux droites* AC, BD (fig. 41) *sont parallèles, toute droite* XY, *perpendiculaire à l'une d'elles*, BD, *est perpendiculaire à l'autre* AC.

Car, si XY n'était pas perpendiculaire à AC, cette droite AC serait une oblique, qui, en vertu du postulatum, rencontrerait la perpendiculaire BD, et ne lui serait par conséquent point parallèle; ce qui est contraire à la supposition.

69. — Problème. *Par un point* A (fig. 41) *donné hors d'une droite* BD, *mener une parallèle à cette droite.*

Du point A abaissez sur BD la perpendiculaire AB; au point A élevez AC perpendiculaire à AB; la droite AC sera parallèle à BD (66).

Remarque. Au point A on ne peut élever sur AB qu'une seule perpendiculaire AC; toute autre droite, telle que AE, serait une oblique qui rencontrerait BD; ainsi donc: *par un point donné hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle.*

70. — Théorème. *Deux parallèles sont partout également distantes.*

En d'autres termes: si des points C et D (fig. 42), pris où l'on voudra sur l'une des deux droites parallèles AB, CD, on abaisse des perpendiculaires sur l'autre, ces perpendiculaires CA, DB seront égales.

Pour le démontrer, élevons par le milieu I de AB la perpendiculaire IH. La droite IH étant perpendiculaire à AB, le sera aussi à sa parallèle CD (68). Cela posé, faisons tourner la figure IBDH autour de IH, pour la rabattre sur IACH. Les angles en I étant droits, la droite IB prendra la direction de IA; et comme IB est égal à IA, le point B tombera au point A. Les angles en B et en A étant droits, la ligne BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC. Les angles en H étant droits, la ligne HD prendra la direction de HC, et le point D tombera quelque part sur HC. Mais déjà le point D doit tomber sur AC; il tombera donc à l'intersection des droites AC et HC, c'est-à-dire au point C. Les droites BD et AC ayant dès lors les mêmes extrémités, coïncideront : donc elles sont égales.

71. — Réciproquement : *Si, sur une droite* AB (fig. 42) *on élève deux perpendiculaires égales* AC *et* BD, *la droite* CD *qui joindra leurs extrémités sera parallèle à* AB.

Sur le milieu I de AB, élevons la perpendiculaire IH, et rabattons encore la figure IBDH sur IACH. Les angles en I étant droits, IB s'appliquera sur IA; et comme ces lignes sont égales, le point B tombera en A. Les angles en B et en A étant droits, la droite BD s'appliquera sur AC; et comme ces droites sont égales par hypothèse, le point D tombera en C. Les droites DH et CH ayant alors les mêmes extrémités, coïncideront; donc les angles IHD et IHC sont égaux. Mais ces angles sont adjacents; donc ils sont droits. Les droites AB et CD étant donc toutes deux perpendiculaires à IH, sont parallèles entre elles.

Corollaire. Pour mener une parallèle à la droite AB, par un point C pris hors de cette droite, abaissez du point C la droite CA perpendiculaire sur AB; en un point quelconque B de cette dernière, élevez-lui une perpendiculaire BD égale à AC; et joignez CD, qui sera la parallèle demandée.

72. — Théorème. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Car, si l'on mène une droite perpendiculaire à la troisième, elle sera en même temps perpendiculaire aux deux premières (68); et celles-ci, étant alors perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles (66).

73. — Théorème. *Deux droites* AB, CD (fig. 43) *sont parallèles, lorsque étant coupées par une troisième* EH, *elles forment avec cette troisième des angles intérieurs* AFG, CGF *supplémentaires.*

En effet : les angles BFG et CGF, étant tous deux le supplément de AFG (36), sont égaux entre eux. De même, les angles FGD et AFG, étant tous deux le supplément de CGF (36), sont égaux entre eux. Il en résulte que les branches FB et GD sont placées par rapport à EH, d'un côté de cette droite, de la même manière que les branches GC et FA sont placées de l'autre. Si par conséquent deux de ces branches se rencontraient, les deux autres se rencontreraient aussi; et les deux droites distinctes AB et CD auraient deux points communs; ce qui est impossible (12). Donc ces droites ne se rencontrent pas, et sont conséquemment parallèles.

74. — Réciproquement : *Si deux parallèles* AB *et* CD (fig. 43) *sont coupées par une sécante* EH, *les angles intérieurs* AFG, CGF *sont supplémentaires.*

Car, si cela n'était pas, on pourrait toujours, au point F, faire avec FG un angle égal au supplément de CGF, et la droite ainsi menée serait parallèle à CD en vertu du théorème précédent. On pourrait donc par un même point F mener deux parallèles à une même droite CD; ce qui est impossible (69, rem.).

75. — *Remarques.* I. Les quatre angles qui ont leur sommet en F (fig. 43) et les quatre angles qui ont leur sommet en G, forment deux groupes qui se correspondent. On nomme *angles correspondants*, ceux qui, dans ces deux groupes, occupent une position analogue : ce sont ceux qui, étant situés d'un même côté de la sécante EH, tournent leur ouverture dans le même sens. Ainsi AFE et CGF sont correspondants; il en est de même de AFG et CGH; etc.

On appelle *angles alternes-internes* ceux qui sont situés intérieurement aux parallèles, de part et d'autre de la sécante : tels sont les angles AFG et FGD, ou encore DFG et CGF.

II. Les angles intérieurs AFG et CGF étant supplémentaires, les angles correspondants sont égaux. Car AFE et CGF, par exemple, sont alors tous deux le supplément de AFG.

Réciproquement : Si deux angles correspondants sont égaux, AFE et CGF par exemple, les angles intérieurs AFG et CGF sont supplémentaires. Car AFG étant le supplément de son adjacent AFE, est aussi le supplément de CGF égal à AFE.

III. Les angles intérieurs AFG et CGF étant supplémentaires, les angles alternes-internes, tels que AFG et FGD, sont égaux. Car ils sont tous deux le supplément de CGF.

Réciproquement : Si deux angles alternes-internes sont égaux, AFG et FGD par exemple, les angles intérieurs AFG et CGF sont supplémentaires. Car CGF étant le supplément de son adjacent FGD, est aussi le supplément de AFG égal à FGD.

IV. Les remarques précédentes et les deux théorèmes qui précèdent peuvent se résumer par ces deux propositions :

1° *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles intérieurs sont supplémentaires, et les angles correspondants sont égaux, ainsi que les angles alternes-internes.*

2° *Si les angles intérieurs sont supplémentaires, ou si les angles correspondants sont égaux, ou si les angles alternes-internes le sont, les droites coupées par la sécante sont parallèles.*

76.—Théorème. *Deux angles* ABC, DEF (fig. 44) *qui*

ont leurs côtés respectivement parallèles, et l'ouverture dirigée dans le même sens, sont égaux.

Car, si l'on prolonge DE jusqu'à sa rencontre avec BC en G, les angles ABC et EGC seront égaux comme correspondants, par rapport aux parallèles AB, DG, et à la sécante BC. Les angles EGC et DEF seront égaux comme correspondants, par rapport aux parallèles BC, EF, et à la sécante DG. Les angles ABC, DEF, tous deux égaux à EGC, sont donc égaux entre eux.

Remarque. Si les angles proposés tournaient leur ouverture en sens contraire, comme ABC′ et DEF, ils seraient supplémentaires.

77.—Théorème. *Deux angles* ABC, DEF (fig. 45) *qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont égaux* (ou supplémentaires).

Par le sommet B, menons BH parallèle à ED et BG parallèle à EF; les deux angles HBG et DEF ayant leurs côtés respectivement parallèles, seront égaux (ou supplémentaires). Or, AB étant perpendiculaire à DE, l'est à sa parallèle BH; de même, BC étant perpendiculaire à EF, l'est à sa parallèle BG. Si des deux angles ABH et CBG, égaux comme droits, on retranche la partie commune ABG, les restes HBG et ABC seront égaux. Donc ABC et DEF sont égaux (ou supplémentaires).

§ II. — Propriétés du cercle relatives aux parallèles.

78.—Théorème. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 46) *interceptent sur une circonférence des arcs égaux* AC, BD.

En effet : du centre O de cette circonférence, abaissons sur les deux parallèles une perpendiculaire commune OI; le point I où elle rencontrera la circonférence sera le milieu de l'arc AB (53, coroll. 1°); il sera aussi le milieu de l'arc CD. On aura donc :

$$AI = IB \quad \text{et} \quad IC = ID;$$

d'où résulte, en retranchant ces égalités membre à membre,

$$IC - IA = ID - IB$$

ou $$AC = BD.$$

Remarques. I. Le théorème subsisterait, si l'une des deux parallèles était une tangente A′B′. Car, si l'on joint le centre au point de contact I, la ligne de jonction OI sera perpendiculaire à la tangente A′B′ (56), et par conséquent à sa parallèle CD; le point I sera donc le milieu de l'arc CID, et l'on aura IC = ID.

II. Le théorème subsisterait encore, si les deux parallèles étaient toutes deux tangentes, A′B′ et C′D′ par exemple; car si, entre ces deux droites, on leur mène une parallèle CD, on aura, en vertu de la remarque précédente, H étant le point de contact de C′D′,

$$IC = ID \quad \text{et} \quad HC = HD;$$

d'où résulte, en ajoutant ces égalités membre à membre,

$$IC + HC = ID + HD \quad \text{ou} \quad ICH = IDH.$$

On voit que, dans ce cas, chacun des deux arcs interceptés, ICH et IDH, est une demi-circonférence, et que, par conséquent, les points I et H sont les extrémités d'un même diamètre.

79. — Lorsqu'un angle, tel que ABC (fig. 47, 48 ou 49), a son sommet B sur la circonférence, et pour côtés deux cordes AB, BC, cet angle prend le nom d'*angle inscrit*.

THÉORÈME. *Tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

1° Le centre O (fig. 47) peut être situé sur l'un des côtés BC de l'angle.

Menons le diamètre DE parallèle à AB; l'angle DOC sera égal à l'angle ABC, puisqu'ils sont correspondants (75); or, l'angle au centre DOC a pour mesure l'arc DC; l'angle ABC a donc aussi la même mesure. Mais les angles DOC et BOE étant égaux comme opposés par le sommet, l'arc DC égale l'arc BE; les droites AB et DE étant parallèles, les arcs interceptés AD et BE sont égaux. Il résulte de là, que les arcs DC et AD, tous deux égaux à BE, sont égaux entre eux, et que par conséquent DC est la moitié de AC. Donc ABC a pour mesure la moitié de AC.

2° Le centre O (fig. 48) peut être situé dans l'intérieur de l'angle inscrit ABC.

Menons le diamètre BD. L'angle ABD aura pour mesure la moitié de AD, en vertu de ce qui vient d'être démontré; de même l'angle DBC aura pour mesure la moitié de DC. Donc la somme de ces deux angles, c'est-à-dire l'angle ABC, aura pour mesure la moitié de AD *plus* la moitié de DC, c'est-à-dire la moitié de AC.

3° Le centre O (fig. 49) peut être situé hors de l'angle inscrit ABC.

Menons le diamètre BD. L'angle ABD aura pour mesure la moitié de AD; l'angle CBD aura pour mesure la moitié de CD. Donc la différence de ces deux angles, c'est-à-dire l'angle ABC, aura pour mesure la moitié de AD *moins* la moitié de CD, c'est-à-dire la moitié de AD *moins* CD, ou la moitié de AC.

Donc, dans tous les cas, l'angle inscrit ABC a pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés.

80. — On appelle *segment* d'un cercle la partie de ce cercle comprise entre un arc et sa corde. Ainsi l'espace ABB′B″CA (fig. 50) est un segment; il en est de même de AMCA.

Tout angle qui a son sommet sur un arc de cercle, et dont les côtés aboutissent aux extrémités de la corde de cet arc, est dit *inscrit dans le segment* compris entre cet arc et cette corde. Ainsi l'angle ABC est inscrit dans le segment ABB′B″CA; et l'angle AMC est inscrit dans le segment AMCA.

81. — *Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux.* Les angles ABC, AB′C, AB″C, par exemple, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AMC compris entre leurs côtés; tous ces angles sont donc égaux.

On dit le segment ABB′B″CA *capable* de l'angle ABC; ce qui exprime que tous les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle ABC.

Deux angles, tels que ABC et AMC, inscrits dans les deux segments opposés, correspondants à une même corde AC, sont supplémentaires. Car ABC a pour mesure la moitié de l'arc AMC, et l'angle AMC a pour mesure la moitié de l'arc ABB′B″C; la somme de ces deux angles a donc pour mesure la moitié de la somme de ces arcs, c'est-à-dire la moitié de la circonférence entière, ou deux quadrans. La somme de ces deux angles équivaut donc à deux angles droits.

82. — *Tout angle* ABC (fig. 51) *inscrit dans un demi-cercle, est droit.*

En effet, il a pour mesure la moitié de AMC, ou la moitié d'une demi-circonférence, c'est-à-dire un quadrans.

83. — Cette propriété fournit un nouveau moyen de *mener, par un point extérieur* A (fig. 52), *une tangente à une circonférence* O.

Pour cela, joignons AO; et sur cette droite, comme diamètre, décrivons une circonférence, qui coupera la première aux points B et B′. Tirons AB; ce sera une tangente à la circonférence O. Car, si l'on joint BO, l'angle ABO, inscrit dans une demi-circonférence, sera droit; et la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB, sera une tangente.

On aurait une seconde tangente en joignant A au point B′.

84. — THÉORÈME. *L'angle* ABC (fig. 53) *formé par une tangente* AB, *et par une corde* BC *aboutissant au point de tangence, a pour mesure la moitié de l'arc* BmC *sous-tendu par cette corde.*

En effet : par le point C, menons CD parallèle à AB; les angles ABC et BCD seront égaux comme alternes-internes. L'angle inscrit BCD a pour mesure la moitié de BD; or, les arcs BD et BC sont égaux comme interceptés par les parallèles AA′ et CD. Donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

Remarque. L'angle A′BC a pour mesure la moitié de l'arc BDC sous-tendu par la corde BC. Car les deux angles adjacents ABC et A′BC étant supplémentaires, leur somme a pour mesure deux quadrans, ou la moitié de la circonférence; le premier ABC ayant pour mesure la moitié de B*m* C, le second a donc pour mesure la moitié du reste de la circonférence, ou la moitié de BDC.

On voit donc que le théorème subsiste pour un angle obtus comme pour un angle aigu.

§ III. — Applications.

85. — Nous avons différé jusqu'ici d'indiquer quelques-unes des applications des perpendiculaires, des parallèles et des propriétés du cercle qui s'y rapportent : elles sont empruntées au dessin linéaire.

On emploie dans les ornements de l'architecture des parties saillantes qui ont reçu en général le nom de *moulures*, et l'on étend ce nom aux figures planes qui en représentent le profil. Les moulures sont droites, circulaires ou composées, suivant qu'on y fait usage de la ligne droite, du cercle, ou de l'un et de l'autre à la fois.

Parmi les moulures droites, on distingue :

Le *filet* ou *listel* (fig. 54). Il est limité en dessus et en dessous par deux droites parallèles, toutes deux perpendiculaires à la droite sur laquelle le filet doit faire saillie. Cette saillie est égale à l'épaisseur du filet.

La *plate-bande* (fig. 55). C'est une moulure analogue au filet, mais dont l'épaisseur est un multiple de la saillie.

86. — On distingue un plus grand nombre de moulures circulaires :

La *baguette* (fig. 56). On y remarque ce qu'en terme d'art on appelle le *raccordement* d'une demi-circonférence avec deux droites parallèles ; c'est-à-dire que cette demi-circonférence se réunit tangentiellement avec chacune des deux droites.

La *gorge* (fig. 57). On observe ici le même raccordement ; mais la demi-circonférence a une position inverse.

Le *quart de rond* (fig. 58) ; le *quart de rond renversé* (fig. 59) ; le *cavet* (fig. 60) ; le *cavet renversé* (fig. 61). L'inspection de ces figures suffit pour en faire comprendre le tracé.

Le *talon droit* (fig. 62) ; le *talon renversé* (fig. 63) ; la *doucine* (fig. 64) ; la *doucine renversée* (fig. 65). Ces moulures offrent l'exemple de deux circonférences égales, tangentes extérieurement, mais dont un quadrans seulement est employé dans la figure.

La *scotie* (fig. 66) ; la *scotie renversée* (fig. 67). On trouve dans ces moulures deux circonférences inégales qui se *raccordent* intérieurement, c'est-à-dire qui sont tangentes intérieurement. L'un des rayons est le double de l'autre, et un quart seulement de chaque circonférence est employé dans chaque moulure.

87. — La figure 68 offre un exemple de moulure composée. On y distingue successivement : 1° un filet ; 2° un quart de rond ; 3° une baguette ; 4° un *orle*, sorte de filet sans saillie ; et 5° un congé.

88. — La figure 69 représente une *arcade*. Elle offre un nouvel exemple d'une demi-circonférence qui se raccorde avec deux droites parallèles.

La courbe indiquée par la figure 70 est celle que l'on nomme *anse de panier* ou courbe à trois centres. Pour la tracer, on porte sur une droite indéfinie trois longueurs égales AB, BC, CD ; des points B et C comme centres, avec BC pour rayon, on décrit deux arcs de cercle dont la rencontre détermine le point O ; on tire les droites OB et OC, que l'on prolonge au-dessus de AD. Cela fait, des points B et C comme centres, avec le même rayon BC, on décrit les arcs AM et DN. Il est facile de voir que chacune des longueurs OM et ON ainsi obtenues est le double de BC ; si donc, du point O comme centre, avec OM ou ON pour rayon, on décrit l'arc MN, il se raccordera en M et en N avec les deux premiers.

On voit que chacune des circonférences décrites des points B et C est tangente intérieurement à celle qui est décrite du point O.

En répétant le même tracé en dessous, on obtient la courbe connue dans les arts sous le nom d'*ovale* (fig. 71).

CHAPITRE V.

Des droites coupées par des parallèles, et des lignes proportionnelles en général.

§ 1. — Des droites coupées par des parallèles.

89. — THÉORÈME. *Les portions* AC *et* BD (fig. 72) *de deux parallèles, comprises entre deux autres parallèles* AB *et* CD, *sont égales.*

Pour le démontrer, abaissons des points A et B, sur CD et sur son prolongement, les perpendiculaires AI et BH. Ces perpendiculaires seront égales, puisque deux parallèles sont partout également distantes (70); de plus, elles seront parallèles entre elles (66), et les angles CAI et DBH seront égaux, comme ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun (76). Cela posé, concevons que l'on transporte la figure DBH sur la figure CAI, de manière que BH coïncide avec son égale AI. Les angles CAI et DBH étant égaux, BD prendra la direction de AC, et le point D tombera quelque part sur AC; mais les angles AIC et BHD étant égaux comme droits, HD prendra la direction de IC, et le point D tombera quelque part sur IC. Le point D devant tomber à la fois sur AC et sur IC, tombera à leur point d'intersection C. Donc les droites BD et AC coïncideront; donc elles sont égales.

Remarque. On démontrerait de la même manière que AB et CD sont égaux.

90. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Si, sur deux parallèles, on prend les longueurs égales* AC, BD (fig. 73), *les droites* AB *et* CD, *qui joignent les extrémités de ces longueurs, sont parallèles.*

Car si AB n'était pas parallèle à CD, soit AI cette parallèle. En vertu de la proposition précédente, on aurait AC = ID; mais, par hypothèse, on a AC = BD; il faudrait donc qu'on eût ID = BD, ce qui est impossible. Donc AB est elle-même parallèle à CD.

91. — LEMME. *Lorsque deux droites* AG, BH (fig. 74) *sont coupées par des parallèles* AB, CD, EF, GH, etc., *si les parties* AC, CE, EG, etc., *de l'une sont égales, les parties* BD, DF, FH, etc., *de l'autre sont égales aussi.*

Pour démontrer, par exemple, que BD égale DF, menons BI et DK parallèles à AG. En vertu du théorème du n° 89, on aura BI = AC, et DK = CE; mais, par hypothèse, AC = CE : donc BI = DK. Cela posé, si l'on transporte la figure BID sur la figure DKF, de manière que BI coïncide avec son égal DK, les angles IBD et KDF étant égaux comme correspondants, BD prendra la direction de DF, et le point D tombera quelque part sur DF. Mais les angles BID et DKF étant égaux, comme ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun, ID prendra la direction de KF, et le point D tombera quelque part sur KF. Le point D devant tomber à la fois sur DF et sur KF, tombera à leur intersection F. Donc les droites BD et DF coïncideront; donc elles sont égales.

On démontrerait de la même manière que DF égale FH; et ainsi de suite.

92. — THÉORÈME. *Deux droites quelconques* AE, BF (fig. 73) *sont coupées proportionnellement par des parallèles* AB, CD, DF.

Évaluons AC et CE, à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact; et, pour fixer les idées, supposons que AC contienne 3 fois l'unité, et CE 5 fois. Après avoir divisé ces longueurs en parties égales à l'unité, menons par tous les points de division des parallèles à AB. Ces parallèles détermineront sur BF une suite de parties qui seront égales entre elles d'après le lemme précédent; BD contiendra 3 de ces parties, et DF en contiendra 5 : ces lignes seront donc entre elles comme 3 est à 5. Mais déjà les lignes AC et CE sont entre elles comme 3 est à 5 : on aura donc la proportion

$$AC : CE :: BD : DF,$$

qui revient à l'énoncé du théorème.

Corollaire I. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 76) *coupent proportionnellement les côtés d'un angle* COD.

Car, si l'on prolonge les droites AB et CD, qu'on leur mène une parallèle par le point O, et que l'on coupe les trois parallèles par une droite O′B′D′ parallèle à OBD, on aura, en vertu du théorème précédent :

$$OA : AC :: O'B' : B'D';$$

mais $O'B' = OB$, comme parallèles comprises entre parallèles : de même $B'D' = BD$. On peut donc écrire :

$$OA : AC :: OB : BD.$$

Corollaire II. De cette proportion, on tire

$$OA : OA + AC :: OB : OB + BD;$$

ou

$$OA : OC :: OB : OD,$$

c'est-à-dire que, *lorsque deux parallèles* AB, CD *coupent les côtés d'un angle* COD, *les distances du sommet de l'angle, aux points d'intersection de ses côtés avec les parallèles, sont dans un même rapport.*

On fait un fréquent usage de cette proposition.

93. — Réciproque du corollaire I du théorème précédent. *Si deux droites* AB, CD (fig. 77) *coupent proportionnellement les côtés d'un angle* COD, *ces droites sont parallèles.*

Car si AB n'était pas parallèle à CD, soit AI cette parallèle. En vertu de la proposition directe on aurait

$$OA : AC :: OI : ID.$$

Mais on a par hypothèse

$$OA : AC :: OB : BD.$$

A cause du rapport commun on pourrait donc écrire

$$OI : ID :: OB : BD;$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$OI : OB :: ID : BD.$$

Or, OI est moindre que OB, tandis que ID est plus grand que BD; cette dernière proportion est donc fausse. Donc une droite AI, différente de AB, ne saurait être menée par le point A parallèlement à CD; donc AB est elle-même cette parallèle.

94. — Théorème. *Les parties* AB *et* CD (fig. 78) *de deux parallèles comprises entre les côtés d'un angle* COD, *sont entre elles comme les distances* OB *et* OD *du sommet de cet angle aux points d'intersection de l'un quelconque de ses côtés avec les deux parallèles.*

Pour le démontrer, menons BI parallèle à OC. En vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) nous aurons

$$CI : ID :: OB : BD;$$

d'où l'on tire :

$$CI : CI + ID :: OB : OB + BD$$

ou

$$CI : CD :: OB : OD.$$

Mais AB et CI sont égaux comme parallèles comprises entre parallèles; on peut donc écrire :

$$AB : CD :: OB : OD.$$

Remarque. On aurait de même :

AB : CD :: OA : OC.

95. — Théorème. *Deux parallèles* AB, CD (fig. 79) *sont coupées proportionnellement par une série de sécantes* OC, OG, OH, OD, *issues d'un même point* O.

Soient, en effet, E, F, G, H, les points où les sécantes intermédiaires rencontrent les deux parallèles. En vertu du théorème qui précède, on aura :

AE : CG :: OE : OG
EF : GH :: OE : OG, ou :: OF : OH
FB : HD :: OF : OH.

Mais, les côtés de l'angle GOH étant coupés proportionnellement par les deux parallèles (92, coroll. I), les seconds rapports des proportions qui précèdent sont égaux. Il en est donc de même des premiers, et l'on peut écrire :

AE : CG :: EF : GH :: FB : HD

ou AE : EF : FB :: CG : GH : HD;

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — Propriétés du cercle qui se rapportent aux lignes proportionnelles.

96. — Théorème. *Si par un point* O (fig. 80), *pris hors d'une circonférence, on lui mène une tangente* OA *et une sécante* OC, *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière* OC *et sa partie extérieure* OB.

Joignons, en effet, AB et AC. L'angle OAB, formé par une tangente OA et une corde AB aboutissant au point de tangence, a pour mesure la moitié de l'arc AB (84); l'angle inscrit BCA a la même mesure (79); donc ces deux angles sont égaux.

Cela posé, retournons la figure OAB sur elle-même, de manière que OA vienne prendre la position OA′, et OB la position OB′. L'angle OA′B′, qui est le même que OAB, étant égal à OCA, et ces angles ayant la position de correspondants, il en résulte que les droites A′B′ et CA sont parallèles (73, 75). On a donc, en vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) :

OB′ : OA :: OA′ : OC.

Remplaçant OB′ par son égal OB, et OA′ par son égal OA, il vient :

OB : OA :: OA : OC;

c'est-à-dire que OA est moyen proportionnel entre OC et OB.

97. — Théorème. *Si, par un point* O (fig. 81), *extérieur à une circonférence, on lui mène deux sécantes* OC *et* OE, *ces sécantes sont, en raison inverse de leurs parties extérieures,* OB *et* OD.

Car si l'on mène la tangente OA, on aura, d'après le théorème précédent :

OB : OA :: OA : OC

et OD : OA :: OA : OE.

Dans ces deux proportions le produit des moyens étant le même, les produits des extrêmes sont égaux ; et l'on a :

$$OB \times OC = OD \times OE;$$

d'où l'on tire la proportion

OC : OE :: OD : OB,

qui revient à l'énoncé du théorème.

98. — Théorème. *Si deux cordes* AB *et* CD (fig. 82) *se coupent dans un cercle, leurs parties sont inversement proportionnelles.*

Joignons, en effet, BC et AD; les angles inscrits B et D seront égaux comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc AC (79).

Cela posé, renversons la figure COB sur AOD, de manière que les angles en O, qui sont égaux comme opposés par le sommet, coïncident; OC prendra la position OC'; OB la position OB', et BC la position B'C'. L'angle OB'C', qui n'est autre que l'angle B, étant égal à l'angle D, et ces angles ayant la position de correspondants, les droites B'C' et DA sont parallèles (73, 75); on a donc, en vertu du théorème du n° 92 (coroll. I) :

$$OA : OC' :: OD : OB'.$$

Remplaçant OC' par son égal OC, et OB' par son égal OB, il vient :

$$OA : OC :: OD : OB,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

99. — Corollaire. *La perpendiculaire* CI (fig. 83) *abaissée d'un point d'une circonférence sur un diamètre quelconque* AB, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* AI *et* IB *de ce diamètre.*

Prolongeons en effet la perpendiculaire CI jusqu'en D. Le diamètre AB étant perpendiculaire sur la corde CD, la divise en deux parties égales; ainsi CI = ID (53, coroll. I). Mais AB et CD étant deux cordes qui se coupent dans le cercle, on a, en vertu du théorème précédent :

$$AI : IC :: ID : IB,$$

ou, en remplaçant ID par son égal IC,

$$AI : IC :: IC : IB,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

§ III. — Problèmes sur les lignes proportionnelles.

100. — Problème I. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* a, b, c (fig. 84).

On se propose, dans ce problème, de trouver une ligne telle qu'en la représentant par x, on ait la proportion

$$a : b :: c : x.$$

Pour y parvenir, tirons deux droites indéfinies OX et OY sous un angle quelconque. Sur OX, prenons $OA = a$, et $AB = b$. Sur OY, prenons $OC = c$. Joignons AC, et menons BD parallèle à AC. La ligne CD sera la quatrième proportionnelle demandée; car les parallèles AC et BD coupant proportionnellement les côtés de l'angle BOD, on a (92, coroll. I) :

$$OA : AB :: OC : CD,$$

ou

$$a : b :: c : CD.$$

La ligne CD est donc la ligne cherchée.

101. — Problème II. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données* a *et* b.

On se propose de trouver une ligne, telle qu'en la désignant par x, on ait la proportion

$$a : b :: b : x.$$

Ce problème ne diffère du précédent, qu'en ce que c est égal à b. On tracera donc deux droites OX et OY (fig. 84) sous un angle quelconque; on prendra $OA = a$, $AB = b$, $OC = b$; on joindra AC; on mènera BD parallèle à AC, et la ligne BD sera la troisième proportionnelle demandée, puisque, à cause des parallèles AC et BD, on aura la proportion

$$OA : AB :: OC : CD,$$

ou

$$a : b :: b : CD.$$

102. — PROBLÈME III. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* a *et* b (fig. 85).

On se propose, dans ce problème, de trouver une ligne telle qu'en la désignant par x on ait la proportion

$$a : x :: x : b.$$

Pour y parvenir, portons, sur une droite indéfinie, une longueur AB égale à a, et à la suite une longueur BC égale à b. Sur AC comme diamètre décrivons une demi-circonférence. Au point B élevons sur AC la perpendiculaire BD, terminée à la circonférence. Cette perpendiculaire BD sera la moyenne proportionnelle demandée; car, en vertu de la proposition du n° 99, on aura

$$AB : BD :: BD : BC$$

ou

$$a : BD :: BD : b.$$

103. — PROBLÈME IV. *Diviser une droite en parties égales.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de diviser une droite donnée AB (fig. 86) en 5 parties égales.

Par le point A menons une droite indéfinie AX faisant avec AB un angle quelconque. Sur cette droite indéfinie portons de A en C cinq longueurs arbitraires égales entre elles. Joignons CB, et par tous les points de division de AC menons des parallèles à CB; ces parallèles diviseront la droite AB en cinq parties égales (91).

104. — PROBLÈME V. *Diviser une droite en parties proportionnelles à des lignes données.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de diviser une droite donnée AB (fig. 87) en parties proportionnelles à trois lignes données a, b, c.

Pour cela, menons par le point A une droite indéfinie AX faisant avec AB un angle quelconque. Prenons, sur cette droite, $AC=a$, $CD=b$, $DE=c$. Joignons BE; et par les points C et D menons CF et DG parallèles à BE. La droite AB sera divisée aux points F et G en parties proportionnelles aux lignes données.

Car on aura, en vertu du premier corollaire de la proposition du n° 92,

$$AF : FG :: AC : CD \quad \text{ou} \quad AF : AC :: FG : CD;$$

et, en vertu de cette proposition même,

$$FG : GB :: CD : DE \quad \text{ou} \quad FG : CD :: GB : DE;$$

et, à cause du rapport commun,

$$AF : AC :: FG : CD :: GB : DE$$

ou

$$AF : FG : GB :: AC : CD : DE$$

ou enfin

$$AF : FG : GB :: a : b : c.$$

Remarque. On pourrait demander de diviser une droite AB en parties proportionnelles à des *nombres* donnés m, n, p par exemple. Pour y parvenir on choisirait une unité de longueur arbitraire; on porterait sur AX, de A en C un nombre m d'unités de longueur, de C en D un nombre n de ces unités, et de D en E un nombre p de ces mêmes unités. On diviserait, comme ci-dessus, la ligne AB en parties proportionnelles aux lignes AC, CD, DE; ces parties seraient en même temps proportionnelles aux nombres donnés m, n, p.

105. — PROBLÈME VI. *Diviser une droite donnée* AB (fig. 88) *en moyenne et en extrême raison.*

On entend par là, déterminer sur AB un point I, divisant cette droite en deux parties telles que la plus grande AI soit moyenne proportionnelle entre la plus petite partie IB et la ligne entière AB.

Pour y parvenir, élevons au point B une perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence. Par les points A et O faisons passer une droite, qui coupera la circonférence aux points C et D. Du point A comme centre, avec AC pour rayon, décrivons l'arc CI qui coupera AB en un point I. Ce point sera le point de division demandé.

En effet : remarquons d'abord que le rayon OB étant la moitié de AB, le diamètre CD est égal à AB. Remarquons en second lieu que la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB est tangente à la circonférence. Or, en vertu de la proposition du nº 96 on a

$$AD : AB :: AB : AC \qquad (1);$$

d'où l'on tire

$$AD - AB : AB :: AB - AC : AC \qquad (2).$$

Mais AD — AB est égal à AD — CD, c'est-à-dire à AC ou à son égal AI. D'un autre côté AB — AC est égal à AB — AI ou à IB. Enfin, le dernier terme AC peut être remplacé par AI. La proportion (2) peut donc s'écrire

$$AI : AB :: IB : AI$$

ou, en mettant les moyens à la place des extrêmes *et vice versâ*,

$$AB : AI :: AI : IB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

DEUXIÈME SECTION.

DES FIGURES PLANES.

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles.

§ I. — Propriétés principales des triangles.

106. — On donne le nom de *figure plane* à toute portion de plan terminée par des lignes.

On donne le nom de *triangle* à toute portion de plan terminée par trois lignes droites. Ainsi ABC (fig. 89) est un triangle. Les trois droites AB, AC, BC qui terminent ce triangle sont ses *côtés*; les sommets A, B, C de ses trois angles sont ce qu'on appelle les *sommets* du triangle.

107. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle équivaut à deux angles droits.*

Soit ABC (fig. 89) un triangle quelconque. Prolongeons le côté AC, et par le sommet C menons CE parallèle à AB.

Les angles ABC et BCE seront égaux comme alternes-internes; les angles BAC et ECD seront égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des trois angles BCA, BCE, ECD formés au point C d'un même côté de AD. Or, cette dernière somme équivaut à deux angles droits; donc la somme des trois angles du triangle équivaut à deux angles droits.

Corollaire I. Étant donnés deux angles d'un triangle, on

On entend par là, déterminer sur AB un point I, divisant cette droite en deux parties telles que la plus grande AI soit moyenne proportionnelle entre la plus petite partie IB et la ligne entière AB.

Pour y parvenir, élevons au point B une perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence. Par les points A et O faisons passer une droite, qui coupera la circonférence aux points C et D. Du point A comme centre, avec AC pour rayon, décrivons l'arc CI qui coupera AB en un point I. Ce point sera le point de division demandé.

En effet : remarquons d'abord que le rayon OB étant la moitié de AB, le diamètre CD est égal à AB. Remarquons en second lieu que la droite AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB est tangente à la circonférence. Or, en vertu de la proposition du n° 96 on a

$$AD : AB :: AB : AC \qquad (1);$$

d'où l'on tire

$$AD - AB : AB :: AB - AC : AC \qquad (2).$$

Mais AD — AB est égal à AD — CD, c'est-à-dire à AC ou à son égal AI. D'un autre côté AB — AC est égal à AB — AI ou à IB. Enfin, le dernier terme AC peut être remplacé par AI. La proportion (2) peut donc s'écrire

$$AI : AB :: IB : AI$$

ou, en mettant les moyens à la place des extrêmes *et vice versâ*,

$$AB : AI :: AI : IB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

DEUXIÈME SECTION.

DES FIGURES PLANES.

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles.

§ I. — Propriétés principales des triangles.

106. — On donne le nom de *figure plane* à toute portion de plan terminée par des lignes.

On donne le nom de *triangle* à toute portion de plan terminée par trois lignes droites. Ainsi ABC (fig. 89) est un triangle. Les trois droites AB, AC, BC qui terminent ce triangle sont ses *côtés ;* les sommets A, B, C de ses trois angles sont ce qu'on appelle les *sommets* du triangle.

107. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle équivaut à deux angles droits.*

Soit ABC (fig. 89) un triangle quelconque. Prolongeons le côté AC, et par le sommet C menons CE parallèle à AB.

Les angles ABC et BCE seront égaux comme alternes-internes; les angles BAC et ECD seront égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des trois angles BCA, BCE, ECD formés au point C d'un même côté de AD. Or, cette dernière somme équivaut à deux angles droits; donc la somme des trois angles du triangle équivaut à deux angles droits.

Corollaire I. Étant donnés deux angles d'un triangle, on peut obtenir le troisième. Car si l'on fait la somme des deux angles donnés, le supplément de cette somme sera le troisième angle cherché.

Si les deux angles sont donnés en degrés, en retranchant leur somme de 180° on aura le troisième angle. Si, par exemple, les deux angles donnés ont pour valeurs $25^\circ\ 38'\ 13''$ et $132^\circ\ 17'\ 49''$, leur somme sera $157^\circ\ 56'\ 2''$; l'excès de 180° sur cette somme étant $22^\circ\ 3'\ 58''$, ce sera la valeur de l'angle demandé.

COROLLAIRE II. Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit, ou plus d'un angle obtus; car dans l'un ou l'autre cas la somme de ses trois angles surpasserait deux angles droits.

Un triangle qui a un angle droit est dit *rectangle*. Ainsi ABC (fig. 90) est un triangle rectangle. Le côté BC, opposé à l'angle droit, se nomme l'*hypoténuse* du triangle. La somme des deux angles B et C équivaut à un angle droit : on dit alors que ces angles sont *complémentaires* ou que chacun d'eux est le *complément* de l'autre.

COROLLAIRE III. On appelle angle *extérieur* à un triangle, un angle tel que BCD (fig. 89) formé par un côté BC et par le prolongement CD de l'un des deux autres.

Tout angle extérieur à un triangle équivaut à la somme des deux intérieurs opposés.

Car l'angle BCD étant la somme des deux angles ECD et BCE, équivaut à la somme des angles A et B.

108. — THÉORÈME. *Dans tout triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

La première partie de cet énoncé est évidente, d'après la définition de la ligne droite. La seconde est une conséquence de la première.

Car si a, b, c, désignent les trois côtés, supposés rangés par ordre de grandeur, le plus grand le premier, on aura :

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b.$$

De la première inégalité on tire

$$a - c < b \quad \text{et} \quad a - b < c.$$

La seconde donne, à son tour,

$$b - c < a.$$

Ces trois dernières inégalités démontrent la seconde partie du théorème.

109. — On nomme triangle *isocèle* un triangle qui a deux côtés égaux. Le troisième côté se nomme la *base* du triangle.

THÉORÈME. *Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit ABC (fig. 91) un triangle isocèle, et soient CA et CB les côtés égaux. Joignons le sommet C au milieu I de la base; la droite CI ayant deux de ses points, C et I, également distants des extrémités de AB, sera perpendiculaire sur AB. Faisons tourner CIB autour de CI comme charnière; les angles en I étant droits, la droite IB viendra s'appliquer sur IA, et, comme I est le milieu de AB, le point B tombera en A; d'ailleurs, le point C n'aura point changé de place; les droites CB et CA ayant ainsi les mêmes extrémités, coïncideront. Il en sera de même des angles CBI et CAI; donc ces angles sont égaux.

110. — RÉCIPROQUE DE LA PROPOSITION PRÉCÉDENTE. *Si, dans un triangle* ABC (fig. 91), *deux angles*, A et B, *sont égaux, les côtés* CB, CA, *opposés à ces angles, sont égaux, et le triangle est isocèle.*

Pour le prouver, élevons au milieu I de AB une perpendiculaire à cette droite, et ployons la figure le long de cette perpendiculaire. Les angles en I étant droits, IB prendra la direction de IA; et le point I étant le milieu de AB, le point B tombera en A. Les angles B et A étant égaux par hypothèse, le côté Bb prendra la direction du côté Aa; ces deux droites coïncidant, rencontreront la perpendiculaire en un même point C; or, ce point est à égale distance des extrémités de AB : donc les côtés CB et CA sont égaux.

111. — Un triangle *isocèle* peut être en même temps *rectangle*. L'angle A (fig. 92) opposé à la base est l'angle droit; les deux autres, B et C, étant égaux et complémentaires, valent chacun la moitié d'un angle droit ou 45°.

112. — On nomme triangle *équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux (fig. 93). Il résulte du théorème du n° 109 que les trois angles sont alors égaux, et que chacun d'eux vaut le tiers de 2 angles droits, ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit, ou 60°.

La proposition du n° 110 prouve que si un triangle est *équiangle*, c'est-à-dire s'il a ses trois angles égaux, il est aussi *équilatéral*.

113. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.*

Soient ABC et DEF (fig. 94) deux triangles qui ont AB = DE, AC = DF et BC = EF.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que EF coïncide avec son égal AC. Les côtés BA et ED étant égaux, les points A et D seront également distants du point B, et se trouveront par conséquent sur la circonférence que l'on décrirait du point B comme centre avec BA pour rayon. Les côtés CA et FD étant égaux, les points A et D se trouveront de même sur la circonférence que l'on décrirait du point C comme centre avec CA pour rayon. Or, deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus d'un point commun d'un même côté de la ligne des centres : il faudra donc que les points D et A coïncident. Par suite, les deux triangles coïncideront, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît ses trois côtés.

Problème. *Construire un triangle, connaissant ses trois côtés.*

Désignons par m, n, p, les trois côtés donnés. Tirez une droite BC (fig. 94) égale à m. Des points B et C comme centres, avec des rayons respectivement égaux à n et à p, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en un point A. Joignez AB et AC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

Remarque. Ces deux arcs de cercle se couperont; car, si le triangle est possible, on aura (108) : $m < n + p$ et $m > n - p$, c'est-à-dire que la distance des centres BC, sera plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence.

114. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal.*

Soient (fig. 94) AB = ED, BC = EF et l'angle B = E.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que les angles B et E coïncident; à cause des égalités ci-dessus, le point D tombera en A, et le point F en C : donc DF coïncidera avec AC. Les deux triangles coïncideront donc dans toute leur étendue, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît deux de ses côtés et l'angle qu'ils comprennent.

Problème. *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.*

Faites l'angle ABC (fig. 94) égal à l'angle donné; prenez BA et BC, respectivement égaux aux deux côtés donnés, et joignez AC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

115. — Théorème. *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, celui des deux dans lequel l'angle compris est le plus grand, est aussi celui où le troisième côté est le plus grand.*

Soient ABC et ABD (fig. 94 *bis*) les deux triangles proposés, dans lesquels nous supposerons $AC = AD$ et l'angle $BAC > BAD$. On pourra toujours les placer, comme l'indique la figure, de manière que deux des côtés égaux coïncident.

Menons la bissectrice AI de l'angle total DAC; elle tombera nécessairement dans le plus grand angle BAC, et coupera le côté BC en un point I. Joignons DI. Les triangles DAI et IAC seront égaux, comme ayant un angle égal, $DAI = IAC$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir AI commun, et $DA = AC$. On aura donc $DI = IC$.

Mais on a évidemment :

$$BD < DI + IB, \quad \text{ou} \quad BD < IC + IB,$$

ou enfin $$BD < BC;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. De cette proposition et de celle du n° 114 résulte immédiatement cette réciproque : *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, celui des deux dans lequel le troisième côté est le plus grand, est aussi celui où l'angle compris entre les deux premiers est le plus grand.*

116. — Théorème. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, aboutissant à deux angles égaux chacun à chacun.*

Soient (fig. 94) $BC = EF$, l'angle $B = E$ et l'angle $C = F$. Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que EF coïncide avec son égal BC. Les angles B et E étant égaux, le côté ED prendra la direction BA, et le point D tombera quelque part sur BA. Les angles F et C étant égaux, le côté FD prendra la direction de CA, et le point D tombera quelque part sur CA. Le point D devant tomber à la fois sur BA et sur CA, ne pourra tomber qu'au point A : donc les deux triangles coïncideront, et sont par conséquent égaux.

Corollaire. Un triangle est déterminé quand on connaît un de ses côtés et les angles auxquels il aboutit.

Problème. *Construire un triangle, connaissant un côté et les deux angles auxquels il aboutit.*

Tirez une droite AC (fig. 94) égale au côté donné. Au point B, faites l'angle CBA égal à l'un des deux angles donnés; au point C, faites l'angle BCA égal au second angle donné. Les droites BA et CA se couperont en un point A qui déterminera le triangle ABC demandé.

Remarque. Les droites menées ainsi par les points B et C se rencontreront; car, si le triangle est possible, la somme des deux angles donnés sera moindre que deux angles droits.

117. — Théorème. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Soient ABC et DEF (fig. 90) les deux triangles rectangles en A et en D; et soient $BC = EF$ et $AB = DE$.

Portons le triangle DEF sur ABC, de manière que DE et AB coïncident. Les angles D et A étant droits, le côté DF prendra la direction de AC. Je dis, de plus, que le point F tombera en C; car, si cela n'était pas, les droites EF et BC seraient des obliques s'écartant inégalement du pied A de la perpendiculaire BA : ces obliques seraient donc inégales, ce qui est contraire à la supposition.

Corollaire. Un triangle rectangle est déterminé quand on connaît l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.

Problème. *Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.*

Faites l'angle droit BAC (fig. 90). Sur l'un d'eux, prenez AB égal au côté donné; du point B comme centre, avec un rayon égal à l'hypoténuse donnée, décrivez un arc de cercle qui coupera AC en un certain point C. Joignez BC; le triangle ABC sera le triangle demandé.

Remarque. L'arc de cercle ainsi décrit coupera la ligne AC; car, si le triangle est possible, l'hypoténuse sera une oblique plus grande que le côté donné.

§ II. — Des triangles semblables.

118. — Deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun sont dits *équiangles entre eux*, et sont ce que l'on appelle des triangles *semblables*. Les côtés opposés aux angles égaux sont les *côtés homologues* de ces triangles; les sommets des angles égaux sont les *sommets homologues*.

THÉORÈME. *Deux triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels.*

Soient ABC et abc (fig. 95) deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, savoir : $A=a$, $B=b$, et $C=c$.

Portons le triangle abc sur ABC, de manière que les angles égaux, A et a, coïncident, et que les autres angles égaux se correspondent. Le côté ab prendra la position AD, le côté ac la position AE, et le côté bc la position DE. Les angles abc et ABC étant égaux par hypothèse, il en sera de même des angles ADE et ABC. Or, ces derniers sont correspondants; il en résulte que les droites DE et BC sont parallèles. On a donc (92, 94) :

$$AD : AB :: AE : AC \quad \text{ou} \quad ab : AB :: ac : AC$$
$$\text{et} \quad DE : BC :: AD : AB \quad \text{ou} \quad bc : BC :: ab : AB;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

119. — RÉCIPROQUE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. *Deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont semblables.*

Supposons, en effet, que l'on ait (fig. 95) les proportions :

$$(1) \quad ac : AC :: ab : AB \quad \text{et} \quad bc : BC :: ab : AB \quad (2).$$

Prenons sur AB une longueur AD égale à ab, et par le point D menons DE parallèle à BC. Les triangles ADE et ABC seront semblables, car ils ont l'angle A commun, et de plus les angles ADE et ABC égaux comme correspondants, ainsi que les angles AED et ACB.

Mais, à cause des parallèles, on a

$$(3) \quad AE : AC :: AD : AB \quad \text{et} \quad DE : BC :: AD : AB \quad (4).$$

Les proportions (1) et (3) ont les trois derniers termes égaux, donc le premier terme est le même, et l'on a $AE = ac$.

De même, les proportions (2) et (4) ont les trois derniers termes égaux; on a donc $DE = bc$.

Il en résulte que les triangles ADE et abc sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Mais ADE est semblable à ABC; donc il en est de même de abc.

120. — THÉORÈME. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels.*

Supposons, en effet, que l'on ait (fig. 95) l'angle $A=a$, et la proportion

$$ac : AC :: ab : AB.$$

Prenons, comme dans la démonstration précédente, une longueur AD égale à ab, et menons DE parallèle à BC. Les triangles ADE et ABC seront semblables, puisqu'ils ont l'angle A commun et les angles ADE et ABC égaux comme correspondants.

On aura ainsi :

$$AE : AC :: AD : AB.$$

Cette proportion et la précédente ayant les trois derniers termes égaux, il s'ensuit que le premier terme est le même, et qu'on a $AE = ac$.

Les deux triangles ADE et *abc* sont donc égaux, comme ayant un angle égal $A = a$, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Mais ADE est semblable à ABC; donc il en est de même de *abc*.

121.—THÉORÈME. *Si du sommet* A (fig. 96) *de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse, on forme deux triangles partiels* ADB, ADC *semblables au triangle total.*

Car les triangles ADB et ABC, par exemple, sont tous deux rectangles, l'un en D, l'autre en A, et de plus ils ont l'angle B commun; par suite (107), le troisième angle BAD de l'un est égal au troisième angle ACB de l'autre. Ces deux triangles sont donc équiangles entre eux, ou semblables.

On démontrerait de même que ADC est semblable à ABC.

COROLLAIRE I. *Les triangles partiels sont semblables entre eux*, comme semblables tous deux au triangle total.

122.—COROLLAIRE II. *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et la partie de cette hypoténuse qui lui est adjacente.*

En effet : si l'on considère les triangles ABD et ABC, et qu'on leur applique le théorème du n° 118, on pourra écrire

$$BD : AB :: AB : BC.$$

Car BD et AB étant opposés aux angles égaux BAD, ACB, sont homologues, et il en est de même des hypoténuses AB et BC.

123.—COROLLAIRE III. *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypoténuse.*

En effet : la similitude des triangles partiels donne la proportion

$$BD : AD :: AD : DC.$$

Car BD et AD sont homologues, comme étant opposés aux angles égaux BAD et ACD; de même AD et DC sont homologues, comme étant opposés aux angles égaux ABD et DAC.

§ III. — Application à la mesure des distances inaccessibles.

124.—Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer la distance de deux points A et B (fig. 97), séparés par un obstacle qu'on ne peut franchir. On choisit sur le terrain un troisième point C, tel que la distance BC soit directement mesurable. Cette distance est ce qu'on nomme la *base* de l'opération. On mesure au graphomètre les angles ABC et ACB formés par la base BC avec les rayons visuels menés de ses extrémités au point inaccessible A.

On tire ensuite sur le papier une droite indéfinie sur laquelle on prend une longueur *bc* qui ait avec BC un rapport connu; qui contienne, par exemple, autant de millimètres que BC contient de mètres. Aux points *b* et *c*, on fait, à l'aide du rapporteur, des angles respectivement égaux à ceux qui ont été mesurés au graphomètre. On forme ainsi un petit triangle *abc* semblable à ABC, car ces triangles ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont équiangles entre eux. On mesure *ab*, et le nombre de millimètres contenus dans cette ligne, exprime le nombre de mètres contenus dans la distance inaccessible AB.

Car, en vertu de la similitude des deux triangles, on a (118)

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Or, BC vaut 1000 fois *bc*; donc AB vaut 1000 fois *ab*.

125. — Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de mesurer la distance de deux points inaccessibles A et B (fig. 98).

On trace sur le terrain une base CD que l'on mesure avec soin; on trace sur le papier une droite *cd* qui ait avec CD un rapport connu; qui contienne, par exemple, autant de millimètres que CD contient de mètres.

On mesure au graphomètre les angles ACD, ADC, et l'on fait sur le papier les angles *acd*, *adc*, respectivement égaux aux angles mesurés; on forme ainsi un triangle *acd* semblable à ACD, et l'on a, comme on vient de le voir,

$$ac : AC :: 1 : 1000.$$

On mesure les angles BDC, BCD, et l'on fait sur le papier les angles *bdc*, *bcd*, respectivement égaux à ces deux nouveaux angles mesurés; on forme ainsi un triangle *bcd* semblable à BCD; et l'on a

$$bc : BC :: 1 : 1000.$$

De ces deux proportions on déduit

$$ac : AC :: bc : BC.$$

D'ailleurs l'angle *acb*, qui est la différence des angles *acd* et *bcd*, est égal à l'angle ACB, qui est la différence des angles ACD et BCD. Les deux triangles *acb*, ACB ont donc un angle égal, compris entre côtés proportionnels, et sont, par conséquent, semblables (120). On a donc

$$ab : AB :: ac : AC \quad \text{ou} \quad :: 1 : 1000.$$

Si donc on mesure *ab*, le nombre de millimètres contenus dans cette ligne exprimera le nombre de mètres contenus dans la distance inaccessible AB.

CHAPITRE II.

Des quadrilatères.

126. — On donne le nom de *quadrilatère* à une surface plane terminée par quatre lignes droites. La figure 99 représente un quadrilatère. Les quatre lignes AB, BC, CD, DA, qui le terminent, sont ses *côtés*. Leur ensemble forme le *périmètre* ou *contour* du quadrilatère.

Une droite, telle que AC, joignant deux sommets A et C qui ne sont pas les extrémités d'un même côté, est ce que l'on nomme une *diagonale*. On pourrait mener une seconde diagonale du point B au point D. Chaque diagonale divise le quadrilatère en deux triangles.

Un quadrilatère est dit *convexe*, lorsqu'une même droite ne peut rencontrer son contour en plus de deux points, sans se confondre avec l'un des côtés. Le quadrilatère ne serait point convexe, si, comme ABCD (fig. 100), il présentait un angle *rentrant* BCD; une même droite XY pourrait, dans ce cas, rencontrer les quatre côtés. On ne s'occupe dans la Géométrie élémentaire que des quadrilatères convexes.

127. — Théorème. *Dans tout quadrilatère la somme des quatre angles équivaut à quatre angles droits.*

Car si, dans le quadrilatère ABCD (fig. 99), par exemple, on tire la diagonale AC, la somme des angles du quadrilatère sera celle des six angles ABC, BCA, ACD, CDA, DAC, CAB, c'est-à-dire la somme des angles des deux triangles ABC et ADC. Or, la somme des angles de chacun de ces triangles équivaut à deux angles droits; donc la somme de leurs six angles, ou, ce qui revient au même, la somme des quatre angles du quadrilatère, équivaut à quatre angles droits.

Car, en vertu de la similitude des deux triangles, on a (118)

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Or, BC vaut 1000 fois bc; donc AB vaut 1000 fois ab.

125. — Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de mesurer la distance de deux points inaccessibles A et B (fig. 98).

On trace sur le terrain une base CD que l'on mesure avec soin; on trace sur le papier une droite cd qui ait avec CD un rapport connu; qui contienne, par exemple, autant de millimètres que CD contient de mètres.

On mesure au graphomètre les angles ACD, ADC, et l'on fait sur le papier les angles acd, adc, respectivement égaux aux angles mesurés; on forme ainsi un triangle acd semblable à ACD, et l'on a, comme on vient de le voir,

$$ac : AC :: 1 : 1000.$$

On mesure les angles BDC, BCD, et l'on fait sur le papier les angles bdc, bcd, respectivement égaux à ces deux nouveaux angles mesurés; on forme ainsi un triangle bcd semblable à BCD; et l'on a

$$bc : BC :: 1 : 1000.$$

De ces deux proportions on déduit

$$ac : AC :: bc : BC.$$

D'ailleurs l'angle acb, qui est la différence des angles acd et bcd, est égal à l'angle ACB, qui est la différence des angles ACD et BCD. Les deux triangles acb, ACB ont donc un angle égal, compris entre côtés proportionnels, et sont, par conséquent, semblables (120). On a donc

$$ab : AB :: ac : AC \quad \text{ou} \quad :: 1 : 1000.$$

Si donc on mesure ab, le nombre de millimètres contenus dans cette ligne exprimera le nombre de mètres contenus dans la distance inaccessible AB.

CHAPITRE II.

Des quadrilatères.

126. — On donne le nom de *quadrilatère* à une surface plane terminée par quatre lignes droites. La figure 99 représente un quadrilatère. Les quatre lignes AB, BC, CD, DA, qui le terminent, sont ses *côtés*. Leur ensemble forme le *périmètre* ou *contour* du quadrilatère.

Une droite, telle que AC, joignant deux sommets A et C qui ne sont pas les extrémités d'un même côté, est ce que l'on nomme une *diagonale*. On pourrait mener une seconde diagonale du point B au point D. Chaque diagonale divise le quadrilatère en deux triangles.

Un quadrilatère est dit *convexe*, lorsqu'une même droite ne peut rencontrer son contour en plus de deux points, sans se confondre avec l'un des côtés. Le quadrilatère ne serait point convexe, si, comme ABCD (fig. 100), il présentait un angle *rentrant* BCD; une même droite XY pourrait, dans ce cas, rencontrer les quatre côtés. On ne s'occupe dans la Géométrie élémentaire que des quadrilatères convexes.

127. — Théorème. *Dans tout quadrilatère la somme des quatre angles équivaut à quatre angles droits.*

Car si, dans le quadrilatère ABCD (fig. 99), par exemple, on tire la diagonale AC, la somme des angles du quadrilatère sera celle des six angles ABC, BCA, ACD, CDA, DAC, CAB, c'est-à-dire la somme des angles des deux triangles ABC et ADC. Or, la somme des angles de chacun de ces triangles équivaut à deux angles droits; donc la somme de leurs six angles, ou, ce qui revient au même, la somme des quatre angles du quadrilatère, équivaut à quatre angles droits.

128. — Un quadrilatère prend le nom de *trapèze*, lorsque deux côtés opposés sont parallèles. La figure 101 représente un trapèze. Les côtés parallèles AB, CD, sont ce qu'on nomme les *bases* du trapèze.

Un trapèze est dit *rectangulaire*, lorsque l'un des côtés AD (fig. 102) est perpendiculaire aux bases.

129. — THÉORÈME. *Dans tout trapèze,* ABCD (fig. 101), *la ligne* IH, *qui joint les milieux des côtés non parallèles, est égale à la demi-somme des bases.*

Tirons la diagonale DB, et par son milieu O, menons IH parallèle aux bases.

Les parallèles IO et AB, coupant proportionnellement les côtés de l'angle ADB, le point I sera le milieu de AD; et de plus, on aura (94) :

$$IO : AB :: DO : DB \text{ ou } :: 1 : 2,$$

c'est-à-dire que IO sera la moitié de AB.

Les parallèles OH et DC, coupant proportionnellement les côtés de l'angle DBC, le point H sera le milieu de BC; et de plus, on aura :

$$OH : DC :: BO : BD \text{ ou } :: 1 : 2,$$

c'est-à-dire que OH sera la moitié de DC.

On aura donc :

$$IH = IO + OH = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC = \tfrac{1}{2}(AB + DC).$$

Or, par les points I et H, on ne peut mener qu'une seule droite : donc, cette droite équivaut à la demi-somme des deux bases.

130. — Un quadrilatère prend le nom de *parallélogramme*, lorsque les côtés opposés sont parallèles deux à deux. La figure 103 représente un parallélogramme.

I. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux* comme parallèles comprises entre parallèles. Ainsi, AB = CD, et AD = BC.

II. *Si dans un quadrilatère* ABCD (fig. 103), *deux côtés* AD *et* BC *sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogramme.* Car, en vertu du théorème du n° 90, les deux autres côtés, AB et CD, sont également parallèles.

131. — THÉORÈME. *Si dans un quadrilatère* ABCD (fig. 103), *les côtés opposés sont égaux, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

Car si l'on tire la diagonale AC, les deux triangles ABC et ADC seront égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que les angles BAC et ACD, opposés à des côtés égaux, sont égaux; d'ailleurs, ils ont la position d'alternes-internes; donc les droites AB et DC sont parallèles. L'égalité des angles ACB et DAC démontrerait de même le parallélisme des droites AD et BC. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

132. — Un parallélogramme prend le nom de *rectangle*, lorsqu'il a ses angles droits (fig. 104).

Un parallélogramme prend le nom de *losange*, quand ses quatre côtés sont égaux (fig. 105).

Si ces deux circonstances sont réunies, c'est-à-dire si les côtés sont égaux et les angles droits, le parallélogramme prend le nom de *carré* (fig. 106).

133. — THÉORÈME. *Dans tout parallélogramme* ABCD (fig. 103), *les diagonales* AC *et* BD *se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit O le point de rencontre des diagonales. Les deux triangles AOB et COD ont le côté AB = DC, les angles OAB et OCD égaux comme alternes-internes, les angles OBA et ODC égaux par la même raison; ces triangles sont donc égaux comme ayant un côté égal aboutissant à deux angles égaux chacun à chacun. Il en résulte que les côtés opposés aux angles égaux sont égaux, et que l'on a $OA=OC$ et $OB=OD$. Le point O est donc le milieu commun des deux diagonales.

134. — *Remarques*. I. Dans un rectangle (fig. 104), les diagonales sont égales. Cela résulte de l'égalité évidente des triangles BAD et CAD.

II. Dans un losange (fig. 105), les diagonales sont perpendiculaires entre elles. Car, les quatre côtés étant égaux, la droite BD a deux de ses points B et D à égale distance des extrémités de AC; elle est donc perpendiculaire sur le milieu de AC.

III. Dans le carré (fig. 106), qui est à la fois un parallélogramme, un rectangle et un losange, les diagonales se coupent en parties égales, sont égales elles-mêmes, et de plus perpendiculaires l'une à l'autre.

CHAPITRE III.

Des polygones.

§ I. — Propriétés principales des polygones. — Polygones semblables.

135. — On nomme en général *polygone*, toute surface plane terminée par des lignes droites. La figure 107 représente un polygone. Les droites AB, BC, CD, etc., qui la terminent, sont ses *côtés* : l'ensemble des côtés forme le *périmètre*. Toute droite, telle que AC, AD, etc., joignant deux sommets qui ne sont pas les extrémités d'un même côté, est une *diagonale*.

On ne considère, dans la Géométrie élémentaire, que les

polygones *convexes*, c'est-à-dire dont le contour ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, ou qui n'offrent point d'angle *rentrant*.

Si, dans un polygone convexe, on tire toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet A, on divise le polygone en triangles, qui ont pour sommet commun le point A. Chacun de ces triangles emploie un des côtés du polygone, à l'exception des deux triangles extrêmes ABC, AFE, qui en emploient chacun deux. Il suit de là, que le nombre de ces triangles équivaut au nombre des côtés du polygone, *diminué de deux*.

Les polygones prennent des noms divers, suivant le nombre de leurs côtés :

Un polygone de	3	côtés porte le nom de	*triangle;*
	4		*quadrilatère;*
	5		*pentagone;*
	6		*hexagone;*
	8		*octogone;*
	10		*décagone;*
	12		*dodécagone;*
	15		*pentédécagone.*

Pour tous les autres polygones, on se contente d'énoncer le nombre des côtés; et l'on dit un polygone de 7, de 9, de 11, de 13 côtés, et ainsi de suite.

136. — THÉORÈME. *La somme des angles d'un polygone équivaut à autant de fois deux angles droits, que ce polygone a de côtés, moins deux.*

Car si l'on tire toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet, on partage le polygone en autant de triangles que le polygone a de côtés, moins deux; la somme des angles de tous ces triangles forme précisément la somme des angles du polygone ; d'ailleurs la somme des angles de chaque triangle vaut deux droits ; donc, etc.

Corollaire. Il suit de là que

La somme des angles d'un	*pentagone* vaut	6 angles droits.
	hexagone	8
	octogone	12
	décagone	16
	dodécagone	20
	etc.	etc.

137. — Deux polygones ABCDEF, *abcdef* (fig. 107), sont dits *semblables* lorsqu'ils se décomposent en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et disposés dans le même ordre. Les sommets des angles égaux se nomment *sommets homologues ;* les côtés ou les diagonales qui joignent deux sommets homologues, sont des *côtés* ou des *diagonales homologues ;* enfin, les triangles semblables, considérés par rapport aux polygones dont ils font partie, sont des *triangles homologues.*

138. — Théorème. *Deux polygones semblables* ABCDEF, abcdef (fig. 107), *ont leurs angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues proportionnels.*

En effet : les triangles homologues ABC et *abc* étant semblables, les angles B et *b* sont égaux, ainsi que les angles BCA et *bca;* de plus, on a les proportions

$$(1)\ AB : ab :: BC : bc \quad \text{et} \quad BC : bc :: AC : ac\ (2).$$

Les triangles homologues ACD et *acd* étant semblables, les angles ACD et *acd* sont égaux. L'angle BCD, qui est la somme des angles BCA et CAD, est donc égal à l'angle *bcd* qui est la somme des angles *bca* et *cad*. La similitude de ces mêmes triangles donne la proportion

$$AC : ac :: CD : cd \qquad (3).$$

En comparant les proportions (2) et (3), on voit qu'elles ont un rapport commun ; et l'on en tire

$$BC : bc :: CD : cd.$$

En continuant ainsi, on démontrerait de même l'égalité de tous les autres angles de deux polygones, et la proportionnalité de tous leurs côtés homologues.

139. — Réciproque du théorème précédent. *Si deux polygones* ABCDEF *et* abcdef (fig. 107) *ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels, ces polygones sont semblables.*

En effet : si l'on a $B = b$ et $AB : ab :: BC : bc$, les deux triangles ABC et *abc* sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Il en résulte que les angles BCA et *bca* sont égaux ; et comme les angles BCD et *bcd* sont égaux aussi par supposition, il faut que les angles ACD et *acd* soient égaux. D'ailleurs, la similitude des triangles ABC et *abc* donne

$$BC : bc :: AC : ac,$$

et par supposition, on a aussi

$$BC : bc :: CD : cd.$$

De ces deux proportions, qui ont un rapport commun, on tire

$$AC : ac :: CD : cd.$$

Les deux triangles ACD et *acd* sont donc semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

En continuant ainsi, on démontrerait de même la similitude des autres triangles. Les deux polygones sont donc composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés dans le même ordre; ces polygones sont donc semblables.

140. — Théorème. *Deux polygones* ABCDE, abcde (fig. 108), *sont semblables, lorsque les angles formés par deux côtés homologues* AE, ae, *avec les côtés et avec les diagonales qui aboutissent à leurs extrémités, sont égaux chacun à chacun.*

En effet: par supposition, les angles BAE et *bae* sont égaux, ainsi que les angles BEA et *bea*; les triangles ABE et *abe* sont donc équiangles et par conséquent semblables.

On tire de cette similitude la proportion :

$$BE : be :: AE : ae.$$

Par une raison analogue, les triangles ACE et *ace* sont semblables, et l'on a

$$CE : ce :: AE : ae.$$

De ces deux proportions, qui ont un rapport commun, on déduit

$$BE : be :: CE : ce.$$

D'ailleurs l'angle BEC, différence des angles CEA et BEA, est égal à l'angle *bec*, différence des angles *cea* et *bea*. Les deux triangles BEC et *bec* sont donc semblables, comme ayant un angle égal, compris entre côtés proportionnels.

En continuant ainsi, on démontrerait de même la similitude de tous les triangles formés par les diagonales issues des sommets E et *e*. Les deux polygones sont donc composés d'un même nombre de triangles semblables chaçun à chacun et disposés dans le même ordre; ces polygones sont donc semblables.

141. — Problème. *Construire sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.*

Pour résoudre ce problème, on peut employer deux méthodes principales.

1re *Méthode*. Soit ABCDEF (fig. 107) le polygone donné, et AF le côté dont la droite donnée doit être l'homologue.

Par l'un des sommets A, tirez les diagonales AE, AD, AC.

Menez *af* parallèle à AF, et égal à la droite donnée. Menez *ae* et *fe* respectivement parallèles à AE et à FE; leur rencontre donnera le point *e*; les triangles AFE et *afe* seront semblables, comme équiangles.

Menez *ad* et *ed* respectivement parallèles à AD et à ED; leur rencontre donnera le point *d*; les triangles AED et *aed* seront semblables comme équiangles.

Menez, de même, *ac* et *dc* respectivement parallèles à AC et à DC; leur rencontre donnera le point *c*; les triangles ADC et *adc* seront semblables comme équiangles.

En continuant ainsi, on formera un polygone *abcdef* semblable au polygone proposé, car ils seront composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

2e *Méthode*. Si l'on ne peut pas se servir des diagonales AE, AD, AC, on pourra procéder de la manière suivante :

Menez toujours *af* égal à la droite donnée comme devant être l'homologue de AF.

Faites l'angle *afe* égal à AFE et portez sur *fe*, à partir du point *f*, une quatrième proportionnelle aux lignes AF, *af* et FE; en sorte qu'on ait :

$$AF : af :: FE : fe.$$

Le point *e* se trouvera déterminé, et les triangles AFE et *afe* seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Faites l'angle *fed* égal à FED; il en résultera que l'angle *aed* sera égal à AED. Portez sur *ed*, à partir du point *e*, une quatrième proportionnelle aux lignes FE, *fe* et ED ; en sorte qu'on ait

$$FE : fe :: ED : ed.$$

Le point *d* se trouvera déterminé, et les triangles AED et *aed* seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

En continuant ainsi, on formera un polygone *abcdef* qui sera semblable au polygone ABCDEF, puisqu'ils seront composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

§ II. — Application au lever des plans.

142. — Lever le plan d'un terrain, c'est tracer en petit sur le papier une figure semblable à celle que ce terrain présente.

Pour y parvenir, le moyen le plus expéditif consiste à faire usage de la *planchette*. On donne ce nom à une tablette en bois, parfaitement dressée, et reposant par son centre sur un support à trois pieds. La tablette est liée au support par un *genou* à vis, qui permet de lui faire prendre toutes les positions possibles à l'égard de ce support. La surface de la planchette est recouverte d'une feuille de papier bien tendue. Pour y tracer des droites dans la direction des rayons visuels menés de l'œil vers les objets les plus remarquables du terrain, on emploie une *alidade*, semblable à celle du graphomètre, munie également de pinnules, mais entièrement libre, et pouvant être placée sur la planchette dans toutes les directions possibles. On se sert de l'alidade elle-même comme d'une règle pour tracer des droites sur la planchette dans la direction indiquée par les pinnules.

Lorsqu'on veut lever un plan au moyen de la planchette, on trace sur le terrain une droite AB (fig. 109) que l'on mesure et qui sert de base à l'opération. On en trace une autre *ab* sur la planchette, et on lui donne une longueur qui ait avec AB un rapport déterminé; qui renferme, par exemple, autant de millimètres que AB contient de mètres. On place la planchette au point A, et on la dispose de manière : 1° qu'elle ne penche d'aucun côté (nous verrons plus tard comment on peut y parvenir); 2° que le point *a* se trouve précisément au-dessus du point A; 3° qu'en dirigeant l'alidade suivant *ab* on aperçoive le point B derrière les fils des pinnules. On trace alors les droites *a*E, *a*D, *a*C, en dirigeant l'alidade vers les points du terrain que l'on veut fixer sur le plan.

On transporte ensuite la planchette au point B, et on la dispose de telle sorte : 1° qu'elle ne penche d'aucun côté; 2° que le point *b* soit exactement au-dessus de B; 3° qu'en dirigeant l'alidade suivant *ba*, on aperçoive le point A derrière les fils des pinnules. On trace alors les droites *b*E, *b*D, *b*C, en dirigeant de nouveau l'alidade vers les points précédemment observés.

Les intersections de ces nouvelles droites avec les premières déterminent sur le papier les sommets *e*, *d*, *c*, d'un polygone *abcde* qui est semblable au polygone ABCDE, en vertu de la proposition du n° 140.

143. — Lorsque les différentes lignes qui forment le contour du terrain peuvent être mesurées à la chaîne, on peut procéder de la manière suivante :

On trace sur le papier une ligne *af* (fig. 107) qui ait un rapport déterminé avec un des côtés AF du polygone que forme le terrain ; on la prendra, par exemple, égale à autant de millimètres que ce côté contient de mètres. On mesure l'angle AFE au graphomètre; on fait l'angle $afe = AFE$; on prend fe égal à autant de millimètres que FE contient de mètres. On mesure l'angle FED; on fait l'angle $fed = FED$; on prend ed égal à autant de millimètres que ED contient de mètres. En continuant ainsi, on obtient un polygone $abcdef$ semblable à ABCDEF; ainsi qu'on l'a vu au n° 141 (2ᵉ méthode).

144. — La réduction la plus commode consiste à représenter, comme nous l'avons dit, chaque mètre par un millimètre; mais on sent que ce rapport ne saurait être employé dans toutes les circonstances. Dans les plans d'une grande étendue, on représente fréquemment chaque décamètre par une longueur de 4 millimètres. Dans les plans partiels, au contraire, il arrivera souvent qu'il soit plus commode de représenter chaque mètre par 1 centimètre. L'usage et la commodité sont les seuls guides à cet égard.

§ III. — Des polygones symétriques.

145. — Un polygone $ABCD'C'B'A$ (fig. 110) est dit *symétrique*, lorsqu'on peut le diviser par une droite XY en deux parties ABCDO, $AB'C'D'O$ qui coïncideraient si on ployait la figure le long de XY. Cette droite XY elle-même prend le nom d'*axe de symétrie*.

Les sommets B, B′ *qui se correspondent de part et d'autre de l'axe de symétrie, sont situés sur une même perpendiculaire à cet axe.* Car, puisque les deux parties de la figure coïncident, par hypothèse, lorsqu'on ploie la figure le long de XY, les perpendiculaires abaissées des points B et B′ sur cette droite la rencontrent en un même point, et sont par conséquent le prolongement l'une de l'autre. Il en serait de même des sommets correspondants C, C′; et ainsi de suite.

On voit de plus, que les droites BB′, cc', etc., sont divisées en deux parties égales par l'axe XY.

Si l'un des côtés DD′ *est rencontré par l'axe de symétrie, cet axe lui est perpendiculaire et passe par son milieu* O. Car, pour que les points D et D′ coïncident en ployant la figure le long de XY, il faut que les angles adjacents AOD, AOD′ soient égaux, et par conséquent droits; et il faut de plus qu'on ait $OD' = OD$.

146. — Dans un triangle isocèle, la droite qui va du sommet au milieu de la base est un axe de symétrie.

Dans un triangle équilatéral, il y a par conséquent 3 axes de symétrie.

Dans un rectangle, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont des axes de symétrie.

Dans un losange, les diagonales sont des axes de symétrie.

Dans un carré, il y a, d'après cela, 4 axes de symétrie, puisque c'est à la fois un rectangle et un losange.

Dans un cercle, chaque diamètre est un axe de symétrie.

147. — Deux polygones sont dits *symétriques*, l'un par rapport à l'autre, lorsqu'ils sont composés des mêmes éléments (côtés et angles) disposés dans un ordre inverse.

Étant donné un polygone ABCDE (fig. 111), on construit facilement un polygone symétrique. Pour cela, on tire, dans le plan du polygone donné, une droite quelconque XY; des sommets du polygone donné, on abaisse sur cette droite les perpendiculaires Am, Bn, Cp, Dq, Er, que l'on prolonge de quantités respectivement égales mA', nB', pC', qD', rE'; et l'on joint $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'A'$.

Il est clair, en effet, que si l'on plie la figure le long de

XY, les perpendiculaires mA′ et m A coïncideront; il en sera de même des perpendiculaires nB′ et nB; et ainsi de suite. Les sommets du polygone A′B′C′D′E′ viendront donc se placer sur les sommets correspondants du polygone ABCDE; ces deux polygones sont donc composés d'éléments égaux chacun à chacun; d'ailleurs, il est évident que l'ordre de ces éléments est inverse dans les deux polygones; donc, d'après la définition, ces polygones sont symétriques entre eux.

148. — Dans la figure 111, les deux polygones ABCDE et A′B′C′D′E′ sont en même temps symétriques de forme et de position : de forme, parce que leurs éléments sont égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse; de position, parce que leurs sommets correspondants sont situés de part et d'autre de XY sur une même perpendiculaire à cette ligne et à des distances égales.

La ligne XY est un axe de symétrie par rapport à l'ensemble des deux polygones. On dit encore que ces polygones sont placés *symétriquement* par rapport à cette ligne.

Si l'on conçoit un polygone quelconque, que nous désignerons par P pour abréger le discours, et qui soit symétrique de forme par rapport à ABCDE, on pourra toujours l'amener à être en outre symétrique de position par rapport à ce même polygone. Car puisque les polygones P et ABCDE ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse, il s'ensuit que les polygones P et A′B′C′D′E ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, c'est-à-dire qu'ils sont superposables. On pourra donc faire coïncider le polygone P avec A′B′C′D′E′; et alors les polygones P et ABCDE, qui sont déjà symétriques de forme, seront en même temps symétriques de position.

CHAPITRE IV.

Des polygones réguliers et de la mesure des circonférences.

§ I. — Propriétés principales des polygones réguliers.

149. — Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

Connaissant le nombre des côtés d'un polygone régulier, on peut en déduire la valeur commune de ses angles.

Car, si n désigne le nombre des côtés ou des angles du polygone proposé, la somme de ses angles aura pour valeur 2 droits multipliés par n—2 (136); et puisque tous les angles sont égaux, chacun d'eux vaudra la $n^{ième}$ partie de leur somme, ou

$$\frac{2\,(n-2)}{n}$$

en prenant l'angle droit pour unité. On trouve ainsi que

l'angle du triangle équilatéral vaut	$\frac{2}{3}$ d'angle droit;
du carré	1 angle droit;
du pentagone rég.	$\frac{6}{5}$ d'angle droit;
de l'hexagone rég.	$\frac{4}{3}$
de l'octogone rég.	$\frac{3}{2}$
du décagone rég.	$\frac{8}{5}$
du dodécagone rég.	$\frac{5}{3}$
etc.	etc.

150. — Théorème. *Tout polygone régulier* ABCDEFG (fig. 112) *est inscriptible au cercle.*

Par trois sommets consécutifs A, B, C, faisons passer une circonférence, et soit O son centre; je dis que cette circonférence passera par tous les autres sommets du polygone.

XY, les perpendiculaires mA′ et mA coïncideront; il en sera de même des perpendiculaires nB′ et nB; et ainsi de suite. Les sommets du polygone A′B′C′D′E′ viendront donc se placer sur les sommets correspondants du polygone ABCDE; ces deux polygones sont donc composés d'éléments égaux chacun à chacun; d'ailleurs, il est évident que l'ordre de ces éléments est inverse dans les deux polygones; donc, d'après la définition, ces polygones sont symétriques entre eux.

148. — Dans la figure 111, les deux polygones ABCDE et A′B′C′D′E′ sont en même temps symétriques de forme et de position : de forme, parce que leurs éléments sont égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse; de position, parce que leurs sommets correspondants sont situés de part et d'autre de XY sur une même perpendiculaire à cette ligne et à des distances égales.

La ligne XY est un axe de symétrie par rapport à l'ensemble des deux polygones. On dit encore que ces polygones sont placés *symétriquement* par rapport à cette ligne.

Si l'on conçoit un polygone quelconque, que nous désignerons par P pour abréger le discours, et qui soit symétrique de forme par rapport à ABCDE, on pourra toujours l'amener à être en outre symétrique de position par rapport à ce même polygone. Car puisque les polygones P et ABCDE ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés en ordre inverse, il s'ensuit que les polygones P et A′B′C′D′E ont leurs éléments égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, c'est-à-dire qu'ils sont superposables. On pourra donc faire coïncider le polygone P avec A′B′C′D′E′; et alors les polygones P et ABCDE, qui sont déjà symétriques de forme, seront en même temps symétriques de position.

CHAPITRE IV.

Des polygones réguliers et de la mesure des circonférences.

§ I. — Propriétés principales des polygones réguliers.

149. — Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

Connaissant le nombre des côtés d'un polygone régulier, on peut en déduire la valeur commune de ses angles.

Car, si n désigne le nombre des côtés ou des angles du polygone proposé, la somme de ses angles aura pour valeur 2 droits multipliés par $n—2$ (136); et puisque tous les angles sont égaux, chacun d'eux vaudra la $n^{ième}$ partie de leur somme, ou

$$\frac{2\,(n\text{-}2)}{n}$$

en prenant l'angle droit pour unité. On trouve ainsi que l'angle du triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit;

du carré	1 angle droit;
du pentagone rég.	$\frac{6}{5}$ d'angle droit;
de l'hexagone rég.	$\frac{4}{3}$
de l'octogone rég.	$\frac{3}{2}$
du décagone rég.	$\frac{8}{5}$
du dodécagone rég.	$\frac{5}{3}$
etc.	etc.

150. — Théorème. *Tout polygone régulier* ABCDEFG (fig. 112) *est inscriptible au cercle.*

Par trois sommets consécutifs A, B, C, faisons passer une circonférence, et soit O son centre; je dis que cette circonférence passera par tous les autres sommets du polygone.

Pour le démontrer, abaissons du point O sur BC la perpendiculaire OI qui divisera la corde BC en deux parties égales; puis joignons OA et OD. Si l'on ploie la figure le long de OI, les angles en I étant droits, IC prendra la direction de IB; et comme ces deux parties de BC sont égales, le point C tombera en B. Les angles B et C étant égaux puisque le polygone est régulier, le côté CD prendra la direction de BA, et comme ces côtés sont égaux, le point D tombera en A. Il en résulte que les droites OD et OA sont égales, et que, par conséquent, la circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon doit passer par le point D.

On démontrerait de la même manière que cette circonférence passe par le point E, et par les autres sommets du polygone.

151. — Réciproquement : *Si l'on divise une circonférence en parties égales et que l'on joigne les points de division consécutifs par des droites, le polygone ainsi obtenu sera régulier.*

En effet : il aura ses côtés égaux, comme cordes soustendant des arcs égaux; et il aura ses angles égaux, comme inscrits dans des segments égaux (ABC, BCD, CDE, etc., fig. 112).

Remarques. I. Le centre O de la circonférence *circonscrite* à un polygone, c'est-à-dire qui passe par tous ses sommets, est ce qu'on nomme le *centre* du polygone. Le rayon OA de cette circonférence est le *rayon* du polygone. La perpendiculaire OI, abaissée du centre sur un côté, se nomme l'*apothème* du polygone.

II. L'angle AOB formé par deux rayons consécutifs OA, OB, est ce qu'on nomme l'*angle au centre* du polygone. Tous les angles au centre AOB, BOC, COD, etc., d'un même

polygone, sont égaux comme interceptant sur la circonférence des arcs égaux.

La somme de tous ces angles étant 4 angles droits, on voit que, pour obtenir la valeur de l'angle au centre, il suffit de diviser 4 droits par le nombre des angles au centre, ou par le nombre des côtés du polygone. On trouve de cette manière que la valeur de l'angle au centre est :

pour	le triangle équilatéral	$\frac{4}{3}$ d'angle droit;
	le carré	1 angle droit;
	le pentagone	$\frac{4}{5}$ d'angle droit;
	l'hexagone	$\frac{2}{3}$
	l'octogone	$\frac{1}{2}$ angle droit;
	le décagone	$\frac{2}{5}$ d'angle droit;
	le dodécagone	$\frac{1}{3}$
	etc.	etc.

III. Les rayons OA, OB, OC, etc., divisent le polygone en autant de triangles isocèles égaux qu'il y a de côtés.

152. — Problème. *Inscrire un carré dans un cercle.*

Tirez deux diamètres à angle droit, AC et BD (fig. 113), et joignez leurs extrémités par les droites AB, BC, CD, DA.

Les quatre angles en O étant égaux, il en est de même des quatre arcs AB, BC, CD, DA. La circonférence étant divisée en quatre parties égales aux points A, B, C, D, le polygone ABCD est régulier.

Corollaire. Si l'on divise en deux parties égales chacun des arcs AB, BC, etc., la circonférence sera divisée en 8 parties égales, et les 8 points de division pourront servir de sommets à l'octogone régulier inscrit. En doublant toujours le nombre des divisions, on obtiendrait de même les polygones réguliers de 16, 32, 64 côtés, et ainsi de suite.

153. — Problème. *Inscrire au cercle un hexagone régulier.*

Soit AB (fig. 114) le côté de l'hexagone. Joignons OA et OB; l'angle au centre AOB vaudra $\frac{2}{3}$ d'angle droit (151, Rem. II). La somme des angles OAB et OBA vaudra donc 2 droits moins $\frac{2}{3}$ de droit, c'est-à-dire $\frac{4}{3}$ de droit; et comme ces angles sont égaux, puisque le triangle AOB est isocèle, chacun d'eux vaudra la moitié de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Il en résulte que les trois angles du triangle AOB sont égaux; il en est donc de même de ses trois côtés, et l'on a $AB = AO$; c'est-à-dire que le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.

Pour diviser une circonférence en 6 parties égales, il suffit donc de porter successivement sur cette circonférence 6 ouvertures de compas égales à son rayon.

En joignant les points de division consécutifs on obtiendra l'hexagone régulier inscrit.

Corollaires. I. La circonférence est divisée en 3 parties égales aux points A, C, E; si donc on joint AE on aura le côté du triangle équilatéral inscrit.

II. Si l'on double au contraire successivement le nombre des divisions, on obtiendra les polygones réguliers de 12, 24, 48 côtés, et ainsi de suite.

154. — Problème. *Inscrire au cercle un décagone régulier.*

Soit AB (fig. 115) le côté du décagone régulier; joignons OA et OB; l'angle au centre AOB vaudra $\frac{2}{5}$ d'angle droit (151, Rem. II). La somme des angles OAB et OBA vaudra donc 2 droits moins $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire $\frac{8}{5}$ d'angle droit; et comme ces angles sont égaux puisque le triangle AOB est isocèle, chacun d'eux vaut la moitié de $\frac{8}{5}$, c'est-à-dire $\frac{4}{5}$ d'angle droit.

Divisons l'angle OAB en deux parties égales par la droite AM; chacun des angles partiels OAM, BAM, vaudra $\frac{2}{5}$ d'angle droit. Il en résulte d'abord que le triangle OMA est isocèle, et qu'on a $AM = OM$. Il en résulte en second lieu que les triangles MAB et AOB sont équiangles entre eux, car ils ont l'angle B commun; et l'angle $MAB = AOB = \frac{2}{5}$ d'angle droit. Ces triangles sont donc semblables; et puisque AOB est isocèle, il en est de même de MAB, et l'on a $MA = AB$; par suite $OM = AB$. De plus, cette même similitude donne la proportion

$$MB : AB :: AB : OA$$

ou bien

$$MB : OM :: OM : OB;$$

c'est-à-dire que le rayon OB est divisé au point M en moyenne et extrême raison, et que le côté AB du décagone est égal à la plus grande partie OM du rayon.

Pour diviser une circonférence en 10 parties égales, on divisera donc son rayon en moyenne et extrême raison, et l'on portera sur cette circonférence 10 ouvertures de compas consécutives égales à la plus grande partie du rayon, ainsi divisé.

En joignant les points de division consécutifs de la circonférence, on obtiendra le décagone régulier inscrit.

Corollaires. I. La circonférence se trouve divisée en 5 parties égales aux points A, C, E, G, I; si donc on joint AI, on aura le côté du pentagone régulier inscrit.

II. En doublant au contraire successivement le nombre des divisions, on obtiendrait les polygones réguliers de 20, 40, 80 côtés, et ainsi de suite.

155. — Théorème. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

En effet, leurs angles sont égaux, puisque la valeur de chacun d'eux ne dépend que du nombre des côtés (149); et leurs côtés homologues forment une suite de rapports identiques, puisque ces côtés sont égaux dans chaque polygone. Ces polygones sont donc semblables en vertu de la proposition du n° 139.

156. — THÉORÈME. *Les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme leurs rayons.*

Soient en effet AOB et aob (fig. 116) deux des triangles isocèles dans lesquels les deux polygones se divisent. Les angles au centre AOB et aob sont égaux, puisque les deux polygones ont le même nombre de côtés ; d'ailleurs, puisque les triangles sont isocèles, les côtés qui comprennent ces angles sont identiquement proportionnels ; ces triangles sont donc semblables, et l'on a la proportion

$$AB : ab :: AO : ao.$$

Soit n le nombre des côtés de chaque polygone ; on ne troublera pas la proportion ci-dessus en multipliant les deux termes du premier rapport par n, et l'on pourra écrire

$$AB \times n : ab \times n :: AO : ao ;$$

mais $AB \times n$ c'est le périmètre du premier polygone, et $ab \times n$ c'est le périmètre du second ; en désignant ces périmètres par P et par p, on aura donc

$$P : p :: AO : ao ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — Applications au parquetage.

157. — On emploie fréquemment les polygones réguliers dans le carrelage et le parquetage des appartements.

La somme de tous les angles formés autour d'un même point étant égale à 4 angles droits, pour pouvoir couvrir un parquet avec des polygones réguliers égaux, il faut que

l'angle de chacun de ces polygones soit une partie aliquote de 4 angles droits.

C'est ce qui a lieu pour le triangle équilatéral ; car son angle, qui vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, est la 6^{me} partie de 4 droits. Cela a lieu également pour le carré, puisque son angle étant droit, est le quart de 4 angles droits. Cela a lieu encore pour l'hexagone régulier, parce que son angle, qui vaut $\frac{4}{3}$ d'angle droit, est le tiers de 4 angles droits.

On peut donc former un parquet avec des triangles équilatéraux assemblés 6 à 6 (fig. 117), avec des carrés assemblés 4 à 4 (fig. 118 et 119), ou avec des hexagones réguliers assemblés 3 à 3 (fig. 120).

On ne pourrait pas employer des pentagones réguliers, parce que l'angle de ces polygones, qui vaut $\frac{6}{5}$ d'angle droit, n'est pas une partie aliquote de 4 angles droits. On pourrait encore moins employer des polygones d'un nombre de côtés supérieur à 6, parce qu'alors 3 des angles de ces polygones feraient une somme plus grande que 4 angles droits.

158. — Mais on obtient de nouvelles dispositions, en employant conjointement plusieurs espèces de polygones réguliers.

Ainsi l'on recouvre un parquet :

Avec des octogones et des carrés (fig. 121) ;
des hexagones et des triangles équilatéraux (fig. 122) ;
des dodécagones et des triangles équilatéraux (fig. 123).

§ III. — Propriétés du cercle qui dépendent des polygones réguliers.

159. — Le périmètre d'un polygone régulier inscrit à une circonférence, est toujours moindre que cette circonférence ; car chacun de ses côtés est moindre que l'arc qu'il soustend.

Si le nombre des côtés du polygone inscrit devient double, son périmètre augmente et se rapproche par conséquent de la circonférence. Car soit AB (fig. 124) le côté d'un polygone régulier inscrit, soit n le nombre de ses côtés, en sorte que son périmètre soit $AB \times n$.

Prenons le milieu I de l'arc sous-tendu par le côté AB, et joignons IA et IB ; ces droites seront des côtés du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double, et le périmètre de ce polygone sera $IA \times 2n$ ou $(IA+IB) \times n$.

Or, on a, d'après la définition de la ligne droite,

$$IA+IB > AB,$$

par conséquent

$$(IA+IB) \times n > AB \times n,$$

c'est-à-dire que le nouveau périmètre est plus grand que le premier, et se rapproche par conséquent davantage de la circonférence dans laquelle les deux polygones sont inscrits.

Cette circonférence est une limite vers laquelle tend le périmètre du polygone inscrit à mesure que le nombre de ses côtés augmente ; et, dans la pratique, il arrive en effet bientôt un moment où ce périmètre se confond sensiblement avec la circonférence, parce que l'arc sous-tendu par chaque côté devient assez petit pour se confondre avec sa corde.

Il est donc permis de considérer une circonférence comme le périmètre d'un polygone régulier dont les côtés sont extrêmement petits et en nombre extrêmement grand.

160. — Théorème. *Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs rayons.*

Car, d'après ce que nous venons de dire, on peut considérer deux circonférences comme les périmètres de deux polygones réguliers semblables dont les côtés sont en nombre

extrêmement grand ; et dès lors, on peut leur appliquer la proposition du n° 156.

Corollaire I. Les diamètres étant le double des rayons, on peut dire que *deux circonférences sont entre elles comme leurs diamètres.*

Corollaire II. Pour tracer une circonférence qui soit le double, le triple, etc., d'une circonférence donnée, il suffit d'employer un rayon double, triple, etc.

161. — Il résulte encore de la proposition précédente, que *le rapport entre une circonférence et son diamètre, est constant pour tous les cercles.*

Car si l'on désigne par C et C′ deux circonférences, et par D et D′ leurs diamètres, on aura, en vertu de cette proposition :

$$C : C' :: D : D',$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$C : D :: C' : D'.$$

On représente par la lettre grecque π (prononcez *pi*) ce rapport constant de la circonférence au diamètre, et l'on pose en conséquence

$$\frac{C}{D} = \pi,$$

d'où $\quad C = \pi D \quad$ ou $\quad C = 2\pi R,$

si R est le rayon.

On voit que pour obtenir l'expression numérique d'une circonférence quand on a celle de son diamètre, D ou 2R, il suffit de multiplier cette dernière par π.

Par des méthodes que nous ne pouvons exposer ici (*),

(*) Voir notre *Géométrie théorique et pratique*, 2ᵉ édition, nᵒˢ 299 à 304.

on trouve que le nombre π a pour valeur $3,1415926\ldots$ ou à peu près $3,1416$. Ce nombre diffère peu de $\frac{22}{7}$, nombre donné par Archimède pour la valeur approchée de π. On voit par cette valeur, qu'une circonférence équivaut au triple de son diamètre, plus une quantité un peu moindre que le 7^{me} de ce diamètre.

162. — La connaissance du rapport π, permet de résoudre divers problèmes numériques; nous en donnerons quelques exemples.

I. — *Un bassin circulaire a 24^m de diamètre; on demande son contour.*

Multipliez le diamètre 24^m par le rapport de la circonférence au diamètre, ou par $3,1416$; ce qui donne $75^m,3984$, ou environ $75^m,40$.

II. — *Quel est le rayon du méridien de Paris, supposé parfaitement circulaire?*

La longueur de ce méridien étant de $40\,000\,000^m$, on aura son diamètre en divisant ce nombre par le rapport de la circonférence au diamètre, ou par $3,1415926$; ce qui donne, en négligeant les fractions de mètre, 12732395^m. La moitié de ce nombre, ou 6366197^m, sera le rayon demandé.

III. — *Le diamètre d'une roue de voiture est de $1^m,80$; on demande combien elle fait de tours par kilomètre.*

La circonférence de cette roue est $1^m,80 \times \pi$; pour avoir le nombre de tours demandé, il faut donc diviser 1 kilomètre ou 1000^m par cette circonférence, ou par

$$\frac{1^m,80 \times 22}{7}; \text{ ce qui donne } \frac{1000 \times 7}{1^m,80 \times 22},$$

ou $176,7\ldots$; ou environ 177 tours.

163. — Nous avons vu au n° 29 comment on peut comparer un arc à la circonférence dont il fait partie. Nous pouvons montrer maintenant comment on peut obtenir l'expression numérique de la longueur de cet arc.

Soit A la longueur d'un arc, N le nombre de degrés dont il se compose, R le rayon de la circonférence dont il fait partie, et que nous désignerons par C. On aura

$$A : C :: N : 360$$

ou

$$A : 2\pi R :: N : 360, \qquad (1)$$

d'où

$$A = 2\pi R.\frac{N}{360};$$

c'est-à-dire que : *pour obtenir la longueur d'un arc, il faut multiplier celle de la circonférence entière par le rapport entre le nombre de degrés dont l'arc se compose et 360^o.*

Exemple : *Sur une circonférence dont le rayon a $0^m,60$, quelle est la longueur d'un arc de 48^o?*

La formule donne

$$A = 2 \times 3,1416 \times 0^m,6 \times \tfrac{48}{360} = 0^m,502\ldots$$

164. — La proportion établie au numéro précédent résout aussi le problème inverse; savoir : étant donnée l'expression numérique de la longueur d'un arc dont on connaît le rayon, trouver son expression en degrés. Pour cela, on tire de la proportion (1)

$$N = 360^o \times \frac{A}{2\pi R},$$

c'est-à-dire que : *pour obtenir cette expression, il faut multiplier 360^o par le rapport entre la longueur de l'arc et la circonférence entière.*

Exemple : *Sur une circonférence quelconque, quel est l'arc dont la longueur équivaut au rayon?*

On a, dans ce cas, $A = R$; par suite

$$N = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ \times 7}{22}$$

ou $$N = 57^\circ\, 16' \text{ environ.}$$

CHAPITRE V.

De la mesure des aires.

§ I. — Théorèmes sur la mesure des aires.

165. — Mesurer l'aire d'une figure, c'est la comparer à une autre aire prise pour unité.

On prend habituellement pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Si, par exemple, l'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire est l'aire du carré qui a un mètre de côté, et qu'on appelle *mètre carré*. Si l'on prend pour unité de longueur le décimètre, l'unité d'aire sera le *décimètre carré*; et ainsi de suite.

166. — THÉORÈME. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés du rectangle, ordinairement à celui qui occupe le bas de la figure; l'un quelconque des côtés adjacents à la base est ce qu'on nomme la *hauteur*.)

L'énoncé ci-dessus signifie que, pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie du rectangle, il faut déterminer le nombre d'unités de longueur contenues dans sa base, le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur, et multiplier ces deux nombres l'un par l'autre.

Soit, en effet, ABCD (fig. 125) un rectangle, AB sa base et AD sa hauteur. Supposons, pour fixer les idées, que

AB contienne 5 fois l'unité de longueur, et que AD la contienne 3 fois. Divisons la base en 5 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la hauteur. Divisons la hauteur en 3 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la base. La figure totale se trouvera ainsi divisée en figures partielles qui seront des rectangles, car tous les angles de la figure sont droits, et qui de plus sont des carrés, car leurs côtés sont égaux, soit aux divisions de AB (89), soit aux divisions de AD, c'est-à-dire à l'unité de longueur. Ces figures partielles sont donc des unités d'aire, et il ne reste plus qu'à en déterminer le nombre.

Or, le rectangle ABCD se trouve divisé en autant de bandes horizontales qu'il y a d'unités de longueur dans AD, c'est-à-dire en 3 bandes; chacune de ces bandes se compose d'autant de carrés ou d'unités d'aire qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire de 5. Le nombre total de ces unités d'aire est donc 5×3 ou 15.

Les raisonnements qui précèdent sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans AB et dans AD.

Remarque. Si la base et la hauteur ne contenaient pas un nombre exact de fois l'unité de longueur adoptée, on pourrait toujours recourir à une unité de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle fût contenue un nombre exact de fois dans AB et dans AD, ce qui finira toujours par arriver dans la pratique, attendu que le reste, s'il y en a un, finira par devenir inappréciable.

COROLLAIRE. Dans le cas où le rectangle proposé est un carré, la base et la hauteur sont égales; et pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie de ce carré, il faut multiplier par lui-même le nombre d'unités de longueur que contient l'un de ses côtés. C'est pour cela qu'en

On a, dans ce cas, $A = R$; par suite

$$N = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ \times 7}{22}$$

ou $$N = 57^\circ\,16' \text{ environ.}$$

CHAPITRE V.

De la mesure des aires.

§ I. — Théorèmes sur la mesure des aires.

165. — Mesurer l'aire d'une figure, c'est la comparer à une autre aire prise pour unité.

On prend habituellement pour unité d'aire celle du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Si, par exemple, l'unité de longueur est le mètre, l'unité d'aire est l'aire du carré qui a un mètre de côté, et qu'on appelle *mètre carré*. Si l'on prend pour unité de longueur le décimètre, l'unité d'aire sera le *décimètre carré*; et ainsi de suite.

166. — THÉORÈME. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés du rectangle, ordinairement à celui qui occupe le bas de la figure; l'un quelconque des côtés adjacents à la base est ce qu'on nomme la *hauteur*.)

L'énoncé ci-dessus signifie que, pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie du rectangle, il faut déterminer le nombre d'unités de longueur contenues dans sa base, le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur, et multiplier ces deux nombres l'un par l'autre.

Soit, en effet, ABCD (fig. 125) un rectangle, AB sa base et AD sa hauteur. Supposons, pour fixer les idées, que AB contienne 5 fois l'unité de longueur, et que AD la contienne 3 fois. Divisons la base en 5 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la hauteur. Divisons la hauteur en 3 parties égales, et, par tous les points de division, menons des parallèles à la base. La figure totale se trouvera ainsi divisée en figures partielles qui seront des rectangles, car tous les angles de la figure sont droits, et qui de plus sont des carrés, car leurs côtés sont égaux, soit aux divisions de AB (89), soit aux divisions de AD, c'est-à-dire à l'unité de longueur. Ces figures partielles sont donc des unités d'aire, et il ne reste plus qu'à en déterminer le nombre.

Or, le rectangle ABCD se trouve divisé en autant de bandes horizontales qu'il y a d'unités de longueur dans AD, c'est-à-dire en 3 bandes; chacune de ces bandes se compose d'autant de carrés ou d'unités d'aire qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire de 5. Le nombre total de ces unités d'aire est donc 5×3 ou 15.

Les raisonnements qui précèdent sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans AB et dans AD.

Remarque. Si la base et la hauteur ne contenaient pas un nombre exact de fois l'unité de longueur adoptée, on pourrait toujours recourir à une unité de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'elle fût contenue un nombre exact de fois dans AB et dans AD, ce qui finira toujours par arriver dans la pratique, attendu que le reste, s'il y en a un, finira par devenir inappréciable.

COROLLAIRE. Dans le cas où le rectangle proposé est un carré, la base et la hauteur sont égales; et pour obtenir le nombre d'unités d'aire contenues dans la superficie de ce carré, il faut multiplier par lui-même le nombre d'unités de longueur que contient l'un de ses côtés. C'est pour cela qu'en

Arithmétique on donne le nom de *carré* au produit d'un nombre par lui-même.

Si, par exemple, le côté du carré contient 2 unités de longueur, sa superficie contiendra 2×2 ou 4 unités d'aire. Si le côté contient 3 unités de longueur, la superficie contiendra 3×3 ou 9 unités d'aire; et ainsi de suite.

Un centimètre valant 10 millimètres, un centimètre carré vaut 10×10 ou 100 millimètres carrés. Par la même raison, un décimètre carré vaut 100 centimètres carrés; un mètre carré vaut 100 décimètres carrés; un décamètre carré vaut 100 mètres carrés; un hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés; et ainsi de suite.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. I. *La toile d'un tableau, de forme rectangulaire, a* $2^{m},62$ *de largeur, sur* $1^{m},94$ *de hauteur; quelle est sa superficie?*

La largeur est de 262 centimètres, la hauteur de 194 centimètres; la superficie est donc de 262×194 ou 50828 centimètres carrés; ou $5^{m.c.}, 8^{d.c.}, 28^{c.c.}$.

II. *Le plancher d'une salle carrée a* $6^{m},51$ *de longueur; quelle est sa superficie?*

Le côté du carré est de 651 centimètres; la superficie est donc de 651×651 ou 423801 centimètres carrés, ou bien $42^{m.c.}\ 38^{d.c.}\ 1^{c.c.}$.

167. — THÉORÈME. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa* base *par sa* hauteur.

(On nomme *base* l'un quelconque des côtés du parallélogramme, ordinairement celui qui occupe le bas de la figure; la *hauteur* est la distance de ce côté à celui qui lui est parallèle, distance qui est mesurée par leur perpendiculaire commune.)

Soit ABCD (fig. 126) un parallélogramme quelconque. Des points B et A abaissons sur CD et sur son prolonge-

ment les perpendiculaires BI et AH. La figure ABIH sera un rectangle. Les triangles rectangles AHD et BIC sont égaux; car ils ont leurs hypoténuses égales, AD=BC comme côtés opposés d'un même parallélogramme, et les côtés égaux AH=BI par la même raison.

Or, si de la figure totale on retranche d'une part le triangle AHD, il reste le parallélogramme ABCD; et si de cette même figure totale on retranche le triangle BIC, il reste le rectangle ABIH. Le rectangle est donc équivalent en surface au parallélogramme. Mais le rectangle ABIH a pour mesure $AB \times IB$; donc le parallélogramme a la même mesure, c'est-à-dire sa base AB multipliée par sa hauteur IB.

168. — THÉORÈME. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa* base *par sa* hauteur.

(Un côté quelconque d'un triangle peut être pris pour sa *base;* sa hauteur est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.)

Soit ABC (fig. 127) un triangle quelconque. Soit CH sa hauteur. Menons CD parallèle à AB, et BD parallèle à AC, la figure ABCD sera un parallélogramme. Les deux triangles ABC, DCB sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; le triangle ABC est donc la moitié du parallélogramme. Or, ce dernier a pour mesure $AB \times CH$; donc l'aire du triangle a pour mesure la moitié de ce produit, ou $\frac{1}{2} AB \times CH$.

Remarque. Lorsque le triangle est rectangle, on peut prendre pour base l'un des côtés de l'angle droit; l'autre côté de l'angle droit est alors la hauteur du triangle.

169. — THÉORÈME. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa* hauteur *par la demi-somme des deux* bases.

(On nomme *hauteur* d'un trapèze la distance des deux côtés parallèles, lesquels prennent le nom de *base*, ainsi que nous l'avons déjà dit.)

Soit ABCD (fig. 128) un trapèze. Désignons par h sa hauteur. Menons la diagonale AC. Le triangle ABC aura pour mesure $\frac{1}{2}\,AB\times h$; car sa hauteur est celle du trapèze. Par la même raison le triangle ADC aura pour mesure $\frac{1}{2}\,DC\times h$; car DC peut être pris pour sa base, et sa hauteur est alors celle du trapèze. L'aire de ce dernier étant la somme des aires des deux triangles, aura donc pour expression

$$\tfrac{1}{2}\,AB\times h+\tfrac{1}{2}\,CD\times h \quad \text{ou} \quad h\times\tfrac{1}{2}\,(AB+CD).$$

COROLLAIRE. D'après ce qui a été démontré au n° 129, on peut dire : qu'*un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles*.

Remarque. Quand le trapèze est rectangulaire (fig. 102), sa hauteur est le côté AD perpendiculaire aux deux bases.

170. — Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque ABCDEF (fig. 107), on peut le diviser en triangles, au moyen des diagonales menées par un même sommet; évaluer séparément l'aire de chaque triangle, et faire la somme. Nous verrons, plus loin, que dans l'arpentage on emploie une autre méthode.

171. — THÉORÈME. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

Si du centre O d'un polygone régulier ABCDEFG (fig. 112) on mène des rayons à tous les sommets, nous avons vu qu'on divise le polygone en autant de triangles isocèles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone. Or, l'un de ces triangles, BOC

par exemple, a pour mesure la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur, c'est-à-dire par la perpendiculaire OI abaissée du centre sur le côté BC, ou, en d'autres termes, par l'apothème du polygone. Si n désigne le nombre des côtés, on aura donc pour la mesure de l'aire totale

$$\tfrac{1}{2}\,BC\times OI\times n \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\,BC\times n\times OI.$$

Or, $BC\times n$, ou l'un des côtés répété autant de fois qu'il y a de côtés, c'est le périmètre du polygone. En le désignant par P on pourra donc écrire, pour l'expression de l'aire totale

$$\tfrac{1}{2}\,P\times OI,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

Remarque. Par des méthodes tirées de la Trigonométrie, on peut calculer la surface d'un polygone régulier quand on connaît le nombre de ses côtés et la longueur de l'un d'eux. On trouve ainsi qu'en désignant par a le côté,

la surface du *triangle équilatéral* sera exprimée par	$0,4330.a^2$
du *carré* .	a^2
du *pentagone*	$1,7205.a^2$
de *l'hexagone*	$2,5981.a^2$
de *l'octogone*	$4,8284.a^2$
du *décagone*	$7,6942.a^2$
du *dodécagone*	$11,1961.a^2$
etc.	etc.

Si, par exemple, on voulait connaître la superficie d'un octogone régulier dont le côté a 12 mètres, il faudrait multiplier 12 par lui-même, et le produit par 4,8284, ce qui donnerait $695^{m.c.}\ 28^{d.c.}\ 96^{c.c.}$.

172. — THÉORÈME. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

En effet, un cercle pouvant être considéré comme un polygone régulier dont les côtés sont infiniment petits et en nombre infiniment grand, on peut lui appliquer la mesure de ces polygones. Or, ici le périmètre n'est autre chose que la circonférence, et l'apothème se confond avec le rayon.

COROLLAIRE. Si l'on désigne par R le rayon du cercle, sa circonférence aura pour expression $2\pi R$; par conséquent, sa superficie sera exprimée par $\frac{1}{2} . 2\pi R . R$ ou par πR^2. C'est-à-dire que l'*aire d'un cercle a pour mesure le produit du carré de son rayon par le rapport de la circonférence au diamètre.*

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. I. *Un bassin circulaire a 20^m de diamètre; quelle est sa superficie?*

Le diamètre étant 20^m, le rayon est 10^m; le carré de ce rayon est 100$^{m.c.}$. Multipliant par 3,1416, on trouvera pour la superficie demandée 314$^{m.c.}$,16.

II. *Quel rayon faut-il donner à un cercle pour que sa superficie soit d'un mètre carré?*

La superficie étant exprimée par πR^2, en la divisant par le rapport π, on obtiendra le carré du rayon. Divisons donc 1$^{m.c.}$ par 3,1416, ce qui donne pour quotient 0$^{m.c.}$,318308. Ce nombre exprimant le carré du rayon, sa racine 0^m,564 exprimera le rayon lui-même.

III. *La circonférence d'un cercle est de 1 mètre; quelle est sa superficie?*

La circonférence étant 1^m, le diamètre est le quotient de 1^m par π ou par $\frac{22}{7}$, c'est-à-dire $\frac{7}{22}$; le rayon vaut donc $\frac{7}{44}$; et la superficie, qui est la moitié du produit de la circonférence par le rayon, vaudra $\frac{1}{2} . 1^m . \frac{7}{44}$ ou $\frac{7}{88}$ de mètre carré; c'est-à-dire environ 7$^{d.c.}$ 95$^{c.c.}$.

§ II. — Applications à l'arpentage.

173. — On sait que pour la mesure des terres, l'hectomètre carré prend le nom d'*hectare*, le décamètre carré le nom d'*are*, et le mètre carré le nom de *centiare*.

I. Soit à mesurer un champ de forme rectangulaire, ayant 24$^{\text{décam.}}$,7 de longueur, sur 13$^{\text{décam.}}$,3 de largeur.

La base du rectangle a 247 mètres, sa hauteur en a 133; d'après le théorème du n° 166, la superficie du champ est donc 247×133 ou 32851 mètres carrés, ou 3 hectares 28 ares et 51 centiares.

II. Soit à mesurer une pièce de terre ayant la forme d'un trapèze dont la hauteur est de 97 mètres, et dont les bases ont respectivement 231 et 145 mètres.

La demi-somme de ces bases est 188 mètres; en vertu de la proposition du n° 169, la superficie demandée sera donc $188^m \times 97^m$ ou 18236 mètres carrés; ce qui revient à 1 hectare 82 ares et 36 centiares.

174. — Soit maintenant à mesurer un polygone ABCDEFG (fig. 129) dont l'intérieur est accessible. Au lieu de le diviser en triangles, on emploie la méthode suivante, qui diminue de beaucoup le nombre des opérations à effectuer sur le terrain.

Par les deux sommets les plus éloignés, A et E, on tire la droite AE, à laquelle on donne le nom de *directrice*. De tous les sommets B, C, D, F, G, on abaisse sur cette directrice les perpendiculaires B*m*, C*n*, D*p*, F*q*, G*r*. Le polygone se trouve ainsi divisé en triangles rectangles et en trapèzes rectangulaires. Ce mode de décomposition offre, entre autres avantages, celui de n'avoir à transporter l'équerre d'arpenteur que le long de la directrice pour déterminer les points m, r, n, q, p. En outre, après la décomposition opérée, on n'a plus aucune autre ligne à tirer pour évaluer l'aire de chacune des parties qui composent le polygone.

On mesure à la chaîne les perpendiculaires Bm, Cn, Dp, Fq, Gr; et les différentes parties Am, mr, rn, nq, qp, pE, de la directrice. On a alors :

Triangle $ABm = \frac{1}{2} Am.Bm$.

Trapèze $BmnC = \frac{1}{2} mn\,(Bm + Cn)$; et ainsi des autres.

Si l'on suppose, par exemple, que l'on ait trouvé les valeurs suivantes :

$Am = 20^m,5$	$Bm = 27^m,2$
$mn = 60,3$	$Cn = 52,0$
$np = 57,1$	$Dp = 43,5$
$pE = 31,8$	$Fq = 62,1$
$qE = 55,7$	$Gr = 48,9$
$rq = 73,6$	
$Ar = 40,4$	

on aura, en effectuant successivement les opérations indiquées,

$$\text{Aire } ABCDEFG = \frac{1}{2}\,[557^{m.c.},60 + 4775,76 + 5353,05 + 1383,30 + 3458,97 + 8169,60 + 1975,56]$$

$$= 12\,886^{m.c.},92 = 1 \text{ hectare } 28 \text{ ares } 87 \text{ centiares.}$$

175. — Soit enfin à évaluer l'aire d'un polygone ABCDEFG (fig. 130), dont l'intérieur est inaccessible.

On prolonge l'un des côtés, FG par exemple. Des sommets extrêmes, A et E, on abaisse sur le prolongement de FG les perpendiculaires AM et EN que l'on prolonge au delà des points A et E. Par le sommet C le plus éloigné de FG, on lui mène une parallèle PO terminée à la rencontre

des droites MA et NE. On forme ainsi un grand rectangle MNOP, dans lequel le polygone proposé est inscrit.

La méthode consiste à évaluer l'aire de ce rectangle et à en retrancher l'aire comprise entre le contour du polygone et celui du rectangle ; le reste exprime évidemment l'aire du polygone.

Pour cela, de tous les sommets du polygone qui ne sont point situés sur quelqu'un des côtés du rectangle, on abaisse des perpendiculaires Bm, Dn sur ces côtés. On mesure à la chaîne ces perpendiculaires, ainsi que les longueurs AM, Am, Pm, PC, CO, On, nE, EN, FN, FG, MG. Il est facile alors d'évaluer le rectangle MNOP, les triangles rectangles AMG, AmB, DEn, ENF, et les trapèzes rectangulaires $PCBm$, $COnD$.

Si l'on suppose qu'on ait trouvé :

$mB = 20^m$; $Dn = 22^m,3$; $MA = 50^m,7$; $Am = 41^m$;
$mP = 37^m,8$; $PC = 76^m,9$; $CO = 75^m$; $On = 39^m,2$;
$nE = 48^m,6$; $EN = 41^m,7$; $FN = 43^m,4$; $MG = 30^m$.

Il en résultera :

$MN = PO = 76^m,9 + 75^m = 151^m,9$;
$MP = ON = 50^m,7 + 41^m + 37^m,8 = 129^m,5$.

On trouvera pour l'aire du rectangle $19671^{m.c.},05$; et pour celle des parties extérieures au polygone

$\frac{1}{2}\,[1521^{m.c} + 820 + 3662,82 + 3814,16 + 1083,78 + 1809,78]$ ou $6355^{m.c.},77$.

Par suite, l'aire du polygone a pour valeur

$19671^{m.c.},05 - 6355^{m.c.},77$, c'est-à-dire $13315^{m.c.},28$ ou environ 1 hectare 33 ares et 15 centiares.

CHAPITRE VI.

De la comparaison des aires.

§ I. — Théorèmes principaux sur la comparaison des aires.

176. — THÉORÈME. *Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Soient ABC et abc (fig. 131) deux triangles semblables. Des sommets homologues C et c abaissons sur les côtés opposés les perpendiculaires AD et ad.

Les triangles proposés étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels, et l'on a

$$AB : ab :: AC : ac \quad (1).$$

Les triangles rectangles ACD et acd, ayant l'angle A égal à l'angle a, sont équiangles, et par conséquent semblables; on a donc aussi

$$CD : cd :: AC : ac \quad (2).$$

Multipliant terme à terme les proportions (1) et (2), et divisant par 2 les deux termes du premier rapport, il vient

$$\tfrac{1}{2}AB \times CD : \tfrac{1}{2}ab \times cd :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

Or, $\frac{1}{2}AB \times CD$ mesure l'aire du triangle ABC, et $\frac{1}{2}ab \times cd$ mesure celle du triangle abc; on peut donc écrire

$$ABC : abc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarque. A la place du rapport $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$, on pourrait mettre $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ ou $\overline{CB}^2 : \overline{cb}^2$, puisque les côtés homologues sont proportionnels, et qu'il en est par conséquent de même de leurs carrés.

177. — THÉORÈME. *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Soient ABCDEF et $abcdef$ (fig. 107) deux polygones semblables. Par les sommets homologues A et a, menons les diagonales AC, AD, AE, ac, ad, ae, qui diviseront les deux polygones en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.

En vertu de cette similitude et de la proposition précédente, on aura successivement :

$$ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 \quad (1).$$
$$ACD : acd :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$$
$$ADE : ade :: \overline{DE}^2 : \overline{de}^2$$
$$AEF : aef :: \overline{EF}^2 : \overline{ef}^2.$$

Mais les polygones étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels; les carrés de ces côtés homologues sont donc aussi en proportion. Il en résulte que les seconds rapports des proportions précédentes sont tous égaux; il en est donc de même des premiers, et l'on a

$$ABC : abc :: ACD : acd :: ADE : ade :: AEF : aef.$$

Or, dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent. Ici, la somme des antécédents forme le polygone ABCDEF, et la somme des conséquents forme le polygone $abcdef$; on peut donc écrire

$$ABCDEF : abcdef :: ABC : abc.$$

Comparant cette proportion avec la proportion (1), on voit qu'elles ont un rapport commun ABC : abc; les deux autres rapports forment donc une proportion, et l'on a enfin

$$ABCDEF : abcdef :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

Remarque. A la place du rapport $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$, on pourrait mettre le rapport des carrés de deux côtés homologues quelconques, ou même le rapport des carrés de deux diagonales homologues.

Corollaire. Si les côtés d'un polygone deviennent 2, 3, 4, 5 fois, 10 fois plus grands, sans que ses angles changent, sa surface devient 4, 9, 16, 25 fois, 100 fois plus grande; et ainsi de suite.

178. — Théorème. *Deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Soient AB et ab (fig. 116) deux côtés de ces polygones; O et o leurs centres; joignons OA, OB et oa, ob, qui seront leurs rayons.

Les angles O et o étant une même fraction de 4 droits, sont égaux, et les triangles isocèles AOB, aob sont semblables. On a donc, en vertu de la proposition du n° 176,

$$AOB : aob :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

Si n désigne le nombre des côtés de chacun des deux polygones, on obtiendra, en multipliant par ce nombre, les deux termes du premier rapport

$$AOB \times n : aob \times n :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

Or, les deux termes du premier rapport expriment précisément les aires des deux polygones; ces aires sont donc entre elles comme les carrés des rayons.

Remarque. A la place du rapport des carrés des rayons, on pourrait mettre le rapport des carrés des apothêmes; car ces derniers sont proportionnels aux rayons.

179. — Théorème. *Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Car si A et a désignent les aires de deux cercles, R et r leurs rayons, on aura (172, coroll.)

$$A = \pi R^2 \quad \text{et} \quad a = \pi r^2;$$

d'où résulte la proportion identique

$$A : a :: \pi R^2 : \pi r^2;$$

ou, en divisant les deux termes du second rapport par π,

$$A : a :: R^2 : r^2.$$

Remarque. A la place du rapport des carrés des rayons, on pourrait mettre le rapport des carrés des diamètres, qui sont proportionnels aux rayons.

Corollaire. Si le rayon d'un cercle devient 2, 3, 4,... 10 fois plus grand, sa surface devient 4, 9, 16,... 100 fois plus grande; et ainsi de suite.

180. — Théorème. *Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Car si A, B, H désignent l'aire, la base et la hauteur d'un rectangle; a, b, h, l'aire, la base et la hauteur d'un second rectangle, on a (166)

$$A = B \times H \quad \text{et} \quad a = b \times h;$$

d'où résulte la proportion identique,

$$A : a :: B \times H : b \times h;$$

c'est-à-dire que deux rectangles sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.

Mais si les hauteurs sont égales, cette hauteur devient un facteur commun aux deux termes du second rapport; on peut donc le supprimer, et il reste

$$A : a :: B : b.$$

Remarque. On démontrerait de même que deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

181. — Théorème. *Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Même démonstration que pour la proposition précédente.

182. — Théorème. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*

Soit ABC (fig. 132) un triangle rectangle en C; soient ABEF, CBGK et ACMN, les carrés construits sur ses trois côtés. Du sommet C abaissons sur l'hypoténuse AB et sur sa parallèle FE la perpendiculaire commune CDH.

Le triangle ADC étant semblable au triangle total (121), on a la proportion

$$AD : AC :: AC : AB,$$

d'où
$$AD \times AB = \overline{AC}^2,$$

ou, en mettant pour AB son égale AF,

$$AD \times AF = \overline{AC}^2.$$

Or, $AD \times AF$ mesure l'aire du rectangle ADHF, et $\overline{AC}^2$ mesure l'aire du carré ACMN; donc ce rectangle équivaut à ce carré.

On démontrerait de la même manière que le rectangle DBEH équivaut au carré CBGK.

Mais la somme des rectangles ADHF et DBEH forme le carré ABEF construit sur l'hypoténuse; ce carré équivaut donc à la somme des carrés ACMN et CBGK construits sur les deux autres côtés.

Corollaire. Si le triangle rectangle est en même temps isocèle, les carrés construits sur les côtés de l'angle droit

sont égaux; et le carré construit sur l'hypoténuse est le double de chacun d'eux.

183. — Théorème. *Les carrés* ACMN, CBGK (fig. 132) *construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *sont entre eux comme les parties* AD, DB *de l'hypoténuse* (déterminées par la perpendiculaire CD, abaissée du sommet de l'angle droit).

Car ces carrés sont entre eux comme les rectangles ADHF et DBEH, qui leur sont respectivement égaux. Or, ces rectangles ayant même hauteur DH, sont entre eux comme leurs bases AD et DB. On a donc

$$ACMN : CBGK :: AD : DB,$$

ou bien
$$\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 :: AD : DB.$$

§ II. — Problèmes sur la comparaison des aires.

184. — Problème I. *Faire un carré équivalent à un rectangle.*

Soient B et H la base et la hauteur du rectangle. Cherchez une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes (102); en la désignant par x on aura

$$B : x :: x : H; \quad \text{d'où} \quad x^2 = B \times H.$$

Or, x^2 mesure l'aire du carré dont le côté est x, et $B \times H$ mesure l'aire du rectangle proposé. Le carré construit sur la moyenne proportionnelle entre B et H sera donc le carré demandé.

185. — Problème II. *Faire un carré équivalent à un triangle.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre sa base et la moitié de sa hauteur; ce sera le côté du carré demandé.

Même démonstration que pour la proposition précédente.

186. — PROBLÈME III. *Faire un carré équivalent à un polygone.*

Soit ABCDE (fig. 133) le polygone donné. Menez la diagonale DB qui sépare du polygone le triangle BCD. Par le point C menez CF parallèle à cette diagonale, et terminé au prolongement de AB; puis joignez DF. Les triangles DCB et DFB peuvent être considérés comme ayant même base DB; leurs sommets C et F étant situés sur une même parallèle à la base, leurs hauteurs sont égales; ces triangles sont donc équivalents. Si donc on enlève au polygone proposé le triangle DCB, et qu'on le remplace par le triangle équivalent DFB, on obtiendra un nouveau polygone AFDE équivalent au premier. Mais ce nouveau polygone aura un côté de moins, puisque AB et BF sont en ligne droite.

En répétant cette opération, on réduira successivement le nombre des côtés du polygone, jusqu'à le réduire à un triangle équivalent. On déterminera le carré équivalent à ce triangle; ce carré équivaudra au polygone proposé.

187. — PROBLÈME IV. *Faire un carré équivalent à un cercle.*

Ce problème, connu sous le nom de QUADRATURE DU CERCLE, a longtemps occupé les géomètres; mais ils sont parvenus à démontrer qu'on ne pouvait le résoudre exactement par la règle et le compas.

On le résout, par le calcul, avec telle approximation qu'on le désire.

Car si R désigne le rayon du cercle et x le côté du carré équivalent, on doit avoir

$$x^2 = \pi R^2; \quad \text{d'où} \quad x = R.\sqrt{\pi}.$$

Or, on a calculé le rapport π jusqu'à 140 décimales; on peut

donc extraire sa racine avec un degré d'approximation qui surpassera toujours les besoins de la pratique. Si l'on prend pour π la valeur 3,1415926535..., on trouve que sa racine carrée est 1,77245, à moins d'une demi-unité du cinquième ordre décimal. On a donc

$$x = R \times 1,77245,$$

à moins d'un demi-cent-millième du rayon.

Si, par exemple, le rayon avait 100 mètres, le côté du carré équivalent au cercle serait 177^{m},245, à moins d'un demi-millimètre.

188. — PROBLÈME V. *Faire un carré qui soit à un carré donné, comme le nombre* p *est au nombre* q.

Sur une droite indéfinie portez une longueur AB (fig. 134) égale à p unités arbitraires; à la suite de AB, portez une longueur BC égale à q de ces mêmes unités. Sur AC comme diamètre décrivez une demi-circonférence. Au point B élevez la perpendiculaire BD; joignez DA et DC. Sur DC portez, à partir du point D, une longueur DE égale au côté du carré donné. Par le point E menez EF parallèle à CA; la distance DF sera le côté du carré demandé.

En effet : l'angle ADC étant inscrit dans un demi-cercle, le triangle ADC est rectangle. La droite DB étant une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, on a, en vertu de la proposition du n° 183,

$$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 :: AB : BC \qquad (1).$$

Or, les parallèles FE et AC divisant proportionnellement les côtés de l'angle ADC, on a la proportion

$$AD : DC :: DF : DE,$$

d'où $$\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 :: \overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 \qquad (2).$$

Les proportions (1) et (2) ayant un rapport commun, les deux autres forment une proportion, et l'on peut écrire

$$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: AB : BC,$$

ou $$\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: p : q,$$

c'est-à-dire que le carré construit sur DF est au carré donné comme le nombre p est au nombre q.

189. — Problème VI. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et qui soit à ce polygone comme le nombre* p *est au nombre* q.

Soit P l'aire du polygone donné; X celle du polygone demandé; a l'un des côtés du polygone donné, x son homologue dans le polygone cherché.

Les polygones étant semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues; on a donc

$$X : P :: x^2 : a^2;$$

mais, d'après l'énoncé, on doit aussi avoir

$$X : P :: p : q,$$

à cause du rapport commun; on peut donc écrire

$$x^2 : a^2 :: p : q,$$

c'est-à-dire que la question est ramenée à trouver le côté x d'un carré, qui soit à un carré donné a^2 comme le nombre p est au nombre q; ce qu'on a appris à faire dans le problème précédent.

Ayant déterminé le côté homologue du côté a, on construira sur ce côté un polygone semblable au polygone demandé (141).

190. — Problème VII. *Faire un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés.*

Tracez un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit soient respectivement égaux aux côtés des deux carrés donnés; l'hypoténuse de ce triangle sera le côté du carré demandé (182).

191. — Problème VIII. *Étant donnés deux polygones semblables* P *et* P′, *en construire un troisième* P″ *semblable aux deux premiers, et équivalent à leur somme.*

Soient a et a' deux côtés homologues dans les deux premiers polygones; soit x leur homologue dans le troisième.

On aura d'abord (177) :

$$P : P' :: a^2 : a'^2 \qquad (1),$$

et $$P'' : P :: x^2 : a^2 \qquad (2).$$

De la première proportion on tire

$$P + P' : P :: a^2 + a'^2 : a^2,$$

ou, en remplaçant $P + P'$ par P'', qui équivaut à cette somme,

$$P'' : P :: a^2 + a'^2 : a^2 \qquad (3).$$

En comparant les proportions (2) et (3), on voit qu'elles ont trois termes communs; il faut donc que le terme restant soit égal de part et d'autre; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$x^2 = a^2 + a'^2.$$

La question est donc ramenée à trouver le côté x d'un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés a^2 et a'^2; ce qu'on fera au moyen du problème précédent.

Ayant déterminé le côté x homologue de a, on construira sur ce côté un polygone semblable au polygone P (141); ce sera le polygone que l'on demande.

192. — Problème IX. *Tracer un cercle équivalent à la somme de deux cercles donnés.*

Tracez un triangle rectangle, dans lequel les côtés de l'angle droit soient les rayons des cercles donnés; l'hypoténuse de ce triangle sera le rayon du cercle demandé.

Car, en appelant R et R' les rayons des cercles donnés, et R'' l'hypoténuse du triangle, on aura (182) :

$$R''^2 = R^2 + R'^2,$$

d'où en multipliant par le rapport π de la circonférence au diamètre,

$$\pi R''^2 = \pi R^2 + \pi R'^2.$$

Mais $\pi R''^2$, πR^2, $\pi R'^2$, mesurent respectivement l'aire des cercles qui ont pour rayon R'', R et R' (172, coroll.); donc le cercle qui a pour rayon l'hypoténuse du triangle est équivalent à la somme des deux cercles donnés.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

De la ligne droite et du plan.

§ I. — De la droite et du plan en général.

193. — Théorème. *Si une droite a deux de ses points dans un plan, elle est tout entière dans ce plan.*

Cela résulte de la définition du plan (6).

Corollaire. *Une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point*; à moins d'y être contenue tout entière.

194. — Théorème. *Deux plans qui ont trois points communs* (non en ligne droite), *coïncident dans toute leur étendue.*

Soient A, B, C (fig. 135), trois points non en ligne droite; et supposons, s'il est possible, qu'ils appartiennent à deux plans distincts, que nous appellerons M et P pour faciliter le discours. Si, par les points A et B, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans le plan M et dans le plan P (193). De même si, par les points A et C, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans chacun des deux plans M et P.

Soit D un point quelconque du plan M; je dis qu'il appartient aussi au plan P. En effet : dans le plan M, menons par le point D une droite EF qui coupe en E et en F les

Tracez un triangle rectangle, dans lequel les côtés de l'angle droit soient les rayons des cercles donnés; l'hypoténuse de ce triangle sera le rayon du cercle demandé.

Car, en appelant R et R' les rayons des cercles donnés, et R'' l'hypoténuse du triangle, on aura (182):

$$R''^2 = R^2 + R'^2,$$

d'où en multipliant par le rapport π de la circonférence au diamètre,

$$\pi R''^2 = \pi R^2 + \pi R'^2.$$

Mais $\pi R''^2$, πR^2, $\pi R'^2$, mesurent respectivement l'aire des cercles qui ont pour rayon R'', R et R' (172, coroll.); donc le cercle qui a pour rayon l'hypoténuse du triangle est équivalent à la somme des deux cercles donnés.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

De la ligne droite et du plan.

§ I. — De la droite et du plan en général.

193. — Théorème. *Si une droite a deux de ses points dans un plan, elle est tout entière dans ce plan.*

Cela résulte de la définition du plan (6).

Corollaire. *Une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point*; à moins d'y être contenue tout entière.

194. — Théorème. *Deux plans qui ont trois points communs* (non en ligne droite), *coïncident dans toute leur étendue.*

Soient A, B, C (fig. 135), trois points non en ligne droite; et supposons, s'il est possible, qu'ils appartiennent à deux plans distincts, que nous appellerons M et P pour faciliter le discours. Si, par les points A et B, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans le plan M et dans le plan P (193). De même si, par les points A et C, on fait passer une droite, elle sera tout entière dans chacun des deux plans M et P.

Soit D un point quelconque du plan M; je dis qu'il appartient aussi au plan P. En effet : dans le plan M, menons par le point D une droite EF qui coupe en E et en F les droites AB et AC, prolongées s'il est nécessaire. La droite EF passant par les points E et F qui sont tous deux dans le plan P, sera elle-même dans ce plan. Donc le point D, qui appartient à EF, sera lui-même dans le plan P.

On verrait de la même manière que tout point pris sur l'un des deux plans appartient aussi à l'autre. Donc les deux plans coïncident dans toute leur étendue.

COROLLAIRES. I. *Trois points, non en ligne droite, suffisent pour déterminer un plan.* Car, si par deux de ces points on fait passer une droite, et par cette droite un plan, on pourra faire tourner ce dernier autour de la droite jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point; sa position sera alors déterminée, et de plus aucun autre plan ne pourra passer par les trois mêmes points sans se confondre avec lui.

On verrait de même que :

II. *Deux droites qui se coupent déterminent un plan.*

III. *Deux droites parallèles déterminent un plan.* D'abord deux parallèles sont toujours dans un même plan; cela résulte de la définition des parallèles. En second lieu, par deux parallèles on ne peut faire passer qu'un seul plan; car si l'on prend deux points sur l'une des parallèles et un point sur l'autre, on aura trois points non en ligne droite, et par lesquels conséquemment on ne peut faire passer qu'un seul plan.

195. — THÉORÈME. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.* Les plans étant des surfaces, leur intersection ne peut être qu'une ligne. Je dis que cette ligne est droite; car si elle avait seulement trois points qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans coïncideraient en vertu du théorème précédent.

§ II. — Des perpendiculaires aux plans.

196. — THÉORÈME. *Si une droite* AO (fig. 136) *est perpendiculaire à deux autres droites* OB *et* OC, *passant par son pied* O *dans un plan* MN, *elle sera également perpendiculaire à toute autre droite* OD *passant par son pied dans le même plan.*

Pour le prouver, tirons une droite quelconque BC, qui coupe les droites OB, OD, OC. Prolongeons AO, au-dessous du plan MN, d'une quantité OA′ égale à OA; et joignons AB, AD, AC, A′B, A′D, A′C.

Les droites CA et CA′ sont deux obliques égales, puisque leurs pieds sont également distants du pied de OC perpendiculaire à AA′. Par une raison semblable, les droites BA et BA′ sont égales. Les deux triangles ABC et A′BC sont donc égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que les angles ABC et A′BC sont égaux.

Considérant les deux triangles ABD et A′BD, on voit alors qu'ils ont un angle égal, compris entre des côtés égaux chacun à chacun. Ces triangles sont donc égaux, et l'on a $AD = A'D$.

La droite OD a donc deux de ses points, O et D, à égale distance des extrémités de AA′; elle est donc perpendiculaire sur cette droite; et, réciproquement, AO est perpendiculaire à OD.

Remarque. Lorsqu'une droite est ainsi perpendiculaire à toutes celles qui passent par son pied dans un plan, elle est dite *perpendiculaire au plan*; et, réciproquement, le plan est dit *perpendiculaire à la droite.*

197. — THÉORÈME. *Toutes les perpendiculaires* OB, OC, OD (fig. 137), *élevées dans l'espace par un même point* O *d'une droite* AA', *sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite.*

Menons un plan par les droites OB et OC, et un autre par les droites OA et OD ; il s'agit de démontrer que ces deux plans se couperont suivant la droite OD elle-même. En effet, si cela n'était pas, et que leur intersection fût une droite OI, différente de OD ; en vertu du théorème du nº 196, AO serait perpendiculaire à OI ; mais déjà AO est supposé perpendiculaire à OD ; on aurait donc, dans un même plan AOD, deux droites OI et OD perpendiculaires à AO en un même point de cette droite, ce qui est impossible.

Ainsi, les plans BOC et AOD ne peuvent se couper que suivant OD. Donc le plan des deux premières perpendiculaires OB et OC passe par la suivante OD. On démontrerait de même qu'il passe par toutes les autres ; donc toutes ces perpendiculaires sont dans un même plan, lequel est d'ailleurs perpendiculaire à AO, en vertu du Théorème du nº 196.

198. — THÉORÈME. *Par un point donné on ne peut mener qu'une droite perpendiculaire à un plan.*

Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse d'un point O (fig. 138) extérieur au plan MN ; et soient, s'il est possible, OA et OB toutes deux perpendiculaires à ce plan. Joignons AB. Chacune des droites OA et OB sera perpendiculaire à AB, menée par son pied dans le plan MN. Dans le triangle AOB il y aurait donc deux angles droits, ce qui est impossible.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse d'un point O (fig. 139) pris sur le plan MN ; et soient, s'il est possible, OA et OB toutes deux perpendiculaires à ce plan. Ces deux droites détermineront un plan, qui coupera MN suivant une droite OC. Chacune des droites OA et OB sera perpendiculaire à OC menée par son pied dans le plan MN. Or, les trois droites OA, OB, OC sont dans un même plan ; on pourrait donc, dans un même plan, élever à une même droite OC, en un même point O de cette droite, deux perpendiculaires OA et OB, ce qui est impossible.

199. — THÉORÈME. *Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à une droite.*

Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse d'un point O (fig. 140) pris sur la droite AB ; et admettons que par ce point on puisse mener deux plans perpendiculaires à AB. Suivant AB on pourra toujours concevoir un plan qui coupe les deux premiers suivant deux droites distinctes OC et OD, lesquelles seront perpendiculaires à AB, comme passant par son pied O dans chacun des deux premiers plans. Mais les trois droites OC, OD et AB sont situées dans le troisième plan ; on pourrait donc, dans ce plan, mener deux droites OC et OD perpendiculaires à une même droite AB, en un même point O de cette droite, ce qui est impossible.

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse d'un point O (fig. 141) situé hors de la droite AB ; et admettons que par ce point on puisse mener deux plans perpendiculaires à AB.

D'abord, ces deux plans ne pourraient couper AB au même point, car dans le cas contraire on pourrait mener par ce point deux perpendiculaires à AB, ce qui est impossible en vertu de ce qu'on vient de démontrer.

Soient donc C et D les points où ces plans couperont AB. Joignons OC et OD ; ces droites seront perpendiculaires à AB, comme passant par son pied C ou D dans l'un ou l'autre des deux plans. Il en résulte que dans le triangle COD il y aurait deux angles droits, ce qui est impossible.

200. — Toute droite qui rencontre un plan sans lui être perpendiculaire, est dite *oblique* à ce plan. Le point où la droite rencontre le plan se nomme le *pied* de l'oblique.

Théorème. *Si par un point* O (fig. 142) *pris hors d'un plan* MN, *on lui mène la perpendiculaire* OP *et différentes obliques* OA, OB, OC; 1° *toute oblique sera plus longue que la perpendiculaire;* 2° *deux obliques dont les pieds seront également distants du pied de la perpendiculaire seront égales;* 3° *de deux obliques dont les pieds seront inégalement distants du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écartera le plus sera la plus grande.*

1° Joignons AP. Le triangle APO sera rectangle en P; donc l'hypoténuse OA est plus longue que le côté OP.

2° Soient $PA = PB$. Les triangles rectangles OPA et OPB auront le côté commun OP et deux côtés égaux $PA = PB$; donc les hypoténuses OA et OB sont égales.

3° Soit $PC > PA$. Prenons sur PC une longueur PB égale à PA, et joignons OB; en vertu de ce qui vient d'être démontré, on aura $OA = OB$. Mais les trois droites OP, OB, OC étant dans un même plan, et OP étant perpendiculaire à PC, on a $OC > OB$. Donc aussi $OC > OA$.

Corollaires. I. De ces propositions directes résultent des réciproques que le lecteur apercevra sans peine.

II. *La véritable distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

201. — Théorème. *Si du pied* O (fig. 143) *d'une droite* AO *perpendiculaire à un plan* MN, *on abaisse* OD *perpendiculaire sur une droite quelconque* BC *menée dans ce plan, et qu'on joigne* AD, *la droite* AD *sera perpendiculaire à* BC.

En effet: prenons $CD = BD$, et joignons OB, OC, AB, AC. Les obliques OB et OC seront égales comme s'écartant également du pied D de la perpendiculaire OD. Les triangles AOB, AOC, rectangles en O, puisque AO est perpendiculaire au plan MN, auront donc deux côtés égaux et un côté commun, et seront par conséquent égaux. Leurs hypoténuses AB et AC seront donc égales. La droite AD a donc deux de ses points, A et D, à égale distance des extrémités de BC; donc elle est perpendiculaire sur cette droite.

§ III. — Des droites parallèles entre elles dans l'espace, et des droites parallèles à des plans.

202. — Théorème. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.*

Soient AO et ED (fig. 144) deux perpendiculaires à un même plan MN; je dis d'abord que ces droites sont situées dans un même plan.

En effet: joignons OD; menons, dans le plan MN, la droite BC perpendiculaire à OD, et joignons AD, qui sera perpendiculaire sur BC en vertu du théorème précédent. Mais BC est aussi perpendiculaire sur OD par construction, et à ED, puisque cette dernière est perpendiculaire au plan MN (196). Les trois droites DO, DA et DE sont donc dans un même plan (197). Mais la droite AO est dans ce plan, puisqu'elle y a deux points, A et O. Donc AO et ED sont dans un même plan.

Maintenant, si ces droites prolongées pouvaient se rencontrer en un certain point, il y aurait de ce point deux perpendiculaires abaissées sur un même plan MN, ce qui est impossible.

Donc les droites AO et ED sont parallèles.

203. — Théorème. *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Soient AO et ED (fig. 144) deux droites parallèles, et soit MN un plan perpendiculaire à AO ; je dis qu'il l'est aussi à ED.

Joignons, en effet, OD ; menons, dans le plan MN, la droite BC perpendiculaire à OD ; et tirons AD, qui sera perpendiculaire à BC (201). Mais BC est perpendiculaire à OD ; la droite BC est donc perpendiculaire au plan des droites AD et OD. Or, ce plan est celui des parallèles AO et ED, puisqu'ils ont trois points communs A, O, D. Donc BC est aussi perpendiculaire à ED.

Mais, dans le plan AODE, la droite OD, perpendiculaire à AO, est aussi perpendiculaire à sa parallèle ED. Il en résulte que ED, perpendiculaire aux droites OD et DC qui passent par son pied dans le plan MN, est perpendiculaire à ce plan.

Corollaire. *Deux droites parallèles à une troisième dans l'espace, sont parallèles entre elles.*

Car si l'on mène un plan perpendiculaire à la troisième droite, il le sera aux deux premières. Ces deux premières sont donc parallèles (202).

204. — Théorème. *Une droite* AB (fig. 145), *parallèle à une autre droite* CD *située dans un plan* MN, *ne peut rencontrer ce plan quelque loin qu'on les prolonge.*

Les droites AB et CD étant parallèles, sont dans un même plan, qui coupe le plan MN suivant la droite CD. Si donc la ligne AB, qui appartient au plan ABDC, rencontrait le plan MN, ce ne pourrait être qu'en un point commun à ces deux plans, c'est-à-dire en un point de leur intersection CD. Or, AB ne peut rencontrer sa parallèle CD ; donc elle ne peut rencontrer le plan MN.

Remarque. Une droite et un plan qui ne peuvent se rencontrer sont dits *parallèles* l'un à l'autre.

Le théorème précédent peut donc s'énoncer ainsi : *Toute parallèle à une droite située dans un plan est parallèle à ce plan.*

205. — Théorème. *Si par une droite* AB (fig. 145) *parallèle à un plan* MN, *on mène un second plan* ABDC, *qui coupe le premier suivant une droite* CD, *l'intersection* CD *sera parallèle à* AB.

Car si AB et CD, qui sont dans un même plan, n'étaient point parallèles, leur point de rencontre appartiendrait à la fois à la droite AB et au plan MN qui contient CD ; la droite AB et le plan MN ne seraient donc pas parallèles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. *Si* AB *est parallèle au plan* MN, *toute droite* EF *parallèle à* AB *est aussi parallèle à* MN.

Car, si l'on mène suivant AB un plan qui coupe MN suivant une droite CD, cette droite étant parallèle à AB, le sera aussi à EF. Donc EF sera parallèle à MN, en vertu du théorème du n° 204.

206. — Théorème. *Si une droite* AB (fig. 145) *est parallèle à un plan, et que par un point* C *de ce plan on mène une parallèle à* AB, *elle sera tout entière dans le plan* MN.

Soit CD cette parallèle à AB. Si CD n'était pas dans le plan MN, le plan ABDC des deux parallèles couperait MN suivant une droite passant par le point C et différente de CD, et qui, de plus, serait parallèle à AB (205). On pourrait donc par un même point C mener deux parallèles à une même droite AB, ce qui est impossible (69, Rem.).

Corollaire. *Toute droite parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.*

Car, si par un point de cette intersection on menait une parallèle à la droite proposée, cette parallèle devrait être contenue à la fois dans les deux plans; et se confondrait, par conséquent, avec leur intersection.

207. — THÉORÈME. *Lorsqu'une droite* AB (fig. 145) *est parallèle à un plan* MN, *tous les points de cette droite sont également distants du plan.*

Car, soient AC et BD les perpendiculaires abaissées des points A et B sur le plan MN. Ces droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles (202), et déterminent un plan qui contient AB, puisque cette droite y a deux points, et qui coupe le plan MN suivant une droite CD parallèle à AB (205). La figure ABDC est donc un parallélograme rectangle; et l'on a AC = BD.

Remarque. La véritable distance d'une droite à un plan qui lui est parallèle est la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette droite sur ce plan.

§ IV. — Des angles formés par les droites et les plans.

208. — THÉORÈME. *Deux angles qui, dans l'espace, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont égaux.*

Soient ABC, DEF (fig. 146) deux angles situés comme on voudra dans l'espace, mais dont les côtés BA et ED sont parallèles, ainsi que les côtés BC et EF; et, de plus, dirigés dans le même sens à partir du sommet. Prenons BA = ED, BC = EF, et joignons AD, BE, CF, AC et DF.

Les droites AB et DE étant égales et parallèles, la figure ABED est un parallélogramme; donc AD est égal et parallèle à BE. Les droites BC et EF étant égales et parallèles, la figure BCFE est un parallélogramme; donc CF est égal et parallèle à BE. Les droites AD et CF étant toutes deux égales et parallèles à BE, sont égales et parallèles entre elles; donc ADFC est un parallélogramme; d'où il résulte AC = DF. Les deux triangles ABC, DEF ont donc leurs trois côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux; et par suite l'angle ABC est égal à l'angle DEF.

209. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. Soit AO (fig. 147) une droite quelconque qui rencontre un plan MN. D'un point quelconque A de cette droite abaissons sur le plan la perpendiculaire AC, et joignons OC; l'angle AOC sera ce que l'on nomme l'angle de la droite et du plan.

Remarquons d'abord, que, quel que soit le point de la droite AO par lequel on abaisse une perpendiculaire sur le plan MN, c'est toujours la même droite CO, et par suite le même angle AOC que l'on obtient. Soit, en effet, BD une autre perpendiculaire abaissée d'un point B de AO sur le plan MN. Les deux droites AC et BD étant perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles, et déterminent un plan dans lequel se trouve la droite AO, puisqu'elle y a deux points A et B. Les points C, D, O, sont dans ce plan; mais ils sont aussi dans le plan MN; donc ils sont sur l'intersection de ces deux plans; c'est-à-dire qu'ils sont en ligne droite.

Cette droite OC, sur laquelle se trouvent les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de AO sur le plan MN, est ce qu'on nomme la *projection* de AO sur ce plan. *L'angle d'une droite et d'un plan est donc l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan.*

210. — THÉORÈME. *L'angle* BOD (fig. 147) *que fait une droite* BO *avec sa projection* OD *sur un plan* MN, *est plus petit que celui qu'elle fait avec une droite quelconque* OI *menée par son pied dans ce même plan.*

Pour le prouver, prenons OI = OD et joignons BI. Les deux triangles BOD et BOI auront deux côtés égaux chacun à chacun; savoir, BO commun et OI = OD. Mais le troisième côté BD de l'un, qui est une perpendiculaire à MN, est plus court que le troisième côté BI de l'autre, qui est une oblique à ce même plan. Donc, en vertu d'un théorème de Géométrie plane (115) l'angle BOD est moindre que l'angle BOI.

211. — Angle de deux plans. Lorsque deux plans se rencontrent, ils forment un écart plus ou moins grand auquel on donne le nom d'*angle dièdre* ou simplement *dièdre*. Chacun des deux plans est une des *faces* du dièdre, et l'intersection des deux plans est l'*arête* de ce même dièdre. Pour désigner un dièdre, on emploie ordinairement quatre lettres, dont les deux moyennes sont prises sur son arête, et les deux extrêmes sur chacune de ses faces. Ainsi le dièdre que représente la figure 148 pourrait être désigné de l'une des quatre manières suivantes :

ADCF, FCDA, BCDE, EDCB.

On peut encore désigner un dièdre par son arête, et dire, par exemple, le dièdre CD. Mais si deux dièdres ont la même arête, il faut recourir au premier moyen.

La grandeur des faces d'un angle dièdre n'influe en rien sur la valeur de cet angle ; de même que la valeur de l'angle formé par deux droites est indépendant de la longueur de ses côtés.

212. — Si par un point C de l'arête d'un dièdre ADCF on élève dans chacune de ses faces les droites CB, CF perpendiculaires à cette droite, l'angle BCF formé par ces perpendiculaires est ce qu'on nomme l'*angle plan* du dièdre.

Cet angle plan a la même valeur, en quelque point de l'arête qu'on le forme. Car si DA et DE sont aussi des perpendiculaires à l'arête CD, élevées dans chacune des deux faces, les droites DA et CB seront parallèles comme étant

toutes deux perpendiculaires à CD dans le plan ADCB, et les droites DE et CF seront aussi parallèles par une raison analogue. Il en résulte que les angles ADE et BCF seront égaux (208).

213. — Lemme. *Deux dièdres sont égaux lorsqu'ils ont des angles plans égaux.*

Soient CD et C′D′ (fig. 148) deux dièdres, BCF et B′C′F′ leurs angles plans supposés égaux. Concevons qu'on ait transporté le dièdre C′D′ sur le dièdre CD, de manière que les angles égaux BCF et B′C′F′ coïncident. Les arêtes CD et C′D′, toutes deux perpendiculaires à CB et à CF, et par conséquent au plan BCF, coïncideront (198). Il en sera donc de même des faces ABCD et A′B′C′D′, qui passeront toutes deux par les droites CB et CD (194, coroll. II) ; ainsi que des faces CDEF et C′D′E′F′, qui passeront toutes deux par les droites CD et CF.

Donc les deux dièdres coïncideront, et sont par conséquent égaux.

214. — Théorème. *Deux dièdres quelconques sont entre eux comme leurs angles plans.*

Quels que soient les deux dièdres proposés, on peut toujours concevoir que l'on ait transporté l'un d'eux de manière à ce qu'ils aient même arête et une face commune. Soient AODF et AODG (fig. 149) les deux dièdres ainsi placés. Soient OA, OB, OC des perpendiculaires à l'arête élevées dans chacune des faces ; ces perpendiculaires sont dans un même plan (197). Dans ce plan, et du point O comme centre, décrivons l'arc de cercle ABC. Les dièdres AODF et AODG auront respectivement pour angle plan les angles AOB et AOC, lesquels sont dans le rapport des arcs de cercle AB et AC. Évaluons ces arcs à l'aide d'une unité assez petite pour qu'ils en contiennent chacun un nombre exact, ce qui finira toujours par arriver dans la pratique; et pour fixer les idées, supposons que AB contienne 3 fois l'unité, et que AC la contienne 8 fois; ces deux arcs seront entre eux comme 3 est à 8.

Divisons AC en 8 parties égales, AB en contiendra 3. Par tous les points de division et par le point O menons des rayons; l'angle AOC sera divisé en 8 angles partiels qui seront égaux comme interceptant des arcs égaux, l'angle AOB en contiendra 3. Par tous ces rayons et par l'arête OD menons des plans; ils diviseront le dièdre AODG en 8 dièdres partiels qui auront pour angles plans les angles formés par les rayons menés du point O aux points de division de l'arc AC, car ces rayons étant menés dans le plan AOC par le pied de OD perpendiculaire à ce plan, sont eux-mêmes perpendiculaires à OD. Les petits angles plans étant égaux, il en sera de même des petits dièdres auxquels ils correspondent (213). Le dièdre AODG contenant 8 de ces petits dièdres égaux, et le dièdre AODF en contenant évidemment 3, on aura la proportion

$$AODF : AODG :: 3 : 8;$$

mais on a déjà

$$AOB : AOC :: 3 : 8;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$AODF : AODG :: AOB : AOC,$$

c'est-à-dire que les deux dièdres sont entre eux comme leurs angles plans.

Remarque. C'est en vertu de ce théorème *qu'un dièdre a pour mesure son angle plan*; ce qui veut dire que si l'on prend pour unité d'angle dièdre celui qui correspond à l'unité d'angle plan, un dièdre quelconque est à l'unité d'angle dièdre comme son angle plan est à l'unité d'angle.

L'unité d'angle plan étant l'angle droit, il convient de prendre pour unité de dièdre celui qui lui correspond, et que pour cette raison on nomme aussi *dièdre droit*.

215. — Pour mesurer les angles dièdres, on emploie dans les arts un instrument appelé *fausse-équerre* (fig. 150). Il se compose de deux règles réunies à l'une de leurs extrémités par un axe autour duquel elles peuvent tourner à frottement doux. Pour s'en servir, on trace d'abord l'angle plan de l'angle dièdre à mesurer; on fait ensuite coïncider les règles avec les deux côtés de cet angle plan, soit par leurs bords internes si le dièdre est saillant, comme l'angle d'une rue, soit par leurs bords externes si le dièdre est en creux comme l'angle intérieur d'un appartement. Il n'y a plus qu'à rapporter cet angle sur un plan, pour pouvoir le mesurer au rapporteur.

A cet effet, on applique l'arête intérieure *ac* de la fausse-équerre contre le bord rectiligne d'une surface bien dressée; la règle *ab* qui appuie sur cette surface, sert à tracer une droite qui fait avec le bord rectiligne du plan un angle qui est l'angle demandé, et que l'on peut ensuite mesurer commodément au rapporteur.

216. — Angles trièdres. Lorsque trois plans se rencontrent en un même point, et se coupent deux à deux suivant trois droites distinctes, la réunion de ces trois plans forme ce qu'on appelle un *angle trièdre*, ou simplement un *trièdre*.

La figure 151 représente un trièdre. Les plans ASB, ASC, BSC qui le forment se nomment ses *faces*. Les intersections SA, SB, SC des faces du trièdre se nomment ses *arêtes*; et le point de concours S des trois faces se nomme son *sommet*. On applique aussi le nom de *faces* aux angles

ASB, ASC, BSC, compris entre les arêtes; mais le sens du discours indique toujours suffisamment si l'on parle des plans ou des angles.

Dans la considération des trièdres on fait abstraction de la longueur des arêtes et de l'étendue des faces.

On désigne un trièdre par la lettre placée à son sommet, en la faisant suivre, s'il est nécessaire, de trois autres lettres prises sur chacune de ses arêtes : on dirait ainsi le trièdre S, ou le trièdre SABC.

217. — THÉORÈME. *Chaque face d'un trièdre est plus petite que la somme des deux autres, et plus grande que leur différence.*

Soit SABC (fig. 152) un trièdre quelconque.

1° Il n'y a lieu à démontrer la première partie du théorème que pour la plus grande des trois faces : soit ASC cette plus grande face.

Dans le plan ASC menons SD qui fasse avec SC un angle DSC égal à l'angle BSC. Coupons les trois droites SA, SD, SC par une droite quelconque ADC. Prenons SB égal à SD; et joignons BA et BC.

Les triangles DSC et BSC sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; on a donc $DC = BC$. On a d'ailleurs

$$AC < AB + BC;$$

et, si l'on retranche d'une part DC et de l'autre son égale BC, il restera :

$$AC - DC < AB \quad \text{ou} \quad AD < AB.$$

Si l'on considère maintenant les triangles ASD et ASB, on voit qu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun; mais le troisième côté AD de l'un est moindre que le troisième côté AB de l'autre; il en résulte que l'angle ASD opposé à AD est moindre que l'angle ASB, opposé à AB (115). On a donc :

$$ASD < ASB.$$

Si l'on ajoute d'une part l'angle DSC et de l'autre son égal BSC, il vient

$$ASD + DSC < ASB + BSC,$$

ou

$$ASC < ASB + BSC.$$

2° Quant à la seconde partie du théorème, elle se déduirait immédiatement de la première, comme au n° 108.

218. — THÉORÈME. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune, et assemblées dans le même ordre.*

1° Soient d'abord deux trièdres S et S' (fig. 153) dont deux faces, ASB, BSC ou A'S'B', B'S'C' sont des angles aigus; et supposons que l'on ait $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$.

Par un point B pris sur l'arête SB élevons dans les plans ASB et BSC les droites BA et BC, perpendiculaires à SB, et qui rencontreront SA et SC en certains points A et C, puisque les angles ASB et BSC sont aigus. Joignons AC; l'arête SB perpendiculaire aux droites BA et BC sera perpendiculaire au plan ABC (196). Faisons les mêmes constructions dans le trièdre S' après avoir pris $S'B' = SB$, l'arête S'B' sera aussi perpendiculaire au plan A'B'C'.

Les triangles ABS et A'B'S' sont égaux comme ayant un côté égal $SB = S'B'$ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Il en résulte $SA = S'A'$ et $AB = A'B'$.

Les triangles BSC et B'S'C' sont égaux par une raison analogue, et il en résulte $SC = S'C'$ et $BC = B'C'$.

Par suite, les triangles ASC et A'S'C' sont égaux comme ayant un angle égal ASC=A'S'C' compris entre côtés égaux chacun à chacun; il en résulte AC=A'C'.

Enfin, les triangles ABC et A'B'C' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

Cela posé, transportons le dièdre S' sur le dièdre S, de manière que les triangles égaux ABC et A'B'C' coïncident, les arêtes BS et B'S' perpendiculaires au plan de ce triangle devenu commun coïncideront (198); et comme BS=B'S', le point S' tombera sur le point S; d'où il résulte que les droites SA et S'A' coïncideront ainsi que les droites SB et S'B'. Les deux trièdres coïncideront donc eux-mêmes, donc ils sont égaux.

2° Soient maintenant deux trièdres quelconques S et S' (fig. 154), dans lesquels on suppose toujours les angles ASB=A'S'B', ASC=A'S'C' et BSC=B'S'C'. Prenons, à partir des points S et S', sur les arêtes des deux trièdres, six longueurs égales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C'; et joignons AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C'.

Les triangles ASB, A'S'B' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux : donc AB=A'B'. On démontrera de même que l'on a AC=A'C' et BC=B'C'. Il en résulte que les triangles ABC et A'B'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux.

Si l'on considère maintenant les trièdres formés en B et en B', on voit, qu'à cause des égalités ci-dessus, ils ont leurs trois faces égales chacune à chacune. De plus, les faces ABS et CBS sont des angles aigus ainsi que les faces A'B'S' et C'B'S', comme angles à la base dans des triangles isocèles. Ces trièdres rentrent donc dans le premier cas que nous avons considéré ci-dessus; ils sont donc égaux; et il en résulte que le dièdre SB est égal au dièdre S'B'.

On démontrerait de la même manière l'égalité des dièdres SA, S'A' ou SC, S'C'. Les deux trièdres S et S' ont donc tous leurs éléments égaux chacun à chacun, et disposés dans le même ordre. Donc ils sont égaux.

219. — THÉORÈME. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.*

Soient les deux trièdres S et S' (fig. 154) dans lesquels on suppose, par exemple, le dièdre SA = S'A' et les faces ASB = A'S'B' et ASC = A'S'C'.

Transportons le trièdre S' sur le trièdre S de manière que les sommets S et S' se confondent, et que le dièdre S'A' coïncide avec son égal SA.

Les droites SB et S'B' étant alors dans un même plan, et faisant avec SA un même angle, coïncideront; il en sera de même des droites SC et S'C'. Donc les deux trièdres coïncideront dans toutes leurs parties, et sont par conséquent égaux.

220. — ANGLES POLYÈDRES. Lorsque plusieurs plans se rencontrent en un même point, et se coupent consécutivement suivant des droites distinctes, leur réunion est ce que l'on nomme un *angle polyèdre*. La figure 155 représente un angle polyèdre. Les plans ASB, BSC, CSD, DSE, ESA qui le forment, sont ses *faces*; les droites SA, SB, SC, SD, SE, intersections de ses faces consécutives, sont ses *arêtes*. Leur point de concours S est le *sommet* de l'angle polyèdre.

On ne considère en Géométrie élémentaire, que les angles polyèdres *convexes*, c'est-à-dire qui ne peuvent être rencontrés par une droite en plus de deux points, et n'offrent par conséquent aucun angle dièdre rentrant.

Dans la considération des angles polyèdres, on fait abstraction de la longueur des arêtes et de l'étendue des faces.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet, suivie, s'il est nécessaire, d'une lettre prise sur chaque arête. On dira ainsi l'angle polyèdre S ou bien SABCDE.

221. — Théorème. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que 4 angles droits.*

Soit SABCDE (fig. 155) un angle polyèdre quelconque. Menons un plan ABCDE qui coupe toutes ses arêtes. Dans l'intérieur du polygone ABCDE, prenons un point O quelconque, et joignons OA, OB, OC, OD, OE.

Nous formerons des triangles ayant leur sommet en O, qui seront en nombre égal à ceux qui ont leur sommet en S; et la somme totale des angles de ces deux groupes de triangles sera la même. Mais la somme de tous les angles en O équivaut à 4 angles droits. Pour prouver que la somme des angles en S est moindre, il suffit donc de prouver que la somme totale des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en S, est plus grande que la somme totale des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en O.

Or, en vertu du théorème du n° 217, on aura, en considérant tour à tour les trièdres qui ont pour sommet les points A, B, C, D, E :

$$
\begin{aligned}
&SAE+SAB>EAB \quad \text{ou} \quad >EAO+OAB\\
&SBA+SBC>ABC \quad \text{ou} \quad >ABO+OBC\\
&SCB+SCD>BCD \quad \text{ou} \quad >BCO+OCD\\
&SDC+SDE>CDE \quad \text{ou} \quad >CDO+ODE\\
&SED+SDA>EDA \quad \text{ou} \quad >DEO+OEA.
\end{aligned}
$$

Ajoutant ces inégalités membre à membre, on voit que la somme des angles à la base dans le groupe de triangles dont le sommet est en S, est plus grande que la somme des angles du polygone ABCDE, ou que la somme des angles à la base

dans le groupe de triangles dont le sommet est un O. D'où il suit, comme on vient de le voir, que la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O, c'est-à-dire moindre que 4 angles droits.

§ V. — Des plans perpendiculaires entre eux.

222. — Deux plans sont dits *perpendiculaires* entre eux, lorsqu'ils forment un angle dièdre droit, ou, ce qui revient au même, lorsque l'angle plan qui lui sert de mesure est lui-même un angle droit. Telle est ordinairement la position mutuelle du plancher et des murs d'un appartement; ces murs eux-mêmes sont le plus souvent perpendiculaires entre eux deux à deux.

223. — Théorème. *Si deux plans* MN, OP (fig. 156) *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans l'un de ces plans perpendiculairement à leur intersection* OD, *est perpendiculaire à l'autre plan.*

Car, si l'on mène, dans le plan MN, la droite BC perpendiculaire à OD, l'angle ABC mesurera l'angle des deux plans, et sera, par conséquent, droit. Mais déjà l'angle ABO est droit; la droite AB est donc à la fois perpendiculaire à BO et à BC, qui passent par son pied dans le plan MN; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

Corollaires. I. *Si par un point* B *de l'intersection on élevait une perpendiculaire au plan* MN, *elle serait tout entière dans le plan* OP.

Car si elle différait de BA, on pourrait en un même point d'un plan lui élever deux perpendiculaires, ce qui est impossible (198).

II. *Si par un point* A, *pris dans le plan* OP, *on abais-*

sait une perpendiculaire sur le plan MN, *elle serait tout entière dans le plan* OP.

Car si elle différait de AB, on pourrait par un point pris hors d'un plan lui mener deux perpendiculaires, ce qui est impossible (198).

224. — Théorème. *Tout plan* OP (fig. 156) *mené suivant une droite* AB *perpendiculaire à un plan* MN, *est lui-même perpendiculaire à ce plan.*

Car si l'on mène, dans le plan MN, la droite BC perpendiculaire à l'intersection OD des deux plans, les angles ABC et ABO seront droits, puisque AB est perpendiculaire au plan MN. Il en résulte que AB et BC sont deux perpendiculaires à l'intersection OD, menées en un même point de cette intersection dans chacun des deux plans; l'angle ABC mesure donc l'angle des deux plans; et puisque ABC est droit, les deux plans sont perpendiculaires.

Corollaire. On peut énoncer le même théorème en disant: *Tout plan* MN *perpendiculaire à une droite* AB *située dans un plan* OP, *est perpendiculaire à ce plan.*

225. — Théorème. *Tout plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection.*

Car si par le point de rencontre des trois plans on élevait une perpendiculaire au premier, elle serait tout entière dans chacun des deux autres (223, Coroll. I). Elle n'est donc autre chose que leur intersection.

§ VI. — Des plans parallèles entre eux.

226. — Théorème. *Deux plans* MN, PQ (fig. 157) *perpendiculaires à une même droite* AB, *ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.*

Car, s'ils pouvaient avoir un point commun, que nous désignerons par O, soient AC et BD les droites menées de ce point O aux points A et B; les angles BAC et ABD seraient droits, puisque AB est perpendiculaire aux deux plans; dans le triangle ABO il y aurait donc deux angles droits, ce qui est impossible.

Remarque. Lorsque deux plans ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge, ces plans sont dits *parallèles* entre eux. Le théorème qui précède peut donc s'énoncer: *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.*

227. — Théorème. *Si deux droites qui se coupent*, AB, CD (fig. 158), *sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent* A′B′, C′D′, *le plan* MN *déterminé par les deux premières est parallèle au plan* M′N′ *déterminé par les deux dernières.*

En effet : la droite AB parallèle à A′B′ est parallèle au plan M′N′ (204); si donc le plan MN rencontrait le plan M′N′, l'intersection serait une parallèle à AB (205). On démontrerait de même que cette intersection devrait être parallèle à CD. Or, cette intersection ne saurait être parallèle à la fois aux deux droites AB et CD qui se coupent; donc les deux plans MN et M′N′ ne peuvent se rencontrer, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles.

228. — Théorème. *Les intersections* AB *et* CD (fig. 159), *de deux plans parallèles* MN *et* PQ, *par un troisième plan* ABDC, *sont parallèles entre elles.*

Car les droites AB et CD étant dans un même plan ABDC, si elles n'étaient pas parallèles elles se rencontreraient, et leur point de rencontre appartiendrait à la fois au plan MN qui contient AB et au plan PQ qui contient CD. Ces deux plans ne seraient donc pas parallèles, ce qui est contraire à la supposition.

229. — THÉORÈME. *Lorsque deux plans* MN *et* PQ (fig. 157) *sont parallèles, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un d'eux* MN, *est en même temps perpendiculaire à l'autre.*

Pour le démontrer, tirons dans le plan PQ la droite quelconque BD; suivant AB et BD qui se coupent au point B conduisons un plan; il coupera MN suivant une droite AC parallèle à BD (228). Or AB, perpendiculaire à MN, est perpendiculaire à AC qui passe par son pied dans ce plan; elle est donc aussi perpendiculaire à sa parallèle BD. Et comme BD est quelconque, il s'ensuit que AB est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan PQ, et que par conséquent, elle est perpendiculaire à ce plan.

COROLLAIRES. I. *Par un point* B, *pris hors d'un plan* MN, *on ne peut lui mener qu'un plan parallèle* PQ.

Car si l'on en pouvait mener un second, ils devraient être tous deux perpendiculaires à la droite BA abaissée du point B perpendiculairement à MN. On pourrait donc, par un même point, mener deux plans perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible (199).

II. — *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.*

Car si l'on mène une droite perpendiculaire au troisième plan, elle sera aussi perpendiculaire aux deux premiers; or, deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux (226).

230. — THÉORÈMES. *Les portions* AC *et* BD (fig. 159), *de deux droites parallèles comprises entre deux plans parallèles* MN *et* PQ, *sont égales.*

Car si, par les parallèles AC et BD on fait passer un plan, il coupera les plans MN et PQ suivant deux parallèles AB et CD (228). La figure ABCD sera donc un parallélogramme. Donc AC = BD.

COROLLAIRE. *Deux plans parallèles sont partout également distants.*

Car si l'on suppose que AC et BD soient deux perpendiculaires à l'un des deux plans, elles seront perpendiculaires à l'autre (229) et de plus parallèles (202), et par conséquent égales (230). Or, ces perpendiculaires mesurent la distance des deux plans, puisque toute oblique serait plus longue.

231. — THÉORÈME. *Deux droites quelconques* ABC, DEF (fig. 160) *sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles* MN, PQ, RS.

Pour le prouver, menons AHI parallèle à DEF. En vertu du théorème précédent on aura AH = DE et HI = EF. Par les deux droites AI et AC qui se coupent, faisons passer un plan, il coupera les plans PQ et RS suivant les droites HB et IC qui sont parallèles. On aura donc

$$AB : BC :: AH : HI ;$$

ou, ce qui revient au même,

$$AB : BC :: DE : EF ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE. On déduit de cette proportion

$$AB : AB + BC :: DE : DE + EF$$

ou

$$AB : AC :: DE : DF.$$

232. — THÉORÈME. *Lorsque deux plans* MN, PQ (fig. 159) *sont parallèles, tout plan* ABDC *perpendiculaire à l'un d'eux* PQ, *est en même temps perpendiculaire à l'autre.*

Car, si par un point C pris sur l'intersection CD des deux plans ABDC et PQ, on élève dans le plan ABDC une perpendiculaire CA à cette intersection, cette droite CA sera perpendiculaire au plan PQ (223) et par conséquent au plan MN (229). Le plan ABDC qui passe par CA est donc perpendiculaire à MN (224).

§ VII. — Des directions verticales et horizontales.

233. — La direction *verticale* est celle que prend le *fil-à-plomb*, c'est-à-dire un fil fixé à son extrémité supérieure et sollicité à l'autre par un poids.

Dans la réalité, les verticales sont des droites qui vont se rencontrer au centre de la terre. Mais dans les applications ordinaires de la Géométrie, les verticales sont assez rapprochées pour pouvoir être considérées comme parallèles.

L'emploi des verticales est continuel dans les constructions. On donne cette direction aux arêtes latérales de la plupart des murs, à celles des jambages de porte ou de fenêtre, à celles des barreaux de grilles, etc.

234. — On nomme plan *horizontal*, tout plan perpendiculaire à la verticale du lieu que l'on considère. S'il est mené par le centre de la terre, c'est le plan de l'*horizon rationnel;* s'il est mené par un point de la surface de la terre, c'est le plan de l'*horizon sensible*.

Dans une étendue peu considérable, les verticales pouvant être considérées comme parallèles, il en est de même des plans horizontaux (203, 226).

Les plans horizontaux sont d'un fréquent usage : tels sont les planchers et les plafonds de nos appartements, la face supérieure de la plupart de nos meubles; telle est aussi la surface de l'eau contenue dans un vase, ou même celle d'une pièce d'eau dormante lorsqu'elle a peu d'étendue.

235. — Toute droite menée dans un plan horizontal, est ce qu'on nomme une *horizontale*. Telles sont toutes les lignes droites tracées sur un parquet, les arêtes des entablements, des balcons, des empatements de l'architecture, etc.

Si, par un point quelconque d'une droite horizontale, on mène une verticale, les deux droites seront perpendiculaires entre elles (196). Réciproquement, *toute perpendiculaire à la verticale est horizontale* (197).

Deux horizontales qui se coupent, déterminent un plan horizontal. Car si, par leur point de rencontre, on mène une verticale, elle sera perpendiculaire à chacune des deux horizontales, et par conséquent au plan qu'elles déterminent. Donc ce plan est horizontal.

236. — On s'appuie sur ce dernier principe pour s'assurer qu'un plan est horizontal. On emploie à cet effet divers instruments.

I. — *Le niveau de maçon* (fig. 161). Il se compose ordinairement de deux règles d'égale longueur, assemblées à angle droit, et réunies par une traverse. En un point de la bissectrice de l'angle droit est suspendu un fil-à-plomb. Le prolongement de cette bissectrice est marqué sur la traverse, et forme ce qu'on appelle la ligne de foi. Les extrémités A et B des deux règles sont dans un même plan perpendiculaire à la ligne de foi.

Pour qu'un plan soit horizontal, il faut qu'en y posant l'instrument par les extrémités A et B, dans une direction quelconque, le fil-à-plomb coïncide avec la ligne de foi. Mais il suffit que cela ait lieu dans deux directions; car ces directions sont alors perpendiculaires toutes deux à la verticale, c'est-à-dire qu'elles sont horizontales, et que par conséquent leur plan est lui-même horizontal.

II.—*Le niveau à bulle d'air* (fig. 162). Sa partie essentielle est un tube de verre couché sur une règle de cuivre. Le tube est rempli d'eau, à cela près d'une très-petite portion occupée par une bulle d'air. Lorsque la règle est horizontale, la bulle d'air occupe le milieu du tube; mais la moindre inclinaison suffit pour faire remonter la bulle d'air vers l'extrémité la plus élevée du tube.

Un plan est horizontal lorsqu'en y posant le niveau dans deux directions bien distinctes, la bulle d'air ne cesse pas d'occuper le milieu du tube.

Cet instrument s'emploie dans toutes les opérations délicates; et les graphomètres, les boussoles, etc., en sont ordinairement munis.

237. — Pour mener, dans la campagne, un rayon visuel horizontal, on fait usage d'un instrument qui porte le nom de *niveau d'eau* (fig. 163). Il se compose d'un tube de fer-blanc AB, qui se relève à angle droit à chacune de ses extrémités Aa, Bb, et se termine de part et d'autre par un tube de verre. L'instrument est supporté par trois pieds. Le tube est rempli, à peu de chose près, d'une eau colorée. Par une propriété des liquides, les surfaces de l'eau dans les deux tubes sont toujours dans un même plan horizontal, qui est ce qu'on appelle le *niveau* du liquide. Lorsque l'on place l'œil dans ce plan, le rayon visuel obtenu est nécessairement horizontal.

Pour fixer les extrémités de l'horizontale formée par ce rayon visuel, on fait planter sur son prolongement, en avant et en arrière, des jalons verticaux munis chacun d'un *voyant*, c'est-à-dire d'une planchette peinte de deux couleurs, et susceptible de glisser le long de la règle et de s'y fixer par une vis de pression. On fait élever ou abaisser chaque voyant jusqu'à ce que son centre vienne se placer dans le prolongement du rayon visuel ab ou ba. La droite

CD qui joindrait les centres C et D des voyants est une droite horizontale.

On se sert de cet instrument pour déterminer la différence de hauteur de deux points M et N du terrain. Cette différence est évidemment égale à celle des longueurs CM et DN, que l'on peut mesurer sur les jalons, au moyen de divisions qui y ont été tracées.

238. — Tout plan qui contient une verticale est lui-même ce que l'on nomme un *plan vertical*.

On donne ordinairement la direction verticale aux surfaces planes des murs, des portes, volets, vitres, etc.; et aux faces latérales de la plupart des meubles, etc.

239. — I. — *Par une droite donnée quelconque, on peut toujours faire passer un plan vertical.* Car, si par un point de cette droite on mène une verticale, cette verticale et la droite donnée déterminent un plan qui est vertical.

II. — *Deux plans dont l'un est vertical et l'autre horizontal sont toujours perpendiculaires entre eux.* Car le plan vertical contient une verticale, laquelle est perpendiculaire au plan horizontal (224).

III. — Réciproquement : *Tout plan perpendiculaire à un plan horizontal est un plan vertical.* Car, si par un point de l'intersection commune on élève une perpendiculaire au plan horizontal, c'est-à-dire une verticale, cette droite sera contenue tout entière dans l'autre plan (223, coroll. I); donc celui-ci est vertical.

IV. — *L'intersection de deux plans verticaux est une verticale.* Car ces plans étant tous deux perpendiculaires au plan de l'horizon, puisqu'ils contiennent une verticale, c'est-à-dire une perpendiculaire à l'horizon (224), il en résulte que leur intersection est elle-même perpendiculaire au plan de l'horizon (225); donc cette intersection est verticale.

CHAPITRE II.

Des corps géométriques.

§ I. — Des tétraèdres.

240. — On nomme *tétraèdre* un corps géométrique terminé par quatre plans. SABC (fig. 164) est un tétraèdre. Les triangles ASB, ASC, BSC, ABC, qui le terminent, se nomment ses *faces*. Un tétraèdre présente 4 trièdres, 6 dièdres, autant d'arêtes. Les sommets S, A, B, C des 4 trièdres sont ce que l'on nomme les *sommets* du tétraèdre. Mais lorsque le tétraèdre a une face inférieure placée horizontalement, comme ABC, on donne le nom de *base* à cette face horizontale, et l'on nomme plus particulièrement *sommet* du tétraèdre le sommet S opposé à la base. La *hauteur* d'un tétraèdre est la longueur de la perpendiculaire qui serait abaissée du sommet sur le plan de la base.

241. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C' (fig. 164) *sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.* SAB = S'A'B', SAC = S'A'C', SBC = S'B'C'.

Car il en résulte d'abord que les triangles ABC, A'B'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux. Par suite, les trièdres des deux tétraèdres sont égaux chacun à chacun comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune (218), et par conséquent leurs dièdres sont égaux chacun à chacun. Les deux tétraèdres ont donc tous leurs éléments égaux; donc ces tétraèdres sont égaux.

Corollaire. Un tétraèdre est déterminé lorsque l'on connait trois de ses faces et l'ordre dans lequel elles sont assemblées.

242. — Théorème. *Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C' (fig. 164) *sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal* SA = S'A' *compris entre deux faces égales chacune à chacune* SBA = S'B'A' *et* SCA = S'C'A'.

Car si l'on fait coïncider les faces égales SCA et S'C'A', les faces SBA et S'B'A' seront dans un même plan, puisque les dièdres SA et S'A' sont égaux. Les angles plans ASB et A'S'B' étant égaux, la ligne S'B' suivra la direction de SB; par une raison semblable, la ligne A'B' suivra la direction AB. Par conséquent, le point B' tombera en B; et les deux tétraèdres auront leurs quatre sommets communs; donc ils coïncideront dans toute leur étendue, donc ils sont égaux.

Corollaire. Un tétraèdre est déterminé quand on connait deux de ses faces, le dièdre qu'elles forment, et la manière dont elles sont assemblées.

243. — On nomme *tétraèdres semblables* ceux qui ont leurs faces semblables chacune à chacune. Les faces semblables sont alors ce que l'on nomme les *faces homologues*. On nomme *arêtes homologues* celles qui, dans deux faces homologues, sont opposées à des angles égaux; *sommets* et *trièdres homologues*, ceux qui sont opposés à des faces homologues; et *dièdres homologues*, ceux qui sont compris entre des faces homologues.

Les trièdres homologues sont égaux, comme ayant leurs faces (ou angles plans) égales chacune à chacune, par suite de la similitude des triangles qui terminent les tétraèdres.

Les dièdres homologues sont égaux par suite de l'égalité des trièdres homologues.

Les arêtes homologues sont proportionnelles par suite de la similitude des faces homologues (118).

244. — THÉORÈME. *Si deux tétraèdres* SAB C, sabc (fig. 165) *sont semblables, leurs bases* ABC, abc *sont entre elles comme les carrés des hauteurs* SH *et* sh.

Les trièdres S et *s* étant égaux, on peut les faire coïncider; les points *a, b, c* se placeront alors en A′, B′, C′ sur les arêtes respectives SA, SB, SC. Les faces ASB, *asb* étant semblables, il en sera de même des triangles ASB, A′S′B′; donc A′B′ sera parallèle à AB. Par une raison semblable, A′C′ sera parallèle à AC et B′C′ à BC. Donc le plan A′B′C′ sera parallèle au plan ABC (227); et la droite SH, perpendiculaire à ABC, le sera aussi à A′B′C′. Si H′ est le point où SH rencontre A′B′C′, la droite SH′ sera donc la hauteur du tétraèdre SA′B′C′, et sera par conséquent égale à *sh*, puisque les deux tétraèdres SA′B′C′ et *sabc* sont égaux.

Cela posé, les triangles ABC, A′B′C′, ayant leurs côtés parallèles, ont leurs angles égaux (208) et sont semblables; ils sont donc entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues; et l'on a

$$\mathrm{ABC} : \mathrm{A'B'C'} :: \overline{\mathrm{AB}}^2 : \overline{\mathrm{A'B'}}^2 ; \qquad (1)$$

mais la similitude des triangles ASB, A′S′B′ donne

$$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} :: \mathrm{SA} : \mathrm{SA'}; \quad \text{d'où} \quad \overline{\mathrm{AB}}^2 : \overline{\mathrm{A'B'}}^2 :: \overline{\mathrm{SA}}^2 : \overline{\mathrm{SA'}}^2. \ (2)$$

D'ailleurs les droites SA et SH étant coupées par des plans parallèles, on a aussi (231)

$$\mathrm{SA} : \mathrm{SA'} :: \mathrm{SH} : \mathrm{SH'}; \text{ d'où } \overline{\mathrm{SA}}^2 : \overline{\mathrm{SA'}}^2 :: \overline{\mathrm{SH}}^2 : \overline{\mathrm{SH'}}^2; \ (3)$$

à cause des rapports communs entre les proportions (1), (2) et (3), on en tire

$$\mathrm{ABC} : \mathrm{A'B'C'} :: \overline{\mathrm{SH}}^2 : \overline{\mathrm{SH'}}^2.$$

Remplaçant A′B′C′ par son égal *abc* et SH′ par son égal *sh*, il vient enfin

$$\mathrm{ABC} : abc :: \overline{\mathrm{SH}}^2 : \overline{sh}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

245. — THÉORÈME. *Deux tétraèdres* SABC, sabc (fig. 165) *sont semblables lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient, par exemple, les trois faces ASB, ASC, BSC, respectivement semblables aux trois faces *asb*, *asc*, *bsc*.

Les trièdres S et *s* sont égaux comme ayant leurs faces égales chacune à chacune (218); donc les dièdres SA et *sa* sont égaux. Dès lors les trièdres A et *a* sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune (219); donc l'angle CAB est égal à l'angle *cab*. On démontrerait de la même manière que l'angle ACB est égal à l'angle *acb*, ou que l'angle ABC est égal à l'angle *abc*. Donc les triangles ABC et *abc* sont équiangles et par conséquent semblables. Donc les deux tétraèdres ont leurs quatre faces semblables chacune à chacune, et sont semblables d'après la définition (243).

246. — THÉORÈME. *Deux tétraèdres* SABC, sabc (fig. 165), *sont semblables quand ils ont un dièdre égal,* SA = sa, *compris entre deux faces semblables chacune à chacune.*

Soient les faces ABS, ACS respectivement semblables aux faces *abs*, *acs*. Les trièdres S et *s* sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune (219); il en résulte que les angles BSC et *bsc* sont égaux. Mais à cause de la similitude des faces ABS et *abs* on a

$$\mathrm{SB} : sb :: \mathrm{SA} : sa.$$

A cause de la similitude des faces ACS et *acs* on a de même

$$SC : sc :: SA : sa.$$

A cause du rapport commun entre ces deux proportions, on a donc

$$SB : sb :: SC : sc.$$

Les triangles BSC, *bsc* ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels, donc ils sont semblables.

On démontrerait de la même manière la similitude des triangles ABC et *abc*. Les deux tétraèdres ont donc leurs quatre faces semblables chacune à chacune; ils sont donc semblables d'après la définition (243).

247. — On nomme *tétraèdre tronqué* ce qui reste d'un tétraèdre quand on retranche la partie supérieure par un plan parallèle à la base.

Ainsi ABCA'B'C' (fig. 165) est un tétraèdre tronqué. Les plans parallèles ABC, A'B'C' sont les *bases* du tétraèdre tronqué. Sa *hauteur* est la perpendiculaire H'H menée entre les deux bases.

Il résulte de ce qui a été dit au n° 244 que les deux bases d'un tétraèdre tronqué *sont des triangles semblables*.

§ II. — Des pyramides.

248. — On nomme *pyramide* un corps géométrique SABCDE (fig. 166), terminé par un polygone ABCDE et par une suite de triangles ASB, BSC, CSD, etc.... ayant un sommet commun S et pour bases les différents côtés AB, BC, etc., du polygone. Ce polygone est ce qu'on nomme la *base* de la pyramide, et le point S est son *sommet*. On appelle *hauteur* de la pyramide la longueur de la perpendiculaire qu'on abaisserait du sommet S sur la base ABCDE (prolongée s'il était nécessaire).

On ne considère, dans la Géométrie élémentaire, que les pyramides *convexes*, c'est-à-dire dont la base est un polygone convexe (135). Les pyramides se distinguent d'après le nombre des côtés de la base. Le tétraèdre n'est autre chose qu'une pyramide *triangulaire*, parce que sa base est un triangle (240). Une pyramide est *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, etc., selon que sa base est un quadrilatère, un pentagone ou un hexagone, etc.

Une pyramide est *régulière*, lorsque sa base est un polygone régulier et que son sommet est situé sur la perpendiculaire élevée au centre de la base. Ses faces sont alors des triangles isocèles égaux, car les bases de ces triangles sont égales comme côtés d'un même polygone régulier, et ses arêtes latérales sont égales comme obliques, s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

Si l'on mène les diagonales AC, AD, etc., de la base d'une pyramide, et que par ces diagonales et par le sommet S on fasse passer des plans, ces plans prennent le nom de *plans diagonaux*. Ces plans divisent la pyramide en tétraèdres qui ont pour sommet commun le point S et pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, etc., qui composent la base de la pyramide. Tous ces tétraèdres ont même hauteur; leur nombre est égal au nombre des côtés de la base, diminué de deux (135).

249. — Deux pyramides sont dites *semblables* lorsqu'elles peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. Soient, par exemple, les deux pyramides SABCDE, *sabcde* (fig. 167); si les tétraèdres SABC, SACD, SADE, dans lesquels se décompose la première, sont respectivement semblables aux tétraèdres *sabc*, *sacd*, *sade*, dans lesquels se décompose la seconde, ces deux pyramides sont dites semblables; et les tétraèdres semblables dont elles se composent sont dits tétraèdres *homologues*.

THÉORÈME. *Deux pyramides semblables* SABCDE, sabcde (fig. 167) *ont leurs faces homologues semblables et leurs bases semblables, et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun.*

En effet, 1° d'après la définition les tétraèdres SABC, *sabc* étant semblables, il en résulte que les faces ASB, BSC, ABC, sont respectivement semblables aux faces *asb*, *bsc*, *abc*. On démontrerait de même que les faces CSD, ACD sont semblables aux faces *csd*, *acd*, et les faces DSE, ESA, ADE aux faces *dse*, *esa*, *ade*. Maintenant, les polygones ABCDE, *abcde* étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, sont semblables; 2° en vertu de la similitude des tétraèdres SABC, *sabc*, les dièdres SB et *sb* sont égaux (243), ainsi que les dièdres BSCA, *bsca*. En vertu de la similitude des tétraèdres SACD, *sacd*, les dièdres DSCA, *dsca*, sont égaux. Il en résulte que la somme des dièdres BSCA et DSCA, c'est-à-dire le dièdre BSCD, équivaut à la somme des dièdres *bsca* et *dsca*, c'est-à-dire au dièdre *bscd*. On démontrerait de la même manière l'égalité des dièdres CSDE, *csde*, et ainsi de suite.

Quant à l'égalité des dièdres AB et *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*, et ainsi de suite, elle résulte immédiatement de la similitude des tétraèdres considérés.

Donc ces deux pyramides ont leurs dièdres égaux chacun à chacun.

COROLLAIRES I. *Deux pyramides semblables ont leurs arêtes homologues et leurs hauteurs proportionnelles.*

Car si H et h désignent ces hauteurs, la similitude des tétraèdres SABC, *sabc* donnera les proportions (243)

$$SA : sa :: SB : sb :: AB : ab :: H : h.$$

La similitude des autres tétraèdres donnera de même :

$$SB : sb :: SC : sc :: BC : bc :: H : h,$$

et $SC : sc :: SD : sd :: SE : se :: DE : de :: EA : ea :: H : h.$

Donc, à cause des rapports communs,

$$SA : sa :: SB : sb :: \text{etc.} :: AB : ab :: BC : bc :: \text{etc.} :: H : h.$$

II. *Les bases de deux pyramides semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs.*

Car, les bases étant des polygones semblables, on a d'abord,

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Mais, d'après ce qu'on vient de voir,

$$AB : ab :: H : h, \text{ d'où } \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: H^2 :: h^2.$$

Donc, à cause du rapport commun,

$$ABCDE : abcde :: H^2 : h^2.$$

250. — THÉORÈME. *Tout plan parallèle à la base d'une pyramide* SABCDE (fig. 168) *détermine par sa rencontre avec les faces latérales un polygone* abcde *semblable à la base* ABCDE.

En effet, les droites *ab* et AB sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles *abcde*, ABCDE, par un troisième ASB (228). Il en est de même des droites *bc* et BC, *cd* et CD, *de* et DE, etc. Les polygones *abcde*, ABCDE, ont donc leurs angles égaux chacun à chacun, comme ayant des côtés parallèles (208).

En vertu des mêmes parallélismes, on a d'ailleurs

$$ab : AB :: Sb : SB;\ Sb : SB :: bc : BC :: Sd : SD;$$
$$Sd : SD :: cd : CD :: Se : SE, \text{ et ainsi de suite.}$$

Donc, à cause des rapports communs,

$$ab : AB :: bc : BC :: cd : CD, \text{ etc.}$$

Les polygones $abcde$, ABCDE, ont donc leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels; donc ils sont semblables (139).

Remarque. Le corps géométrique $abcde$ABCDE, qui reste d'une pyramide, quand on enlève la partie supérieure par un plan parallèle à la base, est ce qu'on nomme une *pyramide tronquée*. Les polygones semblables $abcde$, ABCDE, dont les plans sont parallèles, sont les deux *bases* du tronc de pyramide. On nomme *hauteur* d'un tronc de pyramide la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de l'une des deux bases sur l'autre (230, Coroll.).

§ III. — Des prismes.

251. — On nomme *prisme* un corps géométrique, tel que ABCDEFGHIK (fig. 169), dont deux faces, appelées *bases*, ABCDE et FGHIK, sont des polygones égaux et parallèles; et dont toutes les autres faces ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK, sont des parallélogrammes.

La *hauteur* d'un prisme est la distance de ses deux bases.

Toutes les arêtes latérales AF, BG, CH, DI, etc., qui réunissent les deux bases, sont égales et parallèles; car deux de ces arêtes consécutives sont toujours des côtés opposés d'un même parallélogramme.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases; un prisme est triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, etc., suivant que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

Tout plan mené par deux arêtes latérales qui n'appartiennent pas à une même face, est ce qu'on appelle un plan diagonal. Les plans diagonaux menés par une même arête AF divisent le prisme total en prismes triangulaires de même hauteur ABCFGH, ACDFHI, ADEFIK. Le nombre de ces prismes triangulaires est égal au nombre des côtés de l'une des bases, diminué de deux.

Dans la Géométrie élémentaire, on ne considère que les prismes *convexes*, c'est-à-dire dont les bases sont des polygones convexes.

252. — Théorème. *Si l'on coupe un prisme* ABCDEFGHIK (fig. 169) *par un plan parallèle aux bases, la section* LMNOP *est un polygone égal à chacune de ces bases.*

En effet, les droites LM et AB sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles LMNOP et ABCDE par un troisième ABGF. La figure ABML est donc un parallélogramme, et l'on a LM=AB. On démontrerait de même que les droites MN, NO, OP, PL sont respectivement égales et parallèles aux droites BC, CD, DE, EA. Les deux polygones LMNOP et ABCDE ont donc leurs côtés égaux chacun à chacun, et de plus leurs angles égaux chacun à chacun comme ayant des côtés parallèles; ces deux polygones sont donc égaux.

253. — Un prisme est *droit* quand ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Toutes ses faces latérales sont alors des rectangles.

Un prisme droit est *régulier* quand ses bases sont des polygones réguliers.

On nomme *prisme tronqué* ce qu'il reste d'un prisme quand on enlève la partie supérieure par un plan non parallèle aux bases. La section faite par ce plan diffère ordinairement de la base du prisme entier, et les faces latérales du prisme tronqué sont en général des trapèzes.

254. — On nomme *parallélépipède* un prisme dont les bases sont des parallélogrammes. La figure 170 représente un parallélépipède.

Les faces opposées, telles que AEHD, BFGC, sont des parallélogrammes égaux. Car AE est égal et parallèle à BF, puisque ce sont des côtés opposés d'un même parallélogramme ABFE ; de même AD et BC sont égaux et parallèles, comme côtés opposés d'un même parallélogramme ABCD; de plus, les angles DAE et CBF sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens ; par conséquent les parallélogrammes AEHD et BFGC sont égaux.

De plus, les plans de ces parallélogrammes sont parallèles (227).

Il résulte de là que deux faces opposées quelconques d'un parallélépipède peuvent être prises pour bases du prisme; sa hauteur est alors la distance mutuelle de ces faces.

Tout plan diagonal, tel que ACGE, divise un parallélépipède en prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, qui ont des bases égales, comme moitiés d'un même parallélogramme, et qui de plus ont même hauteur.

On nomme *diagonale* d'un parallélépipède toute droite, telle que AG, qui joint deux sommets opposés, A et G, c'est-à-dire deux sommets qui ne font point partie d'une même face.

255. — Un parallélépipède est *droit* lorsque ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases. Les faces latérales sont alors des rectangles; les bases seules sont des parallélogrammes obliques.

On nomme *parallélépipède rectangle* un parallélépipède droit dont les bases sont des rectangles.

Dans un parallélépipède rectangle (fig. 170) tous les dièdres sont droits. Pour démontrer, par exemple, que le dièdre BF est droit, on remarquera que les angles ABF et FBC étant droits, puisque les faces ABFE et FBCG sont des rectangles, l'angle ABC mesure l'inclinaison mutuelle de ces deux faces ; or, cet angle ABC est droit, puisque ABCD est un rectangle ; donc le dièdre BF est droit.

Chaque arête est perpendiculaire aux deux faces auxquelles elle aboutit. L'arête EH, par exemple, est perpendiculaire aux faces ABFE et DCGH ; car EH est perpendiculaire aux deux droites AE et EF qui passent par son pied dans le plan ABFE, et aux deux droites HD et HG qui passent par son pied dans le plan DCGH.

Les trois arêtes AB, AD, AE, qui aboutissent à un même sommet A, sont ce que l'on appelle les trois *dimensions* d'un parallélépipède rectangle. On les désigne souvent sous les noms de *longueur*, *largeur* et *hauteur* ; quelquefois on remplace l'une de ces deux dernières dénominations par celle d'*épaisseur* ou de *profondeur*.

256. — Théorème. *Deux parallélépipèdes rectangles sont égaux lorsqu'ils ont leurs dimensions égales chacune à chacune.*

En effet, les bases inférieures ayant les mêmes dimensions, sont des rectangles de même base et de même hauteur, par conséquent superposables. Si l'on fait coïncider ces rectangles, les arêtes latérales prendront deux à deux les mêmes directions perpendiculaires aux bases inférieures devenues communes. Mais ces arêtes latérales qui mesurent la troisième dimension des deux parallélépipèdes rectangles sont égales, par conséquent les extrémités de ces arêtes coïncideront deux à deux. Les deux parallélépipèdes rectangles auront donc tous leurs sommets communs, et coïncideront, par conséquent, dans toute leur étendue; donc ils sont égaux.

Remarque. On peut encore énoncer ce théorème de cette manière : *Deux parallélépipèdes rectangles de même base et de même hauteur sont égaux.*

COROLLAIRE. Un parallélépipède rectangle est déterminé quand on connaît ses trois dimensions, ou quand on connaît sa base et sa hauteur.

257. — THÉORÈME. *Dans tout parallélépipède rectangle* ABCDEFGH (fig. 170), *le carré d'une diagonale* AG *équivaut à la somme des carrés des trois dimensions.*

En effet, l'arête GC étant perpendiculaire sur le plan ABCD, le triangle AGC est rectangle en C, et l'on a

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2.$$

Mais le triangle ACB étant aussi rectangle, on a de même

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Remplaçant, dans l'égalité précédente, $\overline{AC}^2$ par cette valeur, il vient

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2,$$

ou bien

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

APPLICATION NUMÉRIQUE. Soient $AB = 9^{m.}$; $AD = 6^{m.}$; $AF = 2^{m.}$,

on aura $\quad \overline{AG}^2 = 81^{m.c.} + 36^{m.c.} + 4^{m.c.} = 121^{m.c.},$

d'où $\quad AG = 11^{m.}$

COROLLAIRE. Cette proposition démontre que toutes les diagonales d'un parallélépipède rectangle sont égales. Ces diagonales sont au nombre de quatre.

258. — On donne le nom de *cube* à un parallélépipède rectangle, dont les trois dimensions sont égales entre elles. Ses six faces sont alors des carrés égaux. Toutes ses arêtes sont donc égales.

Deux cubes sont égaux lorsqu'ils ont la même arête (256). Un cube est déterminé lorsque l'on connaît son arête.

Il suit du théorème précédent (257) que le carré de la diagonale d'un cube est le triple du carré de son arête.

§ IV. — Des polyèdres.

259. — On donne le nom de *polyèdre* à tout corps géométrique terminé par des plans. Ces plans sont les *faces* du polyèdre; les droites qui terminent les faces sont ses *arêtes;* les extrémités des arêtes sont ses *sommets*. Toute droite joignant deux sommets qui n'appartiennent pas à une même face est une *diagonale* du polyèdre. Tout plan mené par trois sommets, qui n'appartiennent pas à une même face, est un *plan diagonal.*

On ne considère dans la Géométrie élémentaire que les polyèdres *convexes*, c'est-à-dire, dont la surface ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Si par l'un des sommets A (fig. 171) d'un polyèdre on mène des droites à tous les autres sommets, on détermine une série de pyramides, telles que ABCDE, qui ont pour sommet commun le point A, et pour bases les différentes faces du polyèdre, à l'exception de celles qui aboutissent au point A; et l'ensemble de ces pyramides forme le polyèdre lui-même.

Tout polyèdre peut donc se décomposer en pyramides; et comme chaque pyramide peut, à son tour, se diviser en tétraèdres (248), il s'ensuit que tout polyèdre peut se décomposer en tétraèdres, ayant pour sommet commun l'un des sommets du polyèdre.

260. — On nomme polyèdres *semblables* ceux qui peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Ces pyramides semblables sont dites *pyramides homologues*. Les arêtes des pyramides homologues sont des arêtes ou des diagonales homologues des polyèdres. Leurs faces homologues sont celles qui sont terminées par des arêtes homologues.

Les extrémités des arêtes homologues sont les sommets homologues des polyèdres. La figure 171 représente deux polyèdres semblables.

Théorème. *Deux polyèdres semblables ont leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et leurs dièdres égaux chacun à chacun.*

En effet : 1° si l'on considère deux faces homologues des deux polyèdres, il ne peut se présenter que deux cas. Ou ces faces sont des faces ou des bases de pyramides semblables, et alors elles sont semblables (249); ou elles se composent d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, comme faces homologues de pyramides semblables; et alors encore elles sont semblables.

2° Si l'on considère deux dièdres de deux polyèdres, il ne peut également se présenter que deux cas. Ou ces dièdres sont homologues dans deux pyramides semblables, et alors ils sont égaux (249); ou ces dièdres se composent d'un même nombre de dièdres égaux chacun à chacun, comme homologues dans des pyramides semblables; et alors encore ils sont égaux.

Corollaire. De la similitude des faces homologues résulte la proportionnalité des arêtes homologues; et cette proportionnalité s'étend évidemment aux diagonales homologues, puisqu'elles sont elles-mêmes des arêtes homologues de pyramides semblables.

§ V. — Des corps ronds.

261. — On considère, dans la Géométrie élémentaire, outre les polyèdres, des corps limités en tout ou en partie par des surfaces courbes; ces corps sont au nombre de trois : le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*. On les réunit sous la désignation commune de *corps ronds*.

262. — Un *cylindre* est un corps engendré par un rectangle ABCD (fig. 172) qui tournerait autour de l'un de ses côtés AB. Les côtés AD et BC engendrent ainsi des cercles égaux dont les plans sont perpendiculaires à AB, et qui ont pour centres les points A et B. Le côté CD engendre une surface courbe à laquelle on donne le nom de *surface cylindrique*. La droite AB, autour de laquelle est supposée s'exécuter la rotation, s'appelle l'*axe* du cylindre; les cercles AD et BC sont ses *bases ;* la droite AB qui mesure aussi la distance des deux bases se nomme la *hauteur* du cylindre.

Un cylindre peut être considéré comme un prisme régulier (253) dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

263. — On nomme *cylindres semblables* ceux qui sont engendrés par des rectangles semblables tournant autour de deux côtés homologues.

Théorème. *Les bases de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs.*

Car, si l'on nomme R et r les rayons des bases, H et h les hauteurs, on aura, d'après la définition,

$$R : r :: H : h; \quad \text{d'où} \quad R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

ou, en multipliant par π les deux termes du premier rapport,

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: H^2 : h^2,$$

ce qui revient à l'énoncé du théorème, puisque les bases des cylindres ont respectivement pour mesure πR^2 et πr^2.

264. — Un *cône* est un corps engendré par un triangle rectangle ABC (fig. 173) qui tournerait autour de l'un des côtés AB de l'angle droit. Le côté BC engendre un cercle dont le centre est en B, et dont le plan est perpendiculaire à AB; l'hypoténuse AC engendre une surface courbe que l'on appelle *surface conique*.

La droite AB autour de laquelle est supposée s'exécuter la rotation s'appelle l'*axe* du cône; le cercle BC est sa *base*, le point A son *sommet*, la ligne AC sa *génératrice*. La droite AB qui mesure la distance du sommet à la base s'appelle aussi la *hauteur* du cône.

Un cône peut être considéré comme une pyramide régulière (248) dont la base serait un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

265. — Deux cônes sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables tournant autour d'un côté homologue de l'angle droit.

THÉORÈME. *Les bases de deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs.*

Même démonstration qu'au n° 263.

266. — Si, dans le triangle générateur ABC, on mène DE parallèle à BC, cette droite, dans la rotation du triangle, décrira un cercle dont le centre sera le point D, et dont le plan sera perpendiculaire à l'axe AB, et parallèle par conséquent au plan du cercle BC. La portion de cône comprise entre les cercles parallèles BC et DE est ce que l'on nomme un *tronc de cône*. Les deux cercles BC et DE sont les deux *bases* du tronc de cône; la portion DB de l'axe comprise entre les deux bases, et qui mesure leur distance, est la *hauteur* du tronc de cône; la portion EC de l'hypoténuse AC est sa *génératrice* ou son *côté*.

Un tronc de cône peut être regardé comme une pyramide régulière tronquée, dont les bases sont des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

On peut remarquer que le petit cône ADE est semblable au cône total; car les triangles générateurs ADE et ABC sont semblables.

267. — Une *sphère* est un corps engendré par un demi-cercle ABC (fig. 174) qui tournerait autour de son diamètre AB. Ce corps est terminé par une surface unique qu'on appelle *surface sphérique*. On désigne souvent cette surface par le mot *sphère* lui-même; mais le sens du discours indique toujours suffisamment s'il s'agit de cette surface ou du corps géométrique qu'elle termine.

Il résulte du mode même de génération de la sphère que tous les points de sa surface sont également distants du centre O du demi-cercle générateur, point que l'on nomme pour cette raison le *centre* de la sphère. On peut définir la surface sphérique, en disant que *tous ses points sont également distants d'un point intérieur nommé centre.*

On nomme *rayon* toute droite qui joint le centre à un point de la surface; d'après ce que nous venons de dire, *tous les rayons sont égaux.*

On nomme *diamètre* toute droite qui passe par le centre, et se termine de part et d'autre à la surface de la sphère. Chaque diamètre se compose ainsi de deux rayons ; d'où il suit que *tous les diamètres sont égaux*.

268. — THÉORÈME. *Tout diamètre d'une sphère peut être pris pour son axe de révolution.*

Soit, en effet, AB (fig. 174) un diamètre quelconque. Par ce diamètre faisons passer un plan : il coupera la surface sphérique suivant une ligne courbe ACB, qui aura tous les points à égale distance du centre O ; cette courbe sera donc une circonférence de cercle ayant AB pour diamètre. Par la ligne AB, faisons passer un second plan quelconque ; il coupera la surface sphérique suivant une courbe ADB, qui aura tous ses points à égale distance du point O centre de la sphère ; ce sera donc aussi une circonférence de cercle ayant pour diamètre AB. Et comme le plan ADB est quelconque, on voit que la sphère peut être considérée comme engendrée par la révolution du demi-cercle ACB autour de son diamètre AB.

269. — THÉORÈME. *Toute section de la sphère par un plan est un cercle.*

Soit, en effet, EFG (fig. 174) la courbe déterminée sur la surface de la sphère par son intersection avec un plan. Du centre O de la sphère, abaissons sur ce plan une perpendiculaire OI ; prenons sur la courbe EFG deux points quelconques E et F, et joignons EO, FO, EI, FI. Les triangles OIE, OIF, rectangles en I, puisque OI est perpendiculaire au plan EFG, ont en outre le côté OI commun, et des hypoténuses OE et OF égales comme rayons d'une même sphère ; ces deux triangles sont donc égaux, et l'on a EI=FI. Et comme les points E et F sont deux

points quelconques de la courbe EFG, il s'ensuit que cette courbe a tous ses points également distants du point I ; c'est-à-dire que c'est une circonférence de cercle, dont le centre est le pied I de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan coupant.

Remarques. I. Lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphère, le cercle d'intersection a pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphère. Mais si le plan coupant ne passe pas par le centre de la sphère, comme le plan EFG par exemple, le rayon EI du cercle d'intersection, lequel rayon est perpendiculaire sur IO, est moindre que l'oblique OE, ou moindre que le rayon de la sphère.

C'est pour cette raison qu'une section dont le plan passe par le centre de la sphère se nomme un *grand cercle* de la sphère, tandis que si le plan de la section ne passe pas par le centre de la sphère, cette section prend le nom de *petit cercle*. Ainsi ACB, ADB, CDH, sont des grands cercles, et EFG est un petit cercle.

II. Un petit cercle est d'autant moindre qu'il est plus éloigné du centre de la sphère. Car le triangle rectangle OIE donne

$$\overline{OI}^2+\overline{IE}^2=\overline{OE}^2\,;$$

et, comme le second membre est constant pour une même sphère, on voit que le terme $\overline{IE}^2$ devra être d'autant moindre que le terme $\overline{OI}^2$ sera plus grand ; c'est-à-dire, que le rayon IE du petit cercle sera d'autant moindre que la distance OI du plan de ce cercle au centre de la sphère sera plus grande.

270. — THÉORÈME. *Tout grand cercle divise la sphère en deux parties égales.*

Soit, en effet, CDH (fig. 174) la circonférence d'un grand cercle.

Renversons la portion inférieure de la sphère de manière à ce qu'elle occupe une position analogue à celle de la portion supérieure, et que ces deux portions de sphère coïncident suivant la circonférence CDH. Dans ce mouvement, les distances des différents points de la portion inférieure de la surface sphérique au point O n'auront point changé; par conséquent, si les deux portions de surface ne coïncidaient point dans toute leur étendue, il y aurait des points inégalement distants du centre, ce qui est contraire à la propriété fondamentale de la surface sphérique. Donc il faut que ces deux portions de surface coïncident; donc elles sont égales.

Remarque. Les deux moitiés de surface sphérique, séparées par un grand cercle, portent le nom d'*hémi-sphères*.

271. — Lorsqu'un diamètre AB (fig. 174) est pris pour axe de révolution d'une sphère, le plan mené perpendiculairement à cet axe par le centre O, coupe la surface de la sphère suivant un grand cercle CDH qui porte le nom d'*équateur*. Les extrémités A et B de l'axe se nomment *pôles*. Les cercles déterminés par des plans parallèles à l'équateur se nomment des *cercles parallèles*, ou simplement des *parallèles;* tel est le cercle EFG. Les cercles déterminés par des plans qui passent suivant l'axe AB se nomment des *cercles méridiens*, ou simplement des *méridiens;* tels sont les cercles ACB, ADB.

Toutes ces dénominations sont empruntées à la géographie. Le globe que nous habitons peut être considéré comme sensiblement sphérique. La droite autour de laquelle s'exécute le mouvement de rotation diurne qui produit le jour

et la nuit, s'appelle l'*axe* de la terre; les extrémités de cet axe sont les *pôles*. Le plan mené par le centre de la terre perpendiculairement à son axe se nomme le plan de l'*équateur*, parce que, lorsque le soleil est dans ce plan, la durée de la nuit égale celle du jour dans toutes les parties du globe. Tout cercle mené suivant l'axe de la terre se nomme un *méridien*, parce que, lorsque le soleil est dans ce plan, il est midi ou minuit pour tous les lieux du globe par lesquels ce cercle passe.

272. — On nomme *calotte sphérique* la portion de la surface de la sphère qui serait détachée par un plan. Ainsi la portion de sphère supérieure au plan EFG (fig. 174) est une calotte sphérique. On peut la supposer engendrée par un arc de cercle AE tournant autour du diamètre AB, qui passe par l'une de ses extrémités. La *hauteur* de la calotte est la portion de l'axe AB comprise entre le pôle A et le centre I du petit cercle qui termine la calotte.

On nomme *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles parallèles; ainsi la portion comprise entre les cercles EFG et CDH est une zone. La *hauteur* de la zone est la portion de l'axe comprise entre les centres des deux cercles parallèles.

On nomme *segment sphérique* le volume compris entre une calotte sphérique et le plan qui le termine. Ce plan est la *base* du segment.

On nomme *secteur sphérique* le volume engendré par un secteur de cercle tournant autour de l'un des rayons qui le terminent. Ainsi EOA, tournant autour de OA, engendrerait un secteur sphérique. La calotte engendrée par l'arc AE se nomme la base du secteur sphérique.

CHAPITRE III.

De la mesure des surfaces et des volumes.

§ I. — De la mesure des surfaces.

273. — Toutes les faces d'un polyèdre étant des polygones dont nous savons évaluer l'aire, nous aurons peu de chose à ajouter sur ce sujet.

Théorème. *La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le produit de sa hauteur par le périmètre de sa base.*

En effet : cette surface latérale se compose d'une série de rectangles qui ont pour hauteur celle du prisme. Soient H cette hauteur, et B, B′, B″, etc., les bases des rectangles, ou les côtés de la base du prisme ; la surface à évaluer aura pour expression :

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.}$$

ou

$$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H;$$

c'est-à-dire le produit du périmètre de la base par la hauteur.

Application. *Combien faudrait-il d'une étoffe qui a* $1^m,20$ *de large pour recouvrir les murs d'un salon octogone dont la hauteur est de* $3^m,24$ *et dont chaque mur a* $2^m,5$ *de large?*

La superficie totale des murs est celle d'un prisme droit dont la hauteur est de $3^m,24$, et dont la base a pour périmètre $2^m,5 \times 8$ ou 20^m. Cette superficie a donc pour expression $3^m,24 \times 20$ ou $64^{m.c.},80$. Divisant par $1^m,20$, le quotient 54^m sera la longueur d'étoffe demandée.

274. — Théorème. *La surface latérale d'un cylindre a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence de sa base.*

Car le cylindre pouvant être considéré comme un prisme droit dont la base est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits, on peut appliquer le théorème précédent en remplaçant le périmètre de la base du prisme par la circonférence de la base du cylindre.

Si H désigne la hauteur et R le rayon de la base, on aura donc pour l'expression de la surface $2\pi R \times H$.

Application. Si l'on veut connaître la quantité de tôle nécessaire pour construire un tuyau de 8^m de long et de $0^m,6$ de diamètre, on aura à effectuer le produit $8^m \times 0^m,6 \times 3^m,1416$; ce qui donne $15^{m.c.},07968$ ou à peu près $15^{m.c.},08$.

275. — Théorème. *La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la moitié de la perpendiculaire abaissée de son sommet sur l'un des côtés de cette base.*

En effet : cette surface latérale se compose d'une série de triangles isocèles égaux : soient l la hauteur commune de ces triangles, B la base de l'un d'eux, et n le nombre de ces triangles. L'aire de l'un d'eux aura pour expression $\frac{1}{2} l B$; la surface totale aura donc pour expression $\frac{1}{2} l B \times n$ ou $\frac{1}{2} l \times Bn$. Or, Bn n'est autre chose que le périmètre de la base; cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

276. — Théorème. *La surface latérale d'un cône a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de sa base par sa génératrice.*

En effet : un cône peut être considéré comme une pyramide régulière dont la base est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits. On peut donc appliquer le théorème précédent, en remarquant que le périmètre de la base de la pyramide devient la circonférence de la base du cône; et que la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur l'un des côtés de la base, devient la génératrice même du cône.

Si donc on désigne par R le rayon de la base du cône, et par C sa génératrice, sa surface aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}.\,2\pi R.C, \quad \text{ou simplement} \quad \pi RC.$$

Application. Supposons que le toit conique d'une tour ronde ait $8^m,5$ de diamètre à sa base, et que sa génératrice ait $6^m,4$; la superficie de ce toit aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}.\,6^m,4 \times 8^m,5 \times 3^m,1416, \text{ ou } 85^{m.c.},45...$$

277. — Théorème. *La surface latérale d'une pyramide régulière tronquée a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses bases par la hauteur d'une de ses faces.*

En effet : cette surface se compose d'une série de trapèzes égaux. Soient B et b les bases inférieure et supérieure de l'un de ces trapèzes, h sa hauteur et n le nombre des faces. L'expression de l'aire d'un de ces trapèzes sera $\frac{1}{2}(B+b)\times h$; celle de la surface totale sera donc $\frac{1}{2}(B+b)\times h\times n$; valeur que l'on peut écrire $\frac{1}{2}.(Bn+bn)\times h$.

Or Bn n'est autre chose que le périmètre de la base inférieure de la pyramide tronquée, et bn est le périmètre de sa base supérieure. Cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

278. — Théorème. *La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure la demi-somme des circonférences de ses bases multipliée par sa génératrice.*

En effet : un tronc de cône peut être considéré comme une

pyramide régulière tronquée dont les bases seraient des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés infiniment petits. On peut donc appliquer le théorème qui précède, en remarquant que les périmètres des deux bases du tronc de pyramide doivent être remplacés par les circonférences des deux bases du tronc du cône, et que la hauteur de l'un des trapèzes qui sert de face latérale au tronc de pyramide devient la génératrice même du tronc de cône.

Si donc on nomme R et r les rayons des deux bases, et c la génératrice, l'expression de la surface du tronc de cône sera :

$$\tfrac{1}{2}.\,(2\pi R + 2\pi r).\,c \text{ ou } \pi.(R+r).\,c.$$

Application. Imaginons un bassin circulaire dont la paroi ait un talus; cette paroi formera la surface latérale d'un tronc de cône. Supposons que les rayons des deux bases soient respectivement de 7^m et de 6^m; et que la génératrice ait 3^m; l'expression de la superficie de la paroi sera

$$3,1416 \times (7^m + 6^m) \times 3^m, \text{ ou } 122^{m.c},5224.$$

279. — L'aire de la surface latérale du cône tronqué est susceptible de deux autres expressions qu'il est utile de connaître.

I. *La surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure le produit de sa génératrice par la circonférence de la section faite à égale distance des deux bases, parallèlement à ces bases.*

Soit en effet ABDC (fig. 175) le trapèze qui engendre le tronc de cône. Joignons les milieux I et H des côtés non parallèles. Cette droite sera parallèle aux deux bases, et par conséquent perpendiculaire à l'axe AC. Dans sa rotation autour de cet axe, elle décrira donc un cercle perpendiculaire à l'axe et ayant le point H pour centre. De plus, la circonférence de ce cercle sera égale à la demi-somme des circonférences des deux bases. Car IH est la demi-somme des droites AB et CD (129); et comme les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, la circonférence qui a pour rayon IH est la demi-somme de celles qui ont pour rayons AB et CD. Or, la surface du tronc de cône a pour expression

$$\tfrac{1}{2}.(\text{circonf. AB} + \text{circonf. CD}) \times \text{BD};$$

on pourra donc écrire aussi

$$\text{circonf. IH} \times \text{BD};$$

ce qu'il fallait démontrer.

II. *La surface latérale d'un tronc de cône* ABCD (fig. 175) *a pour mesure le produit de la hauteur* AC *par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire* IO *élevée au milieu de sa génératrice, jusqu'à la rencontre de l'axe.*

Pour le prouver, menons BK parallèle à AC; ces deux droites seront égales. Les triangles BDK et IOH sont semblables; car ils sont rectangles, l'un en K, l'autre en H, et de plus les angles KBD et HIO sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (77). On a donc entre leurs côtés homologues la proportion

$$\text{IH} : \text{BK} :: \text{IO} : \text{BD},$$

d'où $\text{IH} \times \text{BD} = \text{IO} \times \text{BK} = \text{IO} \times \text{AC}.$

Multipliant les deux membres par 2π, il vient

$$2\pi\text{IH} \times \text{BD} = 2\pi\text{IO} \times \text{AC}.$$

Or, en vertu de la proposition précédente, le premier membre de cette égalité est l'expression de la surface du

tronc de cône; le second membre, c'est-à-dire le produit de la circonférence dont le rayon est IO par la hauteur du tronc de cône, est donc une nouvelle expression de la même surface.

Remarque. Cette dernière expression serait applicable au cône entier; car elle subsiste quelque petite que soit la base supérieure du tronc de cône, et subsisterait par conséquent encore si cette base se réduisait à zéro, c'est-à-dire si le tronc de cône devenait un cône entier.

280. — LEMME. *La surface engendrée par une portion de polygone régulier* ABCD... (fig. 176) *tournant autour du rayon* AO *qui passe par l'une de ses extrémités, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite, par la portion de l'axe* AO *comprise entre le point* A *et le pied* P *de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité* D *sur l'axe.*

Abaissons sur l'axe les perpendiculaires BM, CN..., DP. Soient $i, h, \ldots k$, les milieux des côtés; joignons Oi, Oh..., Ok, ces lignes seront égales, et représenteront le rayon de la circonférence inscrite.

La surface engendrée par ABCD, se composera du cône engendré par AB et des troncs de cône engendrés par les côtés consécutifs BC, ...CD. Ces surfaces partielles, en vertu de ce qui a été établi ci-dessus (279, II), auront respectivement pour expressions...

$$\text{circonf. O}i \times \text{AM}, \quad \text{circonf. O}h \times \text{MN}, \ldots,$$
$$\text{circonf. O}k \times \text{NP}.$$

Faisant la somme, en remarquant que circonf. Oi est un facteur commun, on obtient pour l'expression de la surface totale

$$\text{circonf. O}i \times (\text{AM} + \text{MN} + \ldots + \text{NP}),$$

ou bien circonf. $Oi \times AP$;

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

281. — Théorème. *L'aire d'une calotte sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

En effet, une calotte sphérique peut être considérée comme engendrée par une portion de polygone régulier dont les côtés seraient infiniment petits et en nombre infiniment grand. La circonférence inscrite n'est alors autre chose que la circonférence même dont l'arc générateur de la calotte fait partie; et la portion de l'axe comprise entre l'une des extrémités de l'arc et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité sur l'axe, n'est autre chose que la hauteur de la calotte.

Si donc on désigne par h cette hauteur et par R le rayon de l'arc générateur, ou, ce qui revient au même, le rayon de la sphère, l'expression de la surface de la calotte sera

$$2\pi R \times h.$$

Corollaire. *La surface d'une zone a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

On peut remarquer en effet qu'une zone, telle que celle qui est comprise entre les cercles EFG et CDH (fig. 174), peut être considérée comme étant la différence entre deux calottes, savoir : entre la calotte engendrée par l'arc AC et la calotte engendrée par l'arc AE. L'expression de sa surface est donc $2\pi R \times AO - 2\pi R \times AI$,

ou bien $2\pi R \times (AO - AI)$, ou enfin $2\pi R \times OI$.

Or, OI est précisément la hauteur de la zone; cette expression revient donc à l'énoncé du théorème.

282. — Théorème. *L'aire d'une sphère équivaut à celles de 4 grands cercles.*

En effet, si l'on veut appliquer à la demi-sphère l'expression trouvée pour une calotte quelconque, il suffit de remarquer que dans ce cas la hauteur AO (fig. 174) n'est autre chose que le rayon. L'expression de la surface de la demi-sphère est donc $2\pi R \times R$ ou $2\pi R^2$. Celle de la surface totale de la sphère est par conséquent $4\pi R^2$, c'est-à-dire égale à 4 fois πR^2 ou à 4 fois la surface d'un grand cercle.

Applications. I. *Le globe terrestre pouvant être considéré comme une sphère dont le rayon est de* $636^{myr.},62$, *on demande sa surface.*

L'expression de cette surface est :

$$4 \times 3{,}1415926 \times (636^{myr.},62)^2.$$

En effectuant ce calcul, on trouve $5092962^{myr.\ car.}$, et une fraction qu'il convient de négliger.

II. — *La hauteur de la calotte sphérique qui forme chaque zone glaciale est d'environ* $52^{myr.},65$; *quelle est la superficie de cette zone?*

L'expression de cette superficie est :

$$2 \times 3{,}1415926 \times 636^{myr.},62 \times 52^{myr.},65.$$

En effectuant le calcul on trouve $210600^{myr.\ car.}$.

III. — *Quel rayon faut-il donner à une sphère pour que sa surface soit équivalente à 1 mètre carré?*

La surface de cette sphère étant 1 m. carré, l'aire d'un grand cercle en est le quart ou $0^{m.\ c.},25$. Or l'aire d'un cercle est le produit du nombre π par le carré de son rayon; divisant $0^{m.\ c.},25$ par $3{,}1415926$ on aura donc le carré du rayon demandé; on trouve $0^{m.\ c.},079577$... La racine carrée de ce nombre, ou $0^{m.},282$... est le rayon demandé.

§ II. — De la mesure des volumes.

283. — Mesurer le volume d'un corps, c'est le comparer à un autre volume pris pour unité. On choisit pour unité de volume le volume d'un cube qui a pour arête 1 mètre, et auquel on donne le nom de *mètre cube*. L'évaluation des volumes géométriques se ramène toujours à des mesures de longueur.

284. — Théorème. *Le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

Soit MB (fig. 177) le parallélépipède proposé. L'énoncé qui précède signifie que, pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans ce parallélépipède, il faut chercher le nombre d'unités de longueur contenues dans les trois arêtes AB, AC, AD, qui aboutissent à un même sommet A, et faire le produit de ces trois nombres.

En effet : supposons, pour fixer les idées, que l'arête AB contienne 4 fois l'unité de longueur *ab*, et que les arêtes AC et AD la contiennent respectivement 5 fois et 7 fois. Divisons AB en 4 parties égales, et, par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AB ; divisons AC en 5 parties égales, et par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AC; enfin, divisons AD en 7 parties égales, et par tous les points de division, menons des plans perpendiculaires à AD.

Le parallélépipède MA se trouvera ainsi divisé en petits parallélépipèdes rectangles, qui auront tous pour hauteur, pour largeur et pour épaisseur l'unité de longueur *ab* (226, 230, coroll.). Ces petits parallélépipèdes rectangles seront donc des cubes, ayant pour arête l'unité de longueur, c'est-à-dire que ce seront des unités de volume ; et il ne reste plus qu'à déterminer leur nombre.

Or, le long de l'arête AB, on compte autant de ces petits cubes qu'il y a d'unités de longueur dans AB, c'est-à-dire 4 ; ces 4 petits cubes forment une sorte de colonne posée horizontalement. Le long de l'arête AD, on peut compter autant de colonnes analogues qu'il y a d'unités dans AD, c'est-à-dire 7 ; et ces 7 colonnes composent une sorte de tranche horizontale. Enfin, le long de l'arête AC, on peut compter autant de tranches pareilles qu'il y a d'unités dans AC, c'est-à-dire 5 ; et ces 5 tranches composent le parallélépipède proposé. Le nombre total des petits cubes est donc le produit de 4 par 7 et par 5, c'est-à-dire 140 ; le parallélépipède proposé contient donc 140 unités de volume.

Ces raisonnements sont indépendants du nombre d'unités de longueur contenues dans chaque arête. Si l'unité de longueur n'était pas contenue un nombre exact dans chaque arête, il faudrait recourir à des unités de plus en plus petites, jusqu'à ce que cette condition fût remplie, ce qui finirait toujours par arriver dans la pratique.

Corollaire. Dans le cas où le parallélépipède rectangle proposé est un cube, les trois dimensions sont égales ; et pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans ce cube, il faut chercher le nombre d'unités de longueur contenues dans l'une de ses arêtes, et former un produit où ce nombre entre trois fois comme facteur. Si, par exemple, l'arête du cube proposé contient 2 unités de longueur, le cube contiendra $2 \times 2 \times 2$ ou 8 unités de volume. Si l'arête contient 3 unités de longueur, le cube contiendra $3 \times 3 \times 3$ ou 27 unités de volume ; et ainsi de suite.

C'est pour cela que l'on donne, en arithmétique, le nom de *cube* à un produit de trois facteurs égaux.

Un centimètre valant 10 millimètres, un centimètre cube vaut $10 \times 10 \times 10$ ou 1000 millimètres cubes. Par la même raison, un décimètre cube vaut 1000 centimètres cubes; un mètre cube vaut 1000 décimètres cubes; et ainsi de suite.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. I. *Quel est le volume d'air contenu dans une salle rectangulaire qui a* $10^{m},42$ *de long sur* $7^{m},51$ *de large et* $3^{m},85$ *de haut?*

Le volume demandé, exprimé en centimètres cubes, sera le produit des trois nombres 1042, 751 et 385, c'est-à-dire 301278670 centimètres cubes; ce qui revient à $301^{m.cub.}$; $278^{décim.\,cub.}$, $670^{cent.\,cub.}$.

II. — *Une pile de bois a* $13^{m},4$ *de long,* 5^{m} *de large et* $7^{m},2$ *de hauteur; quelle est, en stères, la quantité de bois contenue?*

Les trois dimensions équivalent à $134^{déc.}$, $50^{déc.}$ et $72^{déc.}$, le volume de la pile, exprimé en décimètres cubes, serait donc $134 \times 50 \times 72$ ou $482400^{déc.cub.}$. Ce nombre revient à $482^{m.cub.}$, $400^{déc.\,cub.}$, ou à 482 stères et 4 décistères.

III. — *Un bassin rectangulaire a* $6^{m},4$ *de long,* $3^{m},5$ *de large et* $2^{m},7$ *de profondeur; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau qu'il peut contenir?*

Le volume demandé, exprimé en décimètres cubes, serait $64^{d} \times 35^{d} \times 27^{d}$ ou $60480^{déc.cub.}$. Ce nombre revient à 60480 litres, ou à 604 hectolitres, 80 litres.

Remarque. Le produit des arêtes AB et AD du parallélépipède MB (fig. 177) exprime l'aire de sa base BD, qui est aussi celle de sa base inférieure. Pour obtenir l'expression du volume d'un parallélépipède rectangle, on n'a donc qu'à multiplier l'aire de sa base par sa hauteur; c'est-à-dire que le nombre d'unités d'aires contenues dans la base, multiplié par le nombre d'unités de longueur contenues dans la hauteur,

donnera le nombre d'unités de volume contenues dans le parallélépipède proposé.

C'est ce qu'on exprime en disant que *le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Si, par exemple, la base est de 28 mètres carrés et la hauteur de 5 mètres, le volume sera de 28×5 ou 140 mètres cubes.

285. — LEMME. *Deux parallélépipèdes qui ont des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalents en volume.*

Soient, en effet, AG et A′G′ (fig. 178) deux parallélépipèdes dont les bases ABCD et A′B′C′D′ sont supposées équivalentes, et qui de plus ont même hauteur. Concevons les bases inférieures ABCD, A′B′C′D′ placées sur un même plan horizontal; les bases supérieures EFGH, E′F′G′H′ seront aussi dans un même plan horizontal, puisque les parallélépipèdes ont même hauteur. Si l'on mène un plan horizontal quelconque qui coupe les deux parallélépipèdes, les sections MNOP, M′N′O′P′ étant respectivement égales aux bases ABCD, A′B′C′D′ (252), seront équivalentes entre elles.

On peut donc considérer les deux parallélépipèdes comme composés d'un même nombre (infiniment grand) de tranches infiniment minces, équivalentes chacune à chacune; donc les deux parallélépipèdes sont équivalents.

COROLLAIRE. On peut toujours changer un parallélépipède quelconque A′G′ en un parallélépipède rectangle équivalent AG, ayant une base équivalente et même hauteur.

286. — THÉORÈME. *Le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, soit *b* la base et *h* la hauteur du parallélépipède. On pourra le changer en un parallélépipède rectangle équivalent, ayant une base b' équivalente à b, et même hauteur h. La mesure de ce dernier (284) aura pour mesure $b' \times h$; cette mesure sera donc aussi celle du parallélépipède proposé. Mais on peut remplacer b' par son équivalent b; la mesure demandée sera donc $b \times h$; ce qu'il fallait démontrer.

287. — LEMME. *Deux prismes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents en volume.*

Même démonstration qu'au nº 285.

COROLLAIRE. — *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélépipède ayant une base double et même hauteur.*

Car, soit ABCEFG (fig. 170) un prisme triangulaire. Achevons les parallélogrammes ABCD, EFGH, et joignons DH. Le corps géométrique ainsi obtenu sera un parallélépipède, car les six faces seront des parallélogrammes. Ce parallélépipède aura une base ABCD double du triangle ABC, et de plus même hauteur. Or, les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH qui le composent, ont des bases ABC, ACD équivalentes et même égales comme moitiés d'un même parallélogramme; d'ailleurs ils ont pour hauteur commune celle du parallélépipède; ils sont donc équivalents. Ainsi chacun d'eux, et en particulier le prisme proposé, est la moitié du parallélépipède AG, ayant une base double et même hauteur.

288. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, soient B sa base et H sa hauteur. Le volume du parallélépipède qui a même hauteur et une base double, a pour mesure $2B \times H$ (286); le volume du prisme triangulaire qui en est la moitié a donc pour mesure $B \times H$, ou le produit de sa base par sa hauteur.

289. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, tout prisme peut être divisé par des plans diagonaux en prismes triangulaires de même hauteur que lui (251). Soit H cette hauteur, B, B′, B″, etc., les bases des prismes triangulaires; la somme de leurs volumes aura pour mesure

$$B \times H + B' \times H + B'' \times H + \text{etc.},$$

ou

$$(B + B' + B'' + \text{etc.}) \times H.$$

Or, le facteur entre parenthèses, ou la somme des bases des prismes triangulaires, forme la base polygonale du prisme. Son volume a donc pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

290. — THÉORÈME. *Le volume d'un cylindre a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Car, on peut considérer un cylindre comme un prisme régulier, dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si H désigne la hauteur du cylindre, et R le rayon de sa base, l'expression de son volume sera $\pi R^2 H$.

APPLICATIONS. I. *Trouver le volume de vapeur que peut contenir le cylindre d'une machine, sachant que ce cylindre a $1^m,2$ de hauteur et $0^m,6$ de diamètre à sa base.*

L'expression du volume demandé sera

$$3{,}1416 \times (0^m,3)^2 \times 1^m,2.$$

On trouve, en effectuant ce calcul, $0^{m.c.},339293$ (en forçant le dernier chiffre), ou $339^{\text{déc. cub.}}\ 293^{\text{cent. cub.}}$.

II. — *Quel rayon faut-il donner à un réservoir cylindrique de 3^m de profondeur, pour qu'il puisse contenir 1000 hectolitres d'eau?*

Les 1000 hectolitres reviennent à 100 mètres cubes. Divisant ce volume par la hauteur, 3^{m} du cylindre ; le quotient $33^{m.c.},3333..$ exprimera la superficie du cercle dont on demande le rayon. Divisant cette superficie par π ou 3,1416, le quotient $10^{m.c.},6060$ sera le carré du rayon, la racine carrée de ce nombre, ou 3^{m}, 25.. sera donc le rayon demandé.

291. — LEMME. I. *Deux tétraèdres qui ont des bases équivalentes et même hauteur, sont équivalents en volume.*

Soient SABC, S′A′B′C′ (fig. 179) deux tétraèdres dont nous supposerons les bases ABC, A′B′C′ équivalentes. Concevons ces bases placées dans un même plan horizontal ; les sommets S et S′ seront sur une même horizontale, puisque les tétraèdres ont même hauteur.

Menons un plan horizontal quelconque qui coupe les deux tétraèdres : je dis que les sections MNP, M′N′P′ seront équivalentes.

En effet : le tétraèdre SMNP est semblable au tétraèdre SABC, comme ayant les trois faces qui aboutissent en S semblables chacune à chacune (245). Il en résulte que si h et H désignent les hauteurs de ces deux tétraèdres, on aura (244)

$$\text{MNP} : \text{ABC} :: h^2 : \text{H}^2.$$

Par une raison toute semblable, et en remarquant que puisque les tétraèdres SABC, S′A′B′C′ ont pour hauteur commune H, les tétraèdres SMNP, S′M′N′P′ ont aussi pour hauteur commune h, on aura :

$$\text{M'N'P'} : \text{A'B'C'} :: h^2 : \text{H}^2.$$

De ces deux proportions on tire, à cause du rapport commun :

$$\text{MNP} : \text{ABC} :: \text{M'N'P'} : \text{A'B'C'},$$

ou

$$\text{MNP} : \text{M'N'P'} :: \text{ABC} : \text{A'B'C'};$$

mais les bases ABC et A′B′C′ sont équivalentes; les sections MNP, M′N′P′ faites par un même plan parallèle aux bases, sont donc aussi équivalentes.

Il résulte de là que les deux tétraèdres proposés peuvent être considérés comme composés d'un même nombre (infiniment grand) de tranches infiniment minces, équivalentes chacune à chacune; et que, par conséquent, ces tétraèdres sont équivalents.

292. — LEMME II. *Tout tétraèdre est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Soit SABC (fig. 180) un tétraèdre quelconque. Achevons les parallélogrammes ABSD, CBSE, et joignons DE. Le corps géométrique ainsi obtenu sera un prisme triangulaire; car ses faces latérales seront des parallélogrammes; ses bases seront des triangles égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun ; et enfin, ces bases seront parallèles comme étant menées suivant les droites SD, SE et BA, BC, respectivement parallèles (227). Ce prisme triangulaire a même base ABC que le tétraèdre, et même hauteur; il reste à prouver que le tétraèdre en est le tiers.

Pour cela, joignons AE. Le prisme triangulaire pourra être considéré comme décomposé en trois tétraèdres, SABC, SACE, SAED.

Si l'on compare SABC et SACE, on voit qu'ils peuvent être regardés comme ayant même sommet A, et des bases SBC, SCE qui sont les moitiés d'un même parallélogramme CBSE. Ces tétraèdres ont donc des bases équivalentes et même hauteur; donc ils sont équivalents (291).

Si l'on compare SACE et SAED, on voit qu'ils peuvent être regardés comme ayant même sommet S, et des bases ACE, AED, qui sont les moitiés d'un même parallélogramme ACED. Ces tétraèdres ont donc aussi même base et même hauteur, et sont par conséquent équivalents.

Il résulte de là que le prisme triangulaire est décomposé en trois tétraèdres équivalents. L'un quelconque d'entre eux, SABC par exemple, est donc le tiers du prisme triangulaire ABCDSE qui a même base et même hauteur.

293. — THÉORÈME. *Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Cet énoncé signifie que, pour obtenir le nombre d'unités de volume contenues dans un tétraèdre, il faut multiplier le nombre d'unités d'aire contenues dans sa base par le nombre d'unités de longueur contenues dans sa hauteur.

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur a pour mesure le produit de cette base par cette hauteur. Le tétraèdre qui en est le tiers a donc pour mesure le tiers de ce produit.

294. — THÉORÈME. *Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car, toute pyramide pouvant se décomposer, par des plans diagonaux, en tétraèdres de même hauteur qu'elle (248), si l'on nomme H cette hauteur et B, B′, B″, etc., les triangles dans lesquels la base se décompose, la somme des volumes des tétraèdres aura pour mesure

$$\tfrac{1}{3}.B\times H+\tfrac{1}{3}.B'\times H+\tfrac{1}{3}.B''\times H+\text{etc.},$$

ou

$$\tfrac{1}{3}.(B+B'+B''+\text{etc.})\times H.$$

Or, le facteur entre parenthèses exprime précisément l'aire du polygone qui sert de base à la pyramide. Le volume de celle-ci a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

295. — THÉORÈME. *Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car on peut considérer un cône comme une pyramide régulière, dont la base est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si H désigne la hauteur du cône et R le rayon de sa base, l'expression de son volume sera $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

APPLICATION. — *Quel est le volume d'un cône dont la hauteur est de* $0^m,50$ *et dont la base a* $0^m,25$ *de rayon?*

L'expression du volume demandé est

$$\tfrac{1}{3}.3,1416.(0^m,25)^2.0^m,50.$$

En effectuant le calcul, on trouve $0^{m.\,cub.},032725$, ou $32^{dec.\,cub.}$ et $725^{cent.\,cub.}$.

296. — Tout polyèdre pouvant se décomposer en pyramides, on obtiendra son volume en faisant la somme des volumes de ces pyramides.

297. — THÉORÈME. *Le volume d'une sphère a pour mesure le tiers du produit de sa surface par son rayon.*

En effet : on peut considérer une sphère comme composée d'une infinité de pyramides qui auraient pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases les portions infiniment petites de sa surface. La hauteur de chacune de ces pyramides se confondant sensiblement avec le rayon de la sphère, la mesure de cette pyramide sera le tiers du produit de sa base infiniment petite par le rayon. La somme de toutes les pyramides, ou le volume de la sphère, a donc pour mesure le tiers de la somme des produits de chaque base par le rayon, ou, ce qui revient au même, le tiers du produit de la somme des bases par le rayon, ou enfin le tiers du produit de la surface de la sphère par son rayon.

Remarque. Si R désigne le rayon de la sphère, on a vu que l'expression de la surface (282) est $4\pi R^2$; l'expression de son volume sera donc $\frac{1}{3}.4\pi R^2.R$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$.

APPLICATIONS. I. *Quel est le volume d'un boulet qui a* 22 *centimètres de diamètre?*

Le diamètre ayant $22^{cent.}$, le rayon a $11^{cent.}$; l'expression du volume du boulet est donc $\frac{4}{3}.3{,}1416.(11)^3$. En effectuant le calcul, on trouve $5575^{cent.\ cub.},293$ (en forçant ce dernier chiffre) ou $5^{déc.\ cub.}\ 573^{cent.\ cub.}\ 293^{mill.\ cub.}$.

II. — *Quel diamètre faut-il donner à un bassin demi-sphérique pour qu'il puisse contenir* 50 *hectolitres d'eau?*

La capacité du bassin étant de 50 hectol. ou de $5^{m.\ cub.}$; en divisant ce nombre par $\frac{2}{3}.3{,}1416$, on aura pour quotient le cube du rayon du bassin. On trouve $2^{m.\ cub.},387318$ dont la racine cubique $1^m,3355$ est le rayon du bassin. Son diamètre, ou le double de ce rayon, est donc $2^m,671$.

298. — THÉORÈME. *Le volume d'un prisme triangulaire tronqué* ABCDEF (fig. 181) *a pour mesure le produit de l'une de ses bases* ABC *par une moyenne entre les trois perpendiculaires abaissées des sommets opposés* D, E, F, *sur cette base.*

Menons le plan AEC qui coupe les faces ABED et BCFE suivant les droites AE et EC; menons aussi le plan DEC qui coupe la face ACFD suivant la droite DC. Le prisme tronqué se trouvera décomposé en trois tétraèdres EABC, EACD, ECDF.

Désignons par d, e, f les perpendiculaires abaissées des points D, E, F sur la base ABC (prolongée s'il est nécessaire).

Le tétraèdre EABC aura pour mesure $ABC \times \frac{1}{3}e$.

Le tétraèdre EACD, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACD, est équivalent à un tétraèdre qui aurait même base ACD, et pour sommet le point B situé sur une même droite EB parallèle à la base commune; car ces deux tétraèdres auraient même base et même hauteur. Or, le tétraèdre qui aurait pour sommet le point B et pour base ACD, pourrait aussi être considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base ABC; son volume, qui est aussi celui de EACD, a donc pour expression $ABC \times \frac{1}{3}d$.

Le tétraèdre ECDF, considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base CEF, est équivalent à un tétraèdre qui aurait même base CEF et son sommet en A, sur une même droite DA parallèle à cette base. Ce tétraèdre ACEF, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACF, est, à son tour, équivalent à un troisième tétraèdre qui aurait même base ACF, et son sommet en B, sur une même droite EB parallèle à cette base. Or, ce dernier tétraèdre BACF peut être considéré comme ayant pour sommet le point F et pour base ABC. Son volume, qui est aussi celui du tétraèdre ECDF, a donc pour expression $ABC \times \frac{1}{3}f$.

Faisant la somme de ces trois expressions partielles, on obtient pour l'expression du volume du prisme tronqué

$$ABC \times \tfrac{1}{3}d + ABC \times \tfrac{1}{3}e + ABC \times \tfrac{1}{3}f,$$

ou

$$ABC \times \tfrac{1}{3}(d + e + f).$$

Or $\frac{1}{3}(d+e+f)$ est ce que l'on nomme une moyenne entre les trois quantités d, e, f; donc l'expression ci-dessus revient à l'énoncé du théorème.

COROLLAIRES I. — Si les arêtes AD, BE, CF étaient perpendiculaires sur la base ABC, elles seraient elles-mêmes les quantités que nous avons désignées par d, e, f, et l'on peut dire : qu'*un prisme triangulaire* droit *tronqué a pour mesure le produit de la base perpendiculaire aux arêtes latérales, par une moyenne entre ces trois arêtes.*

II. — Si l'on coupe un tronc de prisme triangulaire par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales, on le divise en deux prismes triangulaires droits tronqués, qui ont pour base commune la section obtenue, laquelle est dite *section droite.* En réunissant les expressions des volumes de ces deux prismes partiels, on reconnait aisément que *le volume total a pour mesure le produit de la section droite par une moyenne entre les trois arêtes latérales.*

III. — S'il s'agit d'un prisme triangulaire non tronqué, les arêtes latérales sont égales, et leur moyenne n'est autre que l'une d'elles. On peut donc dire que *le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de la section droite par l'une des arêtes latérales.*

299. — Théorème. *Le volume d'un tétraèdre tronqué a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses deux bases, et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Soit ABCDEF (fig. 182) un tétraèdre tronqué. Menons les plans AEC et DEC qui décomposeront le tétraèdre tronqué en trois tétraèdres EABC, EACD, ECDF. Soit H la hauteur du tronc.

Le tétraèdre EABC, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ABC, aura pour mesure $\frac{1}{3}.ABC \times H$; car sa hauteur est celle du tronc.

Le tétraèdre ECDF, considéré comme ayant pour sommet le point C et pour base DEF, aura pour mesure $\frac{1}{3}.DEF \times H$, car sa hauteur est aussi celle du tronc.

Menons EI parallèle à DA, et joignons IC et DC. Le tétraèdre EACD, considéré comme ayant pour sommet le point E et pour base ACD, est équivalent au tétraèdre IACD qui a même base ACD et son sommet sur une même droite EI parallèle à cette base; car ces deux tétraèdres ont même base et même hauteur. Or, le tétraèdre IACD, considéré comme ayant pour sommet le point D et pour base AIC, a pour mesure $\frac{1}{3}.AIC \times H$, puisque sa hauteur est encore celle du tronc.

Le volume du tronc a donc pour expression :

$$\tfrac{1}{3}.ABC \times H + \tfrac{1}{3}.DEF \times H + \tfrac{1}{3}.AIC \times H,$$

ou $$\tfrac{1}{3}H.(ABC + DEF + AIC).$$

Il reste donc à démontrer que AIC est une moyenne géométrique entre les bases ABC et DEF.

Pour cela, remarquons que DE et DF étant respectivement parallèles à AC et AB (228), les angles EDF et IAC sont égaux; les deux triangles DEF et IAC sont donc entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal. Mais DE et AI étant égaux comme parallèles comprises entre parallèles, les produits dont nous parlons ont un facteur commun que l'on peut supprimer sans changer le rapport, et l'on peut écrire

$$DEF : AIC :: DF : AC. \qquad (1)$$

Les triangles AIC et ABC, qui ont même hauteur puisqu'ils ont même sommet C et leurs bases sur une même droite, sont entre eux comme ces bases, et l'on a

$$AIC : ABC :: AI :: AB. \qquad (2)$$

mais les bases DEF et ABC étant semblables (247), on a

$$DF : AC :: DE : AB \quad \text{ou} \quad DF : AC :: AI : AB.$$

En vertu de cette dernière proportion, les deux proportions (1) et (2) ont leurs seconds rapports égaux; les deux premiers le sont donc aussi, et il vient

$$DEF : AIC :: AIC : ABC;$$

ce qu'il fallait démontrer.

300. — THÉORÈME. *Le volume d'une pyramide tronquée a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Soit ABCDE*abcde* (fig. 138), une pyramide tronquée, et soit SABCDE la pyramide entière. Construisons un tétraèdre SMNP ayant même sommet S, une base MNP équivalente au polygone ABCDE, et placée sur le même plan que ce polygone. Prolongeons le plan de la base supérieure *abcde* du tronc; il déterminera dans le tétraèdre une section *mnp*. Je dis d'abord que cette section sera équivalente au polygone *abcde*.

En effet: soit H la hauteur commune des deux pyramides SABCDE et SMNP, et h la hauteur également commune des deux pyramides S*abcde*, S*mnp*. Les deux pyramides SABCDE et S*abcde*, qui sont évidemment décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés (245), sont semblables. On a donc (249, coroll. II).

$$abcde : ABCDE :: h^2 : H^2.$$

Mais les tétraèdres S*mnp* et SMNP étant également semblables, on a de même

$$mnp : MNP :: h^2 : H^2.$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$abcde : ABCDE :: mnp : MNP,$$

ou
$$abcde : mnp :: ABCDE : MNP.$$

Or, ABCDE et MNP sont équivalents par hypothèse; il en est donc de même de *abcde* et de *mnp*.

Cela posé; les pyramides SABCDE et SMNP étant équivalentes comme ayant même base et même hauteur (293, 294), et les pyramides S*abcde* et S*mnp* étant aussi équivalentes par la même raison, il en résulte que le tronc de pyramide ABCDE*abcde* équivaut au tronc de tétraèdre MNP*mnp*. Mais le volume de celui-ci a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases; le tronc de pyramide a donc la même mesure. Or, le tronc de pyramide a la même hauteur que le tronc de tétraèdre; les bases sont respectivement égales de part et d'autre, et par suite la moyenne géométrique entre les deux bases du tronc de pyramide est la même que la moyenne géométrique entre les deux bases du tronc de tétraèdre. Donc le volume du tronc de pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.

APPLICATION. — *Un bassin a ses murs en talus; le fond est un carré dont le côté a* 15^m; *les bords forment aussi un carré dont le côté a* 16^m; *sa profondeur est de* 2^m; *on demande sa capacité.*

La forme du bassin est celle d'une pyramide tronquée. L'aire de sa plus grande base est de $16^m \times 16^m$ ou $256^{m.c.}$; celle de la plus petite base est $15^m \times 15^m$ ou $225^{m.c.}$; la moyenne géométrique entre ces deux bases est la racine carrée du produit 256×225 ou de 57600, c'est-à-dire $240^{m.c.}$.

L'expression de la capacité demandée est donc

$$\frac{1}{3}\cdot 2^{m}\,[\,256^{m.\,c.}+225^{m.\,c.}+240^{m.\,c.}\,].$$

En effectuant le calcul, on trouve $480^{m.\,cub.},666...$

301. — Théorème. *Le volume d'un tronc de cône a pour mesure le tiers du produit de sa hauteur par la somme de ses bases et d'une moyenne géométrique entre ces bases.*

Car un tronc de cône peut être considéré comme un tronc de pyramide régulière dont les bases seraient des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Remarque. Si l'on nomme H la hauteur du tronc de cône, R le rayon de sa plus grande base, et r le rayon de la plus petite ; les aires de ces bases auront respectivement pour expression πR^2 et πr^2. La moyenne géométrique entre ces bases est la racine carrée de leur produit $\pi R^2\times\pi r^2$ ou de $\pi^2 R^2 r^2$, c'est-à dire πRr. L'expression du volume du tronc de cône est donc

$$\frac{1}{3}H\times(\pi R^2+\pi r^2+\pi Rr)\ \text{ou}\ \frac{1}{3}\pi H\,(R^2+r^2+Rr).$$

Application. — *Quelle est la capacité d'un cuvier dont le fond a 2^m de diamètre, le bord supérieur $2^m,50$ de diamètre, et dont la profondeur est de $1^m,50$?*

On a ici $H=1^m,50$; $R=1^m,25$; $r=1^m$. L'expression de la capacité demandée est donc

$$\frac{1}{3}\cdot 3,1416\cdot 1^m,50\,[\,(1^m,25)^2+(1^m)^2+1^m,25\times 1^m\,],$$

ou

$$\frac{1}{3}\cdot 3,1436\cdot 1^m,50\cdot 3^{m.\,c.},8125.$$

En effectuant le calcul, on trouve $5^{m.\,cub.},988675$, ce qui revient à 59 hectolitres et environ 89 litres.

302. — Théorème. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le tiers du produit de l'aire de la calotte qui lui sert de base, par le rayon de la sphère.*

Même démonstration qu'au nº 297.

Remarque. Soit h la hauteur de la calotte qui sert de base au secteur, et R le rayon de la sphère. L'aire de la calotte aura pour expression (281), $2\pi R\times h$. Le volume du secteur sera donc exprimé par $2\pi R\times h\times\frac{1}{3}R$ ou par $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.

303. — Théorème. *Le volume d'un segment sphérique a pour mesure le produit de l'aire du cercle qui aurait pour rayon la hauteur de ce segment, par le rayon de sa sphère diminué du tiers de cette hauteur.*

Soit AB (fig. 174) l'axe du segment ; $AI=h$ sa hauteur ; $EI=r$ le rayon du petit cercle qui termine la calotte ; $AO=R$ le rayon de la sphère ; on aura $OI=AO-AI=R-h$. De plus, la ligne EI étant moyenne proportionnelle entre les segments AI et IB du diamètre AB, on a

$$\overline{EI}^2=AI\times IB\quad\text{ou}\quad r^2=h\times(2R-h).$$

Cela posé, le volume engendré par le secteur EOA a pour mesure

$$\frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Le volume engendré par le triangle EIO, lequel volume est un cône, a pour mesure $\frac{1}{3}\pi.\,\overline{EI}^2.\,OI$ ou

$$\frac{1}{3}\pi h\,(2R-h)\,(R-h).$$

Le segment proposé, qui est la différence de ces deux volumes, a donc un volume exprimé par

$$\frac{2}{3}\pi R^2 h-\frac{1}{3}\pi h\,(2R-h)\,(R-h),$$

ou $\frac{1}{3}\pi h\,[2R^2-(2R-h)\,(R-h)]$,

ou $\frac{1}{3}\pi h\,(3Rh-h^2)$,

ou enfin $\pi h^2\,(R-\frac{1}{3}h)$;

ce qui revient à l'énoncé du théorème.

APPLICATION. — *Un bassin a la forme d'une demi-sphère dont le diamètre est de 3^m; il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de $1^m,2$ à partir du point le plus bas; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau contenue?*

L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique dont la hauteur est de $1^m,2$. L'expression de son volume est donc

$$3,1416.\ (1^m,2)^2.\ [1^m,5-0^m,4] \text{ ou } 3,1416.\ 1^{m.c.},44.\ 1^m.1.$$

En effectuant le calcul, on trouve $4^{m.cub.},976294\ldots$ ou 49 hectolitres et environ 76 litres.

CHAPITRE IV.

De la comparaison des surfaces et de celle des volumes.

§ 1. — De la comparaison des surfaces.

304. — THÉORÈME. *Les surfaces totales de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

En effet : soit S la surface totale d'un polyèdre; soient M, N, P, etc., les aires des diverses faces qui la composent; A, B, C, etc., des arêtes quelconques appartenant respectivement à chacune de ces faces; soient s, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les parties homologues d'un second polyèdre semblable au premier.

Deux polyèdres semblables ayant leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et les aires des deux polygones semblables étant entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues, on aura

$$M : m :: A^2 : a^2;\quad N : n :: B^2 : b^2;\quad P : p :: C^2 : c^2; \text{ etc.} \qquad (1)$$

D'ailleurs, puisque les polyèdres sont semblables, leurs arêtes homologues sont proportionnelles, et l'on a :

$$A : a :: B : b :: C : c :: \text{etc.};$$

d'où
$$A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2 :: \text{etc.} \qquad (2)$$

En vertu des premières proportions, on aura donc

$$M : m :: N : n :: P : p :: \text{etc.};$$

d'où $M+N+P+\text{etc.} : m+n+p+\text{etc.} :: M : m,$

ou
$$S : s :: M : m. \qquad (3)$$

En ayant égard à la première des proportions (1), on peut donc écrire

$$S : s :: A^2 : a^2.$$

et, à cause de la suite de rapports égaux (2)

$$S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2, \text{ etc.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

305. — THÉORÈME. *Les surfaces latérales de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Soient S et s les surfaces latérales des deux cylindres semblables, H et h leurs hauteurs, R et r les rayons de leurs bases. On aura (274)

$$S = 2\pi RH \quad \text{et} \quad s = 2\pi rh,$$

d'où la proportion identique

$$S : s :: 2\pi RH : 2\pi rh, \text{ ou simplement } S : s :: RH : rh. \quad (1)$$

Mais, puisque les cylindres sont semblables (263), on a

$$R : r :: H : h. \qquad (2)$$

On a d'ailleurs la proportion identique

$$H : h :: H : h. \qquad (3)$$

Application. — *Un bassin a la forme d'une demi-sphère dont le diamètre est de 3^m; il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de $1^m,2$ à partir du point le plus bas; quelle est, en hectolitres, la quantité d'eau contenue?*

L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique dont la hauteur est de $1^m,2$. L'expression de son volume est donc

$$3,1416.\,(1^m,2)^2.\,[1^m,5-0^m,4] \text{ ou } 3,1416.\,1^{m.c.},44.\,1^m.1.$$

En effectuant le calcul, on trouve $4^{m.cub.},976294\ldots$ ou 49 hectolitres et environ 76 litres.

CHAPITRE IV.

De la comparaison des surfaces et de celle des volumes.

§ 1. — De la comparaison des surfaces.

304. — Théorème. *Les surfaces totales de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

En effet : soit S la surface totale d'un polyèdre; soient M, N, P, etc., les aires des diverses faces qui la composent; A, B, C, etc., des arêtes quelconques appartenant respectivement à chacune de ces faces; soient s, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les parties homologues d'un second polyèdre semblable au premier.

Deux polyèdres semblables ayant leurs faces homologues semblables chacune à chacune, et les aires des deux polygones semblables étant entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues, on aura

$$M : m :: A^2 : a^2;\quad N : n :: B^2 : b^2;\quad P : p :: C^2 : c^2;\ \text{etc.} \qquad (1)$$

D'ailleurs, puisque les polyèdres sont semblables, leurs arêtes homologues sont proportionnelles, et l'on a :

$$A : a :: B : b :: C : c :: \text{etc.};$$

d'où $$A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2 :: \text{etc.} \qquad (2)$$

En vertu des premières proportions, on aura donc

$$M : m :: N : n :: P : p :: \text{etc.};$$

d'où $$M+N+P+\text{etc.} : m+n+p+\text{etc.} :: M : m,$$

ou $$S : s :: M : m. \qquad (3)$$

En ayant égard à la première des proportions (1), on peut donc écrire

$$S : s :: A^2 : a^2.$$

et, à cause de la suite de rapports égaux (2)

$$S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2 :: C^2 : c^2,\ \text{etc.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

305. — Théorème. *Les surfaces latérales de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Soient S et s les surfaces latérales des deux cylindres semblables, H et h leurs hauteurs, R et r les rayons de leurs bases. On aura (274)

$$S = 2\pi RH \quad \text{et} \quad s = 2\pi rh,$$

d'où la proportion identique

$$S : s :: 2\pi RH : 2\pi rh, \text{ ou simplement } S : s :: RH : rh. \qquad (1)$$

Mais, puisque les cylindres sont semblables (263), on a

$$R : r :: H : h. \qquad (2)$$

On a d'ailleurs la proportion identique

$$H : h :: H : h. \qquad (3)$$

Multipliant terme à terme les proportions (2) et (3), on en tire

$$RH : rh :: H^2 : h^2. \qquad (4)$$

Les proportions (1) et (4) ayant un rapport commun, il en résulte

$$S : s :: H^2 : h^2. \qquad (5)$$

Maintenant, la proportion (2) donne

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2, \qquad (6)$$

et, à cause du rapport commun entre les proportions (5) et (6), on peut écrire

$$S : s :: R^2 : r^2.$$

306. — Théorème. *Les surfaces latérales de deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés de leurs hauteurs, ou comme les carrés des rayons de leurs bases.*

Même démonstration que pour le théorème précédent.

307. — Théorème. *Les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.*

Soient S et s les surfaces de deux sphères, R et r leurs rayons, on aura (282)

$$S = 4\pi R^2 \qquad \text{et} \qquad s = 4\pi r^2.$$

De là, la proportion identique

$$S : s :: 4\pi R^2 : 4\pi r^2,$$

ou, en supprimant le facteur 4π commun aux deux termes du second rapport,

$$S : s :: R^2 : r^2 ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — De la comparaison des volumes.

308. — Théorème. *Les volumes de deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues, ou comme les cubes de leurs hauteurs.*

Soient SABC et $sabc$ (fig. 165) deux tétraèdres semblables, SH et sh leurs hauteurs. On a vu (244) qu'on avait la proportion

$$ABC : abc :: \overline{SH}^2 : \overline{sh}^2.$$

On a aussi la proportion évidente

$$\tfrac{1}{3}SH : \tfrac{1}{3}sh :: SH : sh.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, on en tire

$$ABC \times \tfrac{1}{3}SH : abc \times \tfrac{1}{3}sh :: \overline{SH}^3 : \overline{sh}^3.$$

Or, les deux premiers termes mesurent les volumes des deux tétraèdres; ces deux tétraèdres sont donc entre eux comme les cubes de leurs hauteurs.

Mais, si l'on transporte le tétraèdre $sabc$ sur le tétraèdre SABC, de manière à ce qu'il prenne la position SA'B'C', on a vu (244) que les plans A'B'C' et ABC seront parallèles; et que la perpendiculaire SH sera divisée au point H', de manière qu'on aura la proportion

$$SH : SH' :: SA : SA' \quad \text{ou} \quad SH : sh :: SA : sa,$$

d'où

$$\overline{SH}^3 : \overline{sh}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{sa}^3.$$

Il en résulte que les volumes des deux tétraèdres sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues SA et sa, et par conséquent comme les cubes de deux arêtes homologues quelconques, puisqu'elles sont proportionnelles.

309. — Théorème. *Les volumes de deux polyèdres sem-*

blables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.

Soient V le volume du premier polyèdre, M, N, P, etc., le volume des divers tétraèdres dans lesquels il peut se décomposer (259), A, B, C, etc., des arêtes quelconques prises respectivement sur chacun de ces tétraèdres. Soient v, m, n, p, etc., a, b, c, etc., les grandeurs homologues relatives à un second polyèdre semblable au premier.

On aura, à cause de la similitude des polyèdres (260),

$$A : a :: B : b :: C : c, \text{ etc.};$$

d'où $$A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3 :: \text{etc.} \qquad (1)$$

Les tétraèdres homologues étant semblables, on a, en vertu du théorème précédent :

$$M : m :: A^3 a^3; \quad N : n :: B^3 : b^3; \quad P : p :: C^3 : c^3, \text{ etc.}; \quad (2)$$

d'où, en vertu de la suite de rapports égaux, (1)

$$M : m : N : n :: P : p :: \text{etc.}$$

On en tire

$$M+N+P+\text{etc.} : m+n+p+\text{etc.} :: M : n,$$

ou $$V : v :: M : m,$$

ou, en vertu de la première des proportions, (2)

$$V : v :: A^3 : a^3,$$

ou enfin, en vertu de la suite de rapports égaux, (1)

$$V : v :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3 :: \text{etc.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Si les arêtes du premier polyèdre sont 2, 3, 4,... 10 fois plus grandes que les arêtes homologues du second polyèdre, le volume du premier est 8, 27, 64,... 1000 fois plus grand que le volume du second.

310. — Théorème. *Les volumes de deux cylindres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes des rayons de leurs bases.*

Soient V et v les volumes, H et h les hauteurs, R et r les rayons des bases ; on aura d'abord (290)

$$V = \pi R^2 H \quad \text{et} \quad v = \pi r^2 h,$$

d'où la proportion identique

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h, \quad \text{ou} \quad V : v :: R^2 H : r^2 h. \quad (1)$$

On a aussi, puisque les cylindres sont semblables,

$$R : r :: H : h; \quad \text{d'où} \quad R^2 : r^2 :: H^2 : h^2. \quad (2)$$

On a de plus la proportion identique

$$H : h :: H : h. \qquad (3)$$

Multipliant membre à membre les proportions (2) et (3), on obtient

$$R^2 H : r^2 H :: H^3 : h^3, \qquad (4)$$

et, à cause du rapport commun entre cette proportion et la proportion (1),

$$V : v :: H^3 : h^3. \qquad (5)$$

Maintenant, de la proportion

$$R : r :: H : h, \quad \text{on tire} \quad R^3 : r^3 :: H^3 : h^3. \quad (6)$$

Les proportions (5) et (6) ayant un rapport commun, il en résulte

$$V : v :: R^3 : r^3.$$

311. — Théorème. *Les volumes de deux cônes sembla-*

bles sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes des rayons de leurs bases.

Même démonstration que pour le théorème précédent.

312. — Théorème. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons.*

Soient V et v les volumes de deux sphères, R et r leurs rayons, on aura (297)

$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{et} \quad v=\tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

d'où la proportion identique

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3;$$

supprimant le facteur $\frac{4}{3}\pi$ commun aux deux termes du second rapport, il reste

$$V : v :: R^3 : r^3;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Si la première sphère a un rayon double du rayon de la seconde, le volume de la première est 8 fois plus grand que celui de la seconde; il serait 27 fois plus grand si le rayon était triple; 1000 fois plus grand si le rayon était décuple; et ainsi de suite.

313. — Théorème. *Deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases; et deux prismes dont les bases sont égales ou équivalentes sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Soient V et V′ les volumes des deux prismes, B et B′ leurs bases, H et H′ leurs hauteurs; on aura (289)

$$V=B\times H \quad \text{et} \quad V'=B'\times H',$$

d'où la proportion identique

$$V : V' :: B\times H : B'\times H'.$$

Si les hauteurs sont égales, on peut les supprimer comme facteur commun, et il reste

$$V : V' :: B : B'.$$

Si ce sont les bases qui soient égales ou équivalentes, on peut les supprimer comme facteur commun, et il reste

$$V : V' :: H : H'.$$

Corollaire. Cette proportion s'étend aux parallélépipèdes et aux cylindres; ainsi *un parallélépipède rectangle et un cylindre qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Si les bases sont en outre équivalentes, le parallélépipède rectangle et le cylindre sont équivalents.

Application. On a eu l'occasion de faire un cylindre équivalent à un cube lorsqu'il a fallu déterminer les dimensions des nouvelles mesures de capacité. Comme la forme cubique eût été incommode, on a adopté la forme cylindrique. Pour les matières sèches, le cylindre doit avoir une hauteur égale au diamètre de sa base.

Supposons qu'il s'agisse de l'hectolitre; soit R le rayon de sa base, la hauteur sera 2 R; le volume sera donc représenté par $\pi R^2 \times 2R$ ou $2\pi R^3$. Ce volume devant être égal à 1 hectolitre ou à 100 décimètres cubes; en divisant ce nombre 100 par 2π ou $2\times 3{,}1416$, le quotient $15^{\text{déc. cub.}},915...$ exprimera le cube du rayon. Extrayant la racine cubique, on trouve $2^{\text{déc.}},515$ pour la valeur du rayon; et par conséquent $5^{\text{déc.}},03$ ou $0^{\text{m}},503$ pour la hauteur de l'hectolitre.

314. — Théorème. *Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides qui ont des bases égales ou équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Même démonstration que pour le théorème précédent.

Corollaire. Cette proposition s'étend au cône. Ainsi deux cônes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; et deux cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, ou, ce qui revient au même, comme les carrés des rayons de ces bases.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARPENTAGE

ET DE LAVIS DES PLANS.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARPENTAGE

ET DE LAVIS DES PLANS.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

ARPENTAGE.

Tableaux d'arpentage à l'usage des écoles d'enseignement mutuel et d'enseignement simultané, ouvrage adopté par l'Université. 8 feuilles demi-jésus et un Manuel in-8°. Prix, 2 fr. 50 c.

DESSIN LINÉAIRE.

Cours méthodique de Dessin linéaire, applicable à tous les modes d'enseignement, ouvrage destiné aux colléges, aux pensions et aux écoles primaires. Un vol. in-8° avec un atlas de 19 planches gravées, demi-jésus; ouvrage adopté par le Conseil royal de l'instruction publique. 3e édition. Prix 5 fr.

Dessin (Le) linéaire des demoiselles, avec les applications à l'ornement et à la composition, à la broderie, au dessin des schalls, aux fleurs et au paysage; ouvrage composé pour l'enseignement des jeunes personnes élevés dans leurs familles ou dans des pensions. Un vol. in-8°, avec un atlas de 12 planches gravées par Adam. Prix, 6 fr.

Questions sur le Dessin linéaire pour l'enseignement mutuel et l'enseignement simultané, à l'usage des maîtres et des moniteurs. Brochure in-8°. Prix 25 c.

Tableaux de Dessin linéaire pour l'enseignement mutuel et l'enseignement simultané, 10 feuilles demi-jésus. Paris, 1833. Prix, 2 fr. 50 c. Ouvrage adopté par le conseil royal de l'instruction publique.

Ces tableaux sont destinés aux écoles qui ne peuvent pas faire la dépense d'un certain nombre d'exemplaires du Cours méthodique de Dessin linéaire. Une collection de tableaux suffit pour toute l'école.

GÉOGRAPHIE.

Cartes muettes, servant à l'enseignement de la géographie par le dessin. Chaque carte, demi-feuille grand-raisin bien collé, 20 c.

Géographie enseignée par le dessin des cartes, ou Instruction pour remplir les cartes à simples projections et à projections augmentées du littoral. Un vol. avec planches gravées. Prix, 1 fr. 50 c.

ARITHMÉTIQUE.

Système légal des Poids et Mesures. Un vol. in-18 de 2 feuilles. Prix, broché, 30 c.

Tableaux d'Arithmétique, par MM. Vernier et Lamotte, 60 feuilles couronne collée et un Manuel in-18. Prix, 5 fr.

Le *Manuel* seul, à l'usage des élèves. Prix, cart., 75 c.

Tableaux du système légal des Poids et Mesures. 12 feuilles couronne collée. Prix, 1 fr. 50 c.

LECTURE.

Tableaux de lecture sans épellation, par MM. Lamotte, Perrier, Meissas et Michelot, 66 feuilles couronne collée, avec un Manuel de six feuilles in-8°. Prix, 4 fr. 75 c.

Le *Manuel* seul, 1 fr.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ARPENTAGE
ET
DE LAVIS DES PLANS;
SUIVI
DE LA MESURE DES BOIS ET DES SOLIDES;

Ouvrage destiné aux Ecoles communales supérieures et élémentaires, aux Propriétaires, Cultivateurs, Notaires, Juges de paix, Maires, etc.,

APPROUVÉ PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE;

PAR M. L. LAMOTTE,

Inspecteur spécial de l'instruction primaire du département de la Seine, auteur du Cours méthodique de dessin linéaire.

QUATRIÈME ÉDITION.

PARIS,

LIBRAIRIE CLASSIQUE ET ÉLÉMENTAIRE DE L. HACHETTE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

1836.

AVIS.

Tout exemplaire non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

PREFACE.

Dès que le droit de propriété a été reconnu parmi les hommes, il a fallu mesurer les champs et en fixer les limites. Telle fut l'origine de *l'arpentage*, qui remonte aux temps les plus reculés.

Dans les commencements, l'arpentage se bornait aux plus simples pratiques de calcul géométrique.

Les auteurs anciens nous racontent que les Egyptiens, ne pouvant plus reconnaître les limites de leurs propriétés, à la suite des inondations périodiques du Nil, inventèrent l'art de mesurer les terres et d'en représenter la forme. Cette tradition paraît assez vraisemblable.

Dans nos sociétés modernes, l'art de mesurer les champs se trouve le privilége de quelques individus.

Il est vrai que l'arpenteur ne se borne pas à mesurer les surfaces : il dessine les plans, il indique les différentes cultures par des teintes conventionnelles, il dispose ses dessins dans des espaces plus ou moins grands, etc., etc. Ces divers travaux constituent un art qui exige des études particulières, et qui, par conséquent, ne peut être pratiqué par tout le monde.

Cependant tous les agriculteurs devraient savoir mesurer leurs champs, pour s'opposer aux envahissements d'un voisin avide ou de mauvaise foi.

L'arpentage, qui était, il y a quelques années encore, une espèce de luxe dans l'enseignement élémentaire, est devenu obligatoire pour toutes les écoles importantes. La loi sur l'instruction primaire a décidé que l'arpentage ferait partie désormais du cours d'études des écoles primaires supérieures.

Long-temps nous avons appelé de nos vœux cet enseignement, qui sera si utile aux habitants de la campagne; nous n'avons peut-être pas été complétement étranger à cette modification importante de l'enseignement primaire, et nous nous réjouirons plus que tout autre de voir, dans quelques années, les élèves de nos écoles communales capables d'arpenter toute espèce de terrains.

L'arpentage proprement dit, c'est-à-dire l'évaluation des surfaces, est aussi facile à étudier qu'à enseigner. Nous avons publié des *Tableaux d'arpentage* destinés à faire pénétrer cette étude jusque dans les plus petites localités.

Si la loi sur l'enseignement primaire n'oblige pas les instituteurs des petites écoles à enseigner l'arpentage, elle ne le défend pas non plus; et les instituteurs comprendront combien il sera utile pour eux d'ajouter une branche d'instruction qui leur fera honneur, qui leur procurera des porte-chaînes intelligents, et qui leur fournira une ressource necessaire dans les communes où le traitement fixe est très modique.

Depuis la première publication de ce Traité d'arpentage, trois éditions ont été épuisées en fort peu

de temps, et le conseil royal de l'Université a bien voulu l'adopter pour l'enseignement dans les écoles; cette bienveillance du public envers un homme qui a consacré ses veilles au développement et à la propagation de l'enseignement primaire lui imposait l'obligation de revoir avec soin cette nouvelle édition. On y trouvera quelques changements, quelques détails nouveaux sur les instruments, quoique l'auteur ait cependant conservé, autant qu'il lui a été possible, l'ancien ordre des paragraphes.

L'ouvrage que nous offrons au public est une exposition claire et méthodique des principes sur lesquels repose l'arpentage.

Les élèves en général connaissent mal le système métrique. Nous avons développé au commencement de l'ouvrage ce qui a le rapport le plus immédiat avec la mesure des terres. Nous avons donné *quinze tables de réduction des hectares et ares en arpents et perches, et réciproquement.*

Après avoir exposé succinctement les termes et les principes de géométrie indispensables pour les *opérations graphiques*, nous passons à l'arpentage sur le terrain, au moyen des instruments.

Dans un grand nombre de localités, les instituteurs ne sont pas assez riches pour se procurer une chaîne, une équerre, une planchette, un graphomètre, etc.: nous leur indiquons les moyens de faire opérer les élèves sur le terrain avec des instruments qu'ils construiront eux-mêmes, et qu'on peut se procurer partout et sans frais.

Quant au lavis des plans, les instituteurs pourront l'enseigner aux enfants qui montrent de la disposition et du goût pour le dessin : c'est un travail qui plaira beaucoup aux élèves et aux parents.

Pour compléter cet ouvrage, nous avons consacré une quatrième partie au calcul des hauteurs inaccessibles, et à la mesure des volumes.

Dans un livre élémentaire, nous n'avons pas dû parler de la coupe et de l'aménagement des bois; mais nous avons exposé avec quelques détails, dans la quatrième partie, la mesure des bois équarris et des bois ronds, les moyens de trouver le plus grand équarrissage d'un arbre, la plus forte pièce qu'on peut en retirer, ainsi que le nombre des bordages ou planches qu'il peut fournir.

Nous terminons enfin par une série de questions pouvant servir d'examen pour constater les progrès des enfants. Cette partie de l'ouvrage sera d'un grand secours aux maîtres pour interroger les élèves en présence des inspecteurs et des visiteurs.

Puisse ce Traité élémentaire d'arpentage donner aux jeunes gens le goût de cette étude, qui reçoit une application fréquente dans le cours de la vie, et qui est la véritable géométrie des habitants de la campagne.

—

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ARPENTAGE
ET DE LAVIS DES PLANS.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

—

§ Ier.

CALCUL DES NOMBRES ENTIERS ACCOMPAGNÉS DE FRACTIONS DÉCIMALES.

1. Nous devrions supposer peut-être que l'on a bien appris le calcul dans les classes d'arithmétique; cependant, comme il serait impossible aux élèves de faire les opérations indiquées dans l'arpentage, s'ils n'étaient pas bien sûrs du calcul décimal, nous avons jugé indispensable de récapituler très succinctement les quatre opérations sur les nombres entiers accompagnés des fractions décimales.

ADDITION.

2. *L'addition des nombres décimaux s'effectue de la même manière que celle des nombres entiers; seulement, on a soin de séparer par un point, dans le total, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre qui en contient le plus.*

Exemples.

	Nº 1.	Nº 2.	Nº 3
	2.37	67.451	283.627
	5.624	143.2764	1,455.8965
	1,234.2491	2,356.48921	276.9879
	53.1	1,751.967	1,632.7643
	1,724.367	83.45	432.85942
		5.9	158.6954
Totaux.	3,019.7101	4,408.53361	4,240.83052
Preuves.	1,111.2200	1,323.32000	2,334.44200

Dans l'addition nº 1, nous avons séparé quatre chiffres sur la droite du total, parce que 1,234.2491, qui est le nombre contenant le plus de décimales, en renferme effectivement quatre. Dans l'addition nº 2, nous avons séparé par un point cinq chiffres sur la droite du total, parce que 2, 356.48921, qui est le nombre renfermant le plus de décimales, en contient cinq.

Nous préférons, pour éviter toute confusion, nous servir du point au lieu de la virgule employée par plusieurs auteurs. En voici la raison : le nombre 2,324,526 par exemple, vu seul, peut représenter deux millions trois cent vingt-quatre mille cinq cent vingt-six unités, ou deux mille trois cent vingt-quatre unités cinq cent vingt-six millièmes, au lieu que 2,324.526 ne peut s'interpréter que d'une seule manière.

SOUSTRACTION.

3. *La soustraction des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers; seulement, on rend le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant des zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales.*

Exemples.

Nº 1.	Nº 2.	Nº 3.
271.295	41.5	1243.5628941
194.5625	29.6248756	825.7847

En ajoutant les zéros comme l'indique la règle, ce qui d'ailleurs ne change rien à la valeur des nombres, on aura :

	271.2950	41.5000000	1243.5628941
	194.5625	29.6248756	825.7847000
Différences.	76.7327	11.8751244	417.7781941
Preuves.	271,2950	41.5000000	1243.5628941

MULTIPLICATION.

4. *Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, opérez comme si c'était deux nombres entiers, sans faire attention aux points, et séparez sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.*

Exemples.

Nº 1	Nº 2.	Nº 3.
245.63	637.8953	457.8452
21.789	1.475	3.56043
221067	31894765	13735356
196504	44652671	18313808
171941	25515812	27470712
24563	6378953	22892260
49126		13735356
5352.03207	940.8955675	1630.125785436

Ces trois produits doivent être modifiés d'après la règle indiquée ci-dessus. Dans la multiplication n° 1, le multiplicande a deux chiffres décimaux, le multiplicateur trois : le produit doit donc avoir deux plus trois, ou cinq chiffres décimaux, ce qui donne 5352.03207.

Ainsi, en opérant d'après le même principe, les trois produits seront 5352.03207, 940.8955675 et 1630.125785436.

DIVISION.

5. *Pour diviser l'un par l'autre deux nombres accompagnés de chiffres décimaux, il faut mettre à la suite de celui qui en a le moins un nombre suffisant de zéros pour qu'il y ait autant de décimales dans le dividende que dans le diviseur. Supprimez alors le point, et opérez comme dans une division de nombres entiers.*

Exemples.

721,423.2654 | 498.253   6354.274 | 893.47592

6541.638 | 582.895364

On donnera aux trois opérations ci-dessus la forme indiquée par a règle, et on obtiendra :

N° 1.

7214232654 | 4982530
22317026 | 1447
23869065
39389454
4511744

N° 2.

6354274000 | 893475592
9994256 | 7

N° 3.

6541638000 | 582895364
712684360 | 11
129788996

6. Si l'on veut obtenir des décimales au quotient, il suffit de mettre à la suite du reste autant de zéros que l'on veut avoir de décimales au quotient. Reprenons la division n° 1. Je désire pousser le quotient jusqu'aux dix-millièmes, c'est-à-dire que je veux avoir quatre décimales au quotient : je mets quatre zéros à la suite du reste, et je continue l'opération comme dans les nombres entiers.

7214232654 | 4982530
22317026 | 1447.9055
23869065
39389454
45117440000
27467000
25543500
630850

7. Pour convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, il suffit de diviser le numérateur de la fraction ordinaire par le dénominateur, en plaçant à la droite du numérateur autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux au quotient.

Exemples.

$\frac{5}{7}$ 50000 | 7
10 | 0.7142
30
20
6

$\frac{8}{9}$ 800000 | 9
80 | 0.88888
80
80
80
8

```
 5    5000000 | 11
--              ---------
11    60        0.454545
       50
        60
         50
          60
           5
```

Dans la première fraction 5/7, je désire avoir quatre décimales au quotient : je divise 5, suivi de quatre zéros, par 7, et j'obtiens effectivement au quotient 0.7142, c'est-à-dire les quatre décimales demandées. Il en est de même pour les autres exemples.

§ II.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

8. Il existait en France, dans le siècle dernier, un nombre prodigieux de mesures dont les dénominations variaient d'un village à l'autre : il en résultait de graves inconvénients pour le commerce. Ainsi, par exemple, les champs se mesuraient tantôt par *arpents*, tantôt par *perches*, ici par *journaux de terre*, là par *boisselées*, *bichetées*, *ouvrées*, *bouniées*, *huitelées*, *mencaudées*, etc., etc.

Nous renvoyons nos lecteurs à notre *Système légal des Poids et Mesures*, conforme à la loi sur l'instruction primaire (1).

Aujourd'hui le *Système légal des Poids et Mesures* est le seul reconnu par le gouvernement, et nous espérons que bientôt il sera le seul en usage. Son

(1) *Système légal des Poids et Mesures*, par M. Lamotte. 1 vol. in-18 de deux feuilles. Prix, 30 c. (6 sous).

extrême simplicité et la facilité du calcul le feront adopter par tous les hommes de bon sens.

MÈTRE.

9. Le mot *mètre* vient d'un mot grec qui signifie *mesure*.

Le mètre équivaut à 0 t. 5130740, ou à 3 p. 0 po. 11 l. 296.

10. Pour composer des mesures plus grandes et plus petites que le mètre, on emploie les mots suivants, tirés du grec et du latin :

Myria,	Dix mille.
Kilo,	Mille.
Hecto,	Cent.
Déca,	Dix.
. . . .	. .
Déci,	Dixième.
Centi,	Centième.
Milli;	Millième.

En les combinant avec le mètre on a formé :

Myriamètre;	Dix mille mètres : c'est la lieue nouvelle, qui vaut 5,131 toises, un peu plus que le double de la lieue de 2,500 toises.
Kilomètre,	Mille mètres.
Hectomètre,	Cent mètres.
Décamètre,	Dix mètres : c'est la perche métrique, qui vaut 5 t. 0 p. 9 po. 4 l. 96.
Mètre.	Dix-millionnième partie de la distance du pôle à l'équateur.

Décimètre,	Dixième partie du mètre, valant 3 po. 8 l. 1/3.
Centimètre,	Centième partie du mètre, valant 4 l. 44/100.
Millimètre,	Millième partie du mètre, 44/100 de ligne.

Toutes les autres mesures dérivent du mètre, de la manière la plus simple.

MESURE DE SUPERFICIE OU ARE.

11. L'unité des mesures de superficie est l'*are*; c'est un carré qui a un décamètre ou dix mètres de côté.

Le centiare équivaut à un mètre carré.

L'hectare est l'arpent métrique; il vaut 2 arpents de Paris et 92 perches, ou 1 arpent et 96 perches des eaux et forêts.

Les multiples et sous-multiples de l'are sont :

L'hectare, qui vaut	Dix mille mètres carrés
L'are,	Cent mètres carrés.
Le centiare,	Un mètre carré.

§ III.

APPLICATION DU CALCUL DÉCIMAL AUX NOUVELLES MESURES.

12. Rien n'est plus simple que cette application ; elle n'exige que la connaissance des quatre règles de l'arithmétique.

Nous allons en donner quelques exemples, qui suffiront pour mettre sur la voie dans tous les cas analogues.

Premier exemple.

On a acheté 4 hectares 25 centiares pour 3850 f. 45 c. ; on demande ce que coûte l'are.

4 h. 25 c. c'est la même chose que 425 ares : ainsi en divisant 3850 f. 45 par 425, on aura le prix d'un are.

```
3850.45   | 425.00
          |--------
 254500     9.05.
```

L'are coûtera dans ce cas, 9 f.05.

Deuxième exemple.

On veut faire tendre un salon avec de la soie cramoisie qui a 60 centimètres de largeur et qui coûte 5 f. 50 le mètre ; on a fait mesurer la surface du mur qui doit être couverte, et l'on a trouvé 18 mètres 65 centimètres de tour, sur 2 mètres 45 centimètres de hauteur. On demande combien il faudra de mètres d'étoffe, et combien on dépensera.

D'abord, et pour avoir le nombre de laizes de soie, il suffira de diviser 18 m. 65 par la largeur de l'étoffe 0 m. 60.

```
18.65 | 0.60
      |------
   65   31.08
   500
```

Il faudra donc 31 laizes de soie, plus une largeur de 8 cent. ; et comme ces laizes ont 2 m. 45 de longueur, nous multiplions 2.45 par 31.08.

```
    2.45
   31.08
 -------
    1960
    245
   735
 -------
 76.1460
```

Nous aurons 76 m. 15 en forçant l'unité à cause du 6 qui suit le 4. Nous savons en effet que, lorsqu'on veut supprimer des décimales, il faut toujours forcer d'une unité le dernier chiffre que l'on a conservé, si le suivant est 5 ou plus grand que 5.

Comme l'étoffe de soie coûte 5 f. 50 le mètre, il faudra encore multiplier 76 m. 15 par 5.50.

```
     76.15
      5.50
   -------
    380750
   38075
   -------
   418.8250
```

Nous avons donc besoin de 76 m. 15 d'étoffe, qui coûteront 418 f. 83.

Nous forçons le résultat à cause du 5 que nous avons négligé.

Troisième exemple.

Un propriétaire, voulant savoir ce qu'un bien valant 150,283 f. 75 c. lui rapporte pour cent, année commune, fait le relevé de ses registres et trouve qu'il a rapporté en dix ans, savoir :

1re année,	4.351 f.	12 c.
2e année,	5,642	55
3e année,	4,915	18
4e année,	5,931	43
5e année,	5,912	12
6e année,	4,743	27
7e année,	5,231	62
8e année,	5,365	82
9e année,	5,437	63
10e année,	5,814	89
Total des dix années..	51,345	43

En divisant le total par 10, qui est le nombre des années, on aura 5,134 f. 54 c. pour le revenu moyen de chaque année.

Or 150,283 f. 75 c. à 1 p. °/₀ donnent 1,502 f. 84.

Si nous divisons 5,134 f. 54 par 1,502 f. 84, nous aurons la quotité du revenu.

```
513454 | 150284
       |-------
626020 | 3.41
 248840
```

Le revenu sera donc, année commune, de 3,41 p. °/₀, un peu moins de 3 1/2 p. °/₀.

Nous ne donnerons pas un plus grand nombre d'exemples; les trois questions que nous venons de résoudre prouvent suffisamment avec quelle facilité le calcul décimal s'applique aux nouvelles mesures.

§ IV.

CONVERSION DES ANCIENNES MESURES EN NOUVELLES, ET DES NOUVELLES MESURES EN ANCIENNES.

13. Malgré la simplicité du système métrique, malgré ses immenses avantages, il faut avouer qu'il n'est pas encore généralement répandu dans toute la France, où les habitudes routinières ont prévalu long-temps. Nous serons heureux si cet ouvrage, destiné aux écoles, peut contribuer à faire apprécier, par la classe industrielle, la clarté du système métrique. Que les instituteurs surtout comparent la promptitude et la facilité du système décimal appliqué au système métrique avec la lenteur et la difficulté des opérations sur les nombres complexes!

Ils peuvent rendre un important service à leur pays en enseignant aux élèves le système décimal et le système métrique, et en ne faisant connaître les nombres complexes que comme un objet de curiosité. C'est par les instituteurs seulement que le vœu des hommes instruits sera réalisé et que le système légal des poids et mesures triomphera d'une routine de plusieurs siècles.

14. Nous allons donner les moyens de convertir les anciennes mesures en nouvelles, et les nouvelles mesures en anciennes.

Quelques exemples suffiront pour tracer la marche à suivre dans les cas analogues. Voici la division des mesures anciennes.

La toise se divise en 6 pieds.
Le pied en 12 pouces.
Le pouce en 12 lignes.
La ligne en 12 points.
La toise carrée se divise en 36 pieds carrés.
Le pied carré en 144 pouces carrés.
Le pouce carré en 144 lignes carrées.
La ligne carrée en 144 points carrés.
La toise cube se divise en 216 pieds cubes.
Le pied cube en 1728 pouces cubes.
Le pouce cube en 1728 lignes cubes.
La ligne cube en 1728 points cubes.

PREMIÈRE TABLE.

Rapport approximatif des anciennes et des nouvelles mesures.

15. La toise vaut 2 mètres.
Le mètre vaut une 1/2 toise.
La toise carrée vaut 4 mètres carrés.
Le mètre carré vaut 1/4 de la toise carrée.
La toise cube vaut 8 mètres cubes.
Le mètre cube vaut 1/8 de la toise cube.

DEUXIÈME TABLE.

Rapport très rapproché, et exprimé en nombres entiers, des nouvelles mesures aux anciennes.

4 myriamètres valent 9 lieues terrestres.
82 mètres valent 69 aunes de Paris.
76 mètres valent 39 toises.
13 décimètres valent 4 pieds.
19 centimètres valent 7 pouces.
9 millimètres valent 4 lignes.
24 hectares valent 47 arpents (eaux et forêts).
24 ares valent 47 perches carrées.
40 hectares valent 117 arpents de Paris.
40 ares valent 117 perches carrées.
19 mètres carrées valent 5 toises carrées.
37 mètres cubes valent 5 toises cubes.
36 décastères valent 35 solives de charpente.

Cette seconde table est bien plus exacte que la précédente, mais le rapport, au lieu d'être simple, se trouve composé. En effet, si je veux convertir des hectares en arpents, je suis obligé de prendre le rapport 40 : 117 ; mais, au moyen d'une proportion, il est facile de se servir de la table des rapports très rapprochés.

Premier exemple.

On demande combien 352 hectares valent d'arpents de Paris?

Puisque 40 hectares valent 117 arpents, il suffira d'établir la proportion suivante :

$$40 : 117 :: 352 : x = \frac{352 \times 171}{40} = 1{,}029.6.$$

352 hectares valent donc 1,029 arpents 6 dixièmes ou 1,029 arpents 60 perches.

Deuxième exemple.

Combien 365 arpents de Paris valent-ils d'hectares ?

Nous trouvons dans la table des rapports très rapprochés que 40 hectares valent 117 arpents, ou, en renversant le rapport, que 117 arpents valent 40 hectares. Nous établirons la proportion :

$$117 : 40 :: 365 : x = \frac{365 \times 40}{117} = 124 \text{ hect. } 78.$$

365 arpents valent donc 124 hectares 78 ares.

Troisième exemple.

Convertir 14 t. 5 p. 10 po. 11 l. en mètres, décimètres et centimètres. Au moyen des tables de conversion, rien n'est plus facile que cette opération : mais nous ne nous en servirons pas d'abord, afin de montrer comment on peut s'en passer au besoin.

Je réduis 14 t. 5 p. 11 po. 10 l. en lignes, ce qui se fait en multipliant 14 par 6, le produit est 84 ; en ajoutant les 5 pieds on aura 89. On multipliera ensuite 89 par 12, ce qui donnera 1,068 : ajoutant les 11 po., on a 1079, que l'on multipliera par 12, pour avoir des lignes, ce qui donnera 12,948, et avec les 10 lignes, 12,958.

Le mètre vaut, comme nous l'avons dit, 0 t. 5130740. Pour avoir des lignes nous multiplierons ce nombre par $6 \times 12 \times 12$ ou 864, ce qui nous donnera 443 l. 296. Divisons 12,958 par 443.296

$$\begin{array}{l|l} 12958000 & 443296 \\ \hline 4092080 & 29.23 \\ \ \ 1024160 & \\ \ \ \ \ 1375680 & \end{array}$$

On a pour quotient 29.23.

14 t. 5 pi. 10 po. 11 l. valent donc 29 mètres 23 centimètres.

16. Pour éviter les calculs que nécessite chaque opération, on a construit des tables pour la conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement. Nous ne donnerons que les tables relatives aux mesures de longueur et de superficie.

PREMIÈRE TABLE,

Pour réduire les lignes, pouces, pieds et toises, en mètres et fractions du mètre.

Lign.	Mètres.	Pouc.	Mètres.	Pieds.	Mètres.	Tois.	Mètres.
1	0.0022	1	0.0270	1	0.3248	1	1.9490
2	0.0045	2	0.0541	2	0.6496	2	3.8980
3	0.0067	3	0.0812	3	0.9745	3	5.8471
4	0.0090	4	0.1082	4	1.2993	4	7.7961
5	0.0112	5	0.1353	5	1.6242	5	9.7452
6	0.0135	6	0.1624	6	1.9490	6	11.6942
7	0.0157	7	0.1895	7	2.2738	7	13.6433
8	0.0180	8	0.2165	8	2.5987	8	15.5923
9	0.0203	9	0.2436	9	2.9235	9	17.5413
10	0.0225	10	0.2707	10	3.2484	10	19.4903
11	0.0247	11	0.2977	11	3.5732	11	21.4393
12	0.0270	12	0.3248	12	3.8981	12	23.3883

DEUXIÈME TABLE,

Pour réduire les mètres en lignes, pouces, pieds et toises.

Mètr.	Lignes.	Mètr.	Pouces.	Mètr.	Pieds.	Mètr.	Toises.
1	443.296	1	36.9413	1	3.0784	1	0.5130
2	886.592	2	73.8827	2	6.1568	2	1.0261
3	1329.888	3	110.8240	3	9.2353	3	1.5393
4	1773.184	4	147.7653	4	12.3137	4	2.0525
5	2216.480	5	184.7067	5	15.3922	5	2.5653
6	2659.775	6	221.6480	6	18.4706	6	3.0784
7	3103.072	7	258.5893	7	21.5491	7	3.5915
8	3546.367	8	295.5306	8	24.6275	8	4.1045
9	3989.663	9	352.4720	9	27.7060	9	4.6176
10	4432.959	10	369.4133	10	30.7844	10	5.1307

TROISIÈME TABLE,

Pour réduire les lieues terrestres en kilomètres, et les kilomètres en lieues terrestres.

Lieues terr.	Kilomètres.	Kilomètres.	Lieues terr.
1	4.4444	1	0.225
2	8.8889	2	0.450
3	13.3333	3	0.675
4	17.7778	4	0.900
5	22.2222	5	1.125
6	26.6667	6	1.350
7	31.1111	7	1.575
8	35.5556	8	1.800
9	40.0000	9	2.025
10	44·4444	10	2.250

QUATRIÈME TABLE,

Pour réduire les lignes, pouces, pieds et toises carrés, en mètres carrés et fractions du mètre carré.

Lign. carr.	Mètres carrés.	Pouc. car.	Mètres carrés.	Pieds carr.	Mètres carrés.	Toises car.	Mètres carrés.
1	0.0000050	1	0.0007327	1	0.105521	1	3.798744
2	0.0000101	2	0.0014655	2	0.211041	2	7.597487
3	0.0000152	3	0.0021983	3	0.316562	3	11.396231
4	0.0000203	4	0.4029311	4	0.922083	4	15.194976
5	0.0000254	5	0.0036639	5	0.527604	5	18.993718
6	0.0000305	6	9.0043966	6	0.633124	6	22.792462
7	0.0000356	7	0.0051294	7	0.738645	7	26.591205
8	0.0000407	8	0.0058622	8	0.844166	8	30.389949
9	0.0000458	9	0.0065950	9	0.949686	9	34.188693
10	0.0000508	10	0.0073278	10	1.055207	10	37.987436
11	0.0000558	11	0·0080605	11	1.160728	11	41.786179
12	0.0000609	12	0.0087932	12	1.266249	12	45.584923

CINQUIÈME TABLE,

Pour réduire les mètres carrés et les fractions du mètre carré en lignes, pouces, pieds et toises carrés.

Mèt. car.	Lignes carrées.	Mèt. car.	Pouces carrés.	Mèt. car.	Pieds carrés.	Mèt. car.	Toises carrées.
1	196511	1	1364.66	1	9.47682	1	0.263245
2	393023	2	2729.32	2	18.95363	2	0.526490
3	589534	3	4093.99	3	28.43045	3	0.789735
4	786045	4	5458.63	4	37.90726	4	1.052980
5	982557	5	6823.31	5	47.38408	5	1.316223
6	1179068	6	8187.97	6	56.86090	6	1.579469
7	1375579	7	9552.63	7	66.33771	7	1.842714
8	1572090	8	10917.30	8	75.81453	8	2.105959
9	1768602	9	12281.96	9	85.29134	9	2.369204
10	1965113	10	13646.62	10	94.76816	10	2.632449

SIXIÈME TABLE,

Pour réduire les lignes, pouces, pieds et toises cubes en mètres cubes et fractions du mètre cube.

Lign. cub.	Mètres cubes.	Pouc. cub.	Mètres cubes.	Pieds cub.	Mètres cubes.	Tois. cub.	Mètres cubes
1	0.00000001148	1	0.000019836	1	0.0342773	1	7.40389
2	0.00000002296	2	0.000039673	2	0.0685545	2	14.80778
3	0.00000003444	3	0.000059509	3	0.1028318	3	22.21167
4	0.00000004592	4	0.000079346	4	0.1371090	4	29.61556
5	0.00000005740	3	0.000099182	5	0.1713863	5	37.01945
6	0.00000006888	6	0.000119018	6	0.2056636	6	44.42334
7	0.00000008036	7	0.000138855	7	0.2399408	7	51.82723
8	0.00000009184	8	0.000158691	8	0.2742181	8	59.23112
9	0.00000010332	9	0.000178528	9	9.3084953	9	66.63501
10	0.00000011480	10	0.000198364	10	0.3427726	10	74.03890

SEPTIÈME TABLE,

Pour réduire les mètres cubes et les fractions de mètre cube en toises, pieds, pouces et lignes cubes.

Mètr. cub.	Lignes cubes.	Mètr. cub.	Pouces cubes.	Mètr. cub.	Pieds cubes.	Mètr. cub.	Toises cubes.
1	87112655	1	50412.42	1	29.1739	1	0.135064
2	174225310	2	100824.83	2	58.3477	2	0.270128
3	261337965	3	151237.25	3	87.5216	3	0.405192
4	348450619	4	201649.66	4	116.6954	4	0.542057
5	435563274	5	252062.08	5	145.8693	5	0.675321
6	522675929	6	302474.50	6	175.0431	6	0.810385
7	609788584	7	352886,94	7	204.2170	7	0.945449
8	696901239	8	403299.33	8	233.3908	8	1.080513
9	784013894	9	453711.74	9	262.5647	9	1.215577
10	871126540	10	504124·16	10	291.7385	10	1.350641

HUITIÈME TABLE,

Pour réduire les hectares et ares en arpents et perches de 18 pieds.

Cet arpent était l'arpent de Paris ; la perche carrée valait $18 \times 18 = 324$ pieds carrés.

Hect.	Arpents.	Ares.	Arpents.	Centia	Arpents.
1	2.9249	1	0.0292	1	0.00029
2	5.8498	2	0.0584	2	0.00058
3	8.7748	3	0.0877	3	0.00087
4	11.6997	4	0.1169	4	0.00116
5	14.6248	5	0.1462	5	0.C0146
6	17.5496	6	0.1754	6	0.00175
7	20.4747	7	0.2047	7	0.00204
8	23.3995	8	0.2339	8	0.00233
9	26.3244	9	0.2632	9	0.00263
10	29.2494	10	0.2924	10	0.00292

NEUVIÈME TABLE,

Pour réduire les hectares et ares en arpents et perches de 20 pieds.

La perche carrée vaut $20 \times 20 = 400$ pieds carrés.

Hect.	Arpents.	Ares.	Arpents.	Centia.	Arpents.
1	2.3692	1	0.02369	1	0.00023
2	4.7384	2	0.04738	2	0.00047
3	7.1076	3	0.07108	3	0.00071
4	9.4768	4	0.09476	4	0 00094
5	11.8460	5	0.11846	5	0.00118
6	14.2152	6	0.14215	6	0.00142
7	16.5844	7	0.16584	7	0.00165
8	18.9536	8	0.18953	8	0.00189
9	21.3228	9	0.21322	9	0.00213
10	23.6926	10	0.23692	10	0.00236

DIXIÈME TABLE,

Pour réduire les hectares et ares en arpents et perches de 22 pieds.

La perche carrée vaut 22 × 22 = 484 pieds carrés.

Hect.	Arpents.	Ares.	Arpents.	Centia.	Arpents.
1	1.9580	1	0.01958	1	0.00019
2	3.9160	2	0.03916	2	0.00039
3	5.8740	3	0.05874	3	0.00058
4	7.8320	4	0.07832	4	0.00078
5	9.7900	5	0.09790	5	0.00097
6	11.7480	6	0.11748	6	0.00117
7	13.7060	7	0.13706	7	0.00137
8	15.6640	8	0.15664	8	0.00156
9	17.6220	9	0.17622	9	0.00176
10	19.5800	10	0.19580	10	0.00195

ONZIÈME TABLE,

Pour réduire les hectares et ares en arpents et perches de 24 pieds.

La perche carrée vaut 24 × 24 = 576 pieds carrés.

Hect.	Arpents.	Ares.	Arpents.	Centia.	Arpents.
1	1.6452	1	0.01645	1	0.00016
2	3.2904	2	0.03290	2	0.00032
3	4.9356	3	0.04935	3	0.00049
4	6.5808	4	0.06580	4	0.00065
5	8.2260	5	0.08226	5	0.00082
6	9.8712	6	0.09874	6	0.00098
7	11.5164	7	0.11516	7	0.00115
8	13.1616	8	0.13161	8	0.00131
9	14.8068	9	0.14806	9	0.00148
10	16.4520	10	0.16452	10	9.00164

DOUZIÈME TABLE,

Pour réduire les arpents et perches de 18 pieds en hectares, ares et centiares.

Arpents	Hectares	Arpents	Ares.	Arpents	Centiares.
1	0.34188	1	34.18868	1	3418.868
2	0.68376	2	68.37736	2	6837.736
3	1.02564	3	102.56604	3	10256.604
4	1.36752	4	136.75472	4	13675.472
5	1.70940	5	170.94340	5	17094.340
6	2.05128	6	205.13208	6	20513.208
7	2.39316	7	239.32076	7	23932.076
8	2.73504	8	273.50944	8	27350.944
9	3.07692	9	307.69812	9	30769.812
10	3.41880	10	341.88680	10	34188.680

TREIZIÈME TABLE,

Pour réduire les arpents et perches de 20 pieds en hectares, ares et centiares.

Arpents	Hectares	Arpents	Ares.	Arpents	Centiares.
1	0.42208	1	42.20825	1	4220.825
2	0.84416	2	84.41650	2	8441.650
3	1.26624	3	126.62475	3	12662.475
4	1.68832	4	168.83300	4	16883.300
5	2.11040	5	211.04125	5	21104.125
6	2.53248	6	253.24950	6	25324.950
7	2.95456	7	295.45775	7	29545.775
8	3.37664	8	337.66600	8	33766.600
9	3.79872	9	379.87425	9	37987.425
10	4.22082	10	422.08250	10	42208.250

QUATORZIÈME TABLE,

Pour réduire les arpents et perches de 22 pieds en hectares, ares et centiares.

Arpent^s	Hectares.	Arpent^s	Ares.	Arpents	Centiares.
1	0.51071	1	51.07198	1	5107.198
2	1.02143	2	102.14396	2	10214.396
3	1.53215	3	153.21594	3	15321.594
4	2.04286	4	204.28792	4	20428.792
5	2.55359	5	255.35990	5	25535.990
6	3.06431	6	306.43188	6	30643.188
7	3.57503	7	357.50386	7	35750.386
8	4.08575	8	408.57584	8	40857.584
9	4.59647	9	459.64782	9	45964.782
10	5.10719	10	510.71980	10	51071.980

QUINZIÈME TABLE,

Pour réduire les arpents et perches de 24 pieds en hectares, ares et centiares.

Arpent^s	Hectares.	Arpent^s	Ares.	Arpent^s	Centiares.
1	0.60779	1	60.77988	1	6077.988
2	1.21558	2	121.55976	2	12155,976
3	1.82339	3	182.33964	3	18233,964
4	2.43119	4	243.11952	4	24311.952
5	3.03899	5	303.89940	5	30389.940
6	3.64679	6	364.67928	6	36467.928
7	4.25459	7	425.45906	7	42545.916
8	4.86239	8	486.23904	8	48623.904
9	5.47018	9	547.01892	9	54701,892
10	6.07798	10	607.79880	10	60779.880

MANIÈRE DE SE SERVIR DES TABLES.

Premier exemple.

17. On sait qu'une terrasse a été évaluée sur un ancien plan à 23 t. 4 p. 10 po. 11 l. de longueur. On demande ce qu'elle aurait de longueur en mètres et subdivisions du mètre.

Je prends la première table et j'y cherche 2 toises : je trouve 3.8980.

Pour 20 toises, j'aurai donc	38^m	980
Pour 3 toises,	5	8471
Pour 4 pieds,	1	2993
Pour 10 pouces,	0	2707
Pour 11 lignes,	0	0247
	46^m	4218

La longueur de la terrasse est de 46^m 42.

Pour des longueurs un peu considérables, les centimètres suffisent ; on n'emploie les millimètres que pour mesurer une petite étendue.

Deuxième exemple.

Soit à convertir 937 arpents 43 perches de 24 pieds, en hectares, ares et centiares.

Nous commençons par réduire 43 perches en fractions décimales d'arpents. Puisque l'arpent contient 100 perches carrées, 937 arpents et 43 perches peuvent s'exprimer par 937 arpents 43 centièmes.

La réduction s'opèrera au moyen de la 15^e table, où la perche a 24 pieds.

937 se décompose en

	900
	30
	7

Pour 900, je cherche 9 que je multiplie par 100, en avançant le point de deux rangs vers la droite.

Pour 900,	547 h.	0180
Pour 30,	18	2339
Pour 7,	4	2546
Pour 4 dixièmes,	0	2431
Pour 3 centièmes,	0	0182
	569 h.	7678

Ainsi donc, 937 arpents 43 perches de 24 pieds valent 569 hectares 76 ares 78 centiares.

Troisième exemple.

Un bien contient 7 setiers et 56 perches; on demande quelle est sa contenance en nouvelles mesures.

Supposons que le setier contienne 80 perches carrées, à 22 pieds la perche; voici la marche à suivre:

On réduit les perches en fractions décimales de setier. Puisqu'il y a 80 perches dans le setier, la perche est le 1/80 du setier : 56 perches seront les 56/80 du setier. Il ne s'agit plus que de réduire 56/80 en décimales (7).

$$\begin{array}{r|l} 560 & 80 \\ \hline & 0.7 \end{array}$$

7 setiers et 56 perches sont donc la même chose que 7 setiers 7 dixièmes.

Il faut encore réduire les setiers en arpents.

Le setier contient 80 perches carrées; l'arpent contient 100 perches carrées : le setier est donc à l'arpent comme le carré de 80 est au carré de 100; c'est-à-dire comme 80×80 est à 100×100.

J'établirai donc cette proportion :

$$100 \times 100 : 80 \times 80 :: 7.7 : x.$$

$$10000 : 6400 :: 7.7 : x = \frac{7.7 \times 64}{100} = 4 \text{ arp. } 93.$$

Je cherche dans la 14ᵉ table, et je trouve :

Pour 4 arpents,	2 h.	0428
Pour 9 dixièmes,	0	4596
Pour 3 centièmes,	0	0153
	2 h.	5177

Donc 7 setiers 56 perches valent 2 hectares 51 ares 77 centiares.

Dans la table on ne trouve pas 9 dixièmes, mais on trouve pour 9 arpents 4 h. 59647; on en prend le dixième en reculant le point d'un rang vers la gauche, ce qui donne 0 h. 4596. Pour 3 centièmes, on cherche dans la table 3 arpents, et l'on trouve 1 h. 53215, dont on prend le centième en reculant le point de 2 chiffres; ce qui donne 0 h. 0153.

Quatrième exemple.

Convertir 231 hectares 13 ares 29 centiares en arpents et perches de 18 pieds.

Je cherche dans la 8ᵉ table, qui se rapporte à la question, puisque l'arpent est divisé en perches de 18 pieds.

Pour 200 hectares, je trouve	584 arp	98
Pour 30,	87	748
Pour 1,	2	9249
Pour 10 ares,	0	2924
Pour 3 ares,	0	0877
Pour 20 centiares,	0	0058
Pour 9 centiares,	0	00263
	676 arp	04143

Ainsi, 231 hectares 13 ares 29 centiares valent 676 arpents 4 perches et 1/10 environ, à 18 pieds la perche.

Nous n'en dirons pas davantage sur l'emploi des tables; les quatre exemples ci-dessus développés sont suffisants.

PREMIÈRE PARTIE.

—

ARPENTAGE.

CHAPITRE PREMIER.

18. L'ARPENTAGE est l'art de mesurer la superficie d'un terrain.

Mais comme cette mesure ne laisse aucune trace, on représente en petit, sur le papier, la forme du terrain, en imitant les détails, et en conservant les proportions de l'ensemble : c'est ce qu'on appelle LA LEVÉE des plans.

Pour distinguer sur un plan les différentes espèces de terres ou de cultures, on donne à chaque objet une teinte conventionnelle qui fait connaître tout de suite que c'est un bois, ou une vigne, ou un pré, ou un marais, ou un champ labouré, etc. : c'est ce qu'on appelle LE LAVIS DES PLANS.

Nous traiterons successivement *de l'arpentage*, *de la levée des plans* et *du lavis des plans*.

L'arpentage est une portion essentielle de l'instruction primaire : les instituteurs communaux seraient coupables s'ils négligeaient cet enseignement. Espérons qu'un jour les habitants des campagnes sauront tous lire, écrire, calculer et arpenter; c'est vers ce résultat que les amis de l'instruction primaire doivent diriger leurs communs efforts.

Pour 200 hectares, je trouve	584 ^{arp}	98
Pour 30,	87	748
Pour 1,	2	9249
Pour 10 ares,	0	2924
Pour 3 ares,	0	0877
Pour 20 centiares,	0	0058
Pour 9 centiares,	0	00263
	676 ^{arp}	04143

Ainsi, 231 hectares 13 ares 29 centiares valent 676 arpents 4 perches et 1/10 environ, à 18 pieds la perche.

Nous n'en dirons pas davantage sur l'emploi des tables; les quatre exemples ci-dessus développés sont suffisants.

PREMIÈRE PARTIE.

—

ARPENTAGE.

CHAPITRE PREMIER.

18. L'ARPENTAGE est l'art de mesurer la superficie d'un terrain.

Mais comme cette mesure ne laisse aucune trace, on représente en petit, sur le papier, la forme du terrain, en imitant les détails, et en conservant les proportions de l'ensemble : c'est ce qu'on appelle LA LEVÉE des plans.

Pour distinguer sur un plan les différentes espèces de terres ou de cultures, on donne à chaque objet une teinte conventionnelle qui fait connaître tout de suite que c'est un bois, ou une vigne, ou un pré, ou un marais, ou un champ labouré, etc. : c'est ce qu'on appelle LE LAVIS DES PLANS.

Nous traiterons successivement *de l'arpentage*, *de la levée des plans* et *du lavis des plans*.

L'arpentage est une portion essentielle de l'instruction primaire : les instituteurs communaux seraient coupables s'ils négligeaient cet enseignement. Espérons qu'un jour les habitants des campagnes sauront tous lire, écrire, calculer et arpenter; c'est vers ce résultat que les amis de l'instruction primaire doivent diriger leurs communs efforts.

La levée des plans est très utile, puisqu'elle constate d'une manière durable les résultats fugitifs de l'arpentage proprement dit. Elle suppose quelques connaissances du dessin linéaire (1).

La levée des plans est principalement réservée aux écoles des villes.

Le lavis des plans exprime, par des teintes plates et des couleurs conventionnelles, la nature des terres. Le lavis est très utile, puisqu'un plan qui n'est pas lavé n'est réellement qu'une ébauche. Cependant les instituteurs communaux ne sont pas obligés de l'enseigner.

Le lavis ne doit être l'objet d'une étude spéciale que dans les écoles normales primaires.

Avant de nous occuper de la mesure des terres, nous allons présenter quelques éléments de géométrie, sans lesquels il serait impossible de comprendre les opérations de l'arpentage.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE.

19. La géométrie est la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions : *longueur, largeur* et *épaisseur.*

Dans l'arpentage, on ne s'occupe que de la mesure *des surfaces*, c'est-à-dire d'une étendue qui a deux dimensions, longueur et largeur.

20. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

Deux points suffisent pour déterminer une ligne

(1) *Cours méthodique de dessin linéaire*, applicable à tous les modes d'enseignement, ouvrage destiné aux colléges, aux pensions et aux écoles primaires ; par M. L. Lamotte ; livre adopté par le conseil royal de l'Université, 4e édition.

droite. Soit A et B deux points en ligne droite, ces deux points suffisent pour déterminer le prolongement à l'infini de la droite AB (*fig.* 1).

21. Deux lignes ne peuvent se couper qu'en un point : l'écartement de ces deux lignes s'appelle *angle ;* le point où elles se rencontrent se nomme *sommet.* ABC (*fig.* 2) est un angle ; B en est le sommet ; AB et BC en sont les côtés. La grandeur d'un angle est indépendante de la longueur des côtés.

22. Lorsqu'une droite, tombant sur une autre, forme à droite et à gauche deux angles égaux, les deux lignes sont dites *perpendiculaires entre elles ;* les deux angles égaux formés par la perpendiculaire sont nommés *angles droits.* ABC et CBD (*fig.* 3) sont des angles droits et égaux ; CB est une perpendiculaire, et AD une horizontale ou ligne de niveau.

23. Une oblique est une droite qui n'est pas perpendiculaire ; alors les deux angles de suite qu'elle fait avec la ligne qu'elle rencontre sont inégaux, mais valent ensemble deux angles droits.

Soit l'oblique AB (*fig.* 4) : l'angle CAB, plus grand qu'un droit, est un *angle obtus ;* l'angle BAD, plus petit qu'un droit, est un *angle aigu ;* ces deux angles réunis valent deux droits, car ils occupent autant d'espace que les deux angles droits CAE, EAD.

24. Deux angles, tels que CAB et BAD (*fig.* 4), qui, situés du même côté d'une droite, valent toujours ensemble deux angles droits, sont appelés *suppléments* l'un de l'autre.

25. Deux angles, tels que EAB et BAD (*fig.* 4), qui valent ensemble un angle droit, sont appelés *compléments* l'un de l'autre.

26. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles conservent dans toute leur étendue le même écartement ou la même distance : telles sont les droites AB et CD (*fig.* 5).

27. On appelle *circonférence* (*fig.* 6) une ligne courbe dont tous les points situés dans un même plan sont également éloignés du point qui est au milieu et dans le même plan, et qu'on nomme centre. Ainsi, CDB est la *circonférence*; le point A est le *centre*; les lignes égales AC, AD, AB, sont des *rayons*; la ligne CB, qui passe par le centre, et dont les extrémités se terminent à la circonférence, est un *diamètre*. L'espace renfermé par la circonférence est le *cercle*.

28. Toute circonférence, grande ou petite, est divisée en 400 parties égales, appelées grades; le quart d'une circonférence, que l'on nomme *quadrant*, renferme par conséquent 100 grades; chaque grade est divisée en 100 minutes, chaque minute en 100 secondes, chaque seconde en 100 tierces. Dans la pratique, les minutes et les secondes suffisent.

On divise encore toute circonférence, grande ou petite, en 360 degrés, chaque degré en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes.

On appelle arc de cercle une partie de la circonférence, telle que CD et DB (*fig.* 6).

29. Si dans un cercle les deux diamètres sont perpendiculaires l'un sur l'autre (*fig.* 7), les angles AOC, COB, BOD, DOA, sont tous droits; chacun d'eux occupe le quart du cercle, et par conséquent répond à un arc de 100 grades ou de 90 degrés dans l'ancien système. Tous les angles droits sont de 100 grades ou de 90 degrés.

30. *Deux angles supplément l'un de l'autre* (24) *valent ensemble deux angles droits*, c'est-à-dire 200 grades ou 180 degrés. Connaissant un angle de 120 grades, je connais son supplément 80 grades en retranchant 120 grades de 200 grades.

31. *Deux angles compléments l'un de l'autre* (25) *valent ensemble un droit*, c'est-à-dire 100 grades ou 90 degrés. Connaissant un angle de 65 grades, je connais son complément 35 grades en retranchant 65 grades de 100 grades.

32. Lorsque deux droites se coupent (*fig.* 8), les angles opposés par le sommet sont égaux. Si les droites AB et CD se coupent au point E, les angles AEC, BED, *opposés par le sommet*, *sont égaux*, car les deux angles CEA, AED, valent ensemble deux droits (23); les deux angles de suite AED, DEB, valent aussi deux droits : donc ces deux sommes sont égales. Si l'on retranche de part et d'autre AED, quantité commune, il restera AEC, égal à BED. Il en serait de même pour AED et CEB, et pour tous les angles opposés par le sommet.

Problèmes sur les lignes et les angles.

33. *Sur une droite donnée, élever une perpendiculaire à un point donné* (*fig.* 9).

Pour élever une perpendiculaire au point C de la droite AB, prenez avec une même ouverture de compas deux distances égales, CA et CB; puis des points A et B, avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB (1), tracez deux arcs de

(1) Nous disons que l'ouverture du compas doit être plus grande que la moitié de AB : en effet, si l'ouverture du compas était égale à AC, les deux arcs de cercle se confondraient au point C; si l'ouverture du compas était plus petite que AC, les deux arcs de cercle ne pourraient se rencontrer.

cercle qui se couperont en D. Tirez DC ; c'est la perpendiculaire demandée.

34. *A l'extrémité d'une droite donnée, élever une perpendiculaire* (*fig.* 10).

Prolongez la base DA jusqu'en C ; du point A, et avec une même ouverture de compas, déterminez deux points à volonté, D et C, également distants du point A. Des points D et C comme centre, et avec une ouverture de compas plus grande que DA, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent en E. La ligne EA est la perpendiculaire demandée.

35. *A l'extrémité d'une droite qui ne peut être prolongée, élever une perpendiculaire* (*fig.* 11).

Supposons la ligne AB, à l'extrémité A de laquelle on veut élever une perpendiculaire. Choisissez un point O à volonté. De ce point, comme centre, et avec un rayon égal à OA, décrivez un grand arc de cercle qui coupera la droite AB en C. Tirez la droite CO, que vous prolongerez jusqu'à la rencontre de l'arc de cercle en D; il ne reste plus qu'à tirer DA : c'est la perpendiculaire demandée.

36. *D'un point pris hors d'une droite, abaisser une perpendiculaire sur cette droite* (*fig.* 12).

Du point A d'où l'on veut abaisser la perpendiculaire, et avec une ouverture de compas plus grande que la distance de A à la droite BC, décrivez l'arc DE. Des points D et E, avec une même ouverture de compas, tracez deux arcs de cercle qui se couperont en F. Tirez AF : c'est la perpendiculaire demandée.

37. *Faire au point* D *de la droite* DE *un angle égal à l'angle* BAC (*fig.* 13).

Du point A, et avec une ouverture quelconque de compas, tracez l'arc GH. Portez la même ouverture de compas au point D pris comme centre, et tracez l'arc indéfini IK ; mesurez au compas la corde GH, portez cette distance de I en L ; il ne reste plus qu'à joindre D et L : l'angle EDF est égal à l'angle BAC.

38. *Mener une parallèle à une ligne donnée* AB (*fig.* 14).

Au point A de la ligne AB menez une oblique AC; prenez sur cette ligne un point D, à la distance où l'on veut mener la parallèle. Au point D faites un angle égal à l'angle BAD (37), ce qui détermine le point E. La ligne DE est la parallèle demandée.

Voici encore une autre construction : Au point A de la ligne AB (*fig.* 15), élevez une perpendiculaire AC (34 ou 35), sur D élevez une seconde perpendiculaire DE : DE est parallèle à AB.

Polygones.

39. On appelle *polygone* une figure plane terminée par des droites. Les polygones sont distingués entre eux par le nombre de leurs côtés. Un polygone ne peut avoir moins de trois côtés, mais il peut en avoir un nombre infini. il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un espace. On nomme *triangle* l'espace ainsi renfermé. Les figures à quatre côtés sont appelées *quadrilatères*. Un polygone à cinq côtés est un *pentagone*; à six côtés, un *hexagone*; à sept, un *heptagone*: à huit, un *octogone*; à dix, un *décagone*; à douze, un *dodécagone*. Les autres polygones s'indiquent ordinairement par le nombre des côtés : ainsi l'on dit *un polygone à quatorze*, *à seize*, *à dix-sept côtés*, etc.

Un *polygone régulier* est celui dont les angles et les côtés sont égaux.

40. La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois deux droits ou 180 degrés qu'il y a de côtés moins deux. Cette proposition n'est vraie que lorsque les angles sont *saillants*. Lorsqu'il y a des angles *rentrants*, il faut augmenter cette somme.

Soit le polygone ABFCDE (*fig.* 16) : les angles B,A,E,D,C, sont des angles saillants, l'angle F est un angle rentrant.

L'angle intérieur F vaut quatre angles droits, moins l'angle extérieur BFC.

Rien n'est plus facile que de calculer la valeur des angles appartenant aux polygones réguliers.

Supposons un décagone régulier : le nombre des côtés est de 10 ; si nous retranchons 2, nous aurons 10 — 2, ou 8, qui, multiplié par 2, donne 16 angles droits pour les 10 angles : donc chaque angle vaut 16/10 d'angle droit, ou un angle droit et 3/5 d'angle droit.

Si le décagone était irrégulier, la somme des angles intérieurs serait toujours de 16 angles droits ; mais de cette somme on ne pourrait pas conclure la valeur de l'un d'eux séparément, puisqu'ils sont inégaux ; il faudrait les mesurer avec un rapporteur.

41. Parmi les quadrilatères on distingue le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits (*fig.* 17) ; le *parallélogramme*, qui a ses côtés parallèles et égaux deux à deux, sans avoir les angles droits (*fig.* 18) ; le *rectangle*, vulgairement nommé *carré long* (*fig.* 19), qui a ses angles droits et ses côtés opposés égaux ; le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 20).

Des triangles.

42. Le triangle est le plus simple des polygones : c'est l'espace renfermé entre trois droites qui se coupent deux à deux.

Il y a plusieurs espèces de triangles. 1° Le *triangle rectangle*, qui a un angle droit (aucun triangle rectiligne, ou formé par des droites, ne peut avoir plus d'un angle droit) (*fig.* 21). 2° Le *triangle obtusangle*, qui a un angle obtus (aucun triangle rectiligne ne peut avoir plus d'un angle obtus) (*fig.* 22). 3° Le *triangle acutangle*, qui a ses trois angles aigus (*fig.* 23). 4° Le *triangle équilatéral*, qui a ses trois côtés égaux (*fig.* 24). 5° Le *triangle isoscèle*, qui a deux côtés égaux (*fig.* 25) ; et le *triangle scalène*, qui a ses trois côtés inégaux (*fig.* 26).

43. La somme des trois angles d'un triangle vaut deux droits (200 grades ou 180 degrés), d'où l'on voit qu'il suffit de connaître dans un triangle deux angles pour les connaître tous. En effet, soit un triangle dans lequel on connaît un angle égal à 80 grades, et un autre à 70 ; la somme sera de 80 + 70 ou 150 ; retranchant cette somme de 200 grades, mesure de deux angles droits, on aura pour reste 50 grades : c'est la mesure du troisième angle.

CHAPITRE SECOND.

MESURE DES SURFACES.

44. *Mesurer une surface*, c'est chercher combien de fois elle contient une autre surface prise pour unité. Dans l'arpentage, on a choisi pour cette unité de surface le carré métrique, dont chaque côté a un décamètre, et que l'on nomme *are* (11). Quand on mesure des surfaces autres que les terrains, on se sert du mètre carré, du décimètre carré et du centimètre carré.

L'are a 10 mètres sur chaque côté et par conséquent 100 mètres carrés de surface.

Si l'on veut mesurer la surface du rectangle ABCD (*fig.* 27), il faut porter le décamètre carré sur la base AB autant de fois qu'il peut y être contenu. Supposons qu'il y soit contenu six fois, il y aura six carrés sur la base AB, comme on le voit à la fig. 27; puisque tout l'espace ABCD n'est pas rempli, on formera sur la hauteur AC autant de rangées de six carrés qu'elle pourra en contenir; supposons qu'il y ait 4 rangées de six carrés, on voit facilement que la figure renfermera 4 fois 6 ares, ou 24 ares. Mais, dans la fig. 27, AB, que l'on appelle *base* du rectangle, contient 6 décamètres; AC, qui est la *hauteur*, en contient 4: il suffit donc de multiplier 6 par 4, ou la base par la hauteur, pour avoir la superficie du rectangle: d'où l'on tire cette règle générale, *que la surface d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Appelant B la base et H la hauteur, $B \times H$ exprimera la surface d'un rectangle quelconque. $B \times H$ est ce qu'on appelle une *formule*, c'est-à-dire une expression générale qui s'applique à tous les cas particuliers.

45. Ordinairement les côtés d'un rectangle ne contiennent pas seulement des mètres, mais des fractions du mètre, le calcul est le même.

Exemple: Soit le côté AB (*fig.* 27), de 7 décamètres plus un reste égal à 4 mètres 5 décimètres et 8 centimètres; soit le côté AC, de 4 décamètres plus un reste de 3 mètres 4 déc. 2 centim.

On multipliera, d'après la formule $B \times H$, 7.458 par 4.342.

```
          7.458
           4.342
         -------
          14 916
         298 32
       2 237 4
      29 832
      ----------
Produit  32.382636
```

On sépare 6 décimales sur la droite du produit (4), et l'on obtient 32 ares 38 centiares pour la mesure du rectangle.

La fraction 2636, dont les deux premiers chiffres 26 représentent des décimètres carrés, et dont les deux derniers 36 représentent des centimètres carrés, est négligée dans cette évaluation. S'il s'agissait d'une petite surface, de celle d'une classe, d'une chambre, il faudrait tenir compte des décimètres carrés; on tiendrait même compte des centimètres carrés si l'on avait à mesurer une surface très petite, telle que la surface d'un tableau noir ou d'une carte géographique.

Premier exemple.

Si H=237^{m}15 et B=429^{m}34,

```
            429.34
            237.15
           --------
            214670
            42934
          300538
         128802
         85868
        -----------
Produit  101817.9810
```

La surface sera de 101817 mètres carrés, 98 décimètres carrés, 10 centimètres carrés, ou de 10 hectares 18 ares 17 centiares.

Deuxième exemple.

Si $H=7^m\ 25$ et $B=4^m\ 35$,

$$\begin{array}{lr}
 & 7.25 \\
 & 4.35 \\
\hline
 & 3625 \\
 & 2175 \\
 & 2900 \\
\hline
\text{Produit} & 31.5375
\end{array}$$

La surface est de 31 mètres carrés, 53 décimètres carrés, 75 centimètres carrés.

46. De la mesure des rectangles on passe facilement à celle des triangles. Soit, en effet, le rectangle ABCD (*fig.* 28); menez la ligne AD pour joindre les sommets des deux angles opposés; cette ligne se nomme *diagonale.*

Le rectangle est ainsi partagé en deux triangles rectangles égaux; or, puisque le rectangle a pour mesure le produit de la base par la hauteur, *le triangle rectangle, qui en est la moitié, aura pour mesure la moitié du produit de la base par la hauteur.* Ainsi, par exemple, si AB contient 25m. 15, et AC 14 m. 23, il suffira de multiplier 25.15 par 14.23 et de prendre la moitié du produit: le facteur 25.15 multiplié par 14.23 donne 357 ares 88 cent., dont la moitié est 178 ares 94 cent., mesure du triangle rectangle ABD et du triangle rectangle ACD.

47. Un triangle quelconque ABC peut toujours

être ramené à deux triangles rectangles en abaissant du sommet une perpendiculaire sur la base (*fig.* 29) ou sur son prolongement (*fig.* 30).

Le triangle rectangle CDB (*fig.* 29) a pour mesure (46) DB multiplié par la moitié de DC; mais le triangle rectangle ADC a pour mesure AD multiplié par la moitié de DC: donc le triangle total ACB, composé des deux triangles restangles ADC, DBC, aura pour mesure AD plus DB ou AB multiplié par la moitié de DC. Mais AD se nomme la base et DC la hauteur: donc *la mesure d'un triangle quelconque est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.*

Dans le triangle ABC de la fig 30, on retranche le triangle DAC du triangle rectangle total DCB; on obtient absolument le même résultat que celui indiqué par la fig. 29.

Appelons B la base et H la hauteur: $1/2\,(B+H)$ est l'espression ou la formule de la mesure d'un triangle quelconque.

Exemple.

Si $H=7^m\ 65$ et $B=9^m\ 40$,

$$\begin{array}{lr}
 & 7.65 \\
 & 9.40 \\
\hline
 & 3060 \\
 & 6885 \\
\hline
\text{Produit} & 71.9100 \\
\text{La moitié} & 35.9550
\end{array}$$

La mesure du triangle est de 35 mètres carrés, 95 décimètres carrés, 50 centimètres carrés.

48. Des triangles on passe aux parallélogrammes, *dont la surface est égale au produit de la base par la hauteur.*

Soit le parallélogramme ABDC (*fig.* 31) : je tire la diagonale AD, qui le divise en deux triangles égaux ABD et ACD ; or, le premier ABD est mesuré par AB qui multiplie la moitié de DE (DE est la hauteur ou la distance des deux côtés AB et CD) : donc le parallélogramme, qui est le double du triangle ABD, aura pour mesure AB multiplié par DE, ou le produit de la base par la hauteur.

49. *La surface d'un trapèze est égale au produit de la somme des deux côtés parallèles par la moitié de leur distance perpendiculaire.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 32) : je tire la diagonale AD, qui le partage en deux triangles ABD, ACD ; le premier a pour mesure AB, qui multiplie la moitié de DE ; le second a pour mesure CD qui multiplie la moitié de DE : donc la mesure de la surface des deux triangles réunis ou du trapèze est la somme des deux côtés parallèles CD et AB, multipliée par la moitié de leur distance perpendiculaire DE.

Si AB contient 12 m. 25 et CD 9 m. 45, si la hauteur DE est de 6 m. 23, on ajoutera 12 m. 25 et 9 m. 45, ce qui donnera 21 m. 70 ; multipliant ce nombre par 6.23, et prenant la moitié du produit, on obtiendra pour la mesure du trapèze 67 m. carrés, 59 décimètres carrés, 50 centimètres carrés.

Appelant la base inférieure B, la base supérieure B', la hauteur H, $1/2$ H (B+B') sera l'expression de la mesure d'un trapèze quelconque. (La parenthèse B+B' indique que les deux quantités B et B' doivent être ajoutées avant d'être multipliées par H.)

Premier exemple.

Soit B=12^{m}.45, B'=10^{m}.60, et H=8^{m}.35.

$$\begin{array}{lr} & 12.45 \\ & 10.60 \\ \hline & 23.05 \\ & 8.35 \\ \hline & 11525 \\ & 6915 \\ & 18440 \\ \hline \text{Produit} & 192.4675 \\ \text{La moitié} & 96.2337 \end{array}$$

La surface du trapèze est donc de 96 mètres carrés, 23 décimètres carrés, 37 centimètres carrés.

Deuxième exemple.

Soit B = 9^{m}. 65, B'=7^{m}. 15, et H=10^{m}. 44.

La surface du trapèze sera de 87 mètres carrés, 69 décimètres carrés, 60 centimètres carrés.

Troisième exemple.

Soit B=27^{m}. 46, B'=23^{m}. 35, et H=19^{m}. 82.

La surface du trapèze est de 503 mètres carrés, 52 décimètres carrés, 71 centimètres carrés.

(Les élèves feront l'application de la formule indiquée ci-dessus : ils devront trouver les résultats donnés sans le détail du calcul.)

50. Tout polygone peut se diviser en triangles, et comme nous savons évaluer la mesure d'un triangle quelconque, il suffira d'ajouter tous les résultats partiels, pour obtenir la mesure de la surface du polygone. On emploie dans la pratique une autre méthode que nous ferons connaître (64).

51. Nous avons déjà parlé du *cercle* (27), de la *circonférence*, du *diamètre* et du *rayon*; mais il faut connaître le rapport de ces différentes parties entre elles pour arriver à la mesure de la surface du cercle.

La circonférence d'un cercle et son diamètre n'ont pas de commune mesure, on se contente d'une approximation.

Le rapport le plus ordinairement employé et que l'on attribue à Archimède est celui de 22 : 7, ou, ce qui est la même chose, 22/7, ou enfin 3 1/7, c'est-à-dire que la circonférence d'un cercle développée en ligne droite contient trois fois le diamètre plus 1/7 de ce diamètre.

Ce rapport n'est pas très exact; mais il a été adopté dans les arts et dans les états industriels à cause de son extrême simplicité.

En voici un autre beaucoup plus rigoureux et cependant assez facile : c'est le rapport attribué à Métius, 355 : 113, ou, ce qui est la même chose, $\frac{355}{113}$, ou enfin 3 16/113.

52. Le cercle peut être considéré comme un polygone d'un nombre infini de côtés, par conséquent pouvant être aussi divisé en un nombre infini de triangles; or, puisque la mesure d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur, la mesure de la surface du cercle sera la somme de toutes les bases, ou le contour du cercle, multiplié par la moitié de la hauteur des triangles, c'est-à-dire par la moitié du rayon : donc la *surface d'un cercle a pour mesure sa circonférence multipliée par la moitié du rayon*; ou, ce qui est plus court, ***la moitié du produit de la circonférence par le rayon.***

Supposons le rayon d'un cercle de 3 m. 08, on aura la circonférence au moyen de la proportion.

$$113 : 355 :: 6\text{ m. }16 : x = 19.35.$$

Multiplions la circonférence 19.35 par le diamètre 6.16 et prenons le quart du produit, nous aurons pour mesure de la surface du cercle 29 mètres carrés, 79 décimètres carrés, 90 centimètres carrés.

Appelant C la circonférence et R le rayon; 1/2 (R + C) est la formule de la surface d'un cercle quelconque.

Exemple.

Soit R = 4 m. 15, le diamètre sera de 8 m. 30.

Rapport de Métius, $113 : 355 :: 8.30 : x = 26.07$.

Rapport d'Archimède, $7 : 22 :: 8.30 : x = 26.08$.

	26.07	26.08
	4.15	4.15
	13035	13040
	2607	2608
	10428	10432
	108.1905	108.2320
La moitié.	54.0952	54.1160

La surface du cercle avec le rapport de Métius sera de 54 m. carrés, 9 décimètres carrés, 52 centimètres carrés; avec le rapport d'Archimède, elle sera de 54 mètres carrés, 11 décimètres carrés, 60 centimètres carrés.

On voit que le rapport d'Archimède fournit un résultat trop fort, ce qui contribue à le maintenir dans le toisé.

CHAPITRE TROISIÈME.

ARPENTAGE SUR LE TERRAIN.

53. Nous supposons que l'on comprend bien les notions précédentes et que l'on veut opérer sur le terrain.

Pour arpenter on a besoin d'instruments ; il faut avant tout *une chaîne*, *des fiches* et *des jalons*.

54. La chaîne d'arpenteur (*fig.* 33) a 1 décamètre ou 10 mètres de longueur. Elle est formée de 50 brins de gros fil de fer de deux décimètres de longueur, assemblés par des anneaux de fer. Les mètres sont indiqués par des anneaux de cuivre. L'anneau qui marque le milieu du décamètre est le double des autres, ou bien il est distingué des anneaux de cuivre par un bout de fil de fer de 5 centimètres qui y est suspendu. La chaîne métrique est terminée à chaque extrémité par une poignée de fer, prise sur la longueur du dernier brin de fil de fer, qui a 2 décimètres, y compris la poignée.

Cette chaîne est très commode et très portative, car elle se replie sur une longueur de 2 décimètres.

Certains arpenteurs préfèrent à cette chaîne celle qui est divisée en 20 parties, d'un demi-mètre chacune ; elle est moins sujette à se déranger, mais aussi elle est plus lourde et plus embarrassante.

Nous ne parlerons pas du grand compas de bois d'une toise d'ouverture qui était employé autrefois dans quelques provinces. Il est impossible, malgré

l'habitude, d'opérer exactement avec ce compas : son usage doit être absolument proscrit.

Il n'y a d'autres précautions à prendre pour se servir de la chaîne métrique que de la tendre bien horizontalement, de manière cependant à ne pas l'allonger. On la vérifie le matin du jour où l'on doit s'en servir, et on la rectifie s'il y a lieu.

Cette vérification s'opère en traçant avec exactitude une horizontale de 10 mètres le long d'un mur, ou sur une surface bien plane, si l'on ne peut pas disposer d'un mur assez long. On applique la chaîne sur cette mesure qui sert d'*étalon* ; si la chaîne ne coïncide pas parfaitement avec l'étalon, il faut l'allonger ou la raccourcir, jusqu'à ce que la coïncidence ait lieu.

Dans le cadastre on accorde une tolérance de *deux millimètres* sur les 10 mètres de la chaîne.

Les *fiches* (*fig.* 34) sont des brins de gros fil de fer terminés en pointe à l'extrémité qui doit pénétrer dans la terre, et courbés en boucle à l'autre extrémité. Les fiches ont un demi-mètre de hauteur.

55. Les jalons sont des morceaux de bois ferrés à l'extrémité qui doit être enfoncée en terre, et fendus à l'autre pour recevoir un morceau de papier ; les jalons servent *à prendre un alignement*. Lorsque les objets sont éloignés, il faut placer entre eux un nombre suffisant de jalons pour diriger les personnes qui portent la chaîne.

56. Quand une ligne est jalonnée, c'est-à-dire indiquée par des jalons, on la mesure avec la chaîne, que portent deux personnes. La mesure des distances est une opération qui demandebeaucoup de précaution : c'est l'arpenteur qui tient un bout de la chaîne, un aide ou *porte-chaîne* tient l'autre.

Le porte-chaîne qui marche en avant a dans sa main gauche 10 fiches ; il en plante une lorsque la chaîne est convenablement tendue ; l'arpenteur appuie la poignée de la chaîne contre le *bâton de l'équerre* (58), qui est enfoncé au point de départ. Si le bâton de l'équerre ou le trépied était employé ailleurs, l'arpenteur laisserait au point de départ un jalon reconnaissable. Le porte-chaîne continue son chemin jusqu'à ce que l'arpenteur soit arrivé à la fiche laissée sur le terrain, et y ait appuyé la poignée de la chaîne. L'arpenteur doit avoir la précaution de maintenir solidement la fiche contre son genou, de peur que la secousse ne la fasse vaciller, ou même ne l'arrache. Le porte-chaîne plante sa seconde fiche quand la chaîne est bien tendue. Les fiches passent successivement dans la main de l'arpenteur. Lorsqu'il a relevé les 10 fiches, il les rend au porte-chaîne, en marquant le nouveau point de départ par une onzième fiche plus longue et plus forte que les autres, qui ne doit jamais revenir dans les mains du porte-chaîne; ensuite le porte-chaîne marche dans l'alignement des jalons; mais il se tient sur leur gauche et à environ un ou deux décimètres, pour ne point les froisser avec la chaîne. Il enfonce les fiches sans se retourner. Si l'arpenteur trouve que le porte-chaîne se dérange de l'alignement, il lui dit d'appuyer à droite ou à gauche.

Le porte-chaîne doit avoir soin de se créer un point de reconnaissance bien au-delà du dernier jalon ; un arbre, une maison peut lui servir de point de reconnaissance et l'empêcher de s'écarter de la ligne droite.

Pour que les mesures soient prises avec précision, il faut que la chaîne soit tendue également. Si elle n'est pas assez tendue, elle indique une mesure trop courte; si elle est tendue trop fortement, elle s'allonge.

Nous ferons observer aussi que les fiches doivent être suffisamment enfoncées en terre; sans cela, la chaîne en les touchant les renverse, ce qui peut occasioner des erreurs.

L'arpenteur note exactement chaque dizaine de fiches sur un carnet. Dix fois la longueur de la chaîne forment une distance de 100 mètres, qui se nomme *portée*.

57. Nous avons dit plus haut que la mesure d'un triangle était égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur; mais cette hauteur est une perpendiculaire, et pour élever une perpendiculaire sur le terrain il faut un instrument que l'on nomme *équerre d'arpenteur*.

L'équerre d'arpenteur employée aujourd'hui est appelée ordinairement *octogone* (*fig.* 55), parce qu'elle a la forme d'un prisme droit à 8 pans égaux.

Elle est en cuivre creux; elle a environ 1 décimètre de hauteur. Chaque pan est ouvert par une fente verticale qui s'appelle *pinnule*.

Quatre pinnules à angles droits sont terminées à leur partie supérieure par une fenêtre ronde. Les quatre autres pans ont des fentes verticales avec des fenêtres rectangulaires, traversées en hauteur par un fil tendu; à l'extrémité inférieure de l'équerre se trouve une *douille* qui reçoit le haut du bâton de l'équerre. La douille se dévisse; on la retourne et on la place dans l'intérieur de l'instrument, qui, par ce moyen, se met commodément dans la poche, ou mieux, dans un étui, quand l'opération est terminée.

58. Le *bâton de l'équerre* a un mètre et demi de hauteur; il est ferré par le bout qui entre en terre, et divisé sur sa hauteur en décimètres et centimètres, soit pour vérifier la chaîne quand il est nécessaire, soit pour mesurer des fractions de mètres sur le terrain. Au bâton d'arpenteur est attaché ordinairement un petit fil à plomb qui donne la position verticale.

L'équerre d'arpenteur était autrefois un cercle de cuivre évidé; mais l'usage de l'octogone a prévalu.

Pour faire comprendre l'usage de l'équerre, nous allons résoudre quelques problèmes d'arpentage.

59. *Mesurer une pièce de terre d'une forme rectangulaire.*

Soit un champ de la forme ABDC (*fig.* 36), que l'on veut mesurer.

On plante des jalons aux points A, B, C, D; on porte l'équerre au point A de la base AB : on applique l'œil sur l'une des pinnules, pour voir par la pinnule opposée le jalon planté en B.

Si la direction des pinnules n'y correspond pas, on tourne le bâton jusqu'à ce qu'on obtienne cette direction. Il ne faut pas toucher à l'octogone, dans lequel le bâton de l'équerre entre à frottement dur; c'est le bâton que l'on tourne.

On vise le jalon C par les pinnules à angles droits avec les premières : si le champ est bien rectangulaire, le jalon C doit parfaitement correspondre à la direction de ces pinnules.

On transporte successivement l'équerre aux points B, C et D, pour s'assurer si les angles de la figure sont droits. Lorsque les côtés du rectangle sont très longs, on les jalonne, et ensuite on les mesure à la chaîne.

Supposons que AB ait $84^{m}\,48$ de largeur, et AC $120^{m}12$; appliquant la formule $A \times B$, nous aurons

$$\begin{array}{lr}
 & 120.12 \\
 & 84.48 \\
\hline
 & 96096 \\
 & 48048 \\
 & 48048 \\
 & 96096 \\
\hline
\text{Produit} & 10147.7376
\end{array}$$

La surface de ce rectangle sera donc de 10,147 mètres carrés, 73 décimètres carrés. Divisant les mètres carrés par 100 pour avoir des *ares* (l'are vaut 100 mètres carrés), on obtiendra 101 ares 47 centiares, et en forçant l'unité, à cause du 7 qui vient après, on aura 101 ares 48 centiares, ou, ce qui est la même chose, 1 hectare 1 are 48 centiares.

Il n'est pas nécessaire, pour arpenter le champ ABCD, de mesurer les quatre angles et les quatre côtés. Si les angles en A et en B sont droits, et si les côtés AC et BD sont d'égale longueur, la figure est un rectangle.

On peut encore vérifier à l'octogone si les angles en A, en B et en C sont droits, et mesurer deux côtés seulement, AB et BD.

Dans ce cas, si les trois angles sont droits, le quatrième est nécessairement droit aussi.

Ces trois procédés, qui conduisent tous au même résultat, sont utiles à connaître, parce que, selon les circonstances, l'un d'eux est plus facile à employer que les autres.

60. *Mesurer un champ de forme triangulaire.*

Plantez des jalons en A, B, C (*fig.* 37), et portez l'équerre sur la base AB, en un point tel, que, lorsque deux pinnules correspondent aux jalons en A et B, deux autres pinnules à angles droits correspondent au jalon planté en C.

On ne trouve pas cette position au premier essai; mais, avec un peu de pratique, on ne tâtonnera pas long-temps.

Il reste à mesurer à la chaîne les distances AB et CD.

Supposons la distance AB égale à 87^m56, et CD à 115^m67, on appliquera la formule $1/2$ (H $\times$ B).

	113.67
	87.56
	68202
	56835
	79569
	90936
Produit	9952.9452
Moitié du produit	4976.4726

Le résultat est de 4976 mètres carrés, 47 décimètres carrés, 26 centimètres carrés, ou de 49 ares 76 centiares.

Il peut arriver que, dans un triangle, il soit impossible d'abaisser une perpendiculaire, et surtout de la mesurer. Voici un moyen d'obtenir la superficie d'un triangle dont on connaît seulement les trois côtés.

Supposons que, dans le triangle ABC (*fig.* 37), on ait $AB = 24^m50$, $AC = 26^m65$, et $CB = 21^m80$: ajoutez les trois longueurs, ce qui donne pour somme 72^m95, dont la moitié est 36^m47; de 36^m47 retranchez successivement la longueur de chaque côté, vous aurez les trois restes 11^m97, 9^m82, 14^m67, qu'il faut multiplier entre eux. Le produit est

$1724^m391018$; on le multiplie par 36^m47, moitié de la somme des trois côtés. On peut négliger la partie décimale 1018. Le produit est alors de 62888.5033; il ne reste plus qu'à extraire la racine carrée. (Consulter, à la fin du chap. XXIII, la note sur l'extraction de la racine carrée.)

6.28888.5083	250.7757
4	45
22.8	5007
22 5	50147
3885.0	501545
3504 9	5015507
380 13.3	
351 02 9	
2910 40.0	
2507 72 5	
402 67 50.0	
351 08 54 9	
51 58 95 1	

La superficie du triangle est donc de 250 mètres carrés, 77 décimètres carrés, 57 centimètres carrés.

61. *Mesurer un champ de la forme d'un trapèze.*

Soit le champ ABCD (*fig.* 38), de la forme d'un trapèze. Plantez des jalons en A, B, C, D; aux points E et F de la base AB élevez deux perpendiculaires. Si des stations E et F vous visez par deux pinnules les jalons plantés en A et en B, les deux pinnules à angles droits indiqueront les points G, H, sur la base supérieure CD ; on fera planter deux jalons en G et en H. Si les deux distances EG, FH, que l'on mesure à la chaîne, sont parfaitement égales, on peut en conclure que les bases AB et CD sont parallèles, et que la fig. ABCD est un trapèze. Il ne reste plus qu'à mesurer à la chaîne les distances AB et CD.

Supposons la distance AB égale à 123^{m}48, la distance CD égale à 96^{m}35, et la perpendiculaire en EG égale à 78^{m}45 : appliquons la formule

$$1/2\ H\ (B + B').$$

	123.48
	96.35
Total des bases	219.83
	78.45
	109915
	87932
	175864
	153881
Produit	17245.6635
La moitié	8622.8317

La mesure de ce champ sera de 8622 mètres carrés, 83 décimètres carrés, 17 centimètres carrés, ou de 86 ares 23 centiares, en forçant l'unité, à cause du 8 qui vient après.

62. *Mesurer un champ de la forme d'un quadrilatère irrégulier.*

Si le champ a la forme ABCD (*fig.* 39), on plantera des jalons en A, B, C, D. Au moyen de l'équerre on abaissera sur AD les deux perpendiculaires CE, BF. On jalonnera, s'il est nécessaire, et l'on mesurera à la chaîne la base AD et les deux perpendiculaires CE, BF.

Supposons AD = 245^{m}35, CE = 81^{m}38, BF = 95^{m}32.

En appliquant à chaque triangle la formule.

$$1/2\,(H \times B),$$

	245.35
	81.38
Triangle ACD	196280
	73605
	24535
	196280
	19966.5830
	245.35
	95.32
Triangle ABD	49070
	73605
	122675
	220815
	23386.7620
	19966.5830
Total	43353.3450
Moitié	21676.6725

La superficie ou l'aire du quadrilatère irrégulier ABCD sera de 21,676 mètres carrés, 67 décimètres carrés, 25 centimètres carrés, ou de 216 ares 77 centiares, ou enfin de 2 hectares 16 ares 77 centiares.

63. *Mesurer un polygone irrégulier.*

Soit à mesurer un champ de la forme ABCDEF (*fig.* 40).

Après avoir planté des jalons aux sommets A, B, C, D, E, F, on supposera les diagonales tirées de B en F, en E, en D. Au moyen de l'équerre on abaissera AG et EH, perpendiculaires sur FB; on abaissera également CK et EI, perpendiculaires sur BD. Il ne restera plus qu'à jalonner et qu'à mesurer à la chaîne les distances FB, AG, EH, BD, EI, CK.

Supposons FB $=147^m38$, AG $=78^m53$, EH $=89^m75$,
BD $=216^m31$, EI $=119^m43$, CK $=54^m38$.

Appliquons la formule 1/2 (H × B).

Triangle ABF.	Triangle BEF.
147.38	147.38
78.53	89.75
44214	73690
73690	103166
117004	132642
103166	117904
11573.7514	13227.3550

Triangle BED.	Triangle BCD.
216.31	216.31
119.43	54.38
64893	173048
86524	64893
194679	86524
21631	108155
21631	11762.9378

25833.9033 — Triangle BED.
11762.9378 — Triangle BCD.
13227.3550 — Triangle BEF.
11573.7514 — Triangle ABF.

62397.9475 — Total.
31198.9737 — Moitié.

La superficie ou l'aire du polygone est de 31,198 mètres carrés, 97 décimètres carrés, ou de 311 ares 98 centiares, ou enfin de 3 hectares 11 ares 99 centiares.

On a pu remarquer que, dans le calcul ci-dessus, au lieu de prendre la moitié du produit de la base par la hauteur dans chaque triangle, on ajoute les quatre produits et on prend la moitié du total, ce qui donne un résultat plus rigoureux et ce qui évite de prendre trois fois la moitié.

64. Au lieu de décomposer un polygone en triangles en menant des diagonales du sommet d'un angle à tous les autres, il est un moyen plus simple et généralement adopté dans l'arpentage. Il consiste à mener dans le plan une droite que l'on nomme *directrice*, et sur laquelle on abaisse des perpendiculaires de tous les sommets des angles. Par ce moyen, le polygone se trouve divisé en triangles rectangles, et en trapèzes rectangulaires ayant deux angles droits sur la directrice. On choisit pour directrice la plus grande ligne possible qui traverse le polygone en allant du sommet d'un angle à un autre sommet opposé.

Appliquons ce procédé au polygone ABCDEFGH (*fig.* 41.)

On jalonne la droite AF, qui est la directrice; on plante un jalon à chaque sommet B, C, D, etc., du polygone, et l'on porte l'équerre sur la directrice AF, pour déterminer les points I, K, L, M, N, O, qui sont les pieds des perpendiculaires BI, CK, DL, EM, GN, HO.

On mesure à la chaîne les perpendiculaires et les parties AI, IO, OK, etc., etc., de la directrice AF. Le polygone se trouve divisé en triangles et en trapèzes rectangulaires; il suffit d'appliquer les formules connues, relatives aux triangles et aux trapèzes.

Supposons qu'au moyen de la chaîne on ait obtenu les valeurs suivantes en mètres, décimètres et centimètres.

Directrice, parties au-dessus : AI = 81.38 ; IK = 238.63 ; KL = 41.16 ; LM = 52.48 ; MF = 92.34.

Directrice, parties au-dessous : AO = 172.43 ; NO = 229.18 ; NF = 104.38.

Perpendiculaires, au-dessus : BI = 114.23 ; CK = 153.47 ; DL = 103.25 ; EM = 169.19.

Perpendiculaires, au-dessous : OH = 114.34 ; GN = 141.42.

Détail des opérations.

Triangle ABI.	Multiplier la base 81.38 par la hauteur 114.23, et prendre la moitié du produit.	4,648^{m}02
Trapèze BIKC.	Ajouter les deux bases parallèles 114.23 et 153.47, multiplier la somme par la hauteur 238.63, et prendre la moitié du produit.	31,940^{m}63
Trapèze CKLD.	Ajouter les deux bases parallèles 153.47 et 103.25, multiplier la somme par la hauteur 41.16, et prendre la moitié du produit.	5,283.30
		41,871^{m}95

	Report.	41871^{m}95
Trapèze DLME.	Ajouter les deux bases parallèles 103.25 et 169.19, multiplier la somme par la hauteur 52.48, et prendre la moitié du produit.	7,148.83
Triangle EMF.	Multiplier la base 92.34 par la hauteur 169.19, et prendre la moitié du produit.	7,811.50
Triangle AOH.	Multiplier la base 172.43 par la hauteur 114.34, et prendre la moitié du produit.	9,857.82
Trapèze OHGN.	Ajouter les deux bases parallèles 114.34 et 141.42, multiplier la somme par la hauteur 229.18, et prendre la moitié du produit.	29,307.54
Triangle NGF.	Multiplier la base 104.38 par la hauteur 141.42, et prendre la moitié du produit.	7,380.71
	Total.	103,378^{m}35

La superficie du polygone (*fig.* 41) est de 103,378 mètres carrés, 35 centimètres carrés, ou de 1,033 ares 78 centiares, ou enfin de 10 hectares 33 ares 78 centiares.

65. La figure 42 représente une disposition de terrain plus difficile à arpenter, et dans laquelle deux parties triangulaires ne peuvent être mesurées qu'avec certaines précautions.

On jalonne, comme dans la figure précédente, la droite AB, qui est la directrice du plan. On enfonce un jalon au sommet de chaque angle, et on porte l'équerre aux différents points de la directrice qui sont les pieds des perpendiculaires CM, DN, EB, HB, IQ, KR, LS.

On mesure à la chaîne toutes les perpendiculaires et toutes les parties de la directrice comprises entre les pieds des perpendiculaires.

Supposons que l'on ait trouvé les valeurs suivantes en mètres, décimètres et centimètres.

Directrice, parties en-dessus : AM = 136.19 ; MN = 230.58, NB = 184.45.

Directrice, parties en-dessous : AS = 40.32 ; SR = 118.45 ; RQ = 250.37 ; QB = 142.08.

Perpendiculaires, en-dessus : CM = 162.45 ; ND = 171.30 ; BE = 81.66.

Perpendiculaires, en-dessous : LS = 63.14 ; RK = 169.21 ; QI = 194.37 ; BH = 84.32.

Perpendiculaires sur EB et BH : PO = 38.82 ; GT = 24.35.

Détail des opérations.

Triangle AMC.	Multiplier la base 136.19 par la hauteur 162.45, et prendre la moitié du produit.	11,062^{m}05
Trapèze CMND.	Ajouter les deux bases parallèles 162.45	
		11,062^{m}05

	Report.	11,062^{m}05
	et 171.30, multiplier la somme par la hauteur 230, 58, et prendre la moitié du produit.	38,478.04
Trapèze DNBE.	Ajouter les deux bases parallèles 171.30 et 81.66, multiplier la somme par la hauteur 184.45, et prendre la moitié du produit.	23,329.24
Triangle BPE.	Multiplier la base 81.66 par la hauteur 38.82, et prendre la moitié du produit.	1,585.02
Triangle ASL.	Multiplier la base 40,32 par la hauteur 63.14, et prendre la moitié du produit.	1,272.90
Trapèze SLKR.	Ajouter les deux bases parallèles 63.14 et 169.21, multiplier la somme par la hauteur 118.45, et prendre la moitié du produit.	13,760.93
Trapèze RKIQ.	Ajouter les deux bases parallèles 169.21 et 194.37, multiplier la somme par la hauteur 250.37, et prendre la moitié du produit.	45,514.76
		135,002.92

	Report.	135,00292
Trapèze QIHB.	Ajouter les deux bases parallèles 194.37 et 84,32, multiplier la somme par la hauteur 142.08, et prendre la moitié du produit.	19,798.14
Triangle BGH.	Multiplier la base 84.32 par la hauteur 24.35, et prendre la moitié du produit.	1,026.60
		155,827.66

Ainsi la superficie de la figure 42 est de 155,827 mètres carrés, 66 décimètres carrés, ou de 1,558 ares 27 centiares, ou enfin de 15 hectares 58 ares 27 centiares.

Il est encore un autre procédé pour diviser un terrain en triangles et en rectangles. Ce procédé est adopté par plusieurs arpenteurs estimables, et il offre cet avantage que l'on ne mesure réellement que les côtés des triangles rectangles qui sont en même temps les côtés des rectangles. Reprenons la figure 40. Du sommet A je tire une droite quelconque AG; du sommet B j'abaisse sur AG la perpendiculaire BG; du point F j'abaisse aussi une autre perpendiculaire sur AG : c'est la droite FG. Du sommet E j'abaisse sur FG la perpendiculaire EH. Du sommet D j'abaisse encore sur BG la perpendiculaire D*d*. Sur cette perpendiculaire D*d* j'abaisse les nouvelles perpendiculaires E*a*, C*b*. Sur C*b* et du sommet B j'abaisse la perpendiculaire B*c*; le polygone ABCDEF se trouve divisé, par ce

moyen, en six triangles rectangles ABG, AGF, BC*c*, C*b*D, D*a*E, EFH, et en deux rectangles B*cbd* et *da*EH.

L'inspection de la fig. 40 et de ses divisions en lignes ponctuées suffit pour faire apprécier ce procédé, qui convient surtout lorsque le nombre des côtés du polygone est considérable.

Les calculs que nous venons d'indiquer mettront en état de faire tous les autres calculs semblables qui se rencontrent dans la pratique de l'arpentage : il ne nous reste plus qu'à indiquer les moyens de résoudre quelques cas exceptionnels.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DIFFICULTÉS QUI SE PRÉSENTENT DANS LA PRATIQUE.

66. Jusqu'à présent nous avons supposé que les terrains à mesurer étaient accessibles de toutes parts, et qu'aucune difficulté ne se présentait, soit dans le jalonnage, soit dans la mesure des lignes; mais il n'en est pas toujours ainsi, comme nous allons le voir.

67. *Jalonner un alignement, partie sur un terrain horizontal, partie sur une côte.*

Soit un alignement à tracer de A en B (*fig.* 43) : on plante une perche de bois en B assez longue pour être aperçue du point A. Dans l'espace intermédiaire, on fait planter un jalon en C : il suffit, pour placer ce jalon, que l'arpenteur placé en A voie les trois points A, C et B, confondus en un seul. On

	Report.	135,00292
Trapèze QIHB.	Ajouter les deux bases parallèles 194.37 et 84,32, multiplier la somme par la hauteur 142.08, et prendre la moitié du produit.	19,798.14
Triangle BGH.	Multiplier la base 84.32 par la hauteur 24.35, et prendre la moitié du produit.	1,026.60
		155,827.66

Ainsi la superficie de la figure 42 est de 155,827 mètres carrés, 66 décimètres carrés, ou de 1,558 ares 27 centiares, ou enfin de 15 hectares 58 ares 27 centiares.

Il est encore un autre procédé pour diviser un terrain en triangles et en rectangles. Ce procédé est adopté par plusieurs arpenteurs estimables, et il offre cet avantage que l'on ne mesure réellement que les côtés des triangles rectangles qui sont en même temps les côtés des rectangles. Reprenons la figure 40. Du sommet A je tire une droite quelconque AG; du sommet B j'abaisse sur AG la perpendiculaire BG; du point F j'abaisse aussi une autre perpendiculaire sur AG : c'est la droite FG. Du sommet E j'abaisse sur FG la perpendiculaire EH. Du sommet D j'abaisse encore sur BG la perpendiculaire D*d*. Sur cette perpendiculaire D*d* j'abaisse les nouvelles perpendiculaires E*a*, C*b*. Sur C*b* et du sommet B j'abaisse la perpendiculaire B*c*; le polygone ABCDEF se trouve divisé, par ce

moyen, en six triangles rectangles ABG, AGF, BC*c*, C*b*D, D*a*E, EFH, et en deux rectangles B*cbd* et *da*EH.

L'inspection de la fig. 40 et de ses divisions en lignes ponctuées suffit pour faire apprécier ce procédé, qui convient surtout lorsque le nombre des côtés du polygone est considérable.

Les calculs que nous venons d'indiquer mettront en état de faire tous les autres calculs semblables qui se rencontrent dans la pratique de l'arpentage : il ne nous reste plus qu'à indiquer les moyens de résoudre quelques cas exceptionnels.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DIFFICULTÉS QUI SE PRÉSENTENT DANS LA PRATIQUE.

66. Jusqu'à présent nous avons supposé que les terrains à mesurer étaient accessibles de toutes parts, et qu'aucune difficulté ne se présentait, soit dans le jalonnage, soit dans la mesure des lignes ; mais il n'en est pas toujours ainsi, comme nous allons le voir.

67. *Jalonner un alignement, partie sur un terrain horizontal, partie sur une côte.*

Soit un alignement à tracer de A en B (*fig.* 43) : on plante une perche de bois en B assez longue pour être aperçue du point A. Dans l'espace intermédiaire, on fait planter un jalon en C : il suffit, pour placer ce jalon, que l'arpenteur placé en A voie les trois points A, C et B, confondus en un seul. On jalonne AC par les moyens ordinaires, c'est-à-dire en plaçant entre ces deux points un nombre suffisant de jalons. Au sommet de la côte on plante un jalon en D, et l'alignement AB se trouve indiqué.

Si l'alignement demandé descendait dans un vallon et remontait de l'autre côté par une rampe escarpée, il faudrait indiquer d'abord l'alignement par un certain nombre de jalons placés sur les points élevés, et envoyer ensuite jalonner le vallon par un procédé semblable à celui que nous venons de donner plus haut.

68. *Mesurer à la chaîne et à l'équerre une ligne inaccessible.*

Soit AB une ligne rendue inaccessible par un marais qui se trouve entre les deux extrémités (*fig* 44); supposons le terrain abordable de A en C. On plante des jalons en A et en B. Au point A on élève avec l'équerre une perpendiculaire AC. On cherche sur l'alignement AC un point C tel qu'en y plaçant l'équerre on aperçoive par deux pinnules opposées le jalon en A, et par les deux pinnules de la face immédiatement à côté le jalon planté en B. Ces pinnules indiquent la moitié de l'ouverture de l'angle droit, c'est-à-dire 50 grades ou 45 degrés. Le triangle ABC est un triangle isoscèle, par conséquent le côté AB est égal au côté AC. Il suffira donc de jalonner et de mesurer la distance AC, qui est de la même longueur que la ligne inaccessible AB. Si AC est de $65^{m}50$, la ligne inaccessible AB sera également de $65^{m}50$.

Il arrive quelquefois que les deux extrémités d'un alignement sont séparées par un bois épais; alors on envoie à l'une des extrémités un homme qui crie à haute voix ou qui tire un coup de fusil lorsque la distance est considérable. Il est mieux

encore d'y faire lancer une fusée, surtout quand l'autre extrémité est dans un lieu découvert.

Lorsqu'on tire l'alignement dans un bois, on se sert plus avantageusement du fusil ou de la voix.

69. *Mesurer un marais, un bois ou un terrain qu'on ne peut traverser.*

Si le terrain qu'il s'agit de mesurer ne peut être traversé, on ne peut employer les moyens indiqués jusqu'ici : car il faut nécessairement recourir à l'un des trois procédés que nous avons fait connaître :

1° De séparer le terrain en triangles par des diagonales menées du sommet d'un même angle;

2° De tirer une directrice sur laquelle on abaisse des perpendiculaires des sommets de tous les angles;

3° De diviser le terrain en triangles rectangles et en rectangles.

Voici la construction employée habituellement pour parvenir au résultat.

Supposons que le polygone de la figure 45 soit inabordable intérieurement : tirez la directrice MN, qui passera par le sommet d'un des angles du polygone, et enveloppez le polygone du rectangle MNOP. On y parviendra en élevant avec l'équerre, en M et en N, des perpendiculaires qui passent par le sommet d'un angle du polygone, et en élevant une perpendiculaire en O qui passe aussi par le sommet d'un autre angle du polygone.

Il est évident que, pour avoir la mesure du rectangle MNPO, il suffit de multiplier MN par OP, suivant la formule $B \times H$.

Que, de tous les sommets des angles du polygone, on abaisse avec l'équerre des perpendiculaires sur les côtés MN, NP, PO et OM, on aura les triangles B, C, E, I, K, L, et les trapèzes

A, D, F, G, H. En retranchant les trapèzes et les triangles intérieurs du rectangle MNPO, il restera la mesure exacte du polygone demandé.

Voici le détail de l'opération.

Les distances jalonnées et mesurées à la chaîne sont : $Mp = 83^{m}45$, $po = 247^{m}58$, $om = 197^{m}62$, $mk = 113^{m}11$, $kN = 48^{m}24$, $Nj = 204^{m}78$, $jf = 266^{m}10$, $fP = 89^{m}12$, $Pd = 35^{m}52$, $dc = 216^{m}15$, $ea = 328^{m}17$, $aO = 112^{m}16$, $Ol = 133^{m}$, $tq = 249^{m}53$, $qM = 177^{m}47$.

Longueur des perpendiculaires élevées à l'équerre et mesurées à la chaîne : $ba = 48^{m}53$, $ed = 96^{m}15$, $gh = 68^{m}36$, $ik = 29^{m}11$, $lm = 78^{m}43$, $no = 58^{m}17$, $rs = 99^{m}99$.

Trapèze A.	Ajouter les deux bases parallèles 133 et 48.53, multiplier par la hauteur 112.16, et en prendre la moitié.	$10,180^{m}2024$
Triangle B	Multiplier la base 328.17 par la hauteur 58.53, et prendre la moitié du produit.	7,963.0450
Triangle C.	Multiplier la base 216.15 par la hauteur 96.15, et prendre la moitié du produit.	10,391,4112
Trapèze D.	Ajouter les deux bases parallèles 96.15 et 89.12, multiplier la somme par la hauteur 35.52, et prendre la moitié du produit.	3,105.1252
		$31,639^{m}7838$

	Report.	$31,639^{m}7838$
Triangle E.	Multiplier la base 266.10 par la hauteur 68.36, et prendre la moitié du produit.	9,095.2980
Trapèze F.	Ajouter les deux bases parallèles 204.78 et 29.11, multiplier la somme par la hauteur 48.24, et prendre la moitié du produit.	5,641.4268
Trapèze G.	Ajouter les deux bases parallèles 29.11 et 78.43, multiplier la somme par la hauteur 113.11, et prendre la moitié du produit.	6,081.9247
Trapèze H.	Ajouter les deux bases parallèles 78.43 et 58.17, multiplier cette somme par la hauteur 197.62, et prendre la moitié de ce produit.	13,497.4460
Triangle I.	Multiplier la base 247.57 par la hauteur 58.17, et prendre la moitié du produit.	7,200.8643
Triangle K.	Multiplier la base 177.47 par la hauteur 83.45, et prendre la	
		$73,156^{m}7536$

	Report..	73,156.7536
	moitié du produit.	7,404.9557
Triangle L.	Multiplier la base 249.53 par la hauteur 99.99, et prendre la moitié du produit.	12,475.2523
	Total	93,036.9616

La mesure du rectangle est de 690 × 560, ou	38,600.0000
Si de cette surface on retranche la somme ci-dessus des rectangles et des trapèzes	93,036.9616
il restera la surface demandée	293,563^{m}0684

Ainsi, la surface du polygone est de 293,563 mètres carrés, 6 décimètres carrés, 84 centimètres carrés, ou de 2,933 ares 63 centiares, ou enfin de 29 hectares 33 ares 63 centiares.

70. Il n'est pas indispensable que le terrain soit enveloppé d'un rectangle; on pourrait également l'envelopper d'un triangle, d'un trapèze; mais on voit de suite que le rectangle offre plus de facilité pour le calcul. Cependant, si le terrain se rapprochait de la forme du triangle ou du trapèze, il serait plus simple de l'envelopper, soit d'un triangle, soit d'un trapèze.

71. *Mesurer un terrain dont le contour est composé de lignes courbes.*

Il y a quelques précautions à prendre quand le contour du polygone est terminé par des courbes au lieu de lignes droites. Un exemple indiquera la marche à suivre dans tous les cas analogues.

Supposons un champ de la forme ABCDF (*fig.* 46). La géométrie élémentaire ne fournit pas les moyens de mesurer sa surface; mais on parvient à une approximation suffisante par le procédé suivant:

On tire les droites AE, EG, GH, HI, IK, KA, de telle sorte qu'il y ait à peu près autant de terrain retranché du polygone AEGHIK qu'il y en a d'ajouté: effectivement, nous voyons sur la figure 46 que la ligne AE établit une compensation partielle, puisqu'elle laisse en dehors du polygone la portion de terrain qui est immédiatement au-dessus du point A, et qu'elle fait entrer dans l'intérieur du polygone la portion de terrain qui est au-dessous de E, et qui ne lui appartient pas réellement.

La direction des lignes est abandonnée entièrement à l'intelligence de l'arpenteur, qui doit chercher à établir des compensations alternatives en plus et en moins, de manière à s'approcher autant qu'il est possible d'une mesure exacte.

Ce procédé, nous le répétons, n'est pas rigoureux; mais l'arpenteur habile ne s'écarte pas beaucoup de la véritable mesure.

Plantez des jalons en A, E, G, H, I, K; tirez l'alignement AH, qui est la directrice, et élevez sur cette directrice les perpendiculaires EL, GM, IP, KO; jalonnez et mesurez toutes les distances.

Supposons AL = 151^{m}15, LM = 153^{m}21, MH = 174^{m}25, PH = 90^{m}32, PD = 232^{m}45, AD = 155^{m}84, DE = 154^{m}28, GM = 137^{m}29, PI = 124^{m}17, DK = 112^{m}11.

Voici le détail des opérations à faire:

Triangle AEL. Multiplier la base 151.15 par la hauteur 154.28, et prendre la moitié

	du produit.	11,659^{m}7110
Trapèze EDMG.	Ajouter les deux bases parallèles 154.28 et 137.29, multiplier cette somme par 153.21, et prendre la moitié de ce produit.	22,335.7198
Triangle GMH.	Multiplier la base 174.25 par la hauteur 137.29, et prendre la moitié du produit.	11,961.5912
Triangle PIH.	Multiplier la base 90.32 par la hauteur 124.17, et prendre la moitié du produit.	5,607.5172
Trapèze PIKO.	Ajouter les deux bases parallèles 124,17 et 112.11, multiplier cette somme par 232.45, et prendre la moitié de ce produit.	27,461.6430
Triangle AOK.	Multiplier la base 155.84 par la hauteur 112.11, et prendre la moitié de ce produit.	8,735.6112
		87,761^{m}3954

La surface de la figure 46 est donc de 87,761 mètres carrés, 59 décimètres carrés, 34 centi-

mètres carrés, ou de 877 ares 61 centiares, ou enfin de 8 hectares 77 ares 61 centiares.

On est en état maintenant d'arpenter toute espèce de terrain avec la chaîne métrique, l'équerre d'arpenteur et les jalons.

Dans les derniers calculs, nous avons employé 4 décimales, pour obtenir un résultat plus rigoureux.

Nous n'avons pas parlé spécialement des terrains inclinés; mais comme, dans ce cas, on ne relève pas la superficie réelle, et que l'on réduit au plan horizontal, les règles que nous avons prescrites s'appliquent aux terrains inclinés aussi bien qu'aux surfaces planes. (Voir le chapitre XI *Du nivellement*, où l'on traite de la mesure des plans inclinés.)

DEUXIÈME PARTIE.

—

DE LA LEVÉE DES PLANS.

CHAPITRE CINQUIÈME.

ÉCHELLE.

72. Il ne suffit pas de savoir mesurer la superficie d'un champ, d'une propriété : il est souvent nécessaire d'obtenir la figure de ce champ, de cette propriété, et d'en lever *le plan*.

Lever un plan, c'est tracer en petit sur le papier la figure exacte d'un terrain avec tous ses détails, en conservant l'égalité des angles et la proportionnalité des côtés.

Comme il est impossible de représenter sur une feuille de papier la figure d'un champ, d'une pièce de terre, d'un bois, dans ses véritables dimensions, on diminue toutes les lignes dans le même rapport, en conservant la direction des côtés, c'est-à-dire l'égalité des angles. C'est ainsi que, dans la peinture, on peut faire une ressemblance parfaite en miniature, c'est-à-dire en dimensions très petites, mais proportionnelles à la nature.

Si la directrice qui traverse un champ a 80 mètres de longueur, en réduisant au centième, on aura 8 décimètres pour la longueur de la directrice du plan; si un côté du polygone avait 40 mètres,

le côté proportionnel du plan aurait 4 décimètres, et ainsi des autres. Le plan donne une idée parfaitement exacte de la figure du terrain, lorsque l'écartement des côtés est le même sur le terrain et sur le plan, c'est-à-dire lorsque les angles sont égaux.

Si une distance de 1,250 mètres devait être représentée sur le plan, comme nous venons de l'indiquer, c'est-à-dire par une ligne 100 fois plus petite, il faudrait tracer sur le papier une ligne de 12 mètres 50 centimètres, ce qui serait impossible. La réduction au millième donnerait encore 1 mètre 25 centimètres de longueur. Or, le papier grand-aigle n'ayant que $0^m,975$ de largeur, il serait nécessaire de coller deux feuilles ensemble pour y tracer la directrice $1^m 25$.

Il est donc très important, avant de commencer le dessin d'un plan, de chercher la proportion dans laquelle il faut le représenter, et par conséquent l'échelle qui doit servir de base à toutes les opérations.

73. On nomme *échelle* une ligne qui représente la longueur que doivent occuper sur le papier un certain nombre de mètres mesurés sur le terrain, ce qui permet d'apprécier la véritable longueur d'une ligne du plan, en la portant sur l'échelle.

La grandeur d'un plan peut être, avec celle du terrain qu'elle représente, dans un rapport quelconque : on conçoit donc que le nombre des échelles est infini.

Il n'y a aucune règle générale pour adopter telle ou telle échelle; cependant les échelles décimales au dixième, au centième, au millième, sont beaucoup plus commodes dans la pratique que celles construites d'après un rapport arbitraire.

Une échelle très adoptée est celle d'un millimètre pour mètre. Cette échelle est d'autant plus commode, que l'on trouve dans le commerce des décimètres en buis très bien gravés. Si l'on mesure une distance de 251 mètres sur le terrain, il ne s'agit que de diviser 251 mètres par 1000, ou de reculer le point de trois rangs vers la gauche, ce qui donne 0^m251 ; une longueur de 251 millimètres, mesurée sur le décimètre en bois, fournira une ligne proportionnelle aux 251 mètres mesurés sur le terrain.

Dans le cadastre, l'échelle d'un millimètre serait trop grande; on emploie celle de 1 mètre pour 2,500 mètres, représentés par la fraction 1/2500. Multipliant les deux termes par 4, ce qui n'altère pas la valeur de la fraction, on a 4/10000, c'est-à-dire que l'on prend 4 millimètres pour 10,000 millimètres, c'est-à-dire 4 millimètres par 10 mètres ou par décamètre.

Le dépôt de la guerre emploie les échelles de 1/10,000, 1/20,000, 1/40,000, 1/80,000, pour la topographie de la carte de France.

L'échelle employée par Cassini pour la carte de France est de 1/86,400.

On doit comprendre maintenant que le choix de l'échelle dépend de l'objet que l'on se propose de représenter, et que, plus le terrain que l'on veut relever est grand, plus on prend une échelle petite.

74. Lorsqu'il faut renfermer un plan sur une feuille de papier de grandeur donnée, telle que du *grand-raisin* ou du *colombier*, on est obligé d'adopter, pour représenter le mètre, une longueur qui n'est pas une division exacte du décimètre; il faut construire une *échelle*.

Tracez une ligne indéfinie (*fig.* 47), et portez dix fois sur cette ligne, de A en B, une ouverture de compas qui doit représenter la longueur du mètre sur le plan. AB, qui contient dix ouvertures du compas, représentera un décamètre. On portera ensuite AB de B en C; puis de C en D, etc. On compose ordinairement les échelles de dix parties égales à AB; en sorte que la longueur représentée par l'échelle est alors de 10 décamètres ou de 1 hectomètre, quelle que soit la longueur réelle de l'échelle.

75. Pour obtenir une plus grande précision on se sert d'une échelle sur laquelle on peut prendre des dixièmes : c'est ce qu'on appelle l'*échelle des dîmes* (*fig.* 48).

ABDC est à volonté un rectangle ou un carré; AB est divisé en dix parties égales, ainsi que CD.

On mène de la 1re division de AB une oblique jusqu'au point C; on mène une oblique de la 2e division de AB à la 1re division de CD; et ainsi de suite, comme on peut le voir sur la figure 48.

Il résulte de cette division un moyen d'obtenir des dixièmes d'unité : les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, indiquent un, deux, trois, quatre, etc., dixièmes de l'unité linéaire.

Quand on sait construire une échelle et s'en servir, il n'est pas difficile de tracer sur le papier la figure d'un terrain dont on aura d'abord dessiné le croquis.

Le croquis est une esquisse indiquant les détails du plan et la direction approximative des lignes. Nous allons voir avec quels instruments on peut relever les angles du terrain.

CHAPITRE SIXIÈME.

PLANCHETTE.

76. On relève les angles immédiatement sur le terrain avec la *planchette :* c'est une petite table rectangulaire de 8 décimètres de largeur et de 5 décimètres de hauteur, sur laquelle on fixe une feuille de papier.

Cette feuille de papier est fixée sur la planchette, soit avec de la *colle à bouche*, soit avec des *punaises* ou épingles à tête plate, soit enfin avec des rouleaux adaptés le long de deux de ses bords opposés, et retenus par des écrous.

La planchette est soutenue par un trépied qui s'adapte à une douille surmontée d'un genou de cuivre. Au moyen de ce genou on lui fait prendre diverses positions.

77. La planchette se compose donc de trois parties bien différentes : 1° de la planchette proprement dite ; 2° du genou ; 3° du trépied. Depuis l'invention de ces instruments par *J. Prætorius*, de Nuremberg, au 16e siècle, on y a fait des perfectionnements d'une haute importance qui laissent peu de chose à désirer dans la pratique.

Ordinairement le genou est composé d'une sphère en cuivre retenue entre deux coquilles qui tiennent par le bas à une douille dans laquelle on fait entrer la tige du trépied. Ce n'est qu'avec beaucoup de peine et avec une grande habitude que l'on parvient à placer la tablette dans une position horizontale ;

une bille d'ivoire ou un petit niveau à l'esprit-de-vin, placé à sa surface, indique cette position horizontale que l'on trouve après un certain nombre de tâtonnements.

On exécute aujourd'hui des planchettes dans lesquelles le mouvement du genou est double, ce qui permet d'arriver très promptement au plan horizontal.

78. Si le plan que l'on doit lever occupe une grande étendue en longueur, on se sert d'une planchette à cylindre ; les cylindres, placés aux deux côtés de la planchette, permettent de réunir plusieurs grandes feuilles de papier collées ensemble, qui passent d'un rouleau sur l'autre par un simple mouvement de manivelle.

79. Pour opérer avec la planchette, il faut une *alidade* en cuivre sur laquelle est gravée une échelle de proportion. Les extrémités de l'alidade sont terminées par deux pinnules verticales très hautes, pour viser les lieux élevés ou déprimés.

Il est essentiel, pour ne pas commettre d'erreur grave, d'employer une boussole qui sert à orienter la planchette d'une manière invariable.

L'alidade a reçu dans sa construction des modifications aussi importantes que celles de la planchette. On y adapte des lunettes qui fatiguent moins la vue, et qui donnent des résultats plus exacts que les alidades à pinnules.

80. Pour lever le plan du terrain (*fig.* 49), on pose la planchette horizontalement au point A ; on suppose qu'on a assujetti la feuille de papier sur la planchette par un des moyens indiqués plus haut, et que l'on est muni d'une alidade, d'une chaîne, de jalons, de crayons et de compas.

La planchette doit être placée de telle sorte que le point A du terrain corresponde verticalement avec le point A du papier.

On envoie planter des jalons aux points B, C, D, E, F. L'arpenteur enfonce une aiguille sur le plan au point A, et appuie sur cette aiguille une des extrémités de l'alidade, dirigeant l'autre vers le jalon en B. Dans cette position on fait glisser une pointe de crayon le long de l'alidade dans la direction AB. Sans déranger la planchette, on fait pivoter l'alidade le long de l'aiguille en A, et l'on dirige son autre extrémité vers le point F; on trace de même sur le plan une ligne au crayon, selon la direction AF, ce qui détermine l'angle BAF.

On envoie mesurer les lignes AF et AB, et on prend sur l'échelle autant de parties que l'on a trouvé sur le terrain; ce qui détermine sur le plan les points *a*, *f*, *b*.

On transporte la planchette au point B, de manière que le point B du terrain corresponde verticalement au point B du papier; on applique l'alidade le long de la ligne AB, et on la tourne jusqu'à ce que l'on aperçoive le jalon A par les pinnules de l'alidade. Sans déranger la planchette, on fait pivoter l'alidade autour de l'aiguille en B jusqu'à ce que l'on aperçoive le jalon placé en C; on fait glisser une pointe de crayon le long de l'alidade, et l'on trace la ligne indéfinie BC. Quand la distance BC est mesurée, on porte une distance proportionnelle donnée par l'échelle; on a alors sur le plan trois droites, *fa*, *ab*, *bc*, qui correspondent proportionnellement aux trois côtés FA, AB, BC, du polygone; on transporte la planchette en C, et on applique l'alidade sur la ligne au crayon *bc*; on tourne la planchette jusqu'à ce qu'on aperçoive à travers les pinnules le jalon placé en B. Alors,

et sans toucher à la planchette, on fait pivoter l'alidade autour de l'aiguille en C, jusqu'à ce qu'on aperçoive à travers les pinnules le jalon planté en D; on trace sur le plan la ligne au crayon *cd*; on fait mesurer sur le terrain la ligne CD, et l'on porte une ouverture proportionnelle de compas, ce qui détermine le point *d*. La planchette est transportée ensuite en D, avec les précautions indiquées ci-dessus; on tourne la planchette jusqu'à ce que l'alidade dirigée sur CD laisse découvrir le jalon en C; alors on fait pivoter l'alidade autour de l'aiguille en D, jusqu'à ce qu'on découvre à travers les pinnules le jalon en E; on trace la ligne indéfinie *de* au crayon, et on porte dessus une ouverture de compas proportionnelle à la distance CE que l'on a fait mesurer à la chaîne. L'opération est terminée; car il ne reste plus qu'à joindre sur le plan les points E et F, qui ferment le polygone *abcdef*, semblable au terrain ABCDEF.

Pour vérifier le plan, il faudra faire mesurer sur le terrain le côté EF, et voir si la ligne *ef* du plan contient un même nombre de parties que la ligne EF du terrain. Si ce nombre est le même, l'opération est exacte et le *polygone est fermé*.

81. On peut opérer de plusieurs manières avec la planchette, selon les circonstances. Dans le cas précédent (*fig.* 49), on supposait que du point A on ne pouvait pas apercevoir les jalons placés en B, C, D, E, F, ce qui a nécessité le transport successif de la planchette à tous les angles du polygone.

82. Si, au contraire, du point A on peut apercevoir tous les jalons en B, C, D, E, F (*fig.* 50), on peut éviter de transporter la planchette à plusieurs stations différentes, opérations toujours difficiles à exécuter sur le terrain et qui exigent beaucoup de temps pour retrouver la situation horizontale et la coïncidence du point indiqué sur le papier par une aiguille, et du point de station qui est le sommet d'un des angles du polygone.

Dans l'hypothèse où la planchette n'a pas besoin d'être transportée, on place la planchette en A; on marque sur le plan un point *a* qui coïncide par une verticale au sommet A du polygone; on plante une aiguille au point *a*; on dirige l'alidade selon AB, et dès qu'on aperçoit le jalon B à travers les pinnules, on fait glisser une pointe de crayon le long de l'alidade, ce qui détermine sur le plan la ligne indéfinie *ab*; on fait pivoter l'alidade autour de l'aiguille en *a*, et on la dirige sur C; on trace alors la ligne indéfinie *ac*; dirigeant l'alidade, toujours appuyée sur A, dans l'alignement AD, on trace sur le plan la ligne indéfinie *ad*; on agit de la même manière pour tracer les lignes indéfinies *ae* et *af*.

On envoie alors mesurer sur le terrain les distances AB, AC, AD, AE, AF; on prend sur l'échelle autant d'unités qu'il y en a dans les longueurs mesurées sur le terrain, et on marque sur le plan les points *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Il ne reste plus qu'à tirer *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, qui sont les côtés du polygone *abcdef*, semblable au poligone du terrain ABCDEF.

83. Il peut arriver qu'au milieu du terrain à mesurer il y ait une élévation qui permette d'apercevoir tous les sommets des angles du polygone.

Si le terrain ABCDEFGH présente cette disposition, placez votre planchette en O (*fig.* 51) de manière à pouvoir distinguer simultanément tous les jalons en A, B, C, D, etc. Il est inutile de répéter que la tablette doit être dressée bien horizontalement, puisque c'est une condition indispensable de l'exactitude du plan.

Quand le point O est déterminé sur le plan par une aiguille enfoncée perpendiculairement, on dirige l'alidade de O en A, de manière qu'elle s'appuie contre l'aiguille plantée en O, et que l'on aperçoive par les pinnules le jalon planté en A; tracez alors la ligne indéfinie O*a*; dirigez ensuite successivement l'alidade sur les points B, C, D, etc., et tracez sur le plan les lignes indéfinies O*b*, O*c*, O*d*, O*e*, O*f*, O*h*.

Faites mesurer à la chaîne les distances OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, et prenez autant de parties sur l'échelle qu'il y a d'unités de mesures dans les distances chaînées sur le terrain: vous aurez les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*; il ne reste qu'à tracer sur le plan les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, *gh*, et le plan sera terminé.

84. Si l'élévation, au lieu de se trouver dans l'intérieur du polygone, se trouvait au dehors, c'est là qu'il faudrait établir la station, pourvu que de ce point on découvrît simultanément tous les jalons plantés aux sommets des angles. Ce cas ne présente aucune difficulté.

On pourrait également placer la planchette sur un des côtés du polygone.

85. Dans les problèmes précédents que nous avons résolus avec la planchette, il a fallu mesurer un grand nombre de distances sur le terrain. Voici un procédé très rapide pour éviter de prendre toutes ces mesures; on l'appelle *méthode des intersections*.

Aux extrémités A et B de la droite AB, prise comme directrice du plan (*fig*, 52), plantez des jalons et mesurez cette base à la chaîne; placez la planchette en A, et tracez selon la direction AB une ligne *ab* sur le plan, proportionnelle à la distance

AB. Au point A est plantée une aiguille contre laquelle on appuiera l'alidade, que l'on dirigera successivement selon AC, AD, AE, AF, AG, AH, et on tracera sur le plan les lignes indéfinies A*c*, A*d*, A*e*, A*f*, A*g*, A*h*.

Transportez ensuite la planchette au point B, de manière que le point B du plan tombe bien perpendiculairement sur le sommet de l'angle B du polygone.

Plantez une aiguille en B sur le plan, et dirigez successivement l'alidade selon BF, BE, BD, BC, BH, BG, vous tracerez les lignes indéfinies B*f*, B*e*, B*d*, B*c*, B*h*, B*g*, sur le plan ; leur intersection avec les lignes indéfinies tracées de la station A déterminera les points *f*, *e*, *d*, *c*, *h*, *g*; il n'y aura plus alors qu'à tirer les droites *bf*, *fe*, *ed*, etc., qui sont les côtés du polygone A*cdef*B*gh*, semblable au polygone du terrain.

Ce procédé, qui est très rapide pour tracer les plans, ne donne pas un résultat rigoureux, parce que l'intersection n'est pas toujours nettement déterminée, surtout lorsque les angles sont très aigus ou très obtus. Cependant, quand le terrain n'est pas d'une grande étendue, et n'a qu'une soixantaine d'arpents, on peut employer sans inconvénients la *méthode des intersections*.

86. Les différents procédés que nous venons d'indiquer suffisent pour faire connaître la pratique de la planchette, qui est un instrument commode et très répandu. Un de ses plus grands avantages est de rendre avec fidélité les moindres détails d'un plan.

Dès que le polygone est fermé, et que l'on est bien sûr de ses opérations, on trace dans l'intérieur du plan les accidents qui peuvent s'y rencontrer,

tels que les chemins, les ruisseaux, les natures de terrain, etc.

CHAPITRE SEPTIÈME.

GRAPHOMÈTRE.

87. Au lieu d'effectuer les opérations linéaires sur le terrain au moyen de la planchette, on peut faire un *croquis* de la surface que l'on doit mesurer, et prendre note exactement de toutes les longueurs et de tous les angles. Le croquis doit représenter, aussi exactement qu'il est possible, la figure du terrain, avec ses divers accidents. Il n'est pas nécessaire de donner aux détails sur le croquis leur grandeur proportionnelle, ils échapperaient à la vue. On les dessine habituellement de manière qu'ils soient faciles à distinguer. Revenu chez soi, on peut remettre le tout en proportion avec une échelle, lorsqu'on a relevé ses mesures avec quelque soin, et lorsqu'on n'a pas craint de prendre beaucoup de notes sur les détails du plan.

Dans cette manière d'opérer, on substitue à la planchette un instrument qui sert à mesurer les angles, et que l'on nomme *graphomètre*.

88. Le graphomètre est un instrument composé d'un demi-cercle de cuivre, dont le limbe ou bord est divisé en 200 grades, ou en 180 degrés, ayant une alidade immobile et une alidade qui tourne sur le centre. Ces deux alidades sont munies à leurs extrémités de pinnules pour observer les objets. Quand il s'agit d'examiner des points éloignés, on remplace les alidades à pinnules par des lunettes, dans l'intérieur desquelles se trouvent des fils perpendiculaires entre eux, qui donnent exactement la place des objets. Les lunettes sont garnies en outre de *vis de rappel* pour mettre le plan de l'instrument dans l'inclinaison que l'on veut lui donner.

89. Le limbe du graphomètre est divisé en degrés et en demi-degrés. Cette division, qui suffit dans des opérations simples, se trouve insuffisante pour obtenir une grand précision ; on y remédie au moyen d'un *vernier*, qui donne les fractions de degrés.

Sur chaque extrémité de l'alidade mobile est un arc de cercle d'un certain nombre de degrés, ayant le même centre que l'instrument. Supposons cet arc de cercle de 19 degrés du limbe : au lieu d'être divisé en 19 parties, on le divise en 20 parties égales, en sorte que, si la première division du vernier correspond exactement avec la première division du limbe, la seconde division du vernier ne correspondra pas exactement avec celle du limbe, mais en différera d'un vingtième. En effet, avec un peu d'attention, on comprendra facilement que, si l'arc de l'alidade mobile, qui vaut 20 degrés de limbe, était divisée en 20 parties égales, les degrés du vernier correspondraient exactement aux degrés du limbe ; ce qui ne saurait arriver, puisque 19 degrés du vernier valent 20 degrés du limbe : d'où l'on tire le rapport 19 : 20, ou 19/20. Chacune des divisions du vernier, au lieu de valoir 100 minutes, vaudra 95 minutes, et ne différera de celle du limbe que de 5 minutes. Ainsi donc la première division du vernier ne différera de la première division du limbe que de 5 minutes, la seconde différera de

10 minutes, la troisième de 15, la quatrième de 20, etc., etc. ; en sorte que l'on peut ajouter les minutes comptées sur le vernier aux degrés comptés sur le limbe, ce qui fournit une assez grande précision.

Enfin, au milieu du graphomètre se trouve une petite boussole qui sert à *orienter* le plan, c'est-à-dire à faire connaître la position du lieu où l'on se trouve et des objets que l'on observe, par rapport au méridien.

Le graphomètre se place sur un trépied auquel il s'adapte par une douille surmontée d'un genou en cuivre.

90. Pour vérifier un graphomètre, on peut tracer un triangle sur le terrain et en mesurer séparément les angles. Si l'on trouve, en faisant la somme, 200 degrés, ou à très peu de chose près, on a un bon instrument. Il est prudent de recommencer plusieurs fois l'opération.

On doit examiner si les pinnules se correspondent parfaitement, et mesurer avec une ouverture de compas les divisions du limbe.

On peut aussi remarquer autour de soi un certain nombre d'objets, et mesurer les angles qu'ils font avec l'instrument. C'est ce qu'on appelle *faire un tour d'horizon*. La somme de ces angles doit être égale à 400 grades : car nous avons vu que tous les angles autour d'un point, sur un même plan, valent 4 droits ou 400 grades.

91. Au moyen du graphomètre :

1° *On calcule l'amplitude numérique d'un angle sur le terrain* (*fig.* 53).

Soit l'angle ABC dont on veut calculer l'amplitude numérique. On en forme d'abord le croquis sur le papier, puis on plante des jalons aux points A et

C, et on place le graphomètre au point B, de manière que le centre réponde exactement au sommet B, ce qui est facile à vérifier avec un fil à plomb que l'on attache au centre.

Pour vérifier si le limbe du graphomètre est parfaitement horizontal, on se sert du *niveau*.

Quant le graphomètre sera dans le plan horizontal, on dirigera l'alidade immobile sur le point C' et l'alidade mobile sur le point A'; on s'assurera si les pinnules correspondent bien exactement aux points cherchés, et l'on n'aura plus qu'à examiner sur le limbe le nombre de degrés et de minutes que contient l'angle A' B' C'.

Il est à remarquer que ce n'est pas la mesure de langle ABC que donne le graphomètre, mais celle de l'angle A' B' C' son égal.

92. 2° *On élève une perpendiculaire sur une droite donnée.* Placez le graphomètre au point C, (*fig.* 54); dirigez l'alidade immobile selon la direction AB; il suffit de diriger l'alidade mobile sur le 100° grade du limbe, pour obtenir la direction CD, qui est la perpendiculaire demandée.

Si l'on voulait abaisser la perpendiculaire du point D sur la direction AB, on placerait l'alidade mobile sur le 100e grade ou le 90° degré du limbe, on dirigerait les alidades immobiles dans l'alignement AB, et l'on chercherait par des tâtonnements un point sur la ligne AB tel que les pinnules de l'alidade mobile correspondissent au jalon planté d'avance en D, tandis que les pinnules de l'alidade immobile indiqueraient toujours l'alignement AB. Le point C, qui correspond à la direction des deux alidades, est le point cherché; C D est la perpendiculaire abaissée de D sur AB.

93. Avec le graphomètre et la chaîne métrique, on lève un plan : le graphomètre donne l'amplitude numérique des angles, et la chaîne métrique les distances en mètres; c'est tout ce qu'il importe de connaître. Au moyen de ces résultats on construit le plan par les moyens graphiques.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur l'emploi du graphomètre. On voit que, par son moyen, on peut mesurer tous les angles d'un polygone et le diviser en triangles et en trapèzes, lorsque le terrain est accessible. Quant aux problèmes trigonométriques, nous renvoyons aux traités complets, qui conviennent aux ingénieurs et aux géomètres du cadastre.

94. Dans la topographie, et même dans l'arpentage, on emploie aujourd'hui le *petit cercle de Borda* et le *goniasmomètre*. Ce dernier instrument est composé de deux parties de cylindres droits dont l'inférieure est fixe et la supérieure seule est mobile. La circonférence du cylindre supérieur est divisée en 400 grades ou 360 degrés.

Une vis placée au-dessous du cylindre imprime le mouvement à la portion supérieure.

Le cylindre inférieur est percé de deux fentes terminées par de petites fenêtres : le cylindre supérieur est percé de quatre fentes à fenêtres.

On comprend que le goniasmomètre sert à la fois d'équerre et de graphomètre. Cet instrument, inventé ou du moins perfectionné par les officiers d'artillerie de l'école de Metz, convient principalement aux officiers d'état-major, aux ingénieurs géographes et aux géomètres du cadastre.

Nous devons parler ici d'un instrument qui peut dans bien des cas remplacer la chaîne et donner les mesures de distance même avec plus de précision que celle-ci, surtout lorsque le terrain est accidenté; il peut aussi procurer l'économie d'un aide quand il est substitué à la chaîne. Cet instrument est le *micromètre*, dont la théorie est fondée sur ce seul principe, que les angles sous lesquels un même objet est vu sont en raison inverse de sa distance. Si l'on a vu un objet placé à une distance quelconque sous un angle de 20 minutes, et qu'après s'en être rapproché il soit aperçu sous un angle de 40 minutes, on est assuré que la nouvelle distance est exactement la moitié de la première, parce que l'angle s'est trouvé double à la seconde station; mais si l'on forme un angle fixe dans la lunette, cet angle embrassera une plus ou moins grande partie d'un même objet, suivant que sa distance sera plus grande ou plus petite. Si, de plus, cet objet est d'une grandeur connue, et qu'il porte des divisions, on pourra connaître la distance à laquelle on est de l'objet, si l'on sait d'ailleurs le nombre de divisions auquel répond l'ouverture de l'angle fixe à une distance donnée.

Telle est l'invention de la *stadia* ou mire, qui, avec la pièce placée au foyer de la lunette, forme tout l'appareil de ce procédé.

La stadia est une règle de sapin d'un peu plus de 3 mètres de long, d'un décimètre de large, et de deux centimètres d'épaisseur. Elle est armée par le bas d'une pointe de fer; elle se plie en deux au milieu au moyen d'une charnière de toute la largeur de la règle; un fil à plomb attaché à la stadia sert à la placer dans une position verticale. La stadia est peinte en blanc; on trace en noir les divisions de 15 centimètres de hauteur, qui représentent chacune 10 mètres. Une division de la stadia au milieu, et une dans la partie supérieure, seront divisées en 10 parties, et chaque partie représente un mètre.

Nous n'entrerons pas dans plus de détails sur ce bel instrument, qui jusqu'à présent n'a guère été employé que dans la topographie militaire.

CHAPITRE HUITIÈME.

DE LA BOUSSOLE.

95. La boussole, qui d'abord ne servait que dans la marine, a été plus tard appropriée aux besoins de l'arpentage (1).

La boussole d'arpenteur (*fig.* 55) se compose d'une aiguille aimantée, munie d'une chape d'aga-

(1) La propriété directrice de l'aimant est une des plus belles découvertes que les hommes aient jamais faites; elle a fourni aux navigateurs le moyen de reconnaître leur route à travers l'immensité des mers, au milieu des nuits les plus obscures qui dérobent la vue des astres.

Une simple aiguille aimantée, suspendue en équilibre sur un pivot, devient un guide sûr qui permet aux hommes d'aller à la découverte de continents nouveaux, ou d'arriver directement dans un port après avoir parcouru des mers étendues.

On ignore le nom de celui auquel le genre humain doit un si grand bienfait. Cependant on trouve des preuves certaines de l'existence de la boussole appliquée à la navigation, dans le 12e siècle, vers l'an 1150. La boussole, après avoir été employée seulement dans la marine, fut, plus tard, appliquée à l'arpentage, et rangée parmi les *gorimètres*, ou instruments qui fournissent l'amplitude numérique des angles. Des voyageurs dignes de foi racontent que la boussole était employée de temps immémorial en Chine, mais que les Chinois ne s'en servaient que dans les voyages sur terre. (*Manuel général*, journal officiel de l'instruction primaire, t. 6, n° 3.)

peut aussi procurer l'économie d'un aide quand il est substitué à la chaîne. Cet instrument est le *micromètre*, dont la théorie est fondée sur ce seul principe, que les angles sous lesquels un même objet est vu sont en raison inverse de sa distance. Si l'on a vu un objet placé à une distance quelconque sous un angle de 20 minutes, et qu'après s'en être rapproché il soit aperçu sous un angle de 40 minutes, on est assuré que la nouvelle distance est exactement la moitié de la première, parce que l'angle s'est trouvé double à la seconde station; mais si l'on forme un angle fixe dans la lunette, cet angle embrassera une plus ou moins grande partie d'un même objet, suivant que sa distance sera plus grande ou plus petite. Si, de plus, cet objet est d'une grandeur connue, et qu'il porte des divisions, on pourra connaître la distance à laquelle on est de l'objet, si l'on sait d'ailleurs le nombre de divisions auquel répond l'ouverture de l'angle fixe à une distance donnée.

Telle est l'invention de la *stadia* ou mire, qui, avec la pièce placée au foyer de la lunette, forme tout l'appareil de ce procédé.

La stadia est une règle de sapin d'un peu plus de 3 mètres de long, d'un décimètre de large, et de deux centimètres d'épaisseur. Elle est armée par le bas d'une pointe de fer; elle se plie en deux au milieu au moyen d'une charnière de toute la largeur de la règle; un fil à plomb attaché à la stadia sert à la placer dans une position verticale. La stadia est peinte en blanc; on trace en noir les divisions de 15 centimètres de hauteur, qui représentent chacune 10 mètres. Une division de la stadia au milieu, et une dans la partie supérieure, seront divisées en 10 parties, et chaque partie représente un mètre.

Nous n'entrerons pas dans plus de détails sur ce bel instrument, qui jusqu'à présent n'a guère été employé que dans la topographie militaire.

CHAPITRE HUITIÈME.

DE LA BOUSSOLE.

95. La boussole, qui d'abord ne servait que dans la marine, a été plus tard appropriée aux besoins de l'arpentage (1).

La boussole d'arpenteur (*fig.* 55) se compose d'une aiguille aimantée, munie d'une chape d'aga-

(1) La propriété directrice de l'aimant est une des plus belles découvertes que les hommes aient jamais faites; elle a fourni aux navigateurs le moyen de reconnaître leur route à travers l'immensité des mers, au milieu des nuits les plus obscures qui dérobent la vue des astres.

Une simple aiguille aimantée, suspendue en équilibre sur un pivot, devient un guide sûr qui permet aux hommes d'aller à la découverte de continents nouveaux, ou d'arriver directement dans un port après avoir parcouru des mers étendues.

On ignore le nom de celui auquel le genre humain doit un si grand bienfait. Cependant on trouve des preuves certaines de l'existence de la boussole appliquée à la navigation, dans le 12e siècle, vers l'an 1150. La boussole, après avoir été employée seulement dans la marine, fut, plus tard, appliquée à l'arpentage, et rangée parmi les *gorimètres*, ou instruments qui fournissent l'amplitude numérique des angles. Des voyageurs dignes de foi racontent que la boussole était employée de temps immémorial en Chine, mais que les Chinois ne s'en servaient que dans les voyages sur terre. (*Manuel général*, journal officiel de l'instruction primaire, t. 6, n° 3.)

te ; elle est soutenue dans une situation horizontale par la pointe d'un pivot aigu d'acier.

La pointe de l'aiguille répond à un limbe divisé en 400 grades ou 360 degrés.

La boussole est renfermée dans une boîte carrée, dont le couvercle s'adapte à coulisses. Pour empêcher que les mouvements de l'air n'influent sur ceux de l'aiguille aimantée, le limbe est recouvert d'une glace qui intercepte toute communication avec l'extérieur.

Quand on transporte la boussole d'un lieu dans un autre, on empêche l'aiguille de ballotter au moyen d'un petit ressort *a* qui la rend immobile à volonté.

Sur une des faces latérales de la boîte est appliquée une alidade à visière, pivotant autour d'un axe, ou une alidade à lunette. Il y a plusieurs manières d'adapter l'alidade à la boîte, mais l'usage en est toujours le même. Dans toutes les méthodes, les pinnules sont dirigées du *nord* au *sud*.

La boussole s'adapte sur un pied par un genou à coquilles, ou préférablement par un genou à deux mouvements : elle doit être maintenue dans un plan horizontal.

Pour mesurer l'angle B (*fig.* 53) au moyen de la boussole, placez l'instrument horizontalement au point B, dirigez la visière sur le point A, et examinez le nombre de degrés qu'indique la flèche de l'aiguille aimantée ; dirigez ensuite la visière sur le jalon planté en C ; examinez de nouveau le nombre de degrés que marque sur le limbe la flèche de l'aiguille aimantée : la différence de ces deux résultats est l'expression de l'amplitude numérique de l'angle B, quand l'aiguille aimantée a toute la liberté de ses mouvements.

96. Plusieurs motifs empêchent de substituer la boussole au graphomètre dans la mesure des angles : le mouvement de l'aiguille ne permet pas d'obtenir leur valeur à moins d'un demi-degré près, approximation souvent insuffisante ; d'un autre côté, la présence des matières ferrugineuses dérange l'aiguille autant que les variations atmosphériques.

Mais si la boussole n'est pas susceptible de donner une grande précision, on l'emploie utilement pour lever le plan des bâtiments ; elle donne rapidement l'inclination des murs et des cloisons. Plusieurs arpenteurs habiles préfèrent même la boussole à la planchette et au graphomètre pour relever de grandes surfaces : un de ses avantages est de ne pas laisser les erreurs s'accroître dans la mesure des angles.

Avec la boussole on n'opère pas immédiatement comme avec la planchette, mais on suit la marche que nous avons indiquée pour le graphomètre, c'est-à-dire que l'on fait un croquis. On rapporte ses mesures sur le papier; savoir, les longueurs avec l'échelle de proportion, et les angles avec le rapporteur. Ce qui a été dit sur les plans levés au graphomètre s'applique aux plans levés à la boussole.

97. Il est d'usage d'*orienter les plans*, c'est-à-dire de tracer une ligne dans la direction du *nord* au *sud*. Une perpendiculaire à cette ligne donne les deux autres points cardinaux, l'*est* et l'*ouest*.

Pour orienter un plan, on mesure un angle avec le graphomètre.

On porte le graphomètre à boussole au point C (*fig.* 54) ; on dirige l'alidade parallèle à la ligne du nord de la boussole, sur le côté CD, de manière que le point nord de la boussole soit dirigé vers D.

On relève l'angle indiqué par l'aiguille de la boussole. Si l'on trouve que l'angle donné par l'aiguille de la boussole et le rayon visuel de l'alidade soit de 45 g., en retranchant de ce nombre la déclinaison de la boussole, que nous supposons ici de 24 g. le reste 21 g. indiquera le vrai nord ou la méridienne du lieu.

98. Si l'aiguille aimantée se dirigeait toujours vers le vrai nord, rien ne serait plus difficile que d'orienter un plan; mais elle s'en écarte d'une certaine quantité, qu'on appelle *déclinaison*. Cette déclinaison n'est pas assujettie à des lois invariables; elle change même d'une année à l'autre, et varie selon les lieux. Il est donc important d'avoir la déclinaison du temps et du lieu. On l'obtient en traçant une méridienne ou ligne du vrai nord: l'angle que fait cette ligne avec l'aiguille aimantée est la déclinaison du temps et du lieu.

99. Pour tracer une méridienne, on élève, sur un terrain bien horizontal un bâton de 18 pouces de haut, portant à son extrémité supérieure une plaque de fer percée d'un petit trou et inclinée un peu à l'horizon. Par le trou, faites passer un fil à plomb: il indiquera sur la terre le pied d'une perpendiculaire dont le petit trou de la plaque est le sommet. A dix heures du matin, quand il fait soleil, marquez sur le terrain le point brillant qui se trouve dans l'ombre projetée par la plaque. Ce point est fourni par le petit trou dont nous avons déjà parlé. Du pied de la perpendiculaire, indiqué par le fil à plomb, et avec un rayon terminé au point brillant, décrivez un arc de cercle. On observe après midi l'instant où le centre du petit trou éclairé tombe exactement sur l'arc que l'on a tracé. Si l'on joint par une ligne droite le pied de la perpendiculaire au milieu de l'arc dont les extrémités ont été formées par les deux points lumineux avant et après midi, cette ligne sera la méridienne cherchée.

Nous ferons remarquer que ce moyen bien simple n'est d'une grande exactitude qu'aux mois de juin et de décembre; il est moins exact dans les autres mois; cependant l'erreur n'est pas considérable, et peut être négligée quand il s'agit d'orienter un plan.

100. On applique la boussole aux planchettes, qui prennent alors le nom de *panchettes orientées*. Ces planchettes sont très commodes pour arpenter les terrains couverts, et qui offent beaucoup de détails. Avec les planchettes orientées on ne mesure pas l'angle que fait chaque rayon visuel avec les rayons précédents, mais celui qu'il fait avec le méridien, en sorte que les erreurs ne s'accroissent pas à chaque nouvelle opération, comme il n'arrive que trop souvent avec les planchettes ordinaires. Elles ont encore un autre avantage sur les planchettes ordinaires, c'est que le plan se dessine sur le terrain même, et que les erreurs se découvrent tout de suite.

Nous ajouterons encore un mot sur la planchette. Le papier se tend ou s'allonge, par suite de la chaleur ou de l'humidité. On remédie à cet inconvénient en se servant d'une planchette vernissée sur laquelle on dessine comme si elle était couverte de papier; mais il faut reporter ensuite le plan sur une feuille de papier au moyen d'un compas. Quand le plan est terminé, on enlève, avec une éponge, les traces des lignes.

Dès que le vernis est usé, on en met un nouveau, après avoir soigneusement enlevé les traces de l'ancien. Il faut appliquer plusieurs couches successives.

101. Nous avons donné les règles pour arpenter avec la planchette, le graphomètre et la boussole. Nous n'entrerons pas dans des détails qui nous écarteraient du but que nous nous sommes proposé. Une expérience de quelques jours sur le terrain et l'usage des instruments en apprendra plus aux élèves que de longues explications, toujours difficiles à saisir à la lecture.

En résumant, nous dirons que l'on peut mesurer un terrain :

1° Avec la chaîne seule et des jalons (les *jalons* sont nécessaires dans tous les cas);

2° Avec l'équerre d'arpenteur et la chaîne ;

3° Avec la planchette et la chaîne (nous comprenons dans cette indication générale la planchette orientée et la planchette vernissée);

4° Avec le graphomètre et la chaîne.

5° Avec la boussole et la chaîne.

CHAPITRE NEUVIÈME.

DESSIN DU PLAN.

102. Nous supposons qu'au moyen du graphomètre ou de la boussole on a mesuré les angles, et qu'au moyen de la chaine on a relevé exactement sur le terrain, et indiqué sur le croquis toutes les longueurs utiles à connaître ; il reste encore à dessiner le plan sur le papier.

On a besoin, pour ce travail, de compas, d'équerres en bois ou en cuivre, de rapporteurs en cuivre

ou en corne, d'une échelle de proportion, et d'une bonne règle.

103. *Compas.* Nous n'en ferons pas la description ; nous dirons seulement qu'un compas, pour être bon, doit avoir ses pointes bien fines, que ces pointes doivent coïncider avec une grande précision quand le compas est fermé, et que la charnière doit être convenablement serrée. Dans les compas fins, on serre et on desserre la charnière avec une petite clé à deux pointes. L'instituteur recommandera aux élèves le plus grand soin dans la conservation de cet instrument ; il ne faut pas s'en servir pour jouer, il faut l'essuyer quand on s'en est servi, pour que l'humidité ne rouille pas les pointes. La pointe de rechange, qui porte un tire-ligne, a besoin d'être nettoyée très proprement ; c'est au maître à exercer une surveillance active.

104. *Équerre en cuivre.* Les équerres en cuivre sont exactes, mais elles offrent un grand inconvénient, celui de salir le papier. Nous préférons de bonnes équerres en bois; nous en parlerons au chapitre *Du lavis.*

105. *Rapporteurs en cuivre ou en corne.* Un rapporteur est un demi-cercle dont le limbe ou bord est divisé en 200 grades ou en 180 degrés. On trouve des rapporteurs avec la double division du limbe en 200 grades et en 180 degrés. Le centre du cercle est indiqué par un point, et le diamètre par une ligne apparente. Le rapporteur en cuivre a l'inconvénient de salir le papier. Le rapporteur en corne est plus agréable à employer ; mais, comme il se déjette souvent par l'effet de l'humidité ou de la sécheresse, il faut avoir soin de ne pas le laisser exposé au soleil ou à l'humidité.

106. *Échelle de proportion.* Nous avons donné plus haut l'explication de l'échelle de proportion, et les moyens de la construire. On vend des échelles de proportion tracées sur des règles de cuivre ou sur des règles de buis.

107. *Règles.* On vérifie une règle en l'ajustant à l'œil, comme font les menuisiers, mais ce résultat ne fournit qu'une approximation.

Voici le moyen employé par les ingénieurs : On trace une ligne sur le papier avec la règle ; on la retourne bout à bout, et on trace un second trait sur le premier ; si les deux traits coïncident, la règle est juste.

108. Pour montrer l'usage des instruments, nous allons indiquer la construction d'un plan d'après un croquis (*fig.* 56).

Sur la feuille de papier que l'on destine à recevoir le plan, on tracera au crayon de mine de plomb, et avec la règle, une ligne indéfinie qui servira à représenter la droite IE. On choisit une échelle selon la grandeur que l'on veut donner au plan. Supposons que les parties de la ligne IE mesurées sur le terrain sont :

Mesure des parties de la directrice.

IQ	=	4^{m}
QE	=	11 50
LM	=	13 10
MP	=	18 25
PE	=	8 55
IK	=	7 60
KN	=	18 70
NO	=	20 80
OE	=	8 10
Total.		110.40

Supposons la perpendiculaire AQ de $9^{m}10$ et la perpendiculaire KH de $8^{m}20$.

En adoptant l'échelle d'un millimètre par mètre, comme nous l'avons indiqué pour les plans d'une certaine étendue, la ligne IE serait représentée par 110 millim. 40, longueur beaucoup trop petite. Nous pouvons aisément prendre ici un demi-centimètre par mètre, ce qui donnera à la base IE une longueur de 5 décimètres 52, c'est-à-dire d'un demi-mètre environ. Cette dimension est un peu considérable, mais elle sert ici pour un très petit terrain, et les mesures sont plus faciles à prendre sur l'échelle.

D'après ce que nous avons dit, chap. V, on fera usage du décimètre, qui remplace ici l'échelle.

Sur une ligne indéfinie *ac* (*fig.* 57), je porte de *a* en *b* une ouverture de compas égale à 2 centimètres et correspondante à IQ, qui est de 4 mètres. Au point *b*, je pose une équerre ou le rapporteur en corne, et j'élève une perpendiculaire indéfinie ; je prends une ouverture de compas égale à 4 centimètres 5 dixièmes, ou 45 millimètres, de *b* en *d*, et je trace avec la règle et le crayon de mine de plomb la ligne *ad*. Le triangle *abd* du plan est semblable au triangle IAQ du croquis.

Pour déterminer le point C, je remarque que IK est de 7 mètres 60, ce qui me donne proportionnellement 3 centimètres 8 millimètres ou 38 millimètres ; je prends donc une ouverture de compas de 38 millimètres, que je porte de *a* en *c*. Au point *c*, avec l'équerre ou le rapporteur, j'élève une perpendiculaire indéfinie, et je détermine *e* en portant de *c* en *e* une perpendiculaire de 4 centimètres 1 millimètre, proportionnelle à KH, qui est sur le croquis de 8 mètres 20. Je pose la règle sur les extrémités *a* et *e*, et je trace au crayon la ligne *ae*; le triangle *ace* du plan est semblable au triangle IKH du croquis.

On déterminera par la même méthode les points L, B, M, G, N, C, O, P, F, de la figure 56, et on fermera le polygone, qui sera le plan exact du terrain, dont la figure 56 n'est supposée que le croquis. Si l'on veut évaluer la superficie de ce plan, voici les calculs que l'on sera obligé de faire :

Mesure des perpendiculaires.

AQ=9ᵐ10, KH=8ᵐ20, BL=12ᵐ80, GN=14ᵐ60, CM=6ᵐ60, DO=10ᵐ80, FP=9ᵐ70.

On combine les mesures des perpendiculaires avec les mesures des parties de la directrice indiquées plus haut ; ce sont les côtés des triangles et des trapèzes.

Triangle AIQ.	Multiplier la base 4ᵐ par la hauteur 9.10, et prendre la moitié du produit	18ᵐ20
Trapèze AQLB.	Ajouter les deux bases parallèles 9.10 et 12.80, multiplier cette somme pas la hauteur 11.50, et prendre la moitié du produit.	125.93
Trapèze BLNC.	Ajouter les deux bases parallèles 12.80 et 6.60, multiplier cette somme par la hauteur 13.10, et prendre la moitié du	
		144ᵐ13

	Report.	144.13
	produit.	127.07
Trapèze CNOD.	Ajouter les deux bases parallèles 6.60 et 10.80, multiplier la somme par la hauteur 18.25, et prendre la moitié du produit.	158.78
Triangle DOE.	Multiplier la base 8.35 par la hauteur 10.80, et prendre la moitié du produit.	45.09
Triangle PFE.	Multiplier la base 8.10 par la hauteur 9.70, et prendre la moitié du produit.	39.29
Trapèze PFGM.	Ajouter les deux bases parallèles 9.70 et 14.60, multiplier la somme par 20.80, et prendre la moitié du produit	252.72
Trapèze MGHK.	Ajouter les deux parallèles 14.60 et 8.20, multiplier la somme par 18.70, et prendre la moitié de ce produit.	213.18
Triangle KIH.	Multiplier la base 7.60 par la hauteur 8.20, et prendre la moitié du produit.	31.16
	Total.	1011ᵐ42

La surface de la figure 56 est de 1011 mètres carrés, 42 décimètres carrés, ou de 10 ares 11 centiares.

Pour vérifier l'exactitude du plan, supposons que l'on ait mesuré au graphomètre, sur le terrain, l'angle ABC, valant 125 grades, on posera le rapporteur sur le plan, et on prendra exactement la mesure des deux angles du plan correspondant aux deux angles ABL et LBC du croquis : la somme doit être de 125 grades, ou n'en différer que de très peu de minutes.

109. Nous ne faisons pas connaître les formules trigonométriques pour la résolution des triangles, parce que l'on ne peut opérer le calcul qu'avec le secours des tables de logarithmes et des tables de sinus, et que nous croyons l'intelligence et l'usage de ces tables beaucoup trop difficiles pour les personnes qui emploieront ce traité élémentaire.

D'un autre côté, faisons observer à nos lecteurs que, malgré l'excellence des résultats obtenus par les procédés trigonométriques, il faut toujours en venir à l'exécution matérielle du plan. Quelles que soient les connaissances mathématiques d'un arpenteur, il faut qu'il se serve des instruments graphiques pour indiquer sur le plan la direction des côtés qui comprennent les angles : l'ouverture de ces angles eût-elle été prise en grades, minutes et secondes, ne saurait être reportée sur le plan qu'au moyen d'un rapporteur en corne ou en cuivre. Or, ces instruments ne sont pas assez exacts pour donner une précision de secondes et même de minutes : on est donc forcé de s'en tenir à des approximations.

Ainsi donc, tout en accordant une haute estime aux procédés théoriques, il faut toujours, pour dessiner le plan, recourir aux procédés graphiques; et c'est là où l'on s'aperçoit de l'insuffisance des instruments.

Dans la topographie militaire et dans le cadastre, la triangulation et les résolutions trigonométriques sont les meilleurs moyens à employer; mais dans la pratique ordinaire, dans l'arpentage des terres, dans le travail des géomètres particuliers du cadastre, les moyens graphiques suffisent et sont employés presque toujours avec un grand succès. La difficulté consiste à opérer avec exactitude, et pour cela il faut de l'habitude, de l'adresse et de l'intelligence.

CHAPITRE DIXIÈME.

MOYENS SIMPLES D'ARPENTAGE QUE LES INSTITUTEURS PEUVENT EMPLOYER POUR INSTRUIRE LEURS ÉLÈVES.

110. Les instituteurs n'ont pas toujours à leur disposition des instruments, qui coûtent fort cher quand ils ont quelque précision ; et il est cependant indispensable que les élèves opèrent sur le terrain, si l'on veut qu'ils aient des notions qui puissent s'appliquer. Nous avons cru rendre service aux instituteurs et aux élèves en leur fournissant des moyens simples pour relever presque toutes les surfaces.

Nous supposons que l'instituteur a parfaitement expliqué à ses élèves le commencement de cet ouvrage, et qu'il ne lui reste plus qu'à les faire opérer sur le terrain.

Soit le terrain accessible ABCDEFG (*fig.* 58) : pour marquer l'alignement GD, on substituera aux jalons des baguettes de coudrier bien droites et un peu fortes, que l'on rendra pointues par une extréque l'on ait mesuré au graphomètre, sur le terrain, l'angle ABC, valant 125 grades, on posera le rapporteur sur le plan, et on prendra exactement la mesure des deux angles du plan correspondant aux deux angles ABL et LBC du croquis : la somme doit être de 125 grades, ou n'en différer que de très peu de minutes.

109. Nous ne faisons pas connaître les formules trigonométriques pour la résolution des triangles, parce que l'on ne peut opérer le calcul qu'avec le secours des tables de logarithmes et des tables de sinus, et que nous croyons l'intelligence et l'usage de ces tables beaucoup trop difficiles pour les personnes qui emploieront ce traité élémentaire.

D'un autre côté, faisons observer à nos lecteurs que, malgré l'excellence des résultats obtenus par les procédés trigonométriques, il faut toujours en venir à l'exécution matérielle du plan. Quelles que soient les connaissances mathématiques d'un arpenteur, il faut qu'il se serve des instruments graphiques pour indiquer sur le plan la direction des côtés qui comprennent les angles : l'ouverture de ces angles eût-elle été prise en grades, minutes et secondes, ne saurait être reportée sur le plan qu'au moyen d'un rapporteur en corne ou en cuivre. Or, ces instruments ne sont pas assez exacts pour donner une précision de secondes et même de minutes : on est donc forcé de s'en tenir à des approximations.

Ainsi donc, tout en accordant une haute estime aux procédés théoriques, il faut toujours, pour dessiner le plan, recourir aux procédés graphiques; et c'est là où l'on s'aperçoit de l'insuffisance des instruments.

Dans la topographie militaire et dans le cadas-

tre, la triangulation et les résolutions trigonométriques sont les meilleurs moyens à employer ; mais dans la pratique ordinaire, dans l'arpentage des terres, dans le travail des géomètres particuliers du cadastre, les moyens graphiques suffisent et sont employés presque toujours avec un grand succès. La difficulté consiste à opérer avec exactitude, et pour cela il faut de l'habitude, de l'adresse et de l'intelligence.

CHAPITRE DIXIÈME.

MOYENS SIMPLES D'ARPENTAGE QUE LES INSTITUTEURS PEUVENT EMPLOYER POUR INSTRUIRE LEURS ÉLÈVES.

110. Les instituteurs n'ont pas toujours à leur disposition des instruments, qui coûtent fort cher quand ils ont quelque précision ; et il est cependant indispensable que les élèves opèrent sur le terrain, si l'on veut qu'ils aient des notions qui puissent s'appliquer. Nous avons cru rendre service aux instituteurs et aux élèves en leur fournissant des moyens simples pour relever presque toutes les surfaces.

Nous supposons que l'instituteur a parfaitement expliqué à ses élèves le commencement de cet ouvrage, et qu'il ne lui reste plus qu'à les faire opérer sur le terrain.

Soit le terrain accessible ABCDEFG (*fig.* 58) : pour marquer l'alignement GD, on substituera aux jalons des baguettes de coudrier bien droites et un peu fortes, que l'on rendra pointues par une extrémité pour les enfoncer en terre, et que l'on fendra à l'autre extrémité pour y adapter un papier blanc; on enfoncera une de ces baguettes au point G, et une autre au point D.

Si deux jalons ne suffisent pas, l'instituteur étant en G, par exemple, envoie un de ses élèves dans la direction GD au point H. L'élève appuie sa baguette verticalement sur la terre, et le maître observe si les trois baguettes G, H et D sont bien en ligne droite; si l'élève est trop à droite ou trop à gauche, il lui fait signe de se rapprocher de la direction GD. Quand les trois baguettes sont dans la même direction, l'élève enfonce sa baguette en H; et comme, dans ce mouvement, le jalon a pu se déranger de l'alignement, on vérifie de nouveau. Un second élève va planter, avec la même précaution, une baguette en I. On mesure alors la longueur GD.

111. Si l'instituteur n'a pas de chaîne métrique, voyons les moyens qui peuvent y suppléer : il y en a plusieurs.

1° Le premier est de compter le nombre de pas qu'il faut faire pour parcourir la distance GD. On suppose que l'instituteur, avec un peu de pratique, a adopté un pas régulier dont il connaît la longueur. Nous avons vu des personnes qui, sur des distances considérables, ne s'éloignaient pas sensiblement de la vraie mesure.

Ce moyen n'est pas cependant très exact, et nous ne le conseillons que lorsqu'il n'est pas possible d'en employer un autre, et toujours lorsqu'il ne s'agira que d'une approximation.

112. Le pas moyen de l'homme est estimé avoir une longueur de 2 pieds 5 pouces 7 lignes, ou de 0^m8. Dans cette hypothèse, 100 pas forment 80

mètres. Les officiers au corps royal des ingénieurs géographes ont adopté cette mesure, et ils s'habituent à régler leur marche de manière à obtenir une assez grande précision.

113. 2° Le second moyen consiste à prendre une corde, et à la diviser en demi-mètres par des nœuds. Cette division doit être faite avec un grand soin par l'instituteur, qui doit mesurer lui-même toutes les distances sur le terrain avec un élève intelligent. On comprend facilement qu'une corde étant fort extensible, si le mesurage était confié à des enfants, ils tendraient la corde inégalement; ils se feraient un jeu de cette opération importante, et commettraient un grand nombre d'erreurs.

Si la corde a été bien divisée, si elle est un peu grosse, si on la vérifie souvent, et si on la rectifie toutes les fois que l'on s'en sert, elle peut remplacer la chaîne métrique; cependant les influences qu'exercent sur sa longueur l'humidité et la sécheresse ne permettent pas d'employer la corde dans les opérations délicates.

114. 3° Voici encore un troisième moyen fort simple : on dispose deux perches de bois bien sec, chacune d'un double mètre de longueur, environ 6 pieds 2 pouces (6 p. 1 po. 10 l. 592), et divisées en décimètres. Un des élèves place une des perches au point G (*fig.* 58), dans la direction GD; il place la seconde à terre bout à bout avec la première, dans la même direction. Pour éviter les erreurs d'alignement, on peut tendre un cordeau par terre de G en H, et porter les perches à la suite l'une de l'autre, autant de fois qu'il sera nécessaire. On détachera ensuite la corde en G, et on la tendra de H en I et de I en D.

Supposons que par cette manière d'opérer on ait trouvé les longueurs suivantes :

$GA=6^m$, $AB=5^m$, $BC=11^m9$; $CD=10^m$
$DE=12^m\ 8$; $EF=13^m$, $FG=12^m$, $GB=12^m65$,
$GC=16^m\ 2$; $GD=18^m7$; $GE=18^m9$.

On construira une échelle, ou bien on prendra un décimètre qui servira d'échelle, dans le rapport d'un centimètre par mètre. Sur la feuille de papier qui doit contenir le plan, on tirera une ligne indéfinie, sur laquelle on portera 18 centimètres 7 millim. pour représenter GD; du point G comme centre et avec une ouverture de compas de 16 centimètres 2 millimètres, on décrira un arc de cercle; à l'autre extrémité D, et avec une ouverture de compas de 10 cent. ou d'un décimètre, on décrira un arc de cercle qui coupera le précédent en C; on joindra le point C au point G. On tracera ensuite la ligne CD; mais comme elle est limite de la propriété, on l'indiquera par une ligne à l'encre de Chine ou à l'encre ordinaire bien limpide.

Des points G et C successivement pris comme centre, avec des ouvertures de compas de 12 cent. 6 millimètres et de 11 cent. 9 millim., on tracera deux arcs de cercle avec la pointe du compas garnie d'un porte-crayon; le point B où ils se couperont est un nouveau sommet du polygone cherché. Des points G et B pris comme centre, et avec deux ouvertures de compas de 6 cent. et de 5 cent., on décrira deux arcs de cercle qui se couperont en A. En continuant de la même manière on dessinera sur le papier le plan du terrain que l'on a mesuré. Les lignes GA, AB, BC, CD, DE, EF, FG, sont tracées à l'encre, et les lignes ponctuées GB, GC, GD, GE, sont tracées au crayon.

Voici la marche à suivre pour avoir la superficie du polygone. Du point A, avec une équerre et un

crayon, on abaissera une perpendiculaire sur GB. Pour connaître la longueur de cette perpendiculaire A*a*, on la mesurera au compas sur le plan, et on portera cette ouverture sur l'échelle. Si l'on a pris le centimètre pour unité de l'échelle, comme nous l'avons supposé, il suffira de convertir les centimètres en mètres, pour avoir la longueur de la perpendiculaire. En multipliant la base 12.6 par la hauteur de la perpendiculaire, et en prenant la moitié du produit, on aura la mesure du premier triangle. On fera la même opération sur chacun des autres triangles; on ajoutera tous ces résultats, et l'on aura l'évaluation en mètres carrés et décimètres carrés de la figure 58.

115. On peut remarquer que par ce procédé on n'obtient pas directement les longueurs des perpendiculaires, mais qu'on les trouve au moyen de l'échelle de proportion. Si les côtés et les diagonales du polygone, figure 58, ont été relevés très exactement, on peut espérer un résultat assez juste. Mais on doit comprendre qu'il est presque indispensable d'avoir pris les longueurs des perpendiculaires sur le terrain même, car elles servent à vérifier les longueurs trouvées sur l'échelle de proportion.

116. Lorsque l'on veut mener des perpendiculaires sur le terrain et les mesurer, il faut recourir au second procédé, qui est la *mesure des terres avec l'équerre d'arpenteur et la chaîne.*

Nous avons suppléé à la chaîne et aux jalons par le pas de l'homme, par la corde divisée en décimètres, par les perches et par les bâtons pointus; il sera de même facile de construire à peu de frais une équerre d'arpenteur.

On prendra une planche carrée en bois bien sec, de 40 centimètres sur chaque côté et de 12 à 14 millimètres d'épaisseur (*fig.* 59); on divisera les côtés *ab*, *bd*, *dc* et *ca*, chacun en deux parties égales, et on tirera les droites *ef*, *gh*, qui doivent être d'égale longueur et se couper à angles droits au point *o*. A chaque point *e*, *f*, *g*, *h*, on enfoncera verticalement une aiguille bien fine, on clouera la planche sur un pied de bois, et on aura une équerre d'arpenteur suffisamment exacte. Pour élever une perpendiculaire, on suivra la marche indiquée dans le paragraphe 59. On portera une équerre d'arpenteur sur la ligne GB (*fig.* 58); le point *o* (*fig.* 59) doit tomber verticalement sur cette ligne; on placera l'instrument de manière que les points G, B, et les deux aiguilles en *g* et *h*, soient dans la même direction. Il faut d'abord voir si *h*, *g* et G, sont en ligne droite; ensuite on se reporte en *g*, et on examine de même si *g*, *h* et B sont également en ligne droite. Si dans cette position les deux autres aiguilles correspondent au jalon planté en A, la ligne A*a* est la perpendiculaire demandée. Si la direction des aiguilles ne correspond pas au jalon en A, il faut reculer l'équerre à droite ou à gauche; mais il faut vérifier une seconde fois l'alignement des quatre points G, *g*, *h*, B. Quand les quatre aiguilles sont dans les directions convenables, on mesure à la perche ou à la corde la ligne A*a*.

Dans le polygone ABCDEFG (*fig.* 58), si du point G on mène des diagonales à tous les sommets des angles non adjacents, on formera autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux. Dans le premier triangle AGB, on mesure la base GB et la perpendiculaire A*a*. Dans le triangle GBC, on mesure la base GC et la perpendiculaire B*b*.

Il serait inutile de mesurer les lignes qui ne servent point à la mesure des triangles, telles que GA, AB, BC, CD, etc., etc.

117. Il est souvent indispensable d'envelopper un polygone dans un rectangle, comme nous l'avons vu plus haut (69), quand le terrain à mesurer est impénétrable; par exemple, si c'est un taillis, un étang, un marais, etc., etc.

En se servant des instruments avec adresse, on ne s'éloignera pas beaucoup de la véritable contenance, quoique l'opération ne soit pas aussi directe que par la mesure des angles et des côtés.

Supposons que l'instituteur soit chargé de mesurer un terrain marécageux (*fig.* 60), accessible à l'extérieur : il procèdera comme pour le terrain représenté dans la figure 45. S'il place son équerre d'arpenteur au point I, la direction des aiguilles lui donnera un moyen facile de planter des jalons aux points A et D: la droite AD sera la directrice du rectangle; au point A il élèvera une perpendiculaire qui passera par le sommet de l'angle E; à l'extrémité de AB, il élèvera avec l'équerre d'arpenteur une perpendiculaire qui passera par le sommet F. Il suffira, pour fermer le rectangle, d'élever une perpendiculaire en D ou en C, qui passe par le sommet G. Des points P, O, N, M, H, R, on abaisse avec l'équerre d'arpenteur les perpendiculaires PV, OS, NT, MK, HG, RQ.

Nous avons déjà expliqué (59) comment, au moyen de l'équerre d'arpenteur, on peut élever ou abaisser une perpendiculaire : ce serait nous répéter inutilement que de reproduire ce procédé; nous exercerons seulement nos lecteurs par le calcul des deux figures 60 et 61.

Pour avoir la contenance du polygone (*fig.* 60), voici le calcul à faire.

Supposons d'abord que $AL = 70^m$, $A = 50^m$, $EB = 70^m$, $VB = 4^m$, $VS = 61^m$, $ST = 56^m$, $TF = 80^m$, $FC = 99^m$, $CK = 30^m$, $KG = 45^m$, $GD = 45^m$, $DQ = 60^m$, et $QI = 100^m$.

Il nous faut encore la longueur des perpendiculaires.

Soit $PV = 58^m$, $OS = 11^m5$, $TN = 6^m4$, $MK = 11^m2$, $HG = 13^m5$, $RQ = 6^m3$.

Détail des opérations.

Triangle AEL.	Multiplier la base 70 par la hauteur 50, et en prendre la moitié.	1750^m
Trapèze BVPE.	Ajouter les deux bases parallèles 70 et 58, multiplier par la hauteur 4, et prendre la moitié.	256
Trapèze VPOS.	Ajouter les deux bases parallèles 58 et 11.5, multiplier par la hauteur 61, et prendre la moitié du produit.	219.75
Trapèze SONT.	Ajouter les deux bases parallèles 11.5 et 6.4, multiplier par la hauteur 56, et prendre la moitié du produit.	501.20
Triangle TNF.	Multiplier la base 6.4 par la hauteur 80, et	
		2726.95

	Report.	2726.95
	prendre la moitié du produit.	256
Trapèze FMKC.	Ajouter les deux bases parallèles 99 et 11.2, multiplier par la hauteur 30, et prendre la moitié du produit.	1678.4
Trapèze MKGH.	Ajouter les deux bases parallèles 11.2 et 13.5, multiplier par la hauteur 45, et prendre la moitié du produit.	555.75
Trapèze GDQR.	Ajouter les deux bases parallèles 45 et 6.3, multiplier par la hauteur 60, et prendre la moitié du produit.	1539
Triangle RQI.	Multiplier la base 100 par la hauteur 6.3, et prendre la moitié du produit.	315
	Total.	7071^m10

118. Pour mesurer le grand rectangle, nous multiplierons la base par la hauteur, nous retrancherons $7,071^m10$, et le reste sera la contenance de la pièce de terre.

Rectangle,	36,000.00
A retrancher,	7,071.10
Mesure de la pièce de terre,	$28,928^m90$

La figure 60 a donc 2 hectares 89 ares 29 centiares.

Donnons encore un autre exemple qui exercera les élèves au calcul.

Supposons un terrain ABCDEFGHIK (*fig*, 61) accessible, dans lequel on a tiré la directrice AB; supposons aussi que l'on ait mesuré les perpendiculaires CM, DN, EO, FQ, GB, LK, PI, HR.

Parties de la directrice. Soit AM $= 4^{m}7$, MN $= 10^{m}1$, NO $= 20^{m}3$, QO $= 17^{m}2$, QB $= 21^{m}8$, AL $= 8^{m}1$, LP $= 42^{m}6$, PB $= 23^{m}4$.

Perpendiculaires. CM $= 19^{m}9$, DN $= 36^{m}5$, EO $= 23^{m}8$, FQ $= 37^{m}2$, GB $= 27^{m}5$, HR $= 5^{m}1$, LK $= 17^{m}3$, PI $= 19^{m}8$.

Détail des opérations.

Triangle CAM.	Multiplier la base 4.7 par la hauteur 19,9, et en prendre la moitié.	$46^{m}76$
Trapèze DCMN.	Ajouter les deux bases parallèles 19.9 et 36.5, multiplier par la hauteur 10.1, et prendre la moitié.	284.82
Trapèze DEON.	Ajouter les deux bases parallèles 36.5 et 23.8, multiplier par la hauteur 20.5, et prendre la moitié.	612.04
Trapèze EFQO.	Ajouter les deux bases parallèles 23.8 et 37.2, multiplier par la hauteur 17.2, et prendre la moitié.	524.60
		$1468^{m}22$

	Report.	$1468^{m}22$
Trapèze FGBQ.	Ajouter les deux bases parallèles 37.2 et 27.5, multiplier par la hauteur 21.8, et prendre la moitié.	705.23
Triangle GHB.	Multiplier la base 27.5 par la hauteur 5.1, et prendre la moitié.	70.12
Triangle ALK.	Multiplier la base parallèle 8.1 par la hauteur 17.3, et prendre la moitié.	70.06
Trapèze MPIK.	Ajouter les deux bases parallèles 17.3 et 19.8, et multiplier par la hauteur 42.6, et prendre la moitié.	790.23
Triangle PBI.	Multiplier la base 23.4 par la hauteur 19.8, et prendre la moitié.	231.66
	Total. . . .	$3,335^{m}52$

La surface de la figure 61 est donc de 33 ares 36 centiares.

Un instituteur intelligent comprendra toute l'importance d'exercer ses élèves sur le terrain; c'est le véritable moyen de leur apprendre l'arpentage.

On peut proposer les exercices en pleine campagne comme récompense du zèle et de l'attention aux leçons de la classe; les élèves qui ont arpenté une première fois trouvent ce travail très amusant, et inspirent à leurs camarades l'envie d'y prendre part.

Ces notions d'arpentage, suffisantes pour les besoins ordinaires de la vie, seront extrêmement utiles quand elles seront répandues dans les écoles. Les cultivateurs, éclairés sur leurs véritables intérêts, pouvant mesurer eux-mêmes leurs propriétés, éviteront ainsi bien des querelles, bien des procès avec leurs voisins. Et c'est aux instituteurs actuels qu'est confié cet important résultat !

Quand les instituteurs pourront se procurer une boussole, ou un graphomètre, ou une planchette, ils suivront la marche que nous leur avons tracée à partir du paragraphe 76.

CHAPITRE ONZIÈME.

CULTELLATION ET NIVELLEMENT.

119. Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, nous avons supposé que le terrain était horizontal; mais il n'en est pas toujours ainsi, et beaucoup de pièces de terre sont en pente.

Quand on opère avec la planchette pour lever un plan incliné, on ne représente pas la surface inclinée, mais seulement le plan horizontal. Ce plan horisontal offre une surface qui diffère plus ou moins de la véritable, selon que l'inclinaison du terrain est plus ou moins grande.

Pour mesurer une distance sur un terrain incliné, on tend la chaîne horizontalement, sans s'inquiéter de l'inclinaison du terrain. Si l'on mesure cette distance dans une descente rapide, le porte-chaîne tend la chaîne horizontalement, et laisse échapper de la main qui tient l'anneau une fiche qui s'enfonce verticalement dans la terre, ou laisse une empreinte qui fait connaître la place où elle doit être plantée.

120. Soit une longueur AC inclinée à l'horizon (*fig.* 62); on portera la chaîne horizontalement de A en E, de F en G, de H en T, de K en L; il est évident que AE=DM, FG=MN, HI=NO, KL=OC ; donc la somme des longueurs partielles obtenues avec la chaîne est égale à l'horizontale DC ; donc le plan lui-même ne sera pas le plan incliné à l'horizon, mais la superficie horizontale, que l'on nomme aussi *base productive*. En effet, les arbres, les blés et tous les végétaux poussent dans une direction verticale, et non pas dans une direction perpendiculaire au plan, en sorte qu'une ligne inclinée AB ne contient pas plus de pieds d'arbres que la distance horizontale CB (*fig.* 63).

Si, au lieu d'arbres, le plan incliné était couvert de moissons ou de plantes basses de tige, on pourrait croire qu'il en contient plus que la superficie horizontale ; mais l'expérience a prouvé que les terrains inclinés ne rapportent pas plus que les superficies horizontales : car les pluies entraînent la terre végétale et les semences, et comme ces plans inclinés ne peuvent entretenir l'humidité si nécessaire à la végétation, la sécheresse est excessive ; la culture d'ailleurs est fort pénible; c'est donc avec raison qu'on les assimile à une superficie moindre.

121. L'opération qui a pour but de ramener une surface inclinée à la surface horizontale s'appelle *cultellation :* car il semble, en effet, qu'on a enlevé horizontalement le terrain incliné, comme avec un *couteau*.

Ces notions d'arpentage, suffisantes pour les besoins ordinaires de la vie, seront extrêmement utiles quand elles seront répandues dans les écoles. Les cultivateurs, éclairés sur leurs véritables intérêts, pouvant mesurer eux-mêmes leurs propriétés, éviteront ainsi bien des querelles, bien des procès avec leurs voisins. Et c'est aux instituteurs actuels qu'est confié cet important résultat !

Quand les instituteurs pourront se procurer une boussole, ou un graphomètre, ou une planchette, ils suivront la marche que nous leur avons tracée à partir du paragraphe 76.

CHAPITRE ONZIÈME.

CULTELLATION ET NIVELLEMENT.

119. Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, nous avons supposé que le terrain était horizontal; mais il n'en est pas toujours ainsi, et beaucoup de pièces de terre sont en pente.

Quand on opère avec la planchette pour lever un plan incliné, on ne représente pas la surface inclinée, mais seulement le plan horizontal. Ce plan horisontal offre une surface qui diffère plus ou moins de la véritable, selon que l'inclinaison du terrain est plus ou moins grande.

Pour mesurer une distance sur un terrain incliné, on tend la chaîne horizontalement, sans s'inquiéter de l'inclinaison du terrain. Si l'on mesure cette distance dans une descente rapide, le porte-chaîne tend la chaîne horizontalement, et laisse échapper de la main qui tient l'anneau une fiche qui s'enfonce verticalement dans la terre, ou laisse une empreinte qui fait connaître la place où elle doit être plantée.

120. Soit une longueur AC inclinée à l'horizon (*fig.* 62); on portera la chaîne horizontalement de A en E, de F en G, de H en T, de K en L; il est évident que AE=DM, FG=MN, HI=NO, KL=OC ; donc la somme des longueurs partielles obtenues avec la chaîne est égale à l'horizontale DC ; donc le plan lui-même ne sera pas le plan incliné à l'horizon, mais la superficie horizontale, que l'on nomme aussi *base productive*. En effet, les arbres, les blés et tous les végétaux poussent dans une direction verticale, et non pas dans une direction perpendiculaire au plan, en sorte qu'une ligne inclinée AB ne contient pas plus de pieds d'arbres que la distance horizontale CB (*fig.* 63).

Si, au lieu d'arbres, le plan incliné était couvert de moissons ou de plantes basses de tige, on pourrait croire qu'il en contient plus que la superficie horizontale ; mais l'expérience a prouvé que les terrains inclinés ne rapportent pas plus que les superficies horizontales : car les pluies entraînent la terre végétale et les semences, et comme ces plans inclinés ne peuvent entretenir l'humidité si nécessaire à la végétation, la sécheresse est excessive ; la culture d'ailleurs est fort pénible; c'est donc avec raison qu'on les assimile à une superficie moindre.

121. L'opération qui a pour but de ramener une surface inclinée à la surface horizontale s'appelle *cultellation :* car il semble, en effet, qu'on a enlevé horizontalement le terrain incliné, comme avec un *couteau*.

122. Il est une autre méthode d'arpenter les plans inclinés, on la nomme *méthode de développement* ; elle consiste à mesurer la superficie réelle, en portant la chaîne métrique parallèlement à la surface du terrain.

La méthode de cultellation est beaucoup plus employée que la méthode de développement.

123. Le nivellement est une opération qui a pour but de déterminer la hauteur comparative de plusieurs points d'un terrain.

Quand deux points sont sur une même ligne horizontale, on dit qu'ils sont sur la *ligne de niveau* (1), quand l'un est plus élevé que l'autre, on cherche la *différence du niveau*.

Le nivellement est une opération très employée pour les routes et les conduites d'eau. Les enfants qui suivent aujourd'hui les écoles peuvent être appelés un jour à remplir les fonctions de maires, d'adjoints ou de membres des conseils municipaux ; il leur sera d'une grande utilité de connaître les opérations du nivellement.

124. Pour niveler de petites surfaces on se sert du niveau des maçons et des menuisiers, appelé *niveau à perpendiculaire* (*fig.* 64). Sur la tra-

(1) Si la terre était plate, la surface du niveau serait un plan, et la ligne du niveau serait une droite ; mais la terre étant ronde, la ligne de niveau est un arc de cercle ; c'est ce qu'on appelle le *niveau vrai*. Le *niveau apparent*, au contraire, est une ligne parfaitement droite. Il y a donc une différence réelle entre le niveau vrai et le niveau apparent ; mais cette différence est insensible pour nous. En effet, notre petitesse est si extrême, par rapport à la terre, qui n'est elle-même qu'un point dans l'espace, qu'une ligne de 200 mètres de longueur ne diffère, dans son niveau apparent et dans son niveau vrai, que de 3 millimètres, et une lieue de longueur de 7 à 8 centimètres.

verse horizontale est un trait que l'on nomme *ligne de foi*, que doit recouvrir le fil à plomb librement suspendu.

On se sert de ce niveau avec deux règles d'un double mètre chacune, divisées en décimètres et centimètres. On pose le niveau sur une des règles, placée horizontalement, et quand le fil à plomb couvre la ligne de foi, on s'assure avec l'autre règle, que l'on tient verticalement, de la différence des niveaux.

125. On emploie encore pour les petites surfaces le *niveau à bulle d'air*, qui est extrêmement sensible. C'est ainsi, par exemple, que l'on dresse les tapis de billard.

126. Mais pour l'arpentage on se sert du *niveau d'eau* (*fig.* 65). Cet instrument se compose d'un tube de fer-blanc, relevé verticalement aux deux extrémités, et terminé par deux petits tubes en verre. On verse de l'eau colorée en rouge dans un des tubes jusqu'à ce qu'il y en ait suffisamment. Le niveau est horizontal quand l'eau s'élève également dans les deux tubes.

Avec le niveau d'eau on emploie, pour niveler, une règle épaisse, de 3 à 4 mètres de hauteur, qu'on appelle *mire*, et qui doit être divisée en mètres, décimètres et centimètres. Sur cette règle on fait glisser une seconde règle, nommée *voyant*, qui porte une raie noire, ou un carton d'un décimètre carré, blanc d'un côté de la verticale, et noir de l'autre. Le côté blanc se distingue facilement, quand il se détache sur la terre ou sur des objets de couleur foncée; le côté noir se détache sur le ciel.

Pour déterminer la différence de niveau de deux points A et B (*fig.* 66), on fixe le niveau au point

C; on envoie au point A quelqu'un pour placer bien verticalement la mire; alors on fait signe de monter ou de descendre le voyant, jusqu'à ce que le rayon visuel donné par la surface de l'eau passe exactement par le point de mire. On prend sur la règle A la hauteur exacte du voyant, et la mire est transportée en B; on mesure de même la hauteur du voyant en B, et cette différence est la différence des niveaux. Soit A = 0^m95, et B = 2^m50 : la différence des niveaux est de 1^m55 Si la distance de A en B était de 155 mètres, la différence de niveau serait de 1 centimètre par mètre.

Ainsi, en général, pour avoir la différence de niveau par mètre, il faut diviser la différence des niveaux par la distance.

127. Il arrive souvent que le terrain est rompu par des sinuosités, et qu'il y a plusieurs points à niveler, comme dans la figure 67.

Plaçons le niveau d'eau en A, et mesurons les distances des points E, B, C, D, F, à la ligne de niveau GH; supposons que E soit éloigné de la ligne GH de 1 m. 90, B de 3 m. 60, C de 1 m. 75, D de 3 m. 20, F de 2 m. 10. Si on voulait niveler ce terrain au point B, on voit qu'il faudrait baisser E de 1 m. 70, C de 1 m. 85, D de 0 m. 40, et F de 1 m. 50.

Si au contraire on voulait faire couler une source d'eau de E en F, on aurait à calculer la pente que l'on veut donner à l'eau.

Lorsqu'on rencontre un terrain très inégal, il faut faire *donner un coup de niveau* à tous les points enfoncés ou élevés.

128. Il arrive encore quelquefois que la pente du terrain à niveler est très forte; on est obligé, en ce cas, de changer le niveau de place plusieurs fois de suite.

On établit au point A (*fig.* 68) le niveau, qui n'atteint que le point B; on place ensuite le pied de l'instrument en B, ce qui change la ligne de niveau. On en fait autant au point C. Cette opération n'est pas plus difficile que les précédentes pour le calcul : car les lignes DE, CF, BG, MN, étant toutes parallèles, il suffira de mesurer les distances OP, PQ, et de les ajouter au nivellement en A, pour avoir la hauteur de DE au-dessus du sol.

Nous ne pousserons pas plus loin les détails sur le nivellement; nous ferons remarquer seulement que, plus on donnera de coups de niveau, et moins l'opération sera exacte; que, par conséquent, avant de niveler, il faut bien observer la disposition du terrain, afin de ne pas faire d'opérations inutiles.

129. Pour dresser le plan d'un nivellement, on trace une horizontale, et l'on y rapporte à l'échelle les différentes hauteurs que l'on a notées sur le croquis : c'est ce que l'on appelle *faire le profil* d'un terrain. On indique le point le plus bas, et l'on écrit, à côté des autres points, leur élévation au-dessus du plus bas.

Afin de mieux faire apprécier les pentes dans un plan où la ligne horizontale est un peu longue, on établit deux échelles, dont l'une, plus grande, sert pour les pentes, et l'autre, bien plus petite, sert pour les différences horizontales.

—

CHAPITRE DOUZIÈME.

DU PARTAGE DES PROPRIÉTÉS.

130. Le partage des propriétés est une des applications les plus fréquentes de l'arpentage. Nous entrerons dans quelques détails sur ce sujet, qui intéresse vivement les propriétaires et les habitants de la campagne.

Un partage peut être nécessité par une vente, par un héritage. C'est une opération délicate, qui exige de l'habileté. L'arpenteur honoré de ce choix devient un juge, et doit en avoir l'intégrité.

Les exemples que nous allons offrir suffiront pour faire connaître la marche que l'on doit suivre habituellement.

Premier exemple de partage.

131. Soit d'abord le triangle ABC (*fig.* 69) à partager en deux parties égales en surface. Nous avons déjà dit qu'il était assez rare de trouver des pièces de terre d'une forme triangulaire; mais nous savons aussi que tout terrain polygonal peut se diviser en triangles. Il est donc indispensable de savoir partager les triangles en parties égales.

Je cherche le milieu O de la base AB, et je le joins au point C. Les deux triangles AOC, COB, ont même mesure : car ils ont une base égale AO=OB et même hauteur CD ; ils ont donc une surface égale.

Dans l'exemple ci-dessus, nous supposons que ACB est le plan d'une pièce de terre.

Sans faire le plan, on pourrait mesurer la surface du terrain ACB : si la base AB est de 64 m. 2 et CB de 60 m. 08, la surface est de 19 ares 26 centiares, dont la moitié pour chacun des copartageants est de 9 ares 63 centiares. Si nous divisons la superficie 96.1928 par la moitié de la perpendiculaire DC, c'est-à-dire par 30 m.04, le quotient 32 m.02 sera la base de la part de chacun. Nous voyons que ce résultat est exact à 4 centimètres près, puisque nous n'avons que 32 m.02, et que la moitié de la base 64 m.12 est de 32 m.06.

De cet exemple on peut conclure qu'il y a deux manières différentes d'effectuer le partage des terres :

L'une consiste à lever le plan du terrain, à faire la division sur ce plan par des moyens graphiques, et à reporter ces mesures sur le terrain ;

L'autre consiste à évaluer la surface, à effectuer en nombres le partage, et à obtenir les dimensions inconnues au moyen de celles qui sont connues.

C'est au concours de ces deux procédés que l'on doit des résultats exacts, comme nous allons le voir dans les exemples suivants.

Nous ne parlerons pas de la division des pièces de terre de la forme d'un rectangle : cette division ne présente aucune difficulté.

Pour partager un rectangle en trois parties égales, il suffit de diviser la base en trois parties égales, et d'élever des perpendiculaires à chaque point de division.

Ce que nous disons du rectangle s'applique au carré.

Pour diviser le triangle (*fig.* 69) en 3, en 4, en 5, etc., parties égales, il suffira de diviser la base en 3, en 4, en 5, etc., parties égales, et de joindre ces points de division avec le sommet du triangle.

Deuxième exemple de partage.

132. Soit à partager un trapèze en deux parties égales en surface (*fig.* 70).

On partagera le côté CD en deux parties égales au point F, et le côté AB en deux parties égales au point E. La ligne FE divise le trapèze total en deux trapèzes partiels, égaux en surface; en effet, AE est égal à EB, CF est égal à FD, et la hauteur est commune.

Troisième exemple de partage.

133. Partager entre deux héritiers, et par portions égales, un champ DCBE (*fig.* 71) de la forme d'un quadrilatère irrégulier.

Par le point C menez CF parallèlement à la base BE : divisez la base BE en deux parties égales au point A, et la ligne FC en deux parties égales aussi au point G. Tirez GA. Les deux trapèzes AEFG, GCBA, ont une même mesure, qui est la demi-somme de leurs bases égales multipliée par la hauteur. Cette hauteur est la même pour les deux trapèzes, puisque c'est la distance entre deux parallèles. Tirez DG. Le triangle FDG a même mesure que le triangle DGC; en effet, FG=GC, et la hauteur est la même (47). Les deux polygones DGAE et DCBAG ont donc la même mesure.

Si la pièce de terre (*fig.* 71) devait être partagée entre deux héritiers, dont l'un aurait le double de l'autre, on diviserait les lignes EB et FC du plan en trois parties égales, au moyen d'un compas

et par le tâtonnement; on joindrait les trois points de division de la ligne FC avec le point D. De cette manière, la figure se trouverait divisée en trois parties équivalentes : un des héritiers prendrait deux de ces parties; l'autre n'en aurait qu'une seule.

Pour vérifier l'exactitude de l'opération graphique, on calculerait la surface du quadrilatère irrégulier en mètres carrés, et l'on diviserait le nombre total des mètres carrés en deux parties, dont l'une serait le double de l'autre. Si les partages trouvés par le moyen graphique se trouvent exacts en chiffres, la vérification est terminée, et le partage a été bien opéré.

134. Pour diviser une ligne en trois parties, le tâtonnement est le moyen le plus rapide; mais s'il fallait avoir 5, 7, 9 divisions, on éprouverait beaucoup de difficultés. Voici une construction géométrique très simple.

Supposons la ligne BC (*fig.* 72) à diviser en 9 parties égales. Tirez une ligne indéfinie BD, faisant avec BC un angle quelconque; portez 9 fois une ouverture de compas à volonté sur BD, et joignez D et C. Par le point E, un des points de la division de la ligne BD, menez EG parallèle à DC : GC est la division demandée. Portez une ouverture de compas égale à GC 9 fois de C en B. Elle doit y être contenue exactement; si GC n'était pas contenue 9 fois exactement dans CB, ce serait une preuve que l'on aurait mal opéré en menant la parallèle EG. Par le point F on mènerait une seconde parallèle FH, qui donnera sur BC la division GH; avec une ouverture égale à GH, on s'assurera si BC contient 9 fois GH. Si le résultat n'était pas satisfaisant, on augmenterait ou on diminuerait l'ouverture de compas

GH, et un simple tâtonnement donnerait la mesure cherchée.

Quatrième exemple de partage.

Partager le terrain ABCDE (*fig.* 73) entre trois héritiers qui arrivent à la succession pour portions égales. Je tire la diagonale AC, et, par le point D, je mène DF parallèle à AC. Si je divise AC et FD en trois parties égales, aux points G, H, I, K, et que je tire les droites GI et HK, les trois trapèzes AGIF, GHKI et HCDK, ayant même base et même hauteur, puisqu'ils sont compris entre deux parallèles, seront égaux en surface. Les triangles BAG, BGH et BHC, ayant même base et même hauteur, auront une surface égale : en effet, AG = GH = HC, et la hauteur est évidemment la même.

Les trois autres triangles EFI, IEK, KED, ayant FI=IK=KD, et une hauteur qui est la même, seront aussi égaux en surface ; donc les trois portions ABGIEF, BGIEKH et BHKEDC, satisferont à la question et auront la même contenance.

Cinquième exemple de partage.

135. Cette manière d'opérer donne aux portions une forme irrégulière. On peut employer un autre mode de partage, moins géométrique, mais plus facile à appliquer.

Soit ABCDE (*fig.* 74) le polygone à partager en quatre parties égales en surface : par le point C je mène CF parallèle à AB; je divise AB et CF en quatre parties égales. Les trapèzes 1, 2, 3, 4 sont équivalents, c'est-à-dire ont même mesure, car ils

ont une hauteur égale et les basses égales chacune à chacune.

En prolongeant les côtés des trapèzes en G, H, I, on partagera le quadrilatère CDEF en quatre parties inégales, mais que l'on peut égaliser. Pour cela, on mesurera le quadrilatère CDEF. Supposons qu'il contienne 95 mètres : le quart de 95 mètres est de 23 m. 75. Si le triangle CIL, qui est le supplément du trapèze 1, n'a que 14 m., il suffira de reculer le point I, suffisamment vers D pour que le triangle ait une surface de 23 m. 75, ce que l'on obtiendra en divisant $23^{m}75$ par la moitié de la hauteur, qui est la perpendiculaire abaissée de L sur DC. Le quotient donnera la longueur de la base. On suivra une marche semblable pour diminuer ou augmenter les trapèzes supplémentaires, qui doivent avoir chacun 23 m. 75 de superficie.

Sixième exemple de partage.

136. Les difficultés des partages peuvent dépendre d'une foule de circonstances. Pour n'en citer qu'un exemple, soit un puits situé au milieu d'un terain à partager : si les partageants veulent conserver la jouissance du puits, il faudra que leurs portions y viennent toutes aboutir.

Soit la pièce de terre ABCDE (*fig.* 75), au milieu de laquelle serait un puits O. On veut partager ce terrain en quatre portions équivalentes, mais chacun des lots doit conserver un abord au puits.

Nous supposerons la superficie totale égale à 320 mètres carrés; chaque portion sera de 80 mètres carrés. En menant du point O des lignes aux sommets des angles du polygone, le polygone se trouvera divisé en 5 triangles. Supposons que l'un d'eux AOE contienne 98 mètres carrés : puisque chaque portion est de 80 mètres carrés, le triangle AOE a 18 mètres carrés de trop ; il faut donc les retrancher. Pour cela, on abaisse la perpendiculaire O*a*, que l'on mesure, et qui a 4^m40. Si l'on divise 18^m par la moitié de 9^m40, ou 4^m70, le quotient 3^m83 indique qu'il faut retrancher de la base AE 3^m83 ou FE : la part du premier sera donc AOF. Le second aura le triangle FOE, que nous connaissons déjà égal à 18 mètres carrés, plus le triangle EOD, que nous supposerons égal à 45 mètres carrés, ce qui donne 63 mètres carrés. Il lui manque donc encore 17 mètres carrés. Du point O j'abaisse sur CD la perpendiculaire O*b* de 14^m20 ; je divise 17^m par la moitié de 14.20 ; le quotient 2^m39 est la longueur DG qu'il faut prendre sur DC. La portion du second sera le pentagone FEDGO.

On suivra absolument la même marche pour les parts des deux derniers, qui seront toutes deux de 80 mètres carrés, et qui viendront aboutir au puits.

Ce qui rend les partages fort difficiles, c'est qu'il ne suffit pas que les parts contiennent une égale quantité de terrain, il faut encore que la bonne et la mauvaise terre soient également réparties, ou que des compensations soient établies par la quantité pour suppléer à la qualité.

CHAPITRE TREIZIÈME.

DES BORNES.

137. Les contestations entre voisins s'élèvent souvent au sujet des limites de leurs propriétés.

Le seul moyen d'empêcher ces envahissements réciproques, et d'éviter les procès qui en sont malheureusement la conséquence ordinaire, c'est de marquer par des bornes les limites où finit une propriété et où commencent les propriétés adjacentes.

Souvent ce sont des arbres ou des haies qui servent de limites : pour en assurer la conservation, on rend ces haies et ces arbres mitoyens, c'est-à-dire qu'ils appartiennent en commun aux deux voisins, et que l'un ne peut les arracher ou les déplacer sans le consentement de l'autre.

Les limites naturelles des propriétés sont les chemins publics, les rivières, les étangs, etc. ; c'est le bornage le plus certain et qui donne le moins d'occasions de contester.

138. Quand on n'a pas de bornes naturelles, on se sert de bornes mobiles. Leur forme varie selon les localités. Ordinairement on emploie des pierres d'une certaine grosseur que l'on enfonce en terre : quelquefois une partie de la borne est saillante, quelquefois aussi les bornes sont enfoncées en terre, pour ne pas gêner la culture.

En général, les bornes sont placées, extérieurement ou intérieurement, aux angles des terrains, qu'elles déterminent ainsi.

Pour distinguer les bornes des autres pierres, on enterre à l'entour quelques pierres moins grosses, que l'on nomme *témoins*. Dans certains pays, on casse une tuile en plusieurs morceaux que l'on place au milieu des témoins. En cas de contestation, on rapproche les morceaux de la tuile, et si la tuile est complète, on est sûr que la grosse pierre est une véritable borne.

Quand il y a des bornes, la tâche de l'arpenteur est facile : il ne s'agit que de reconnaître celles qui sont indiquées par les plans ou par les actes. On fait fouiller dans les places où l'on suppose que se trouvent les bornes, et si les pierres trouvées sont reconnues de véritables bornes, il ne s'agit plus que de tracer la limite.

139. De même que personne n'est obligé de rester dans l'indivision, de même aussi personne n'est obligé de laisser indécise la ligne qui doit séparer son héritage de l'héritage voisin. Aussi l'article 646 du Code civil porte-t-il : « Tout propriétaire peut obliger son voisin au bornage de leurs propriétés contiguës. » Le bornage se fait à frais communs ; quant à l'exécution, on se conforme aux usages du pays.

L'objet du bornage est de fixer la limite des propriétés voisines. La conséquence habituelle de l'action du bornage est de faire rentrer chacun des propriétaires voisins dans la possession du terrain qui avait été usurpé.

140. Peut-on opposer la prescription à l'action du bornage? Il faut faire ici une distinction. L'action du bornage étant un exercice du droit de propriété, on ne peut jamais s'y opposer sous le prétexte que depuis trente ans on n'a jamais été inquiété dans sa possession.

Cependant si, par suite de l'action du bornage, on trouve que l'un des propriétaires a usurpé sur l'autre quelques portions de terrain dont il est resté paisible possesseur pendant trente ans, sans avoir été inquiété pour cette possesion, le possesseur n'est pas obligé de rendre ce qu'il a de trop, et les bornes sont placées d'après la possession actuelle.

141. Quiconque a des droits sur une propriété peut en demander le bornage : ainsi l'action de bornage peut être intentée non seulement par le propriétaire, mais encore par un propriétaire par indivis, lors même que ses copropriétaires ne se joindraient pas à lui.

142. L'usufruitier a le droit de demander le bornage ; l'emphytéote a le même droit que l'usufruitier.

143. Pour demander le bornage, il n'est pas nécessaire de prouver son droit de propriété, il suffit de la possession.

Dans le cas cependant où le titre de propriétaire serait contesté, le défendeur, qui a intérêt à ce que le bornage soit fait avec le véritable propriétaire, est fondé à mettre en cause celui qu'il croit être le légitime propriétaire.

144. C'est par suite du même principe que, si l'usufruitier ou l'emphytéote réclame le bornage, le défendeur doit prendre la précaution d'y appeler le nu-propriétaire, qui pourrait exiger plus tard que l'on recommençât une semblable opération. Si c'est le nu-propriétaire qui réclame le bornage, le défendeur fera bien de même d'y appeler l'usufruitier ou l'emphytéote, qui pourrait exiger un second bornage.

145. Une question assez importante est de savoir si un tuteur peut, sans l'autorisation du conseil de famille, provoquer le bornage des propriétés de son pupille. Il y a lieu de se prononcer pour l'affirmative. Le tuteur, en demandant le bornage, ne fait qu'un simple acte d'administration : car, pour gérer l'administration d'immeubles, il faut en connaître les limites, il faut pouvoir éviter les usurpations.

Si par suite du bornage il est reconnu que le voisin a usurpé des portions de terre appartenant au mineur, c'est alors que l'autorisation du conseil de famille devient nécessaire pour revendiquer ce qui a été usurpé.

146. Le fermier qui possède en vertu d'un titre précaire n'est pas fondé à intenter l'action du bornage; s'il est troublé dans sa jouissance par des envahisssments de voisins, il doit dénoncer l'envahissement à son bailleur et demander qu'il fasse borner.

147. Le bornage est un contrat, et, comme tel, il peut se faire à l'amiable entre les parties contractantes. Il n'est pas nécessaire que ce bornage soit confié à des arpenteurs ou à des experts : il peut être terminé par les parties, et l'acte peut être écrit sur papier libre et dans la forme qu'elles veulent lui donner. La loi ne prescrit rien à cet égard.

148. Si les parties ne s'en rapportent pas à elles-mêmes, elles conviennent de choisir chacune un expert, et de s'entendre sur la nomination d'un troisième.

En vertu de l'acte qui nomme les experts, et qui doit être signé par les parties, les experts procèdent à l'examen des titres, à l'arpentage des terres, à la vérification des bornes, et à la position des nouvelles bornes, s'il y a lieu.

Les experts dressent le *procès-verbal d'abornement;* et si leur rapport convient aux parties, elles passent un acte par lequel elles reconnaissent comme juste la borne indiquée par les experts.

149. Si les parties ne peuvent s'entendre sur la nomination des experts, elles s'adressent à la justice. Un jugement intervient, qui nomme d'office trois experts; les experts font un rapport, qui est déposé au greffe; et si le tribunal adopte le travail

des experts, les parties sont obligées de se soumettre à ce bornage fait en justice.

Il est assez rare que le bornage maintienne les deux voisins dans l'état où ils se trouvaient auparavant; ordinairement l'arpentage fait connaître que l'un des propriétaires possède une quantité de terre plus grande que celle qui est énoncée dans son titre.

150. Si la quantité de terrain qui excède d'un côté est égale à celle qui manque de l'autre, il n'y a pas de difficulté. On rend à celui qui a le moins ce que l'autre a de trop.

151. Si l'un des propriétaires a plus de terrain qu'il n'en manque à l'autre, on ne prend que ce qui est nécessaire pour remplir le demandeur; l'excédant reste à celui qui possède. Ainsi, par exemple, le procès-verbal d'abornement constate qu'un propriétaire a 28 ares de plus que son titre ne l'indique, et d'après son titre le voisin ne réclame que 16 ares; les experts lui rendront 16 ares, et laisseront au possesseur 12 ares de plus que son titre ne porte.

Ce que nous avons dit au sujet de la prescription s'applique ici : ainsi donc, si par suite d'un bornage il est reconnu que l'excédant d'un des propriétaires faisait réellement partie de l'héritage de l'autre, il n'y a pas lieu à rectification, si le second prouve qu'il possède depuis 30 ans, sans interruption ni trouble; alors on pose les bornes d'après la possession actuelle.

152. Le bornage se fait à frais communs. Si le bornage se fait à l'amiable, les frais se supportent évidemment par moitié: mais si l'un des propriétaires résiste, et qu'il faille le poursuivre en justice, il n'y a que les frais de l'opération du bornage qui se paient en commun ; les frais et dépens sont payés par celui qui succombe, à moins que le tribunal n'ait compensé les dépens.

Comme l'envahissement des propriétés est une des sources les plus fécondes des procès, nous sommes entrés dans quelques détails, espérant que l'on comprendra la nécessité de recourir au bornage pour conserver les relations de bon voisinage.

CHAPITRE QUATORZIÈME.

COPIE DES PLANS.

153. Il y a deux moyens à employer pour avoir le double d'un plan : on peut, ou le *piquer*, ou le *calquer*.

Pour piquer un plan, on le pose sur la feuille de papier qui doit le recevoir, et on l'y attache avec des épingles fines, afin qu'il ne se dérange pas. Ensuite, avec une aiguille ou avec un *piquoir*; c'est-à-dire avec une pointe fine emmanchée, on pique les extrémités de toutes les lignes, en ayant soin d'indiquer les points remarquables du plan dans son contour et dans son intérieur, tels que les chemins, les maisons, etc.

Quand le plan est convenablement piqué, on ôte les épingles; on met la copie au crayon ou à l'encre de Chine, en suivant les piqûres marquées sur la feuille blanche. Dans cette opération il faut avoir le plan original sous les yeux : sans le plan, il serait impossible de reconnaître comment les points se lient entre eux.

Il ne faut pas trop multiplier les piqûres, cependant il faut aussi ne rien omettre d'important.

On peut encore calquer le plan : il suffit, pour cela, de le placer sur un carreau de verre exposé au grand jour : on met dessus le papier blanc, et on suit avec un crayon tous les traits du plan. En se servant d'un châssis garni d'un verre, et que l'on incline suffisamment pour recevoir le jour, on peut mettre tout de suite les traits à l'encre de Chine.

On a trouvé plusieurs autres moyens pour calquer un plan horizontalement sur une table, sans le mettre verticalement au carreau, ou obliquement sur le châssis.

Quand un plan est très simple, un grand carreau de fenêtre suffit pour cette opération; mais la fatigue que l'on éprouve fait sentir la nécessité de moyens plus commodes, surtout si le plan offre des détails multipliés.

154. Quelquefois on a besoin de réduire un plan, ou, au contraire, de lui donner de plus grandes dimensions. Les officiers du génie et les ingénieurs géographes se servent du *pantographe*, qui fournit avec exactitude et en très peu de temps la copie d'un plan à toutes les échelles désirables. Comme cet instrument coûte fort cher, nous allons donner des moyens géométriques très simples de réduire ou d'augmenter les dimensions d'un plan.

155. Soit proposé de doubler un plan (*fig.* 76).

J'enveloppe le plan proposé d'un carré ABCD, et je construis le carré double dans lequel je copierai un plan semblable au plan donné. La diagonale AD est le côté du carré double. Sur AD je construis un carré pour y dessiner le plan proposé. Afin de rendre cette opération plus facile, je divise le côté paient en commun ; les frais et dépens sont payés par celui qui succombe, à moins que le tribunal n'ait compensé les dépens.

Comme l'envahissement des propriétés est une des sources les plus fécondes des procès, nous sommes entrés dans quelques détails, espérant que l'on comprendra la nécessité de recourir au bornage pour conserver les relations de bon voisinage.

CHAPITRE QUATORZIÈME.

COPIE DES PLANS.

153. Il y a deux moyens à employer pour avoir le double d'un plan : on peut, ou le *piquer*, ou le *calquer*.

Pour piquer un plan, on le pose sur la feuille de papier qui doit le recevoir, et on l'y attache avec des épingles fines, afin qu'il ne se dérange pas. Ensuite, avec une aiguille ou avec un *piquoir*; c'est-à-dire avec une pointe fine emmanchée, on pique les extrémités de toutes les lignes, en ayant soin d'indiquer les points remarquables du plan dans son contour et dans son intérieur, tels que les chemins, les maisons, etc.

Quand le plan est convenablement piqué, on ôte les épingles; on met la copie au crayon ou à l'encre de Chine, en suivant les piqûres marquées sur la feuille blanche. Dans cette opération il faut avoir le plan original sous les yeux : sans le plan, il serait impossible de reconnaître comment les points se lient entre eux.

Il ne faut pas trop multiplier les piqûres, cependant il faut aussi ne rien omettre d'important.

On peut encore calquer le plan : il suffit, pour cela, de le placer sur un carreau de verre exposé au grand jour : on met dessus le papier blanc, et on suit avec un crayon tous les traits du plan. En se servant d'un châssis garni d'un verre, et que l'on incline suffisamment pour recevoir le jour, on peut mettre tout de suite les traits à l'encre de Chine.

On a trouvé plusieurs autres moyens pour calquer un plan horizontalement sur une table, sans le mettre verticalement au carreau, ou obliquement sur le châssis.

Quand un plan est très simple, un grand carreau de fenêtre suffit pour cette opération; mais la fatigue que l'on éprouve fait sentir la nécessité de moyens plus commodes, surtout si le plan offre des détails multipliés.

154. Quelquefois on a besoin de réduire un plan, ou, au contraire, de lui donner de plus grandes dimensions. Les officiers du génie et les ingénieurs géographes se servent du *pantographe*, qui fournit avec exactitude et en très peu de temps la copie d'un plan à toutes les échelles désirables. Comme cet instrument coûte fort cher, nous allons donner des moyens géométriques très simples de réduire ou d'augmenter les dimensions d'un plan.

155. Soit proposé de doubler un plan (*fig.* 76).

J'enveloppe le plan proposé d'un carré ABCD, et je construis le carré double dans lequel je copierai un plan semblable au plan donné. La diagonale AD est le côté du carré double. Sur AD je construis un carré pour y dessiner le plan proposé. Afin de rendre cette opération plus facile, je divise le côté

AB en quatre parties égales, ainsi que le côté AC; par les points de division je tire des horizontales et des verticales qui divisent le carré total en 16 petits carrés. (V. la *fig.* 76.)

Je divise également le carré construit sur AD en 16 carrés, et il ne me reste plus qu'à copier dans chaque carré ce qui est contenu dans le carré correspondant du plan proposé.

Si le plan était d'une dimension un peu considérable, il ne suffirait pas de diviser en 4 parties égales les côtés AB et AC du plan que l'on se propose de copier; on les diviserait en 8 ou en 16 parties, ce qui donnerait 64 petits carrés, ou 256 petits carrés.

Cette copie de plan s'appelle *copie par treillis*.

156. Si le plan que l'on veut copier est précieux, et si l'on ne veut pas y tracer des lignes, on y appliquera une feuille de papier transparent; on formera le carré sur ce papier transparent, connu sous le nom de *papier végétal* (1), et on y tracera les carreaux. On peut remplacer le papier transparent par des fils de soie bien tendus, fixés sur les côtés d'un châssis et formant treillis.

157. Réduire un plan à moitié (*fig.* 76).

Quand le plan sera enveloppé du carré, on tirera les diagonales AD et CB, qui se couperont au point O. AO, BO, CO, DO, sont quatre lignes égales; chacune d'elles est le côté du carré deux fois plus petit. Sur la ligne AO, par exemple, on construit un carré, et on le divise en autant de petits carrés que la figure 76 en contient; il ne restera plus qu'à

(1) Il faut proscrire les papiers *vernis* et *huilés*, qui répandent une mauvaise odeur, jaunissent et tachent quelquefois le papier.

copier, carreau par carreau, tout ce qui se trouve dans le plan.

158. Soit proposé de tripler le plan donné figure 76.

Avec le côté AB, comme rayon, je décris une circonférence (*fig.* 77); je porte six fois le rayon sur cette circonférence, et je joins les points d'intersection deux à deux, ce qui me donne un triangle équilatéral. Un côté du triangle équilatéral ABC est le côté du carré triple.

Comme il serait impossible de prendre le côté du carré qui enveloppe un plan pour rayon d'un cercle, on prend la moitié, le quart ou le huitième de ce côté pour rayon du cercle que l'on construit: on opère comme dans la figure 77, et le côté du triangle équilatéral est la moitié, le quart ou le huitième du côté du carré cherché.

159. Soit demandé de réduire au tiers le plan figure 76.

Prenez BC (*fig.* 78) égal à AB (*fig.* 76); des points B et C comme centre, et avec un rayon égal à BC, décrivez deux arcs de cercle, qui se couperont en D. Sur le milieu de BC élevez une perpendiculaire; élevez-en une autre sur le milieu de DC: ces deux perpendiculaires se couperont au point O. Du point O comme centre, et avec une ouverture de compas égale à OD, décrivez une circonférence qui passera par les trois sommets B, C et D, du triangle équilatéral. Le rayon de ce cercle sera le côté du carré trois fois plus petit.

Dans la pratique, on prendra la moitié, le quart, le huitième, etc., du côté AB; on fera la même construction que ci-dessus, et le rayon du cercle sera la moitié, le quart, le huitième du côté du carré trois fois plus petit.

160. Soit proposé de faire un plan quadruple du plan figure 76.

Doublez AB (*fig.* 76) : c'est le côté du carré quadruple.

Soit proposé de faire un plan quatre fois plus petit que le plan figure 76.

Prenez la moitié du côté AB : c'est le côté du carré quatre fois plus petit.

Ces réductions suffisent dans la pratique. Nous sortirions des limites que nous nous sommes tracées si nous indiquions les méthodes pour quintupler et sextupler les plans, ou les réduire au cinquième ou au sixième. Nous ne dirons rien non plus de la méthode générale pour changer une échelle donnée en une autre.

On peut consulter sur ces questions la 4ᵉ édition du *Cours méthodique de dessin linéaire*, où l'on a traité des problèmes de ce genre.

TROISIÈME PARTIE.

DU LAVIS DES PLANS.

CHAPITRE QUINZIÈME.

161. Quand un plan est mis au trait, il reste encore à représenter chaque objet avec les couleurs conventionnelles qui lui ont été attribuées.

Nous allons, avant de parler du lavis, donner quelques détails sur les instruments dont il faut être muni pour mettre à l'encre.

RÈGLES, ÉQUERRES ET PLUMES.

162. Il faut avoir des règles de différentes longueurs et parfaitement justes.

Pour vérifier l'exactitude d'une règle, tracez une ligne sur le papier en faisant glisser une pointe de crayon ou de plume le long de son arête, retournez la règle bout à bout, et présentez la règle à la ligne déjà tracée. Si cette ligne est parfaitement recouverte dans toute son étendue par l'arête de la règle ainsi retournée, on peut en conclure que la règle est juste.

Une règle d'un mètre est nécessaire pour tirer les grandes lignes.

On doit en avoir d'un demi-mètre, et de plus pe-

160. Soit proposé de faire un plan quadruple du plan figure 76.

Doublez AB (*fig.* 76) : c'est le côté du carré quadruple.

Soit proposé de faire un plan quatre fois plus petit que le plan figure 76.

Prenez la moitié du côté AB : c'est le côté du carré quatre fois plus petit.

Ces réductions suffisent dans la pratique. Nous sortirions des limites que nous nous sommes tracées si nous indiquions les méthodes pour quintupler et sextupler les plans, ou les réduire au cinquième ou au sixième. Nous ne dirons rien non plus de la méthode générale pour changer une échelle donnée en une autre.

On peut consulter sur ces questions la 4e édition du *Cours méthodique de dessin linéaire*, où l'on a traité des problèmes de ce genre.

TROISIÈME PARTIE.

DU LAVIS DES PLANS.

CHAPITRE QUINZIÈME.

161. Quand un plan est mis au trait, il reste encore à représenter chaque objet avec les couleurs conventionnelles qui lui ont été attribuées.

Nous allons, avant de parler du lavis, donner quelques détails sur les instruments dont il faut être muni pour mettre à l'encre.

RÈGLES, ÉQUERRES ET PLUMES.

162. Il faut avoir des règles de différentes longueurs et parfaitement justes.

Pour vérifier l'exactitude d'une règle, tracez une ligne sur le papier en faisant glisser une pointe de crayon ou de plume le long de son arête, retournez la règle bout à bout, et présentez la règle à la ligne déjà tracée. Si cette ligne est parfaitement recouverte dans toute son étendue par l'arête de la règle ainsi retournée, on peut en conclure que la règle est juste.

Une règle d'un mètre est nécessaire pour tirer les grandes lignes.

On doit en avoir d'un demi-mètre, et de plus petites encore, pour tirer les lignes qui viennent aboutir au même sommet d'un angle.

Choisissez ces règles en bois de poirier ou de pommier bien sec.

Les équerres doivent être également en bois de poirier. Le mérite d'une équerre est d'avoir l'angle droit parfaitement juste et les arêtes bien vives.

Pour vérifier la justesse d'une équerre, on trace une ligne droite sur le papier; on place une des arêtes de l'angle droit sur cette ligne, et l'on élève une perpendiculaire. On retourne alors l'équerre, et si l'angle adjacent est parfaitement droit, l'équerre est juste. On peut aussi élever des perpendiculaires au moyen du compas (voir les paragraphes 33, 34, 35 et 36).

On se sert de crayons en bois, de Brokmann ou de Conté, n° 3. Si les traits doivent être effacés, il vaut mieux faire usage de crayons n° 2, qui sont moins durs.

Les plumes dont on se sert habituellement dans le lavis des plans sont celles de corbeau; elles sont fort dures, se taillent très fin, et donnent un trait délié. On peut cependant se servir également de bouts d'aile de bonne qualité.

Quelques dessinateurs emploient des plumes de canard, dont le tuyau a été durci dans la cendre chaude.

ENCRE DE CHINE.

163. On imite, dans le commerce, l'encre de Chine. On en trouve qui est fabriquée avec du noir de fumée ou des noyaux de pêche brûlés et réduits en poudre. Cette encre est mauvaise, il ne faut pas s'en servir.

Certaines personnes s'imaginent que l'encre de Chine doit avoir nécessairement un ton roussâtre pour être bonne; c'est une erreur. Il y a de très bonne encre de Chine d'un beau noir bleu.

Pour reconnaître la bonne qualité de l'encre, frottez le bout du pain sur l'ongle mouillé; si la teinte est terne ou graveleuse, l'encre ne vaut rien; si, au contraire, elle est brillante, unie et d'un reflet azuré, l'encre est bonne. Cette première épreuve n'est pas concluante. Frottez votre pain d'encre dans un godet où vous aurez mis un peu d'eau, et quand l'encre sera épaisse, faites sur le papier quelques traits fortement indiqués; quand ils seront secs, passez dessus une couche d'eau avec le pinceau; votre encre sera bonne si les traits ne subissent aucune altération.

On délaie l'encre de chine dans des godets de faïence ou dans des coquilles. Les godets les plus commodes sont en marbre. On mouille légèrement le bord supérieur, quand on ne veut plus s'en servir, et on le couvre d'un morceau de marbre qui le ferme hermétiquement, après un léger frottement pour obtenir une adhérence complète; l'encre, sans cette précaution, se dessèche et ne peut plus être employée.

PAPIER.

164. Pour dessiner des plans soignés, il est essentiel de n'employer que de très bon papier. Il doit être épais, bien collé et très uni.

Le papier anglais dit *watthman* est excellent, mais le prix en est trop élevé pour l'usage ordinaire.

Les papiers de Hollande sont fort bons, et suffisent même pour des plans soignés.

Les papiers vélins, toujours mal collés, ne peuvent servir que pour de simples traits; ils ne sont pas susceptibles de recevoir le lavis.

165. Voici les dimensions de quelques sortes de papier employées ordinairement; il est important de les connaître, surtout quand les plans sont grands, et que l'on doit réunir plusieurs feuilles ensemble. Sans cette précaution de calculer les dimensions des feuilles, on s'exposerait à éprouver beaucoup de déchet.

Il faut observer que la longueur de plusieurs feuilles doit être calculée en diminuant ce qui doit être ébarbé, recouvert et frotté avec de la colle à bouche.

	Hauteur.	Largeur.
Carré	0.420 milim.	0.530 millim.
Petit-raisin	0.445	0.585
Grand-raisin	0.480	0.650
Jésus	0.526	0.690
Colombier	0.657	0.845
Grand-aigle	0.665	0.975

MISE AU TRAIT ET A L'ENCRE.

166. Avant de mettre au trait, on doit fixer et tendre une feuille de papier sur la planche à dessiner. Pour y réussir, on passe une éponge légèrement mouillée sur un côté de la feuille, on la retourne et on la fixe sur la planche avec la colle à bouche. On place ensuite une règle sur le bord supérieur, en ne laissant passer qu'un centimètre de ce bord; sous le papier on promène la colle, que l'on a amollie dans la bouche, et, après avoir ôté la règle, on frotte avec l'ongle sur une petite bande de papier posée sur le plan pour ne pas la salir. La feuille se trouve ainsi collée solidement.

Quelque précaution que l'on prenne, il se forme toujours des plis pendant que l'on colle, mais ils disparaissent lorsque le papier est sec. Quand on voudra détacher la feuille de la planche, on coupera le papier, avec un canif et une règle de fer, à un centimètre du bord.

167. On met à l'encre le périmètre des plans et des pièces de terre. On se sert pour cela d'un tire-ligne ou d'une plume chargée d'encre de Chine bien noire. Quand le trait est mis, on dessine à l'encre de Chine les haies, les arbres et les ruisseaux, s'il y en a, ainsi que les chemins et les routes.

Pour indiquer dans un plan les lignes opposées au jour, on les trace d'un ton plus vigoureux que les autres en donnant un peu plus d'écartement aux palettes du tire-ligne.

CHAPITRE SEIZIÈME.

COULEURS.

168. Les couleurs nécessaires pour laver un plan sont :

L'encre de Chine,
La sépia,
La gomme-gutte,
Le carmin,
Le bleu de Prusse ou indigo,
Le vert d'eau.

Avec ces couleurs principales, on fait toutes les teintes dont on a besoin pour représenter les objets.

169. Les pinceaux dont on se sert dans le lavis doivent être de moyenne grosseur. On les accouple au moyen d'un petit morceau de bois que l'on nomme *hampe*. Le premier pinceau sert à mettre la teinte, et le second à la fondre avec de l'eau pure.

Les pinceaux, pour être bons, doivent avoir une pointe fine et faire ressort. On les épouve en les remplissant d'eau et en les appuyant sur le bord d'un godet ; s'ils se redressent et s'ils font bien la pointe, ils sont bons.

On doit avoir un pinceau uniquement destiné à l'encre de Chine ; autrement, et malgré le soin que l'on prendrait de le laver à grande eau, il ternirait et salirait toujours les autres couleurs.

170. Quand on veut employer une couleur, on frotte le pain sur le fond d'un godet rempli d'une eau bien limpide, jusqu'à ce que la teinte soit au degré de force convenable.

Si l'on doit mélanger des couleurs, on prépare les couleurs primitives dans des godets séparés, et l'on en prend avec différents pinceaux pour former une teinte dans un godet à part.

171. On exprime les différentes sortes de culture par des teintes de convention. Pour mettre cette teinte plate, il faut bien garnir son pinceau de couleur, et l'étendre sans s'arrêter et avant qu'elle ne sèche, autrement on fait des taches. Chaque fois que l'on prend de la couleur, il faut la remuer avec le pinceau et faire la pointe sur le bord du godet, surtout lorsqu'on arrive aux limites, qu'il ne faut jamais dépasser.

172. On suppose dans un plan que la lumière vient à gauche, et que le soleil est élevé sur l'horizon d'un demi-angle droit ; c'est dans cette hypothèse qu'il faut disposer ses ombres, si le plan en comporte. Quand à la longueur des ombres, elle est arbitraire.

TEINTES CONVENTIONNELLES ADOPTÉES POUR LES PLANS.

173. *Les terres labourables*, dans les pays entièrement cultivés, restent en blanc, ou se lavent avec une teinte pâle, composée d'un mélange de carmin, de gomme-gutte, et d'un peu d'encre de Chine.

La direction des sillons est indiquée sur le plan par des suites de points à l'encre de Chine. (V. la fig. B, pl. 7.)

174. *Les vignes* se lavent avec un mélange léger d'encre de Chine, de carmin, de sépia et d'indigo. On y dessine de petits échalas à l'encre de Chine, et on les enveloppe d'un trait contourné en serpent, que l'on lave en vert. (Voy. la fig. C, pl. 7.)

175. *Les prés* se lavent avec un vert gai, composé de gomme-gutte (trois parties), de bleu d'indigo (une partie), et de huit parties d'eau.

Les flaques d'eau se lavent avec une teinte bleue. (Voy. la *fig.* D, *pl.* 7.)

176. *Les vergers* se lavent avec une teinte d'un vert très léger ; on ajoute cinq ou six parties d'eau à une seule du mélange précédent, pour faire la teinte des vergers. (Voy. la *fig.* A de la *pl.* 7.)

177. *Les landes* se lavent avec une teinte vert-terne et aurore pâle. La teinte vert-terne s'obtient avec deux parties de gomme-gutte, une partie de bleu d'indigo et une partie de sépia dans deux parties d'eau. La teinte aurore se fait avec de la gomme-gutte et du carmin.

178. *Les friches* se lavent en vert très léger, avec une teinte aurore affaiblie. Le vert se forme avec l'indigo et la gomme-gutte très étendus d'eau, la teinte aurore avec la gomme-gutte et le carmin affaiblis par l'eau. (Voy. la *fig.* H, *pl.* 7.)

179. *Les bois et les forêts* se lavent avec une teinte de jaune légèrement verte. On prend de l'indigo et de la gomme-gutte, mais la gomme-gutte doit dominer sensiblement. (Voy. la *fig.* E, *pl.* 7.)

On y dessine les arbres et les routes qui les traversent.

180. *Les taillis et les broussailles* s'indiquent par de petits massifs verts un peu espacés. Le terrain est lavé en vert pâle. (Voy. la *fig.* F, *pl.* 7.)

181. *Les bruyères* se lavent panachées de vert et de rose. Le vert se compose de gomme-gutte et de bleu d'indigo ; le rose, de carmin et d'eau. (Voy. la *fig.* G, *pl.* 7.)

182. *Les sables* se lavent en aurore avec de la gomme-gutte et une pointe de carmin. On les pointille légèrement à la plume. (Voy. la *fig.* L, *pl.* 7.)

183. *Les marais* se lavent avec une teinte vert de prairie ; les bords sont un peu plus foncés.

184. *Les étangs* se lavent en bleu léger.

185. *Les rivières et les ruisseaux* se lavent avec du bleu d'indigo très léger, qui domine jusqu'au milieu de la rivière. Pour indiquer la direction de l'eau on dessine une flèche dont le dard indique le courant de la rivière. (Voy. la *fig.* I, *pl.* 7.)

186. *Les rochers* se lavent avec une teinte pâle de carmin mêlé avec une teinte d'encre de Chine. (Voy. la *fig.* L, *pl.* 7.)

Les montagnes sont assez difficiles à dessiner.

Des hachures indiquent les pentes. (Voy. la *fig.* M, *pl.* 7.)

187. *Les carrières* se lavent avec un mélange de bleu et de carmin ; on indique les ombres.

188. *Les arbres* se dessinent en élévation avec leur tige et leur feuillage. On cherche à imiter la nature des arbres ; il faut que l'œil distingue facilement les peupliers des chênes et des arbres fruitiers.

189. *Les fossés* se représentent par deux lignes parallèles.

190. La mer se lave avec une teinte bleue ou vert-bleu. On indique la grève avec une teinte jaunâtre, sur laquelle on marque des points à l'encre de Chine. On détermine aussi la partie du rivage qui est inondée pendant la haute mer : on lave cette partie du rivage avec une légère teinte bleue. (Voy. la *fig.* K, *pl.* 7.)

191. Quand on dessine des bâtiments, on met leur plan à l'encre rouge, et on marque l'ombre avec un filet de carmin.

Une teinte plate et pâle de carmin indique l'épaisseur des murs.

Si l'on veut représenter un jardin ou un enclos, on dessine les divers compartiments qui existent ; on laisse les allées en blanc, et on donne aux objets leur couleur naturelle, autant qu'il est possible de le faire. (Voy. la *fig.* A, *pl.* 7.)

192. La planche 8 représente un lavis de plan. On y a réuni à dessein des terrains de natures et de teintes conventionnelles différentes. Les élèves le copieront d'abord en triplant les côtés du rectangle, et par conséquent les côtés du polygone, ce qui donnera une surface neuf fois plus grande. Ils laveront avec les teintes conventionnelles, en cherchant à imiter le modèle. Ils pourront ensuite doubler les côtés du rectangle et les côtés du polygone, pour avoir une surface quatre fois plus grande; enfin ils copieront le plan tel qu'il est représenté dans la planche 8.

Voici les calculs de la mesure de ce plan. Nous ne donnerons ici que les résultats. On trouvera sur le plan la largeur des côtés et des perpendiculaires. Les exemples qui se trouvent dans le cours de cet ouvrage suffisent pour faire connaître la marche à suivre dans l'arpentage des trapèzes et des triangles.

Trapèze A,	12547ᵐ7332
Triangle B,	9551.1567
Trapèze C,	35995.3308
Trapèze D,	8005.0594
Triangle E,	610.8298
Trapèze F,	34420.2149
Triangle G,	7467.6464
Trapèze H,	9575.1078
Trapèze I,	6366.2704
Trapèze K,	8710.4575
Triangle L,	4632.9390
Total	137,882ᵐ7459

La base du rectangle est de 748ᵐ, la hauteur de 480ᵐ.

La surface est donc de	359,040ᵐ
Si l'on retranche	137,882.7459
Il restera	221,157.2541

Le reste 221,157ᵐ2541 est la surface du plan

proposé. Cette surface est donc de 22 hectares 11 ares 57 centiares.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur le lavis des plans. L'expérience et le goût indiqueront facilement les procédés à suivre.

QUATRIÈME PARTIE.

—

MESURE
DES HAUTEURS ET DES VOLUMES.

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

MESURE DES HAUTEURS.

193. La mesure des hauteurs est souvent indispensable quand on lève un plan où il y a des bâtiments : d'ailleurs ces opérations sont très simples.

Nou l ons donner les moyens de mesurer, par les procédés graphiques, les hauteurs inaccessibles.

Premier exemple.

194. Mesurer la hauteur d'un bâtiment accessible à son pied (*fig.* 79, pl. 6).

Tout le monde connaît la solution de ce problème par la mesure de l'ombre. On prend un double mètre x; on le place verticalement à une certaine distance du bâtiment, hors de l'ombre qu'il projette, et sur un plan horizontal; on mesure l'ombre projetée par le double mètre. Supposons que cette ombre, y, soit de 1 mètre 80, et que l'ombre de la maison, z, soit de 29 m. 15. On fera la proportion suivante : l'ombre, y, du double mètre est

à la hauteur du double mètre, x, comme l'ombre de la maison z est à la hauteur réelle de la maison.

$$1.80 : 2 :: 29.15 : x = 32 \text{ m. } 39.$$

Ce moyen est très simple; mais il ne donne pas un résultat très exact, parce que les ombres ne sont pas assez nettement prononcées, surtout à leur extrémité; cependant, lorsqu'il s'agira d'une approximation, l'ombre peut servir, comme nous venons de le voir, à trouver la hauteur d'un arbre, d'une maison, etc., etc.

Deuxième exemple.

195. Mesurer la hauteur d'une tour (*fig.* 80).

On pourrait obtenir la hauteur de la tour par le moyen indiqué dans le problème précédent, en mesurant l'ombre; mais nous supposons que le temps soit couvert ou que l'on veuille obtenir plus de précision. On place le graphomètre au point E (*fig.* 80); le plan de l'instrument doit être vertical, comme on le voit dans la figure. Mesurez avec le graphomètre l'angle Acb, et à la chaîne métrique la distance EB.

Soit l'angle Acb de 43 g. et EB de 21 mètres.

Sur le papier on tirera une horizontale indéterminée (*fig.* 81), sur laquelle on prendra une partie GI, représentant EB, et proportionnelle à 21 mètres. Au point I on indiquera avec le rapporteur de corne un angle de 43 grades. Comme l'angle en G (*fig.* 80) est supposé droit, on élèvera à l'équerre, au point G, une perpendiculaire dont la rencontre avec la ligne tirée du point I détermine le point K. En reportant la ligne KG sur l'échelle, on obtient la hauteur proportionnelle Ab, et si on y ajoute la hauteur du graphomètre en b B, on a AB. Nous ferons observer que l'angle ABE n'est pas droit, mais obtus, puisque la ligne AB est inclinée à l'horizon. Pour avoir très exactement la hauteur CD de la tour, il faudrait ajouter, à la longueur 21 mètres, l'inclinaison de la tour, que l'on estimerait approximativement en prenant son inclinaison pour un mètre de hauteur. Le mètre placé verticalement au pied de la tour s'en écarte d'une certaine distance par son extrémité supérieure, cet écartement est l'inclinaison par mètre.

Troisième exemple.

196. Supposons encore que l'on demande la hauteur du clocher AB, dont on ne peut approcher jusqu'au pied (*fig.* 82).

Je m'éloigne de manière à pouvoir construire le triangle DCB. Je transporte successivement le graphomètre aux points C et D, pour mesurer les angles BCD et ADB. Je mesure à la chaîne la longueur DC. Les deux angles DCB, ACB, et la distance CD, suffisent pour trouver la hauteur AB. Effectivement, je tire sur le papier une horizontale indéfinie, sur laquelle je prends, d'après une échelle quelconque, la partie EG (*fig.* 83), proportionnelle à DC. Aux points G et E, j'indique, avec le rapporteur en corne, deux angles égaux à ceux que j'ai mesurés avec le graphomètre. Les deux lignes tirées par les points E et G, dans la direction des angles mesurés au rapporteur, se coupent en H. Sur le prolongement de GE élevez avec une équerre une perpendiculaire qui passe par le point H : la ligne HI représente la hauteur du clocher AB. On porte HI sur l'échelle de proportion qui a servi à construire la figure 83, et on obtient la hauteur du clocher en mètres, décimètres et centimètres.

Quatrième exemple.

197. On demande la distance AB, que l'on ne peut mesurer à cause d'une rivière qui sépare les points A et B (*fig.* 84).

Après avoir jalonné la ligne BC, j'établis successivement le graphomètre aux points B et C; je mesure les deux angles ABC et ACB et la distance BC. Il ne me reste plus qu'à construire sur le papier, comme dans les exemples précédents, le triangle ABC avec une échelle de proportion et un rapporteur. La distance AB que je mesure sur l'échelle donne la distance cherchée en mètres, décimètres et centimètres.

Cinquième exemple.

198. On demande la distance AB de deux objets inaccessibles, et dont on est séparé par un fleuve (*fig.* 85).

Plantez des jalons en C et en D pour déterminer une base d'opération CD, et placez le graphomètre successivement aux points C et D; mesurez les angles ACD, ACB, BDA et BDC; mesurez à la chaîne la distance CD, et vous pouvez déterminer AB par une construction graphique.

Sur une ligne indéfinie que vous tracez sur le papier, prenez une distance proportionnelle à la ligne CD, et avec le rapporteur en corne tracez à chaque extrémité l'ouverture des angles ACD, ADC, que vous avez mesurés sur le terrain avec le graphomètre : l'intersection des deux lignes CA et DA déterminera le point A. Tracez avec le rapporteur en corne l'ouverture des angles BCD, BDC, et tirez les lignes DB et CD qui se couperont au point B. Joignez les points A et B, mesurez la ligne AB sur l'échelle de proportion : vous obtiendrez ainsi la distance AB en mètres, décimètres et centimètres.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

MESURE DES VOLUMES.

199. On a souvent besoin de mesurer le volume des ouvrages de maçons ou des travaux de terrassiers. Il est donc utile de connaître la mesure des volumes.

Les solides ont trois dimensions : *longueur*, *largeur* et *épaisseur*. C'est un élément de plus que dans l'arpentage, où l'on ne s'occupe que des superficies, c'est-à-dire de l'étendue à deux dimensions, *longueur* et *largeur*.

200. Soit le cube (*fig.* 186) dont on veut mesurer le volume.

Le dé à jouer est un cube : c'est une figure dont toutes les faces sont des carrés égaux, et dans laquelle on a, par conséquent, AB = BC = BD. Soit AB = 3 mètres : quelle sera la mesure du cube? Je divise AB, BC et BD en trois parties, et je mène par les points de division des horizontales et des verticales. Chacune des faces contient neuf carrés, et le cube total contiendra 27 petits cubes égaux ayant un mètre sur chaque dimension. Donc la mesure du cube est de 27 m. cubes. Mais

$27 = 3 \times 3 \times 3$: *la mesure d'un cube est donc égale au produit des trois dimensions, ou au produit de la surface d'une des bases multipliée par l'épaisseur.*

201. Si un cube avait 1 m. 45 sur chaque dimension, son volume serait représenté par 1.45 multiplié par 1.45 multiplié par 1.45, ou par $3^{m}048,625$, c'est-à-dire 3 mètres cubes 48 décimètres cubes 625 centimètres cubes.

On peut remarquer qu'un décimètre cube vaut 10 qui multiplie 10 qui multiplie 10, ou 1000 centimètres cubes ; qu'un centimètre cube vaut également 10 qui multiplie 10 qui multiplie 10, ou 1000 millimètres cubes, d'où résulte une nouvelle séparation de chiffres décimaux de trois en trois.

Soit en effet le nombre $47^{mmm}235652234$, on l'énoncera : 47 mètres cubes, 235 décimètres cubes 652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47,235 décimètres cubes, 652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47,235,652 centimètres cubes, 234 millimètres cubes.

Ou 47, 235,652,234 millimètres cubes.

La toise cube vaut 6 pieds multipliés par 6 pieds multipliés par 6 pieds, ou 216 pieds cubes.

Le pied cube vaut 12 qui multiplie 12 qui multiplie 12, ou 1728 pouces cubes.

Donc la toise cube vaut 1728 fois 216, ou 373,248 pouces cubes.

Le pouce cube vaut 1728 lignes cubes.

Donc la toise cube vaut 1728 fois 373,248, ou 644,972,544 lignes cubes.

202. On appelle parallélipipède un corps dont les six côtés sont des rectangles (*fig.* 87). On peut s'en faire une idée assez exacte par un coffre, une caisse.

Pour obtenir le volume d'un parallélipipède, on multiplie l'une par l'autre les trois arètes qui concourent à former un des angles solides.

Soit AC égale à 34 c., CB égale à 42 c., et CD égale à 1^m18 c. : le volume sera $0^m168,504$, c'est-à-dire 168 décimètres cubes, 504 centimètres cubes.

203. Les bois équarris sont des parallélipipèdes que l'on évalue en multipliant la surface de la base par la hauteur, ou les trois arètes qui viennent aboutir à un même angle. Soit une pièce de bois de 2^m45 c. de longueur sur 36 c. d'équarrissage : je multiplie 36 par 36, et le produit par 2. 45, ce qui donne $0^m317,520$ ou 317 décimètres cubes 520 centimètres cubes.

204. Comme le bois en grume est recouvert d'un aubier et d'une écorce, et que l'acheteur ne paie que le bon bois, voici une méthode pour en faire le calcul : c'est le mesurage employé dans l'artillerie.

On mesure les circonférences extrêmes avec une chaîne ; on les ajoute et l'on en prend le dixième ; on élève ce dixième au carré, et on le multiplie par la longueur de la pièce de bois. Le résultat est le volume du bon bois contenu dans l'arbre.

Soit la longueur de la pièce de bois égale à 3^m83, la circonférence inférieure égale à 1^m40, et la circonférence supérieure égale à 1^m10 : j'ajoute 1.40 et 1.10, ce qui donne 2^m50, dont le dixième est de 25 c. Je carre 25 c., je multiplie le résultat 0.0625 par 3^m83, longueur de la pièce de bois.

Le volume de cette pièce de bois est donc de $0^m239,375$, ou de 239 décim. cubes, 375 cent. cubes.

205. Le prisme est un corps dont les bases opposées sont des polygones égaux, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes (*fig.* 88).

Son volume s'obtient en multipliant la surface de la base par la hauteur, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur la base inférieure ou sur son prolongement.

Pour mesurer la base, il faut la diviser en triangles, que l'on évaluera, comme nous avons vu plus haut, en multipliant la base de chaque triangle par la moitié de la hauteur (la base du prisme est évidemment composée de la réunion des triangles du polygone) ; il ne restera plus, pour avoir la solidité, qu'à multiplier la somme de ces triangles ou la surface de la base par la hauteur du prisme.

206. La pyramide (*fig.* 89) est un corps dont la base est un polygone, et dont toutes les faces sont des triangles ayant leurs sommets réunis en un point qui est le sommet de la pyramide.

Pour avoir le volume d'une pyramide, on multiplie la surface de la base par le tiers de la hauteur, c'est-à-dire par le tiers de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base ou sur le prolongement.

On évalue la base en la divisant en triangles ; on mesure les triangles et on multiplie leur somme par le tiers de la perpendiculaire qui indique la hauteur.

207. Les prismes peuvent être droits ou obliques : ils sont droits quand les arètes sont verticales et servent de mesure pour la hauteur ; ils sont obliques si les arètes ne sont pas verticales.

Les pyramides sont droites quand la verticale, abaissée de son sommet, tombe sur le milieu de la base; autrement elles sont obliques.

208. Dans la pratique, quand on doit mesurer des matériaux, tels que moellons, pierres dures, bois, etc., on les dispose en parallélipipèdes rectangles, qui s'évaluent comme nous avons vu plus haut.

Le sable et la terre se disposent de la même manière, mais les côtés prennent une inclinaison dont il faut tenir compte. On suppose les côtés verticaux, on évalue le volume du solide, et on distrait de ce volume les parties qui manquent réellement. Ce sont les ingénieurs qui font ces calculs dans les travaux du gouvernement; ils mesurent alors avec une grande précision. Il nous suffit de montrer comment on peut évaluer approximativement le volume des matériaux employés dans l'usage ordinaire.

209. Nous allons indiquer maintenant les moyens de mesurer et les cercles et les corps ronds.

Mesurer la surface d'un cercle.

Pour avoir la surface d'un cercle, multipliez le rayon par lui-même et ensuite par 355/113; c'est-à-dire qu'on multipliera le carré du rayon par 355, et qu'on divisera le produit par 113. Nous avons donné (52) un autre moyen de mesurer la surface d'un cercle.

On pourrait employer le rapport 22/7, mais le résultat serait moins exact.

Si on appelle π le rapport du diamètre à la circonférence, la formule sera πR^2.

210. Soit un bassin (*fig*. 90) dont la largeur est 12^m24; le rayon, qui est la moitié du diamètre, égalera 6^m12.


```
   6.12        37.4544
   6.12            355
  ----------------------
   1224        1872720
   612        1872720
  3672       1123632
  -------    ------------
 37.4544     13296.3120 | 113.
              199         -----------
              866         117.6664
                755
                 751
                  732
                   540
                    88
```

Le résultat de l'opération donne 117 mètres carrés, 66 décimètres carrés, 64 centimètres carrés.

211. Mesurer le volume d'un cylindre droit (*fig*. 91).

On appelle *cylindre* un corps rond dont les bases opposées sont des cercles égaux; le cylindre est droit quand les côtés sont perpendiculaires sur la base.

Pour avoir le volume d'un cylindre, il faut multiplier la surface de la base par la hauteur.

212. Soit un tuyau cylindrique de 64 cent. de diamètre sur 12^m23 de hauteur, dont on veut évaluer le volume.

La base du cylindre droit est un cercle dont le rayon sera de 32 centimètres. Pour avoir la surface, on fera le calcul indiqué ci-dessus.

0.32	0.1024		0.3217
0.32	355		12.23
64	5120		9651
96	5120		6434
0.1024	3072		6434
	36.3520	113	3217
	245	0.32169	3.934391
	192		
	790		
	1120		
	103		

Le cylindre aura pour expression de son volume 3 mètres cubes, 934 décim. cubes, 391 cent. cubes.

213. On veut donner 32 centimètres d'épaisseur au mur d'un puits qui doit avoir 1^m26 de diamètre et 23 mètres de profondeur. On demande combien il faudra de mètres cubes de pierre pour ce travail.

Il suffit, pour cette opération, de supposer un cylindre ayant 1^m26 de diamètre, plus 32 centimètres en sus à chaque extrémité, ce qui donnera 1^m90 de largeur; on cherchera le volume du cylindre de 1^m90 de diamètre sur 23 mèt. de profondeur; on retranchera de ce volume celui du puits, dont la largeur est seulement de 1^m26, la hauteur restant la même. Le résultat sera la quantité de mètres cubes nécessaires pour construire les murs du puits.

Première opération.

0.95	0.9025	
0.95	355	
475	45125	
855	45125	
0.9025	27075	
	320.3875	113
	943	2.8352
	398	
	597	
	325	

Deuxième opération.

0.63	0.3969	
0.63	355	
189	19845	
378	19845	
0.3969	11907	
	140.8995	113
	278	1.2469
	529	
	779	
	1015	

Multipliant les deux quotients par la hauteur, j'ai pour les volumes 65^m2096 et 28^m6787, dont la différence 36^m55 décimètres cubes et 900 centimètres cubes exprime la quantité de matériaux qu'il faudrait employer dans cette construction.

214. Le cône est un corps rond dont la base est un cercle. Un pain de sucre donne l'idée d'un cône. Le cône est droit si la perpendiculaire abaissée de son sommet répond exactement au centre de la base.

215. Mesurer le volume d'un cône droit (*fig.* 92).

Le volume d'un cône droit est égal à la surface de sa base multipliée par le tiers de la hauteur.

Soit un pain de sucre dont la base a 38 centimètres de largeur, et dont la hauteur est de 52 centimètres.

Si la base a 38 centimètres de largeur, elle a 0.19 c. de rayon.

```
 0.19        0.0361
 0.19           355
 ----        ------
  171          1805
  19          1805
 ------      1083
 0.0361      -------
             12.8155 | 113
              151     -------
               385    0.1134
               465     0.52
                13    ------
                       2268
                      5670
                     --------
        Total.       0.058968

Dont le tiers est de 0.019656
```

Le volume de ce pain de sucre sera donc de 19 décimètres cubes, 656 centimètres cubes.

216. On appelle cône tronqué un cône dont on

a retranché la partie supérieure parallèlement à la base.

217. Mesurer un cône tronqué (*fig.* 93).

Pour obtenir ce volume, il faut prendre le rayon de chacune des bases, les ajouter et carrer leur somme, retrancher leur produit, et multiplier le reste par le tiers de la hauteur, et le tout par la fraction 355/113.

Soit le cône tronqué (*fig.* 93), dont la base supérieure a 42 cent. de diamètre, la base inférieure a 50 cent. de diamètre, et dont la hauteur a 36 cent.

Faisons le calcul indiqué ci-dessus :

```
                                     0.1591
                                     0.12
                                    --------
          0.21       0.21            3182
          0.25       0.25           1591
         ------     ------         ----------
Total.    0.46        105          0.019092
          0.46        42                355
         ------     ------         ----------
           276      0.0525           95460
          184                       95460
         ------                    57276
         0.2116                   -----------
Prod.    0.0525                    6.777660 | 113
         ------                     1127      ---------
Différ.  0.1591                      1106     0.059979
                                      896
                                      1050
                                        53
```

On trouve pour résultat 59 déc. cubes, 979 cent. cubes.

218. Le calcul du cône tronqué est assez compliqué; nous le recommandons aux maîtres, parce qu'il est très employé dans les arts : les cuves, les baquets, les chaudières, se rapportent au cône tronqué.

Les tonneaux eux-mêmes, quand on se contente d'une approximation, peuvent être considérés comme deux cônes tronqués unis par leur base inférieure.

219. *La sphère* est un corps rond dont tous les points de la surface sont à égale distance d'un point intérieur qu'on appelle centre (*fig.* 94).

Le volume de la sphère s'obtient en multipliant le rayon par lui-même, et le produit encore par le rayon; puis en multipliant ce dernier résultat par les 4/3 *de la fraction* 355/113, *c'est-à-dire par la raction* 1420/339.

Premier exemple.

220. Une spère a 0^m36 de diamètre. On demande le volume de cette sphère.

Son rayon est la moitié de 0^m36, ou 0^m18.

```
 0.18
 0.18
 ----
  144
  18
 ------
 0.0324
 0.18
 ------
  2592
  324
 --------
 0.005832
```

```
 0.005832
     1420
 --------
   11664
  23328
  5832
 --------
 8.281440
```

```
 8.281440 | 339
 1501     |---------
  1454    | 0.024428
   984
   3060
```


Le volume de cette sphère est de 24 déc. cubes et 428 cent. cubes.

Deuxième exemple.

221. Une sphère a 5^m42 de rayon. On demande le volume de cette spère.

```
    5.42
    5.42
   -----
    1084
   2168
  2710
 -------
 29.3764
    5.42
 -------
  587528
 1175056
1468820
----------
159.220088
```

```
   159.220088
         1420
 -------------
    318440176
   636880352
  159220088
 -------------
 226092.524960
```

```
 226092.524960 | 339
  2269         |------------
   2352        | 666.959601
    3185
     1342
      3254
       2039
         560
```

Ainsi le volume de cette sphère est de 666 m. cubes, 959 déc. cubes, 601 cent. cubes.

Si on appelle π le rapport du diamètre à la circonférence, la formule du volume de la sphère est de $4/3\ \pi R^3$.

CHAPITRE DIX-NEUVIEME.

MESURE DES BOIS DE CHARPENTE EN MÈTRES CUBES.

222. Dans les arsenaux de marine, on considère les pièces de bois, ou comme *des parallélipipèdes rectangles* quand elles sont équarries, ou comme *des cylindres* quand elles sont rondes. Les pièces de bois de construction n'ont jamais exactement la figure de l'un de ces deux solides : car elles sont ordinairement plus grosses à une extrémité qu'à l'autre; alors le parallélipipède rectangle est une pyramide quadrangulaire tronquée, et le cylindre est un cône droit tronqué. Pour en avoir le volume exact, *on prend le diamètre du milieu de la pièce, et on multiplie la surface de cette section verticale par la longueur totale de la pièce de bois.* Le résultat, qui fournit *le cube de la pièce de bois*, ne s'éloigne pas sensiblement de la véritable mesure. Ce moyen est employé dans la pratique.

223. *Pour obtenir le cube d'une pièce de bois équarrie, on multiplie la longueur par la largeur et le produit par l'épaisseur; la largeur et l'épaisseur sont fournies par le plan mené verticalement au milieu de la longueur de la pièce.*

224. Cherchons le cube d'une pièce de bois de $10^{m}45$ de longueur, et qui a $0^{m}83$ de largeur sur $0^{m}56$ d'épaisseur au milieu de la longueur, à égale distance des deux extrémités.

Nous multiplierons $10^{m}45$ par $0^{m}83$, et le produit résultant par $0^{m}56$.

$$
\begin{array}{r}
10.45 \\
0.83 \\
\hline
3135 \\
8360 \\
\hline
8.6735 \\
0.56 \\
\hline
520410 \\
433675 \\
\hline
4.857160
\end{array}
$$

La pièce aura 4 m. cubes, 857 déc. cubes, 160 cent. cubes.

225. Si l'on voulait avoir exactement le cube d'une pièce de bois, on se rappellera que la pièce équarrie est plus grosse à un bout qu'à l'autre, et que l'on peut la considérer comme une pyramide quadrangulaire tronquée.

Voici le procédé à suivre pour obtenir le cube : *On prend la superficie du gros et du petit bout, on multiplie ces deux superficies entre elles, et on extrait la racine carrée, qui donne le plan moyen géométrique, placé à égale distance des deux extrémités. On ajoute à la superficie du gros et du petit bout celle du plan moyen, on multiplie la somme par la longueur de la pièce de bois, et on prend le tiers du résultat.*

Exemple.

226. Soit une pièce de bois dont le gros bout a d'équarrissage $0^{m}62$ sup $0^{m}52$, le petit bout $0^{m}58$ sur $0^{m}34$ et la longueur $11^{m}45$.

Je multiple $0^{m}62$ par $0^{m}52$ pour avoir la superficie du gros bout.

```
              0.62
              0.52
              ----
               124
              310
            ------
Produit     0.3224
```

Je multiplie $0^{m}38$ par $0^{m}34$ pour avoir la superficie du petit bout.

```
              0.38
              0.34
              ----
               152
              114
            ------
Produit     0.1292
```

Pour obtenir le plan moyen, je multiplie $0^{m}3224$ par $0^{m}1292$, et j'en extrais la racine carrée. (Voir la note placée à la fin du 23e chapitre.)

```
              0.3224
              0.1292
              ------
                6448
              29016
              6448
             3224
           -------------
Produit    0.04165408 | 0.2040
             1654       404
               3808     4080
```

La superficie du plan moyen est de $9^{m}2040$; j'additionne les trois superficies, je multiplie la somme par la longueur $11^{m}45$, et je prends le tiers du résultat.


```
             0.3224
             0.1292
             0.2040
             ------
Total        0.6556
              11.45
             ------
              32780
             26224
             6556
            6556
           --------
Produit    7.506620
```

Dont le tiers est de 2.502206

Le cube de la pièce de bois serait alors de 2 mètres cubes, 502 décimètres cubes, 206 centimètres cubes.

227. On voit qu'au moyen des nouvelles mesures rien n'est plus facile que d'obtenir le cube des bois équarris. Les pièces de bois rond ne donneraient pas plus de peine à cuber. *En effet, on prendrait la circonférence du milieu de la pièce, ainsi que le diamètre; on multiplierait la circonférence par le quart du diamètre, et ce produit par la longueur de la pièce de bois :* ce serait le cube de la pièce de bois rond.

CHAPITRE VINGTIÈME.

MESURE DES BOIS DE CHARPENTE, EN TOISES, PIEDS ET POUCES CUBES.

228. Mais comme dans le toisé des bois on se sert encore trop souvent de la toise, du pied, du pouce et de la ligne cubes, nous allons donner les calculs en toises, pieds, pouces et lignes.

229. Le pied cube est un solide qui a 1 pied sur chaque dimension; il se divise en 12 parties qu'on nomme *pouces de pied cube.*

230. Le pouce de pied cube est un solide qui a 1 pied carré de base sur un pouce d'épaisseur.

Le pouce de pied cube se divise en 12 parties, qu'on nomme *lignes de pied cube.*

231. La ligne de pied cube est un solide qui a 1 pied carré de base sur une ligne d'épaisseur.

232. Si on considère la ligne de pied cube comme ayant 1 pied de longueur, 1 pouce de largeur et 1 pouce d'épaisseur, ce qui n'est que la valeur indiquée au paragraphe 229, mais sous une autre forme, elle prend alors le nom de *chevilles de pied cube.*

La ligne de pied cube se divise aussi en 12 parties, qu'on nomme *points de pied cube.*

Le point de pied cube est un solide qui a 1 pied carré de base et un point d'épaisseur.

233. Il ne faut pas confondre les pouces, lignes et points cubes avec les pouces de pied cube, les lignes de pied cube et les points de pied cube : on commettrait une grande erreur.

En effet voici le calcul :

Un pied cube vaut 1728 pouces cubes.

Le pouce cube vaut 1728 lignes cubes.

La ligne cube vaut 1728 points cubes.

Le pied cube vaut 12 pouces de pied cube.

Le pouce de pied cube vaut 12 lignes du pied cube ou chevilles de pied cube.

La cheville de pied cube vaut 12 points de pied cube.

Le pied cube vaut donc 144 chevilles.

Ainsi le pouce cube n'est que le 1/1728 d'un pied cube, tandis que le pouce de pied cube en est le 1/12 ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que le pouce de pied cube est cent quarante-quatre fois plus grand que le pouce cube. On voit les erreurs qui résulteraient d'une pareille confusion.

Premier exemple.

234. Soit une pièce de bois de 25 pieds de longueur sur 3 pieds de largeur et 2 pieds d'épaisseur.

Il faut multiplier 25 par 3, et le produit par 2.

	25
	3
Produit	75
Double produit	150

La pièce aurait donc 0 toise cube 150 pieds cubes.

Deuxième exemple.

235. Soit une pièce de 30 pieds de longueur, sur 3 pieds de largeur et 6 pouces d'épaisseur.

On multiplie 30 par 3, ce qui donne 90 pieds carrés. Si l'on multiplie les 90 pieds par 6 pouces, on aura 540 pouces de pied cube. En divisant le produit par 12 on aura les pieds cubes.

$$\begin{array}{r|l} 540 & 12 \\ \hline 60 & 45 \end{array}$$

La pièce de bois aura donc 45 pieds cubes.

Troisième exemple.

236. Soit une pièce de 18 pieds de longueur avec un équarrissage de 10 pouces sur 9.

Je multiplierai les 18 pieds de longueur par 10 pouces, ce qui me donnera 180 pouces de pied carré. Ce nombre, multiplié par 9 pouces, donnera 1620 chevilles.

Or, nous avons vu plus haut que le pied valait 144 chevilles.

Divisons donc 1620 par 144,

$$\begin{array}{r|l} 1620 & 144 \\ \hline 180 & 11 \\ 36 & \end{array}$$

on obtiendra, pour le cube de la pièce de bois, 11 pieds cubes et un reste 36, qu'il faudra diviser par 12 pour avoir des pouces de pied cube. La solidité sera donc 11,pieds cubes, 3 pouces de pied cubes. S'il y avait eu un second reste, on l'aurait divisé par 12 pour avoir des chevilles.

SOLIVES.

237. Les bois de construction se calculent à *la solive*, qui est une mesure de 3 pieds cubes.

238. La toise cube contient 216 pieds cubes, ou 72 solives, puisque la solive est de 3 pieds cubes.

Ordinairement on considère la solive comme

ayant 6 pieds de longueur, 1 pied de largeur et 6 pouces d'épaisseur.

On la divise en 6 parties, qu'on nomme *pieds de solive.*

239. *Le pied de solive* est un solide qui a 6 pieds de longueur, 1 pied de largeur et 1 pouce d'épaisseur.

Le pied de solive se divise en 12 parties, que l'on nomme *pouces de solive.*

240. Le pouce de solive est un solide qui a 6 pieds de longueur, 1 pied de largeur et 1 ligne d'épaisseur.

Le pouce de solive se divise encore en 12 parties qu'on appelle *lignes de solive.*

241. La ligne de solive est un solide qui a 6 pieds de longueur, 1 pied de largeur et 1 point d'épaisseur.

Exemples.

242. Soit une pièce de bois de 23 pieds de longueur sur 16 pouces de largeur et 14 pouces d'épaisseur, que l'on veut évaluer en solives.

D'après la règle que nous avons exposée plus haut, on trouvera 35 pieds cubes, 9 pouces de pied cube, 4 lignes de pied cube.

Pour les 35 pieds cubes, nous aurons 11 solives et un reste 2. Que vaudra ce 2 en pieds de solive? Une solive vaut 6 pieds de solive : donc un pied cube, qui est le tiers d'une solive, vaudra le tiers de 6 pieds ou 2 pieds de solive; le reste 2 vaudra 4 pieds de solive : nous aurons donc 11 solives 4 pieds de solive. Il reste encore à évaluer les 9 pouces de pied cube.

D'après le raisonnement que nous venons de faire, il est évident que le pouce de pied cube vaut

2 pouces de solive, et la ligne de pied cube 2 lignes de solive : donc la solidité de la pièce de bois sera de 11 solives 4 pieds, plus 18 pouces de solive et 8 lignes de solive; ce qui donne enfin 11 solives 5 pieds 6 pouces et 8 lignes de solive.

Autre Exemple.

243. Soit une pièce de bois de 28 pieds de longueur sur 9 pouces de largeur et 6 pouces d'épaisseur, à évaluer en solives.

En la réduisant en pieds cubes, on trouve 10 pieds 6 pouces cubes.

10 pieds valent 3 solives, plus 1 pied cube.

Le pied cube vaut 2 pieds de solive.

Les 6 pouces cubes valent 12 pouces de solive ou 1 pied.

On aura donc pour la solidité 3 solives 3 pieds de solive.

Pour réduire des solives en pieds cubes il faut se rappeler que :

1 solive vaut 3 pieds cubes.

1 pied de solive vaut un demi-pied cube,

1 pouce de solive vaut un demi-pouce de pied cube.

1 ligne de solive vaut une demi-cheville.

244. Soit une pièce de bois de 24 solives 4 pieds 8 pouces 6 lignes de solive à réduire en pieds cubes.

24 solives valent 72 pieds cubes.
4 pieds de solive valent 2 pieds cubes.
8 pouces de solive valent 4 pouces de pied cube.
6 lignes de solive valent 3 chevilles.

La pièce de bois vaudrait donc 74 pieds cubes, 4 pouces de pied cube et 3 chevilles.

CHAPITRE VINGT ET UNIÈME.

APPLICATION.

Moyen de trouver le plus grand équarrissage d'un arbre.

245. *Pour connaître le plus grand équarrissage d'un arbre abattu, on mesure le diamètre du milieu de l'arbre; on carre ce diamètre; on en prend la moitié : la racine carrée de cette moitié du diamètre est le côté du plus grand carré que puisse donner l'arbre équarri à vive arête.*

Exemples.

246. Soit un arbre de 28 pouces de diamètre au milieu. On demande le côté du plus grand carré possible que donnera la pièce équarrie.

Le carré de 28 est de 784, dont la moitié est 392, la racine carrée de 392 est de 19 : le côté du carré sera donc de 19 pouces.

Cette mesure ne serait pas exacte si le diamètre de l'arbre avait été pris sans faire déduction de l'aubier et de l'écorce. L'usage ordinaire est de diminuer 3 pouces au chêne, quoique la déduction exacte dépende de l'âge et de la qualité du bois.

Retranchant 3 pouces de 28, il reste 25; carrant ce nombre, en prenant la moitié et extrayant la racine carrée, on trouvera 17 pouces 1/2.

247. Pour avoir l'équarrissage de la plus grosse pièce qu'on puisse tirer d'un ardre, on emploie dans la pratique un procédé bien simple.

On suppose la pièce de bois sciée et placée en chantier. On tracera un cercle aux deux bouts de la pièce, mais en dedans de l'aubier. On tirera un diamètre de niveau AB (*fig.* 95), et un autre vertical CD avec le fil à plomb. Les quatre extrémités de ces deux diamètres donneront les quatres points qui doivent former les arêtes par ce bout. On tirera AC, CB, AD et BD.

On fera la même opération à l'autre extrémité, ce qui donnera les huit arêtes de la pièce.

Moyen de trouver la plus forte pièce qu'on puisse tirer d'un arbre.

248. La plus grosse pièce que donne un arbre n'est pas la plus résistante : il a été constaté par des expériences multipliées et par le calcul que la plus forte poutre, celle qui offre le plus de résistance, ne doit pas être carrée à ses extrémités.

249. Voici la règle à suivre : *Mesurez le diamètre du milieu de l'arbre, carrez ce diamètre, prenez-en le tiers; extrayez la racine carrée, qui sera le plus petit côté de la pièce : la racine des deux tiers du carré du diamètre sera le plus grand côté.*

Exemple.

250. Prenons les dimensions de l'exemple précédent. Suposons que le diamètre du milieu, franc d'aubier, soit de 25 pouces.

6 2 5		25	6 25	
2.8 8.33	14.4	25	12 50	
1 0.8	24	125	4 16.6 6	20.4
1 2 3.3	284	50	16 6.6	40 4
9 7		625	5 0	

Faisant le calcul indiqué ci-dessus, et réduisant les dixièmes en lignes, on trouvera 14 pouces 4 lignes sur le plus petit côté, et 20 pouces 4 lignes sur le plus grand.

251. Dans la pratique, pour obtenir cet équarrissage, on trace un cercle à chaque extrémité de la pièce de bois, en dedans de l'aubier (*fig.* 96); on tire ensuite un diamètre horizontal AB au moyen du niveau; on divise ce diamètre en trois parties égales, ce qui donne deux points de division C et D : de ces deux points on tire deux verticales, l'une CE au-dessus, l'autre DF au-dessous du diamètre. Les points de rencontre E et F de ces verticales avec la circonférence et les deux extrémités A et B du diamètre donnent les quatre points des arêtes de la pièce. Si l'on en fait autant à l'autre bout, on aura les huit arêtes.

Les bois de construction doivent être rognés par les deux bouts; s'ils ne le sont pas, on ne commence à mesurer la pièce que du point où elle aurait dû être rognée.

Les pièces droites doivent être équarries à vive arête; si elles ne le sont pas, elles souffrent une diminution proportionnelle.

252. Jusqu'à présent, nous avons supposé que toutes les pièces de bois étaient droites, mais il arrive souvent qu'elles sont courbes; dans ce cas il faut les dégrossir selon la configuration naturelle des pièces, qui prennent différents noms d'après l'usage auquel elles sont propres.

Quand la pièce courbe est dépouillée de l'écorce et de l'aubier, on tend une corde bien raide d'un bout à l'autre, ce qui forme *la corde* dont la pièce est *l'arc.* On présente ensuite une règle graduée sur le cordeau dans l'endroit le plus arqué; c'est cette distance qu'on appelle la *flèche* de l'arc. C'est d'après cette flèche que l'on range la pièce de bois dans les différentes espèces indiquées par les tarifs de la marine.

CHAPITRE VINGT-DEUXIÈME.

MESURE DES BOIS RONDS EN PIEDS, POUCES ET LIGNES CUBES.

253. Pour avoir le cube des bois ronds, on prend la circonférence du milieu de la pièce, dont on multiplie la superficie par la longueur totale.

Pour avoir la superficie du cercle, on multiplie la circonférence par le quart du diamètre, ce qui est la même chose que la moitié du rayon.

Si l'on ne peut avoir que le diamètre, on multiplie le diamètre par 22, et on divise le produit par 7, ce qui donne la circonférence, que l'on multiplie par le quart du diamètre.

Il ne reste plus qu'à multiplier ce résultat par la longueur de la pièce de bois.

Exemple.

254. Soit une pièce de bois de 32 pieds de longueur et de 82 pouces de circonférence.

Connaissant la circonférence, on connaît le diamètre en multipliant 82 par 7, et en divisant le produit par 22.

$$
\begin{array}{r|l}
82 & \\
574 & 22 \\ \hline
134 & 26 \quad 2/22 = 1/11 \\
2 &
\end{array}
$$

Ce qui donne pour diamètre 26 1/11.

Pour avoir la superficie du cercle, je multiplie 82 par le quart de 26 1/11, ou par 6 23/44.

$$
\begin{array}{r}
82 \\
6\ 23/44 \\ \hline
492 \\
42\ \ 19/22 \\ \hline
534\ \ 19\ 22
\end{array}
$$

Il ne me reste plus qu'à multiplier par 32 pieds.

$$
\begin{array}{r}
534\ \ 19/22 \\
32 \\ \hline
1068 \\
1602 \\
27\ \ \ 7/11 \\ \hline
17115\ \ \ 7/11
\end{array}
$$

Divisant par 144, comme il a été démontré pour les bois équarris, on trouve pour le cube de la pièce : 118 pieds, 10 pouces. 3 lignes de pied cube.

255. Soit une pièce de 34 pieds de long, de 20 pouces de diamètre, dont on demande la solidité en pieds cubes.

La circonférence s'obtient en multipliant par 22 et en divisant le produit par 7, ce qui donne 62 6/7.

Je multiplie par le quart du diamètre ou 5.

$$62\ 6/7 \times 5 = 314\ 2/7.$$

Multipliant ce résultat par 34, j'obtiens

$$
\begin{array}{r}
314\ \ 2/7 \\
34 \\ \hline
1256 \\
942 \\
9\ \ 5/7 \\ \hline
10685\ \ 5/7
\end{array}
$$

On divise ce produit par 144 et le reste par 12, et on obtient pour dernier résultat 74 pieds, 2 pouces, 5 lignes de pied cube.

256. Si l'on voulait obtenir plus exactement le cube d'une pièce de bois rond, on la considérerait comme un cône tronqué, qui aurait pour base inférieure le cercle du gros bout, pour base supérieure le cercle du petit bout, et pour hauteur la longueur de la pièce.

Pour avoir le cube de ce cône tronqué, il faudrait chercher la superficie des deux bases, y ajouter la superficie d'une base à égale distance entre les deux, multiplier la somme des trois superficies par la longueur totale, et prendre le tiers du résultat.

Exemple.

257. Soit une pièce de 14 pouces de diamètre au gros bout, de 10 pouces au petit bout, et de 25 pieds de longueur.

Détail de l'opération.

	14		10
multipliez par	22	multipliez par	22
	28		20
	28		20
	308		220
Divisez par 7	44	Divisez par 7	31.45
	14		
Multipliez par le 1/4 de 14.	176	multipliez par le 1/4 de 10	
	44		
ou multipliez par 14 et divisez par 4.	616	ou multipliez par 10 et divisez par 4.	78,6
	154		

Je multiplie 154 par 78.6, et j'extrais le racine carrée du produit.

```
        154
       78.6
      -----
        924
      1232
     1078
   ----------
   1,21,04.4 | 110
     21      | 210
     --
     00
```

Les 3 superficies ajoutées donneront 342.6.

```
                 154
                 110
                78.6
               -----
Total          342.6
Multipliez par    25
               -----
               17130
               6852
               -----
Produit         8565
Le tiers est    2855
```

Divisant par 144 et le reste par 12, on obtient 19 pieds cubes, 9 pouces, 1 ligne de pied cube.

CHAPITRE VINGT-TROISIÈME.

DE LA MESURE DU SCIAGE DES BOIS.

258. Lorsqu'on exploite des bois, des peupliers, par exemple, on fait scier les arbres dans le sens de la longueur, c'est ce qu'on appelle *les débiter à* *la scie*. Il faut savoir calculer ce que l'on doit pour le sciage, qui se paie ordinairement au pied carré.

Chaque trait de scie divise une pièce en deux parties, et donne deux superficies égales.

On peut faire observer ici que, lorsqu'une pièce de bois est débitée, le nombre de planches ou *bordages* qui résulte du sciage excède toujours d'*un* le nombre des traits de scie; ainsi, avec un trait vous faites deux planches, avec deux traits vous faites trois planches, etc., etc.

259. Carrer le sciage, c'est chercher combien les superficies contiennent de pieds et de parties de pied carré.

Si la pièce n'a eu qu'un trait de scie, on cherchera la superficie d'une des faces sur le côté qui a été scié. S'il y a plusieurs traits de scie, on multiplie la superficie trouvée par le nombre de traits de scie.

Exemple.

260. Soit une pièce équarrie de 18 pieds de longueur sur 10 pouces de largeur, dont on a fait quatre planches, ou, ce qui revient au même, que l'on a débitée de trois traits de scie. Je multiplie la longueur 18 par 10, ce qui donne 180 pouces de pied carré pour un seul trait de scie, mais comme il y en a trois, je multiplie 180 par 3, ce qui me donne 540 pouces de pied carré. Divisant par 12 pour avoir des pieds, j'obtiens 45 pieds carrés.

Dans l'exemple que nous venons de présenter, il s'agit d'une pièce bien équarrie et de planches de même largeur : mais s'il fallait débiter un peuplier, les superficies ne sont plus égales : car les planches prises au cœur de l'arbre sont sensiblement plus

grandes que celles attenant à l'écorce, et qu'on appelle des *croûtes*.

Pour faire le calcul, on ajoute les largeurs des planches et celle d'une des croûtes, et l'on multiplie cette somme par la longueur de la pièce.

Autre exemple.

261. Soit un peuplier de 12 pieds de longueur, débité de cinq traits de scie : quel est le sciage en pieds carrés?

Nous supposerons deux planches de 16 pouces de largeur, deux de 15 pouces, et deux croûtes de 13.

Nous ajouterons les deux planches de 16 pouces, les deux planches de 15 pouces, et une croûte de 13. Nous multiplierons le total par 12 pieds, longueur de la pièce.

Détail de l'opération.

Deux planches de 16 pouces	32 pouces.
Deux planches de 15 pouces	30
Une croûte (puisque la croûte n'a qu'une superficie)	13
	75 pouces.
Multiplié par	12 pieds.
	150
	75
	900 pouces.
Le douzième est de	75 pieds.

262. Il est facile, connaissant le diamètre d'un peuplier, de savoir combien on obtiendra de bordages d'une certaine épaisseur : il suffit de savoir que chaque trait de scie emporte à peu près 3 lignes de bois.

263. Si, par exemple, un peuplier a 18 pouces de diamètre, et que je veuille avoir des planches de 2 pouces, je retranche 2 pouces de 18, ce qui me donne pour reste 16, ou 12 fois 16 lignes, ou 192 lignes, que je divise par 2 pouces 3 lignes ou 27 lignes; le quotient est 7, plus un reste 3; donc on aura 7 traits de scie ou 8 bordages, dont une croûte qui aura 3 lignes d'épaisseur de plus que les autres bordages, à cause du reste 3 ci-dessus.

264. Les marchands de bois qui achètent les coupes mesurent le sciage à la toise carrée, qu'ils appellent *brasse.*

265. La toise carrée ou brasse est une superficie de 6 pieds de longueur, et de 6 pieds de largeur, c'est-à-dire de 36 pieds carrés.

La toise carrée vaut 6 pieds de toise carrée, ou 6 toises-pieds.

266. Le pied de toise carrée est une superficie de 6 pieds de longueur sur 1 pied de largeur; il contient 6 pieds carrés.

Le pied de toise carrée se divise en 12 parties, qu'on nomme *pouce de toise carrée* ou *toise-pouce.*

267. Le pouce de toise carrée est une superficie de 6 pieds de longueur sur 1 pouce de largeur; il vaut un demi-pied carré.

Le pouce de toise carrée se divise en 12 parties, qu'on nomme *lignes de toise carrée* ou *toise-ligne.*

268. La ligne de toise carrée est une superficie de 6 pieds de longueur sur une ligne de largeur, et

vaut, par conséquent, un demi-pouce du pied carré.

Premier exemple.

Soit une quantité de planches de 3 toises de longueur, dont les largeurs valent ensemble 4 pieds.

Je multiplie 3 toises par 4 pieds, ce qui me donne 12 pieds de toise carrée, ou 2 toises carrées.

Les planches peuvent être de longueurs différentes, et la largeur la même.

Deuxième exemple.

Soit un assemblage de planches qui fassent 18 toises de longueur sur 9 pouces de largeur.

Je multiplie 18 toises par 9 pouces, ce qui me donne 162 pouces de toises carrée; mais une toise carrée vaut 6 fois 12 ou 72 pouces de toise carrée: donc je diviserai 162 par 72, ce qui me donnera pour quotient 2, et pour reste 18; divisant 18 par 12, j'ai pour résultat total 2 toises 1 pied 6 pouces de toise carrée.

Les explications dans lesquelles nous sommes entrés sur la mesure des bois sont d'une assez haute importance et d'une application assez fréquente, surtout à la campagne, pour faire excuser la longueur de ce chapitre. En le resserrant davantage, nous aurions risqué de n'être pas compris, et nous nous sommes rappelé que cet ouvrage était destiné à de jeunes élèves.

La complication de ces mesures anciennes fera mieux apprécier aussi l'admirable simplicité du nouveau système des mesures.

NOTE SUR LES CARRÉS ET L'EXTRACTION DES RACINES.

On appelle *carré le produit d'un nombre par lui-même*; ainsi le carré de 4 est 4×4 ou 16.

On appelle racine carrée le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le carré : ainsi 4 est la racine carrée de 16.

Voici les carrés des neuf premiers nombres :

Racines,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Carrés,	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Rien n'est plus facile que de trouver le carré d'un nombre : il suffit de multiplier ce nombre par lui-même. Mais il est plus difficile de revenir du carré à sa racine.

Premier problème.

On demande la racine carrée de 24627.

		Preuve.
2.46.27	156	156
1	25	156
14.6	306	936
125		780
212.7		156
183.6	Reste	291
Reste 291		24627

Pour faire cette opération, je divise le nombre proposé 24627 en tranches de deux chiffres, et en allant de droite à gauche ; la troisième tranche 2 n'a qu'un chiffre dans cet exemple, mais elle pourrait en avoir deux si le nombre proposé avait six chiffres.

Je cherche le plus grand carré contenu dans la dernière tranche à gauche 2 : la table ci-dessus me donne 1. Je tire un trait vertical pour séparer le nombre proposé de la racine, et un trait horizontal pour séparer la racine des opérations qu'il faudra faire au-dessous. J'écris 1 à la racine ; le carré de 1 est 1, que je pose sous 2 ; je fais la soustraction, et à côté du reste 1 j'abaisse la tranche suivante 46, dont je sépare le dernier chiffre par un point. Je double la racine ; ce qui me donne 2, je cherche combien de fois 14 contient 2. Il le contient 7 fois ; mais 7 serait trop grand, de même que 6, à cause de la retenue ; je place donc 5 à la droite du 2, et je multiplie 25 par 5, ce qui me donne pour produit 125, que j'écris sous 146. A côté du reste 21, j'abaisse la tranche suivante 27, dont je sépare le dernier chiffre 7. Je double la racine 15, ce qui donne 30 ; et je cherche combien de fois 212 contient 30 ; j'écris le quotient 6 à la droite de 30, et je multiplie 306 par 6 ; je retranche le produit 1836 de 2127, ce qui donne pour reste 291.

156 est la racine de 24627 moins 291.

Pour faire la preuve, on cherche le carré de 156 en multipliant 156 par 156 ; si on ajoute le reste 291, on trouve 24627.

Premier exemple.		*Preuve.*
12.43.25	352	352
9	65	352
34.3	702	704
32 5		1760
182.5		1056
140 4	Reste	421
42 1		124325

Deuxième exemple.		*Preuve.*
83.62.48	914	914
81	181	914
26.2	1824	3656
18 1		914
814.8		8226
729 6		Reste 852
85 2		836248

Troisième exemple.		*Preuve.*
7.56.83.44	2751	2751
4	47	2751
35.6	545	2751
32 9	5501	13755
278.3		19257
272 5		5502
5 84.4		Reste 343
5 50 1		7568344
34 3		

Quatrième exemple.		*Preuve.*
24.92.46.84	4992	4992
16	89	4992
89.2	989	9984
80 1	9982	44928
914.6		44928
890 1		19968
24 58.4		Reste 4620
19 96 4		24924684
4 62 0		

Cinquième Exemple.		*Preuve.*
6.24.62.58.26	24992	24992
4	44	24992
22.4	489	49984
17 6	4989	224928
486.2	49982	224928
440 1		99968
46 13.8		49984
44 90 1		Reste 23762
1 23 72.6		624623826
99 96 4		
23 76 2		

Sixième Exemple.		*Preuve.*
32.64.24.86.24	57133	57133
25	107	57133
76.4	1141	171399
74 9	11423	171399
1 52.4	114263	57133
1 14 1		399931
38 38.6		285665
34 26 9		Reste 68935
4 11 72.4		3264243624
3 42 78 9		
68 93 5		

Pour avoir des décimales à la racine, il faut disposer le nombre de manière à ce que le carré contienne le double du nombre des décimales que l'on veut obtenir à la racine. S'il n'y a pas de décimales à la suite d'un nombre entier, et qu'on veuille avoir des décimales à la racine, on mettra à la suite de ce nombre autant de fois deux zéros que l'on veut avoir de décimales. S'il y a des décimales en nombre impair, on ajoute toujours un zéro de plus.

Deuxième Problème.

Extraire la racine carrée de 2,432 avec 2 décimales.

Il faut mettre 4 zéros à la suite de 2,432, et extraire la racine carrée ci-dessus.

```
     Exemple.                      Preuve.

  24.32.00.00 | 4931                 4931
  16            89                   4931
   83.2         983                  4931
   80 1         9861                14793
    3 10.0                         44379
    2 94 9                        19724
      15 10.0          Reste         5239
       9 86 1                    24320000
       5 23 9
```

Troisième Problème.

Extraire la racine carrée de 6328m25 à trois décimales.

Comme on veut trois décimales, nous ajouterons quatre zéros à la suite du 5, ce qui donnera 6328.250000.


```
     Exemple.                       Preuve.

  63.28.25.00.00 | 79.549          795.49
  49               14              795.49
  142.8            1585            715951
  134 1            15904          318196
     872.5         156089        397745
     792 5                      556845
      80 00.0         Reste        206599
      6361 6                   6328.250000
      1638 40.0
      1431 80 1
       206 599
```

Quatrième Problème.

Extraire la racine carrée de 0m632 à quatre décimales.

Le nombre des chiffres décimaux étant impair, je le complète par un zéro, et j'ajoute quatre autres zéros.

```
     Exemple.                       Preuve.

  63.20.00.00 | 0.7949              0.7949
  49            149                 0.7949
  142.0         1584                71541
  134 1         15889              31796
     790.0                         71541
     633 6                        55643
     15640.0       Reste           15399
     14300 1                   0m.63200000
      13399
```

CHAPITRE VINGT-QUATRIÈME,

SERVANT D'EXAMEN POUR CONSTATER LE TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Dans l'arpentage, rien ne peut remplacer la pratique : aussi avons-nous engagé les maîtres à conduire les élèves dans la campagne, et leur avons-nous fait connaître les moyens les plus simples pour mesurer un terrain et pour en lever le plan. Comme l'acquisition des instruments rencontre bien des obstacles à cause de la position peu aisée des instituteurs et des faibles ressources que peut leur procurer le budget de la commune, nous avons levé cette difficulté en les mettant à même de construire les instruments nécessaires, et d'obtenir néanmoins des résultats exacts.

Outre la *pratique*, il y a aussi dans l'arpentage des notions indispensables de *théorie;* nous engageons les maîtres à y revenir fréquemment. Pour faciliter l'examen des connaissances acquises par leurs élèves, nous allons donner, comme dans notre *Cours méthodique de dessin linéaire*, une série de questions que les maîtres ou les moniteurs adresseront aux élèves, et sur lesquelles ceux-ci devront répondre imperturbablement. Quel que soit le mode d'enseignement, le maître devra interroger lui-même.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

Demande. Comment se fait l'addition des nombres décimaux?

Réponse. L'addition des nombres décimaux s'effectue de la même manière que celle des nombres entiers; seulement on a soin de séparer par un point, au résultat, autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans celui des nombres qui en contenait le plus.

D. Comment se fait la soustraction des nombres décimaux?

R. La soustraction des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers; seulement on rend le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des nombres proposés, en mettant des zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales.

D. Comment se fait la multiplication des nombres décimaux?

R. Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, il faut opérer comme si les deux nombres étaient entiers, sans faire attention aux points, et séparer sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

D. Comment se fait la division des nombres décimaux?

R. Pour diviser l'un par l'autre deux nombres accompagnés de chiffres décimaux, il faut mettre à la suite de celui qui en a le moins un nombre suffisant de zéros pour qu'il y ait autant de décimales dans le dividende que dans le diviseur. On supprime alors le point, et la division se fait comme celle des nombres entiers.

D. Quel moyen doit-on employer pour obtenir des décimales au quotient d'une division ordinaire?

R. Il suffit de mettre à la suite du reste autant de zéros que l'on veut avoir de décimales au quotient, et d'opérer comme dans une division ordinaire.

D. Comment peut-on convertir une fraction ordinaire en fraction décimale?

R. Il faut diviser le numérateur de la fraction par le dénominateur, en ajoutant à la suite autant de zéros que l'on veut avoir de chiffres décimaux au quotient.

D. Qu'est-ce que le système métrique?

R. C'est un système méthodique de mesures dérivant toutes les unes des autres, et se rattachant à notre système décimal.

D. Qu'est-ce que le mètre?

R. Le mètre est la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur.

D. Quelle est la longueur du mètre en anciennes mesures?

R. Le mètre vaut o t. 5130740, ou 3 p. o po. 11 l. 296.

D. Quels sont les mots employés pour composer des mesures plus grandes et plus petites que l'unité principale?

R. Myria, qui signifie	dix mille.
Kilo,	mille.
Hecto,	cent.
Déca,	dix.
Deci,	dixième.
Centi,	centième.
Milli,	millième.

D. Appliquez ces dénominations au mètre.

R. Myriamètre, dix mille mètres : c'est la nouvelle lieue métrique, qui vaut 5131 toises.

Kilomètre,	Mille mètres.
Hectomètre,	Cent mètres : c'est la perche métrique, qui vaut 5 t. o p. 9 po. 4 l. 96, ou 96/100.
Mètre,	Dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur.
Décimètre,	Dixième du mètre. Il vaut 3 pouces 8 lignes 1/3.
Centimètre,	Centième du mètre. Il vaut 4 lignes 44, ou 44/100.
Millimètre,	Millième du mètre, ou 44/100 de ligne.

D. Qu'est-ce que l'are?

R. C'est l'unité des mesures de superficie; c'est un carré qui a un décamètre ou dix mètres de côté.

D. Quels sont les multiples et sous-multiples de l'are, en usage?

R. L'hectare, ou dix mille mètres carrés.
L'are, ou cent mètres carrés.
Le centiare, ou mètre carré.

D. Combien la toise vaut-elle de mètres, approximativement?

R. La toise vaut deux mètres.

D. Combien le mètre vaut-il de toises, approximativement?

R. Le mètre vaut une demi-toise.

D. Combien la toise carrée vaut-elle de mètres, approximativement?

R. La toise carrée vaut 4 mètres carrés.

D. Combien le mètre carré vaut-il de toises carrées, approximativement?

R. Le mètre carré vaut 1/4 de la toise carrée.

D. Combien la toise cube vaut-elle de mètres cubes, approximativement?

R. La toise cube vaut 8 mètres cubes.

D. Combien le mètre cube vaut-il de toises cubes, approximativement?

R. Le mètre cube vaut 1/8 de la toise cube.

ARPENTAGE.

D. Qu'est-ce que l'arpentage?

R. C'est l'art de mesurer la surface ou la superficie d'un terrain.

D. Qu'est-ce qu'une surface?

R. C'est l'étendue qui a deux dimensions, longeur et largeur.

D. Est-il important d'étudier l'arpentage?

R. L'arpentage ayant pour but de fixer la limite des propriétés, il est d'une haute importance de pouvoir juger nous-mêmes si les voisins n'ont pas anticipé sur notre propriété. La connaissance de l'arpentage donne le moyen d'apaiser les contestations et d'éviter les procès.

D. Qu'est-ce que la levée des plans?

R. C'est l'art de représenter en petit, sur le papier, la forme d'un terrain, en conservant les détails et les proportions de l'ensemble.

D. Qu'est-ce que le lavis des plans?

R. C'est l'art de représenter les différentes espèces de terrain ou de cultures, au moyen de teintes conventionnelles qui font connaître de suite si c'est un pré, une vigne, un bois, etc.

D. Qu'est-ce qu'une ligne droite?

R. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

D. Combien faut-il de points pour déterminer une ligne droite?

R. Deux points suffisent.

D. Qu'est-ce qu'un angle?

R. C'est l'espace compris entre deux lignes qui se coupent. Le point de rencontre se nomme *sommet*.

D. Qu'est-ce qu'une perpendiculaire?

R. C'est une droite qui, en tombant sur une autre, forme, à droite et à gauche, *deux angles adjacents* égaux. On les nomme *angles droits*. Toute droite qui n'est pas perpendiculaire est *oblique*; dans ce cas, les deux angles adjacents ne sont plus égaux, mais ils valent ensemble deux droits.

D. Comment nomme-t-on les angles adjacents dont la somme est égale à deux droits?

R. On les nomme *compléments* l'un de l'autre.

D. Qu'est-ce qu'un *angle complément* d'un autre?

R. C'est un angle qui, réuni à un autre, forme avec celui-ci deux angles droits.

D. Qu'entendez-vous par parallèles?

R. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles conservent dans toute leur étendue le même écartement.

D. Qu'est-ce qu'une circonférence.

R. C'est une ligne courbe, dont tous les points situés dans un même plan sont également éloignés du milieu qu'on nomme *centre*. L'espace renfermé par la circonférence est le *cercle*. Les lignes qui vont du centre à la circonférence se nomment *rayons*. Les lignes qui, passant par le centre, vont aboutir à la circonférence par leurs extrémités, se nomment *diamètres*.

D. Comment divise-t-on une circonférence?

R. Toute circonférence, grande ou petite, est divisée en 400 parties, appelées *grades*. Le quart d'une circonférence est le *quadrant*, qui contient 100 grades. Chaque grade est divisé en 100 *minutes;* chaque minute en 100 secondes. Autrefois, on divisait toute circonférence, grande ou petite, en 360 degrés; chaque degré en 60 minutes, et chaque minute en 60 secondes.

D. Qu'est-ce qu'un arc de cercle?

R. C'est une partie de la circonférence; la ligne qui joint les deux extrémités de l'arc est la *corde*.

D. Qu'est-ce qu'un polygone?

R. C'est un plan terminé par des droites; aucun polygone ne peut avoir moins de trois côtés, mais il peut en avoir un nombre infini.

D. Qu'est-ce qu'un polygone à trois côtés?

R. C'est le triangle, espace renfermé entre trois droites qui se coupent deux à deux.

D. Nommez les différentes espèces de triangles.

R. Le triangle rectangle, qui a un angle droit. Aucun triangle rectiligne ne peut avoir plus d'un angle droit ou plus d'un angle obtus.

Le triangle obtusangle, qui a un angle obtus.

Le triangle acutangle, qui a ses trois angles aigus.

Le triangle équilatéral, qui a ses trois côtés égaux.

Le triangle isocèle qui a deux côtés égaux.

Le triangle scalène, qui a ses trois côtés inégaux.

D. Quelle est la valeur des trois angles d'un triangle?

R. Les trois angles de tout triangle valent deux angles droits.

D. Qu'est-ce qu'un polygone à quatre côtés?

R. C'est un quadrilatère.

D. Nommez les différentes espèces de quadilatères.

R. *Le carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits.

Le parallélogramme, qui a ses côtés parallèles et égaux deux à deux.

Le rectangle, ou *carré long*, qui a ses angles droits et ses côtés égaux deux à deux.

Le trapèze, dont deux côtés seulement sont parallèles.

D. Distingue-t-on encore d'autres polygones?

R. On distingue:

Le pentagone ou polygone à cinq côtés.
L'hexagone ou polygone à six côtés.
L'octogone ou polygone à huit côtés.
Le décagone ou polygone à dix côtés.

Ces polygones sont réguliers ou irréguliers : ils sont réguliers quand les angles et les côtés sont égaux.

D. Quelle est la somme des angles intérieurs d'un polygone?

R. La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins deux.

D. Qu'est-ce que mesurer une surface?

R. C'est chercher combien de fois une surface donnée contient une certaine surface prise pour unité.

D. Quelle est l'unité des mesures de surface?

R. C'est l'are.

D. Quelle est la mesure de la surface d'un rectangle?

R. C'est le produit de sa base par sa hauteur.

D. Qu'est-ce qu'une diagonale?

R. C'est une ligne droite qui joint deux angles non adjacents dans un polygone.

D. Quelle est la mesure de surface d'un triangle rectangle?

R. Le produit des deux côtés qui forment l'angle droit.

D. Quelle est la mesure de surface d'un triangle quelconque?

R. La moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Cette mesure peut servir également au triangle rectangle.

D. Qu'est-ce que la hauteur d'un triangle?

R. C'est la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle sar la base ou sur son prolongement.

D. Quelle est la mesure de surface d'un parallélogramme?

R. C'est le produit de sa base par sa hauteur.

D. Quelle est la mesure de surface d'un trapèze?

R. C'est le produit de la somme des deux côtés parallèles par la moitié de leur distance perpendiculaire.

D. Quelle est la mesure d'un polygone quelconque?

R. On peut diviser un polygone quelconque en triangles, en tirant des diagonales qui partent toutes d'un même sommet. Il ne s'agit plus que d'évaluer la surface de chaque triangle, et d'ajouter tous les résultats partiels.

D. Qnel est le rapport du diamètre à la circonférence?

R. Le diamètre est à la circonférence comme 7

est à 22; c'est le rapport donné par Archimède; mais nous suivons habituellement celui de 113 à 355, attribué à Métius, et qui est plus exact. Le premier suffit dans les approximations.

D. Quelle est la mesure de la surface d'un cercle?

R. C'est le produit de sa circonférence par la moitié du rayon, ou le produit du carré du rayon par le rapport 113/355.

D. Qu'est-ce que la chaîne d'arpenteur?

R. C'est une chaîne de 10 mètres de longueur, divisée en 20 parties ou demi-mètres, ou en chaînons de 2 décimètres de longueur; les mètres sont indiqués sur la chaîne par des anneaux de cuivre: le milieu est reconnaissable par un anneau plus considérable.

D. Qu'est-ce qu'un jalon?

R. Un jalon est un morceau de bois ordinairement ferré par une extrémité, et fendu par l'autre pour recevoir un morceau de papier ou de carton; les jalons servent à prendre un alignement.

D. Qu'est-ce qu'une équerre d'arpenteur?

R. C'est un prisme droit régulier à huit pans, que l'on nomme *octogone;* il est en cuivre creux, et d'environ un décimètre de hauteur; chaque face est ouverte par une fente verticale qui sert de pinnule. Quatre pinnules, qui se coupent à angles droits, sont terminées à la partie supérieure par une fenêtre ronde qui laisse voir les objets plus distinctement. A l'extrémité inférieure de l'équerre est une douille qui reçoit le haut du *bâton de l'équerre.*

D. Qu'est-ce que le bâton de l'équerre?

D. Le bâton de l'équerre est un bâton d'un mètre et demi de hauteur, ferré par le bout qui entre en terre; il se divise sur la hauteur en décimètres et centimètres; il sert à vérifier la chaîne ou à mesurer de petites distances.

D. Qu'est-ce qu'une planchette?

R. C'est une petite table portative, formée d'une planche bien unie, sur laquelle on fixe une feuille de papier. La planchette est soutenue par un trépied.

D. Que faut-il pour opérer avec la planchette?

R. Il faut une alidade en cuivre, sur laquelle est gravée une échelle de proportion. Les extrémités de l'alidade sont terminées par deux pinnules. Il faut encore une *boussole* pour orienter la planchette, et un niveau pour qu'elle ne penche d'aucun côté.

D. Qu'est-ce que l'échelle d'un plan?

R. Une échelle de plan est une ligne divisée en parties égales, dont les plus petites représentent l'unité linéaire, comme le mètre ou le décimètre. Au moyen d'un compas et de son échelle, on reconnaît de suite ce qu'une ligne sur un plan vaut de mètres sur le terrain.

D. Quelle est l'échelle la plus usitée?

R. C'est l'échelle d'un millimètre pour mètre. Quand on relève un terrain très étendu, on se sert de l'échelle de quatre millimètres pour dix mètres.

D. N'y a-t-il pas un moyen employé dans la pratique pour décomposer un polygone en triangles et en trapèzes?

R. Oui : c'est de mener dans un polygone donné une directrice, sur laquelle on abaisse des perpendiculaires de tous les angles du polygone, qui se trouve ainsi partagé en triangles et en trapèzes.

D. Qu'est-ce qu'un graphomètre?

R. C'est un instrument composé d'un demi-cercle de cuivre, dont le limbe est divisé en 200 grades ou 180 degrés, avec deux alidades, l'une immobile, et l'autre tournant sur le centre. Ces deux alidades sont munies à leurs extrémités de pinnules pour observer les objets.

D. Qu'est-ce qu'un vernier?

R. C'est un arc de cercle placé à l'extrémité de l'alidade immobile du graphomètre; il donne des fractions de degrés par sa correspondance avec les degrés du graphomètre.

D. Comment vérifie-t-on un graphomètre?

R. En divisant l'espace autour de soi, que l'on nomme *un tour d'horizon*, en un certain nombre d'angles : si la somme de ces angles est égale à 4 droits ou 400 grades, le graphomètre est juste. On peut encore tracer un triangle sur le terrain, et en mesurer les angles avec une grande précision; si la somme des trois angles est égale à deux angles droits ou à 200 grades, on peut regarder le graphomètre comme exact.

D. A quoi sert le graphomètre?

R. A mesurer les angles sur le terrain.

D. Qu'est-ce qu'un niveau d'eau?

R. C'est un instrument composé d'un tube de fer-blanc, terminé à ses extrémités par deux tubes verticaux en verre. On y verse de l'eau et du vin rouge; l'instrument est placé horizontalement dès que la liqueur s'élève également dans les deux tubes verticaux.

D. Qu'est-ce qu'une boussole d'arpenteur?

R. C'est une boussole enfermée dans une boîte carrée, sur l'un des côtés de laquelle on applique une alidade : les pinnules de l'alidade sont dirigées du *nord* au *sud*. La boussole d'arpenteur est soutenue par un trépied.

D. La boussole donne-t-elle une grande précision dans la mesure des angles?

R. Les oscillations de l'aiguille aimantée ou la présence inaperçue de matières ferrugineuses peuvent déranger l'aiguille.

Cependant, avec une grande habitude, la boussole devient un bon instrument dans les mains d'un arpenteur qui sait tenir compte des variations atmosphériques.

La boussole est très utile pour relever les plans des bâtiments.

D. Qu'entendez-vous par orienter un plan?

R. Orienter un plan, c'est le placer sur le papier de manière que le nord soit en haut, le sud en bas, l'est à droite, et l'ouest à gauche.

D. L'aiguille de la boussole se dirige-t-elle exactement vers le nord?

R. Non: elle s'en écarte d'une certaine quantité, nommée *déclinaison.* Cette déclinaison n'est pas régulière; elle varie quelquefois d'une année à l'autre. On connaît la déclinaison en traçant une méridienne ou ligne du vrai nord.

D. Comment peut-on tracer une méridienne sur le terrain?

R. En élevant sur un terrain bien horizontal un bâton portant à son extrémité supérieure une plaque de fer percée d'un petit trou. Par ce trou, on fait passer un fil à plomb. Il indiquera sur le terrain le pied d'une perpendiculaire dont le petit trou de la plaque est le sommet. A dix heures du matin, quand il fait soleil, on marque sur le terrain le point brillant au milieu de l'ombre projetée par la plaque. Du pied de la perpendiculaire indiquée par le fil à plomb, et avec un rayon terminé au point brillant, on décrira un arc de cercle. On observera après midi l'instant où le centre du petit trou éclairé tombera exactement sur l'arc que l'on a tracé. On marquera ce point; le milieu entre les deux points donne la méridienne; il ne s'agit plus que de joindre par une droite le pied de la perpendiculaire et le milieu de l'arc.

D. Peut-on mesurer un terrain de plusieurs manières?

R. On peut mesurer un terrain de plusieurs manières.

1° Avec la chaîne seule et les jalons;
2° Avec l'équerre d'arpenteur et la chaîne;
3° Avec la planchette et la chaîne;
4° Avec la boussole et la chaîne;
5° Avec le graphomètre et la chaîne.

D. Qu'est-ce que la cultellation?

R. C'est une opération qui a pour but de ramener une surface inclinée à l'horizon, à la surface horizontale.

D. Est-ce qu'une surface inclinée à l'horizon ne contient pas plus d'espace que la surface horizontale qui y correspond?

R. Cela est vrai; mais on a remarqué aussi que les terrains inclinés ne rapportent pas plus que leurs superficies horizontales. La sècheresse est plus grande sur les terrains inclinés, la culture est plus difficile: c'est pour ces motifs qu'on les assimile à une surface réellement moindre.

D. A quoi sert le nivellement?

R. Il sert beaucoup dans la construction des routes et dans la direction des cours d'eau.

D. Quand le terrain est très inégal, que doit-on faire?

R. Il faut donner *un coup de niveau* à tous les points élevés et enfoncés.

D. A quoi servent les bornes, et comment les reconnaît-on?

R. Les bornes servent à limiter les propriétés; on les reconnaît à quatre moellons que l'on enterre ordinairement au-dessous de la borne, et que l'on nomme *témoins*. Souvent au milieu des moellons se trouve une brique cassée en morceaux. Ces morceaux rapprochés doivent reproduire la brique entière. Les coutumes varient selon les localités.

D. Comment peut-on avoir la copie d'un plan?

R. En le *piquant* ou en le *calquant*.

D. Qu'est-ce que piquer un plan?

R. Piquer un plan c'est le fixer sur une feuille de papier au moyen d'épingles fines, et avec une pointe très acérée piquer les extrémités de toutes les lignes et tous les points remarquables du plan. Au moyen des piqûres marquées sur la feuille blanche, on met la copie au crayon ou à l'encre de Chine.

D. Qu'est-ce que calquer un plan?

R. C'est placer un plan sur un carreau de vitre, le couvrir d'une feuille de papier blanc, et suivre avec un crayon ou une plume tous les traits du plan. On a des châssis disposés pour ce travail, et même des tables construites exprès.

D. Comment peut-on doubler les dimensions d'un plan?

R. On enveloppe le plan proposé d'un carré, et l'on tire dans ce carré une diagonale qui est le côté du carré double.

Ensuite on divise les deux carrés en un nombre déterminé de petits carrés, et il ne reste plus qu'à copier dans les petits carrés doubles ce qui est

contenu dans les carrés simples correspondants du plan proposé. Cette manière de copier un plan s'appelle *copie par treillis*.

D. Comment doubler un plan précieux sur lequel on ne veut pas tracer de lignes?

R. Au lieu de le diviser comme ci-dessus, on couvre le plan d'un papier végétal transparent; c'est sur ce papier transparent que l'on trace le carré et que l'on opère les divisions nécessaires; on calque ensuite ce plan sur une feuille de papier.

D. Comment peut-on réduire un plan à moitié?

R. Quand le plan sera enveloppé du carré, et qu'on aura tiré une diagonale, il ne s'agira plus que de diviser la diagonale en deux parties égales: chaque moitié sera le côté du carré cherché.

D. Comment peut-on tripler la dimension d'un plan?

R. Après avoir enveloppé le plan proposé d'un carré, on prend le côté du carré pour rayon, et l'on décrit une circonférence. On porte six fois le rayon sur la circonférence, et on joint les points d'intersection deux à deux, ce qui donne un triangle équilatéral. Le côté du triangle équilatéral est le côté du carré cherché.

D. Comment peut-on décrire une circonférence avec le côté du carré pris pour rayon?

R. Comme il faudrait souvent décrire une circonférence immense, on prend la moitié, le quart ou le huitième de ce côté pour décrire une circonférence; on fait la même construction que ci-dessus, et le côté du triangle équilatéral est la moitié, le quart ou le huitième du côté du carré cherché.

D. Comment réduit-on un plan au tiers ?

R. On prend le côté du plan donné, et on construit un triangle équilatéral en décrivant des deux extrémités, avec un rayon égal au côté du plan, deux arcs de cercle dont l'intersection détermine le triangle. Sur le milieu de chacun des côtés, on élève des perpendiculaires. Leur intersection est le centre de la circonférence qui doit passer par les trois sommets du triangle équilatéral : le rayon de ce cercle est le côté du carré cherché.

D. Qu'est-ce que le lavis d'un plan?

R. C'est l'art de représenter les objets par des couleurs de convention qui les désignent.

D. Comment reconnaît-on la bonne encre de Chine ?

R. En frottant le pain mouillé sur l'ongle. Si la teinte est brillante et d'un reflet azuré, l'encre est bonne. Délayez ensuite un peu d'encre épaisse, avec laquelle vous ferez sur le papier des traits un peu forts; quand ils seront secs, passez dessus une couche d'eau avec le pinceau. Si les traits ne sont pas altérés, l'encre est bonne.

D. Quelles sont les espèces de papier employées pour les plans ?

	Hauteur.	*Largeur.*
R. Le carré	$0^{m}420$	$0^{m}530$
Petit raisin	0.445	0.585
Grand raisin	0.480	0.650
Jésus	0.526	0.690
Colombier	0.657	0.845
Grand-aigle	0.665	0.975

D. Comment éclaire-t-on un plan?

R. On suppose que la lumière vient de gauche à droite, et que le soleil est élevé sur l'horizon d'un demi-angle droit.

D. Quelle est la teinte conventionnelle des terres labourables ?

R. Dans les pays entièrement cultivés, on les laisse en blanc; autrement on les lave avec une teinte pâle, composée de carmin, de gomme-gutte et d'un peu d'encre de Chine.

D. Quelle est la teinte des vignes?

R. Elles se lavent avec un mélange léger d'encre de Chine, de carmin, de sépia et d'indigo. On dessine les petits échalas à l'encre de Chine, et on les enveloppe d'un trait en forme de serpent, qu'on lave en vert.

D. Quelle est la teinte des prés?

R. Ils se lavent avec une teinte d'un vert gai, composé de gomme-gutte et d'un peu d'indigo.

D. Quelle est la teinte des vergers?

R. Ils se lavent avec un teinte d'un vert très léger, moins foncé que le précédent.

E. Quelle est la teinte des landes?

R. Elles se lavent avec une teinte vert-olive et aurore pâle. Le vert-olive se compose de gomme-gutte et d'indigo; l'aurore, de gomme-gutte et de carmin.

D. Quelle est la teinte des friches?

R. Elles se lavent avec une teinte d'un vert très léger, et avec une teinte d'aurore affaiblie.

D. Quelle est la teinte des forêts et des bois ?

R. Ils se lavent avec une teinte jaune légèrement verte.

D. Quelle est la teinte des bruyères?

R. Elles se lavent panachées de vert et de rose.

D. Quelle est la teinte des sables ?

R. Ils se lavent aurore.

D. Quelle est la teinte des marais?

R. Ils se lavent vert de prairie, avec des bords bleu léger.

D. Quelle est la teinte des étangs?

R. Ils se lavent bleu.

D. Quelle est la teinte des rivières et des ruisseaux?

R. Ils se lavent avec une teinte d'un bleu très léger qui diminue jusqu'au milieu de la rivière; pour indiquer le courant, on dessine une flèche dont le dard indique le cours de l'eau.

D. Quelle est la teinte des rochers?

R. Les rochers se lavent avec une teinte pâle de carmin, mêlée avec une teinte d'encre de Chine.

D. Quelle est la teinte des carrières?

R. Les carrières se lavent avec un mélange de bleu et de carmin, en indiquant les ombres.

D. Quelle est la teinte des arbres?

R. Les arbres se dessinent en élévation, avec leur tige et leur feuillage, en cherchant à imiter la nature des arbres: car il faut que l'œil distingue tout de suite un peuplier d'un chêne ou d'un arbre fruitier.

D. Quelle est la teinte des fossés?

R. Les fossés se représentent par deux lignes parallèles.

D. Que doit-on observer à l'égard des terres labourées?

R. C'est d'indiquer les sillons à l'encre de Chine, ainsi que les arbres fruitiers.

D. Comment dessine-t-on les bâtiments?

R. On met le plan des bâtiments à l'encre rouge, et on marque l'ombre avec un filet de carmin. La surface de chaque bâtiment s'indique par une teinte plate et pâle de carmin.

D. Comment dessine-t-on les jardins d'agrément?

R. On indique leurs compartiments, on laisse les allées en blanc, et on donne aux objets leurs couleurs naturelles autant qu'il est possible.

D. Qu'est-ce qu'un cube?

R. C'est un corps dont les six faces sont des carrés égaux.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un cube?

R. En multipliant trois fois par lui-même un côté du cube.

D. Quelle est la valeur d'un cube dont le côté est un décimètre?

R. 1000 centimètres cubes.

D. Combien une toise cube contient-elle de pieds cubes?

R. 216 pieds cubes.

D. Combien une toise cube contient-elle de pouces cubes?

R. 373,248 pouces cubes.

D. Combien une toise contient-elle de lignes cubes?

R. 644,972,544 lignes cubes.

D. Qu'est-ce qu'un parallélipipède?

R. C'est un corps dont les six faces sont des rectangles.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un parallélipipède?

R. En multipliant les trois arêtes qui forment un des angles solides.

D. Comment mesure-t-on le volume de bon bois qui se trouve dans un arbre couvert encore de son écorce et de son aubier?

R. On mesure les circonférences extérieures avec une chaîne, on les ajoute et on prend le dixième.

On élève ce dixième au carré, et on le multiplie par la longueur de la pièce de bois. C'est le mesurage employé dans l'artillerie.

D. Qu'est-ce qu'un prisme?

R. C'est un corps dont les bases opposées sont des polygones égaux, et dont les faces latérales sont des parallélogrammes.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un prisme?

R. En multipliant la surface de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire par une perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur la base inférieure, ou sur son prolongement.

D. Comment mesure-t-on la base d'un prisme?

R. La base étant un polygone, on la divise en triangles, et on suit la marche indiquée (50 ou 64).

D. Qu'est-ce qu'une pyramide?

R. La pyramide est un corps dont la base est un polygone, et dont toutes les faces sont des triangles ayant leurs sommets réunis en un point qui est le sommet de la pyramide.

D. Comment mesure-t-on le volume d'une pyramide?

R. En multipliant la surface de la base par le tiers de la hauteur; la base, étant un polygon, mesure comme les polygones.

D. Comment mesure-t-on le volume des matériaux employés dans la construction?

R. On les dispose ordinairement en parallélipipèdes rectangles, qui se mesurent comme nous avons vu plus haut.

D. Comment mesure-t-on la surface d'un cercle,

R. En multipliant le rayon par lui-même et ensuite par la fraction 355/113.

D. Qu'est-ce qu'un cylindre droit?

R. C'est un corps rond analogue au prisme, dont les bases opposées sont des cercles égaux. Le cylindre est droit quand le côté est perpendiculaire sur la base.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un cylyndre?

R. En multipliant la surface de la base par la hauteur.

D. Qu'est-ce qu'un cône?

R. Le cône est un corps rond analogue à une pyramide dont la base est un cercle.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un cône?

R. En multipliant la surface de la base par le tiers de la hauteur.

D. Qu'est-ce qu'un cône tronqué?

R. C'est un cône dont on a retranché la partie supérieure parallèlement à la base.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un cône tronqué?

R. On ajoute les rayons des deux bases, on carre leur somme, on retranche le produit des deux rayons, on multiplie le reste par le tiers de la hauteur, et le tout par la fraction 355/113.

D. Comment mesure-t-on le volume d'un tonneau?

R. On peut considérer un tonneau comme formé de deux cônes tronqués réunis par leur base la plus grande. On cherche le cône tronqué dont la base la plus grande doit être au milieu de la bonde, et en le doublant on obtient un volume qui ne diffère pas sensiblement de celui du tonneau.

D. Qu'est-ce que la sphère?

R. La sphère est un corps rond dont tous les points de la surface sont à égale distance du centre.

D. Comment mesure-t-on le volume d'une sphère?

R. En multipliant le rayon par lui-même et le produit encore par le rayon, et ce dernier produit par la fraction 1420/339, c'est-à-dire par les 4/3 de la fraction de 355/113.

D. Comment considère-t-on les pièces de bois de construction dans les arsenaux de marine?

R. Comme des parallélipipèdes rectangles ou comme des cylindres.

D. Ces pièces de bois sont-elles réellement des parallélipipèdes rectangles ou des cylindres?

R. Non, certainement : car, les arbres étant plus forts à leur pied qu'à l'embranchement des racines, les pièces de bois sont ordinairement plus grosses d'un bout que de l'autre.

D. Comment peut-on alors les considérer comme des parallélipipèdes rectangles et des cylindres?

R. En prenant la mesure du diamètre au milieu de la pièce; la base se trouvant alors une moyenne entre les deux extrémités, donne, quand elle est multipliée par la longueur, une mesure qui ne s'éloigne pas sensiblement de la veritable.

D. Comment trouver exactement la mesure d'une pièce de bois équarrie?

R. On la considère comme une pyramide quadrangulaire tronquée.

Pour trouver le volume, il faut d'abord obtenir les superficies du gros et du petit bout. On sait que pour avoir la superficie de chaque bout il suffit de multiplier la hauteur par la largeur. On multiplie les deux superficies entre elles, et on extrait la racine carrée, qui donne la superficie du plan

moyen. On ajoute les superficies du gros et du petit bout, et celle du plan moyen, et on multiplie la somme par le tiers de la longueur de la pièce de bois.

D. Qu'est-ce que le pied cube?

R. C'est un solide qui a un pied sur chaque dimension.

D. Comment le divise-t-on?

R. En douze parties qu'on nomme pouces de pied cube.

D. Qu'est-ce qu'un pouce de pied cube?

R. Le pouce de pied cube est un solide qui a un pied carré de base sur un pouce d'épaisseur.

D. Comment le divise-t-on?

R. En douze parties qu'on nomme lignes de pied cube.

D. Qu'est-ce qu'une ligne de pied cube?

R. C'est un solide qui a un pied carré de base sur une ligne d'épaisseur.

D. Qu'est-ce qu'une cheville de pied cube?

R. La cheville de pied cube a la même solidité qu'une ligne de pied cube, mais dans les dimensions différentes; elle a un pied de longueur, un pouce de largeur et un pouce d'épaisseur.

D. Comment divise-t-on la ligne du pied cube ou cheville?

R. En douze parties qu'on nomme points de pied cube.

D. Quelle différence faites-vous d'un pouce cube et d'un pouce de pied cube?

R, Une très grande : car le pouce cube est le 1/1728 d'un pied cube, tandis que le pouce de pied cube en est le 1/12 : ainsi donc le pouce de pied cube vaut 144 pouces cubes.

D. Qu'est-ce qu'une solive?

R. C'est une mesure employée pour les bois de construction qui équivaut à trois pieds cubes.

D. Qu'est-ce qu'une toise cube?

R. C'est un solide qui contient 216 pieds cubes ou 72 solives.

D. Quelles sont les dimensions d'une solive?

R. Ordinairement on considère la solive comme ayant six pieds de longueur, un pied de largeur et six pouces d'épaisseur.

D. Comment la divise-t-on?

R. On la divise en six parties qu'on nomme pieds de solive.

D. Qu'est-ce qu'un pied de solive?

R. C'est un solide qui a six pieds de longueur, un pied de largeur et un pouce d'épaisseur.

D. Comment le divise-t-on?

R. En douze parties que l'on nomme pouces de solive.

D. Qu'est-ce qu'un pouce de solive?

R. C'est un solide qui a six pieds de longueur, un pied de largeur et une ligne d'épaisseur.

D. Comment le divise-t-on?

R. En douze parties qu'on nomme lignes de solive.

D. Qu'est-ce qu'une ligne de solive?

R. C'est un solide qui a six pieds de longueur, un pied de largeur et un point d'épaisseur.

D. Comment trouve-t-on par le calcul le plus grand équarrissage d'un arbre?

D. On mesure le diamètre du milieu de l'arbre, on retranche trois pouces pour l'écorce et l'aubier, on carre ce diamètre, on en prend la moitié : la racine carrée de cette moitié du diamètre est le côté du plus grand carré que puisse donner l'arbre équarri à vive-arête.

D. Qu'entend-on par équarrir à vive-arête?

R. C'est quand il ne reste sur l'arête ni écorce, ni aubier, et qu'elle est en plein bois dans toute la longueur.

D. Comment trouve-t-on dans la pratique le plus grand équarrissage d'un arbre?

R. On suppose la pièce de bois sciée et placée en chantier : on trace un cercle aux deux bouts, mais en dedans de l'aubier. On tire un diamètre de niveau et un autre bien vertical avec le fil à plomb. Les quatre extrémités des deux diamètres donnent quatre points qu'il faut unir par des droites. Ces droites sont chacune le côté du plus grand carré que puisse donner un arbre.

D. Comment trouve-t-on par le calcul la pièce la plus résistante que l'on puisse tirer d'un arbre?

R. On mesure le diamètre du milieu de l'arbre, on le carre, on en prend le tiers : la racine carrée de ce tiers est le plus petit côté de la pièce ; la racine carrée des deux tiers du carré du diamètre est le plus grand côté.

D. Comment trouve-t-on dans la pratique l'équarrissage le plus résistant possible?

R. On trace un cercle à chaque extrémité et en dedans de l'aubier ; on tire ensuite un diamètre bien horizontal au niveau ; on divise ce diamètre en trois parties égales, ce qui donne deux points de division ; de ces deux points on élève sur l'un et on abaisse de l'autre deux verticales. Les points de rencontre de ces verticales avec la circonférence et les deux extrémités du diamètre donnent les quatre points des arêtes : si on les joint par des lignes droites on trouvera le plus grand côté et le plus petit.

D. Comment trouve-t-on la solidité d'une pièce de bois rond?

R. On mesure la circonférence du milieu de l'arbre, on cherche la superficie du cercle, et on la multiplie par la longueur.

D. Comment trouve-t-on la superficie?

R. Si l'on connaît la circonférence on la multiplie par le quart du diamètre.

Si on a le diamètre on le multiplie par 355; on divise le produit par 113, et on multiplie ce quotient par le quart du diamètre.

D. Comment trouve-t-on le tube exact d'un bois rond?

R. On le considère comme un cône tronqué qui aurait pour base inférieure le cercle du gros bout, pour base supérieure le cercle du petit bout, et pour hauteur la longueur de la pièce. Pour avoir le cube de ce cône tronqué, il faudrait chercher la superficie des deux bases, et ajouter la superficie d'une base moyenne géométrique, que l'on obtient en multipliant les superficies des deux bases et en extrayant la racine carrée du produit; il ne reste plus qu'à multiplier la somme des trois superficies par le tiers de la longueur totale.

D. Qu'est-ce que *débiter un arbre à la scie?*

R. C'est scier un arbre dans le sens de sa longueur.

D. Tire-t-on autant de planches que l'on donne de traits de scie?

R. Le nombre des planches ou *bordages* qui résultent du sciage excède toujours d'*un* le nombre des traits de scie.

D. Qu'est-ce que carrer le sciage?

R. C'est chercher combien les superficies con-

tiennent de pieds et de parties de pied carré, car le sciage se paie ordinairement au pied carré.

D. Comment carre-t-on le sciage d'un peuplier?

R. On ajoute les largeurs des planches et celle d'une *croûte.* (On appelle croûtes les planches qui tiennent à l'écorce.) On multiplie cette somme par la longueur de la pièce.

D. Qand on connaît le diamètre d'un peuplier, peut-on savoir combien on obtiendra de bordages d'une certaine épaisseur?

R. Il suffit de savoir que chaque trait de scie emporte environ trois lignes de bois; on retranche du diamètre la largeur qu'on veut donner aux bordages, et on divise le reste par l'épaisseur du bordage, augmentée du jeu de la scie ou de trois lignes : le quotient donnera le nombre de traits de scie.

D. Qu'est-ce qu'une *brasse?*

R. C'est une toise carrée de sciage : cette mesure est employée par les marchands de bois qui achètent les coupes de bois. Cette superficie a 6 pieds de longueur sur 6 pieds de largeur, c'est-à-dire 36 pieds carrés.

D. Qu'est-ce qu'un pied de toise carrée?

R. C'est une superficie de 6 pieds de longueur sur 1 pied de largeur, c'est-à-dire de 6 pieds carrés.

D. Comment divise-t-on le pied de toise carrée?

R. En douze parties qu'on nomme pouces de toise carrée ou toises-pouces.

D. Qu'est-ce qu'un pouce de toise carrée?

R. C'est une superficie de 6 pieds de longueur sur 1 pouce de largeur, c'est-à-dire d'un demi-pied carré.

D. Comment divise-t-on le pouce de toise carrée ?

R. En douze parties qu'on nomme lignes de toise carrée ou toises-lignes.

D. Qu'est-ce qu'une ligne de toise carrée ?

R. C'est une superficie qui a 6 pieds de longueur sur une ligne de largeur, et qui vaut un demi-pouce du pied carré.

FIN DU TRAITÉ D'ARPENTAGE.

TABLE DES MATIÈRES.

D. Comment divise-t-on le pouce de toise carrée ?

R. En douze parties qu'on nomme lignes de toise carrée ou toises-lignes.

D. Qu'est-ce qu'une ligne de toise carrée?

R. C'est une superficie qui a 6 pieds de longueur sur une ligne de largeur, et qui vaut un demi-pouce du pied carré.

FIN DU TRAITÉ D'ARPENTAGE.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre deuxième.

Chapitre troisième.

Chapitre quatrième.

SECONDE PARTIE.

DE LA LEVÉE DES PLANS.

Chapitre cinquième.

Chapitre sixième.

Chapitre septième.— GRAPHOMÈTRE.

Chapitre huitième. — BOUSSOLE.

Chapitre neuvième. — DESSIN DU PLAN.

Pages.

Chapitre dixième — MOYEN SIMPLE D'ARPENTAGE.

Chapitre onzième. — NIVELLEMENT.

Chapitre douzième. — PARTAGE DE PROPRIÉTÉS.

Chapitre treizième — BORNES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

IMPRIMERIE DE GUIRAUDET ET JOUAUST,
Rue Saint-Honoré, 315.

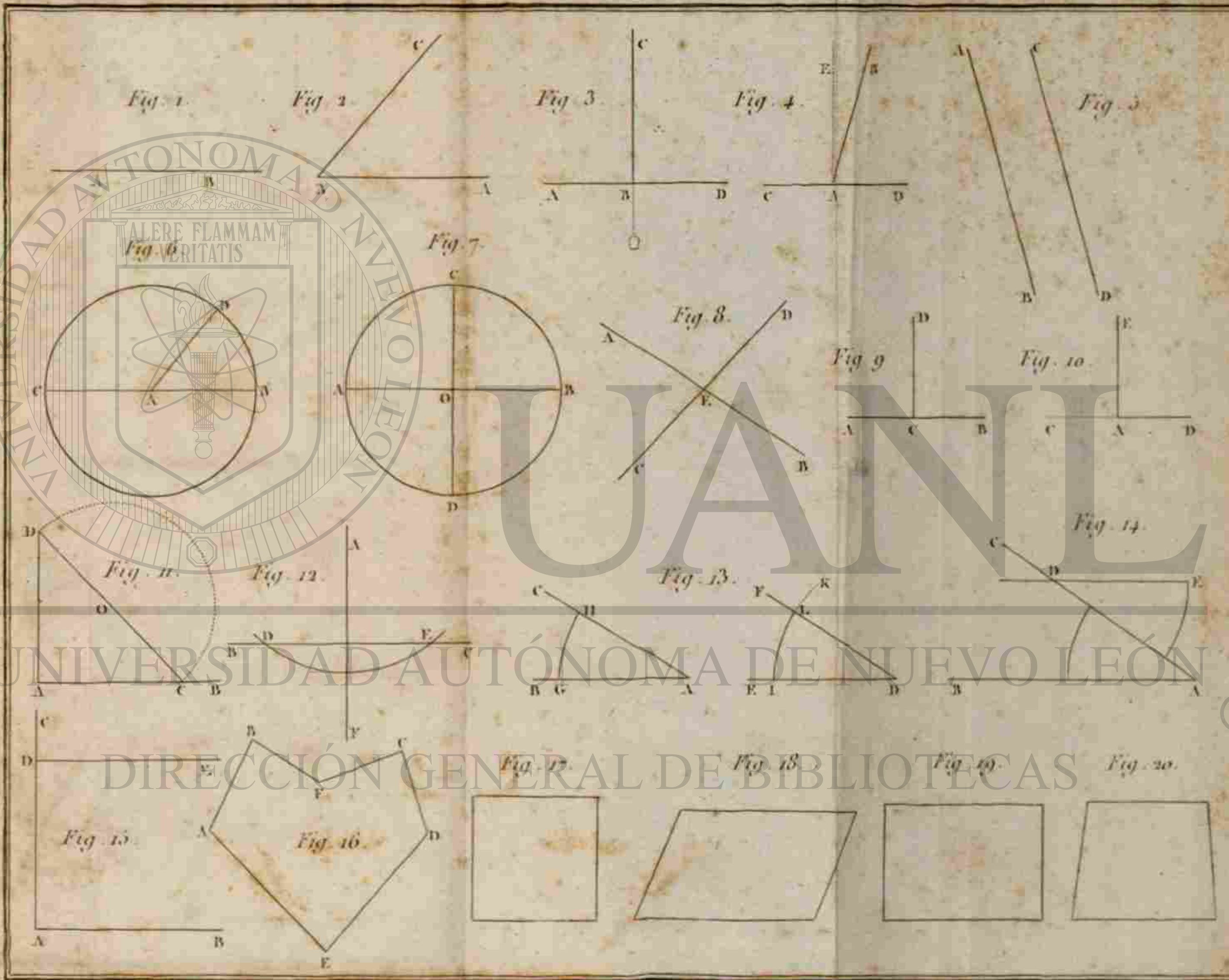


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

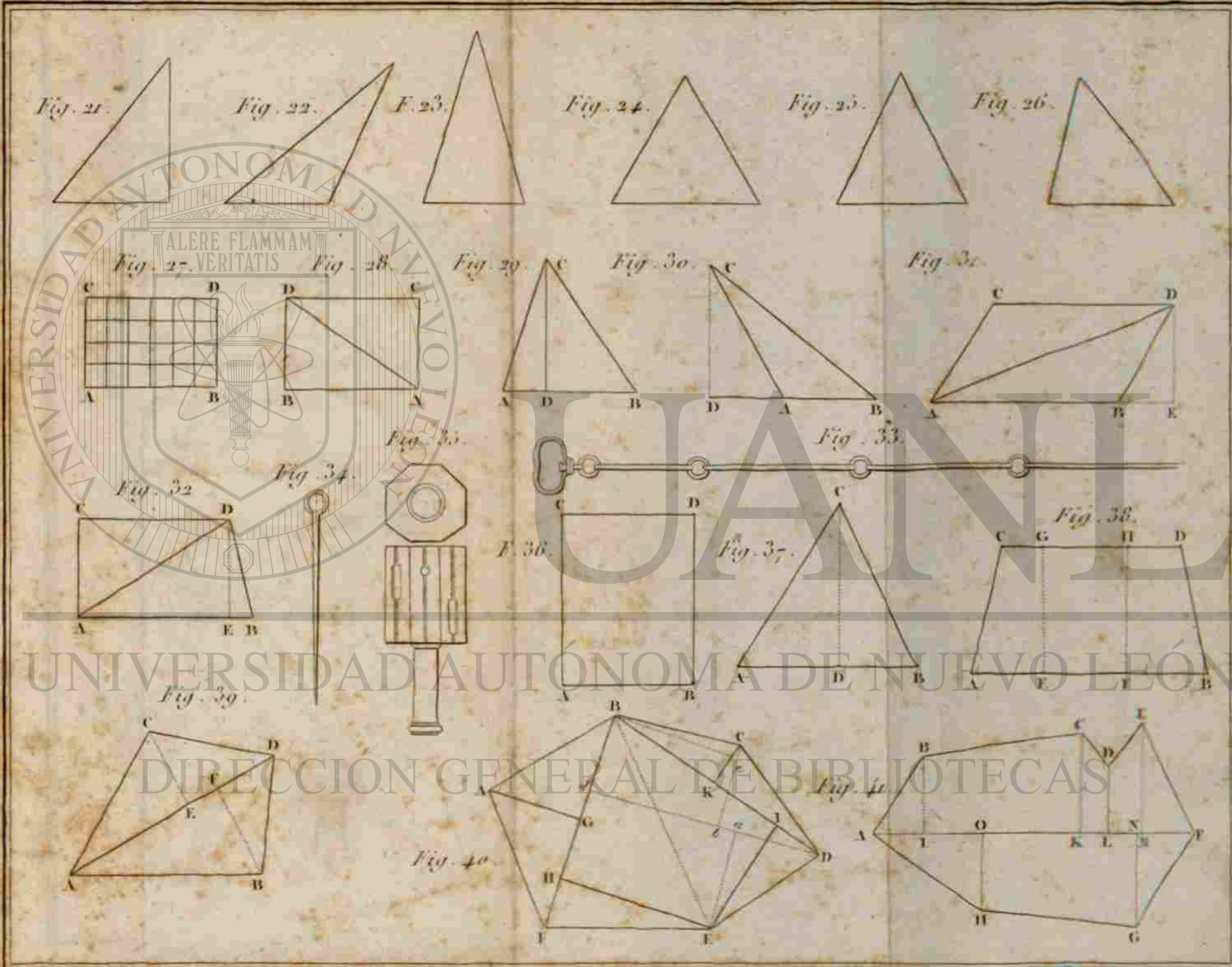
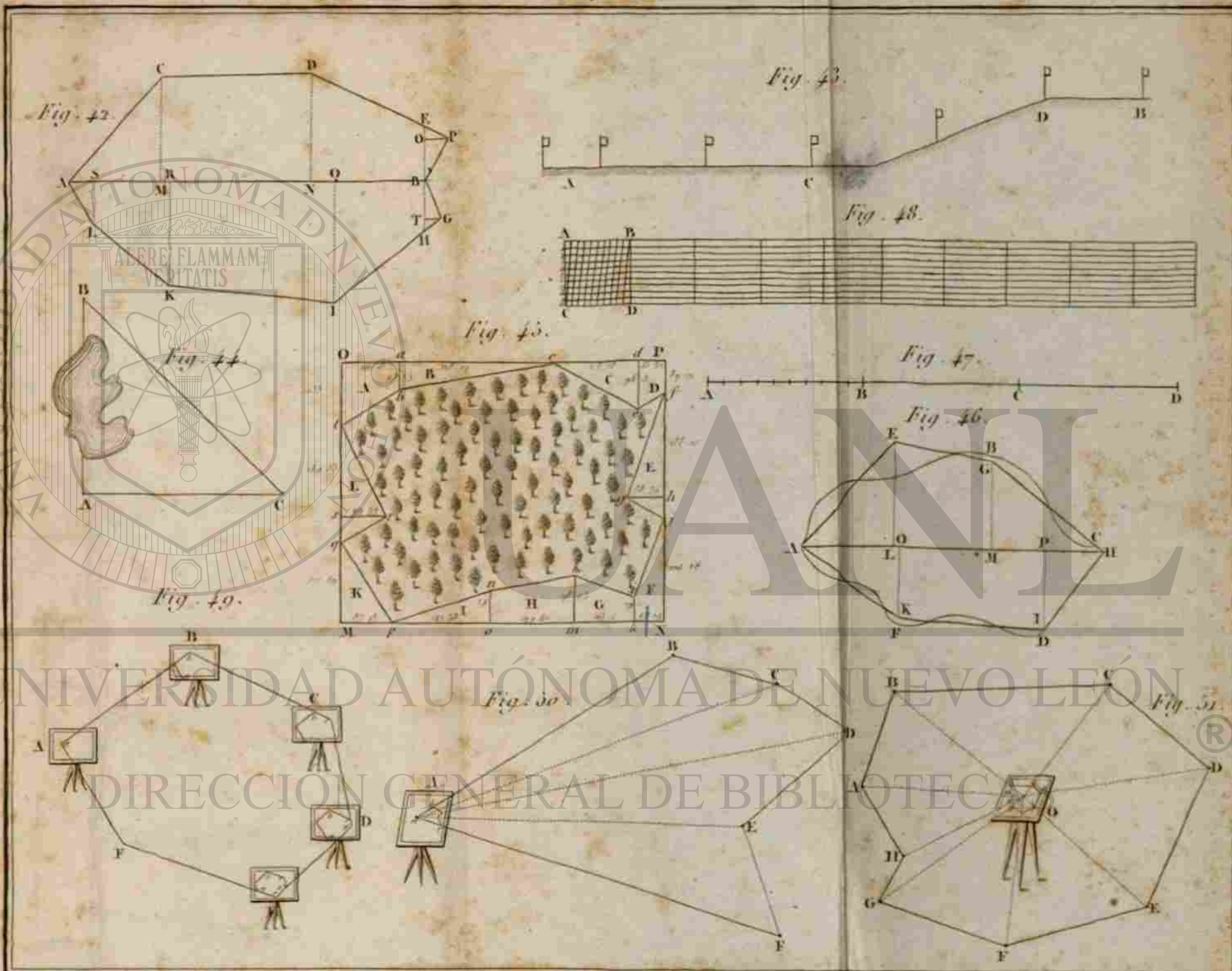
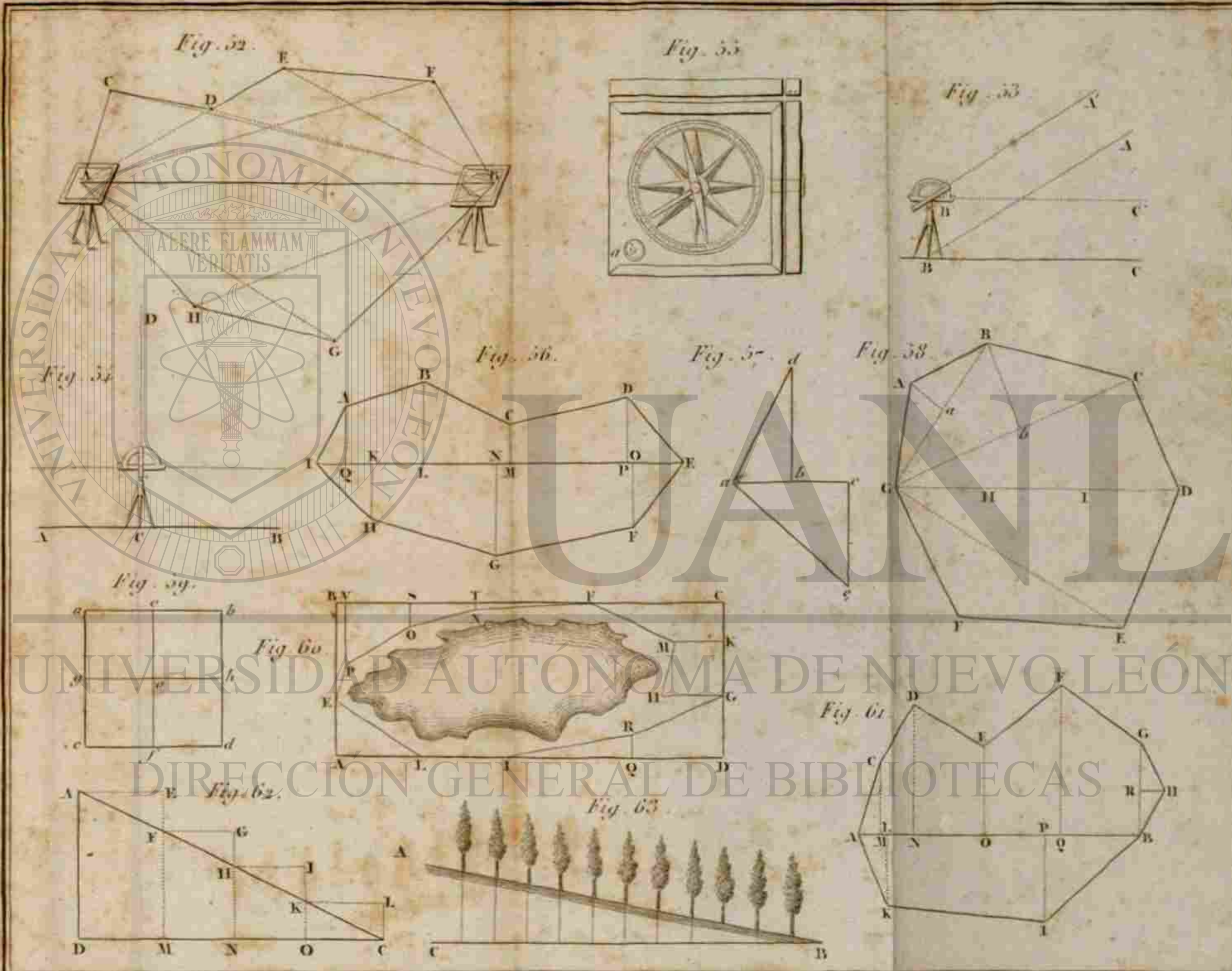


Fig. 21.
Fig. 22.
F. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
F. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.



L. Lamotte del.



A. Lamotte del.t Pfitzer sculp.

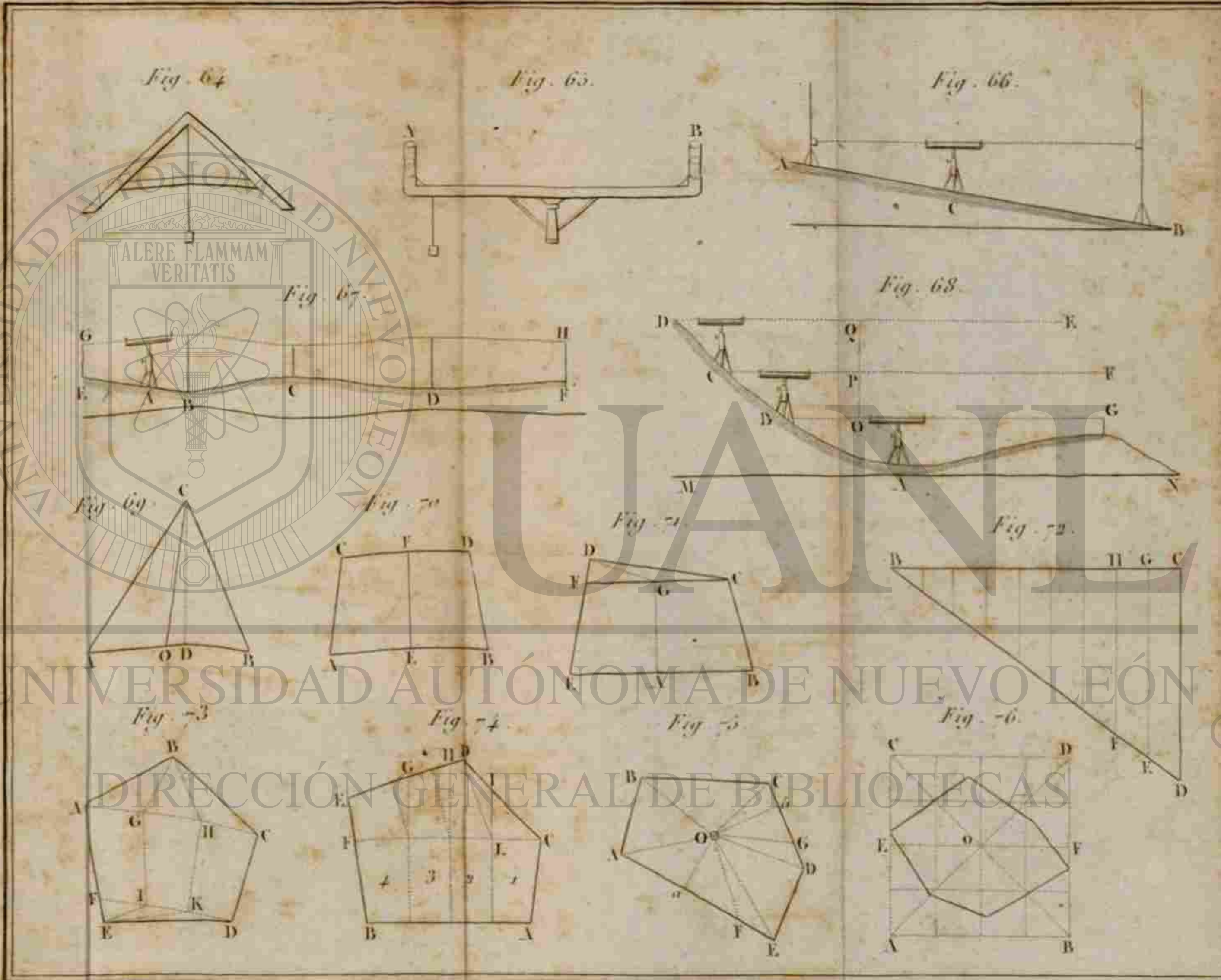
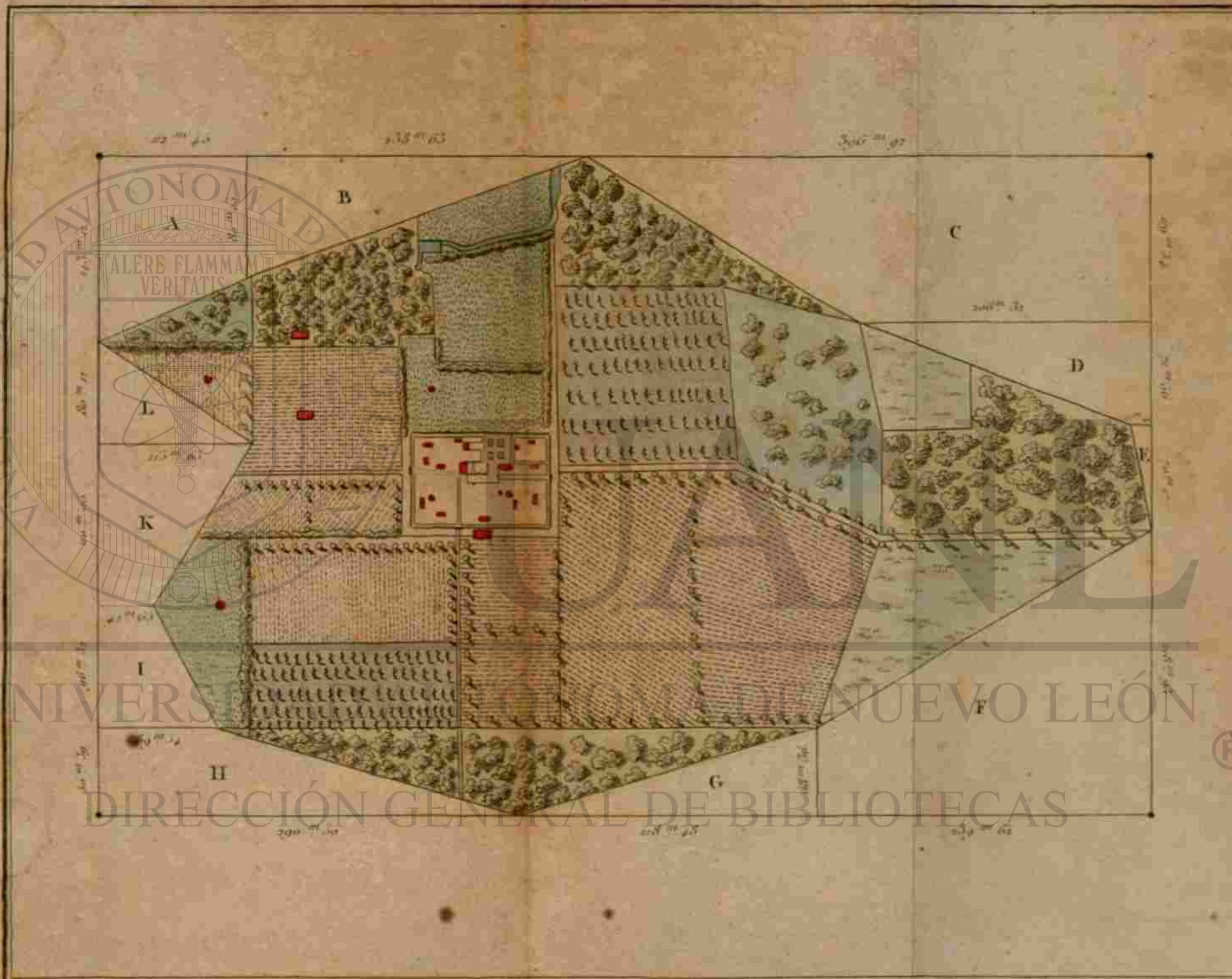


Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76

L. Lamotte del.t Pitier Sculp.



I. Lainotte del. Pérée Sculp.