á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extensión, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observación de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, transformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

Definiciones y nociones preliminares.

358.—Definición.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extensión por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posición y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extensión,* como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las líneas, á la comparación de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extensión, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras,* considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no ocuparse en el estudio de la geometría sino la extensión, prescindiendo de las demás propiedades de los cuerpos, considerarémos la forma del espacio que ocupan, haciendo abstracción de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura,* que comunmente se les llama *largo, ancho* y *grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestión. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volumen;* si hacemos abstracción del espesor ó grueso, la extensión que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extensión en longitud solamente, que se llama *línea,* y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de los elementos de las diversas figuras y poder medir la extensión. Por lo demás, en la práctica es de un uso frecuente este género de abstracciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demás cualidades.

Los límites de un cuerpo, son las *superficies,* las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas,* y los extremos de éstas son *puntos.* Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extensión.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividirémos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas* la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes.*

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volumen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstracción de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto,* destinado únicamente á determinar el lugar ó la posición.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos,* que son los límites A y B de una línea (fig. 1); *punto de intersección,* que es el lugar en que se encuentran dos ó más líneas, como C (fig. 2), *puntos de*

Cuando dos rectas son inconmensurables, el procedimiento que acabamos de indicar no puede conducir á una resta nula: pero como las restas sucesivas van decreciendo, llegan á tal grado de pequeñez, que pueden considerarse como nulas. Que ciertas líneas son inconmensurables, es un hecho que la teoría nos da á conocer, pero que ninguna operación mecánica nos puede hacer sensible, y aunque la razón de dos líneas inconmensurables no pueda determinarse exactamente, siempre es posible expresarla con cuanta aproximación se quiera.

En efecto, sean A y B dos líneas, ó más generalmente dos magnitudes de la misma especie. Imaginémonos que B esté dividida en 1000 partes por ejemplo, y que llevando una de éstas sobre A se encuentre que la contiene 3257 veces y que quede una resta. La magnitud A estará comprendida entre $\frac{B}{1000}\times 3257$ y $\frac{B}{1000}\times 3258$, ó lo que es lo mismo, entre $B\times 3'257$ y $B\times 3'258$. Estos números 3'257 y 3'258 serán los valores de la razón $\frac{A}{B}$ con una aproximación de menos de $\frac{B}{1000}$, el primero por defecto y el segundo por exceso. En efecto, siendo $A > B.3'257$, y $A < B.3'258$ se tendrá respectivamente $\frac{A}{B} > 3'257$, y $\frac{A}{B} < 3'258$. Si en lugar de dividir B en 1000 partes iguales se hubiera dividido en 10000, la aproximación habría sido 10 veces mayor, y si se hubiera dividido B en 100000 partes, la aproximación habría sido 100 veces mayor, y asi se concibe que prescindiendo de la dificultad material que la división en mayor número de partes presenta en la práctica, siempre se podrán representar las magnitudes de la misma especie por números, ya sea exactamente, ya con la aproximación que se desee ó que exija la naturaleza de la cuestión.

364.—Para trazar una línea recta sobre un plano nos valemos de la regla y del lápiz ó grafio. La regla es una barra de madera ó de metal construida con la condición de que todos los puntos de uno de sus bordes estén en la misma dirección, como lo representa la figura 7. El grafio ó tira-líneas sirve para trazar las rectas con tinta, apoyando dos puntos de la regla A y B sobre los dos puntos dados A' B' y haciéndolo resbalar contra el borde de la regla al mismo tiempo que se apoya sobre el papel.

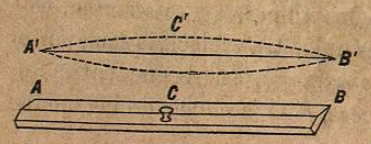

Figura 7.

Para asegurarse de la buena construcción de la regla, á lo cual se llama *rectificarla*, se marca una recta, como se ha explicado, haciendo coincidir el punto A con A' y el punto B con B'. En seguida se invierte la regla teniendo cuidado de hacer coincidir el punto A con B', y el punto B con A', y se traza una nueva línea. Si la

regla está bien construida las dos marcas se confundirán, supuesto que por dos puntos solo puede pasar una recta. Si la regla está mala resultarán dos trazas como son A' C' B' y A' C B'.

Como la falta de exactitud en las construcciones geométricas resulta á veces de que las líneas que se marcan, tienen una anchura más ó menos considerable y los puntos son pequeñas superficies, debe procurarse que las líneas sean lo más finas posibles, y que los puntos estén determinados por líneas que se corten bajo ángulos casi rectos.

Cuando se quiere fijar no solo la dirección, sino también la magnitud de una recta, debe trazarse sobre la regla únicamente hasta los puntos extremos, y para medir su longitud, nos servimos de la escala y del compás.

La escala es una regla de madera, de marfil ó de metal (fig. 8) en la que se han marcado divisiones iguales referidas á una unidad de longitud como el metro, la vara, la yarda, etc.

Figura 8.

El compás es un instrumento, generalmente de metal, (fig. 9) compuesto de dos piernas de igual longitud A B y A C, que pueden girar al rededor de un eje A. Cuando sirve para medir la longitud de las líneas sus puntas son fijas, y cuando se usa para trazar círculos, una de sus puntas debe reemplazarse por un lápiz ó un grafio. Si la recta que se trata de medir tiene menos longitud que la escala y ésta tiene hecho su borde en bisel, basta poner la escala junto á la recta haciendo coincidir su cero con uno de los extremos, y leer la división en que toca el otro extremo de la recta. En caso contrario se toma con el compás un cierto número de unidades de la escala, (20 por ejemplo), y se llevan sobre la línea el número de veces que es posible, (supongamos que hayan sido 3), hasta que quede una parte menor. En seguida se mide esta resta con el compás, cuya abertura llevada sobre la escala indicará cuánto se debe agregar á las primeras medidas. Si la resta tenía 5 divisiones, toda la línea tendría 65 milímetros por ejemplo. En todos los casos el grado de aproximación depende de la igualdad y finura de las divisiones de la escala así como del menor grueso que se pueda dar á las líneas y á las puntas del compás.

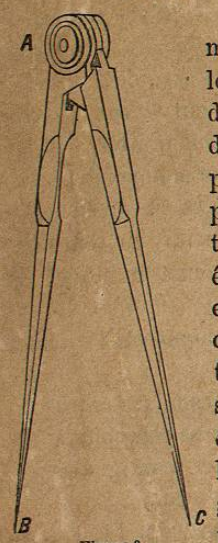

Figura 9.

365.—Cuando se quieren sumar dos rectas B C y D E (fig. 10) se lleva una D E sobre la prolongación C A de la otra B C y la recta B A

será igual á B C+D E. Si las líneas B C y D E fueran iguales, la recta B A sería doble de una de ellas y así se concibe el modo de duplicar, triplicar y en general de multiplicar una recta por un número.

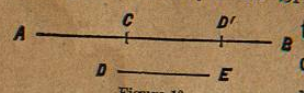

Figura 10.

Para restar DE de BC bastaría llevar DE de C á D', y se tendría BD'=BC—DE.

366.—*Se llama línea quebrada* (fig. 11) *la que está compuesta de líneas rectas que no quedan en la misma dirección.*

Figura 11.

Para fijar la posición de una línea quebrada, es preciso conocer los puntos extremos A, B, C, D, E, F, de las partes que la forman; y para que dos líneas quebradas sean iguales, es necesario que en el caso de que se sobrepusieran coincidiesen los expresados puntos A, B, C, D, E y F. Entre dos puntos, A y F, se pueden tirar una infinidad de líneas quebradas.

367.—*Se llama línea curva* (fig. 12) *la que tiene todos sus puntos en diferente dirección.* Puede concebirse como descrita por un punto que se mueve cambiando por grados insensibles á cada instante de dirección.

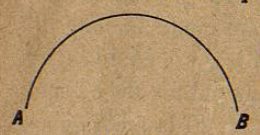

Figura 12.

Para fijar la forma de una curva, es necesario conocer la posición de todos sus puntos, ó la ley del movimiento del punto que la engendró. Para que dos curvas sean iguales, es preciso que sobreponiéndose puedan coincidir en todos sus puntos. Entre dos puntos, A y B, puede tirarse una infinidad de curvas.

368.—*Se llama línea mixta* (fig. 13) *la que está compuesta de partes rectas y de partes curvas.*

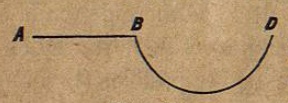

Figura 13.

Para determinar una línea mixta es preciso poder fijar las partes de que se compone, siendo necesario que estas partes sean iguales para que dos líneas mixtas lo sean.

369.—*Se llama circunferencia de círculo una curva* (fig. 14) *plana, cerrada, cuyos puntos todos están á igual distancia de otro* C *interior, llamado centro.*

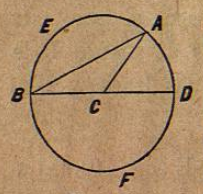

Figura 14.

Círculo es la porción de superficie comprendida dentro de la circunferencia.

Suele aplicarse, aunque indebidamente, la palabra círculo á la circunferencia; pero como lo indican las definiciones respectivas, *la circunferencia es una línea,* mientras que *el círculo es una superficie.*

Se llama *radio toda recta,* C A, *que va del centro*

á la circunferencia, y como esta curva tiene todos sus puntos equidistantes del centro, resulta que *todos los radios son iguales.*

La posición de un círculo queda fijada cuando se conoce su centro y el radio, por lo que *dos círculos serán iguales cuando lo sean sus radios.*

Se llama *diámetro toda recta* B D, *que pasando por el centro, termina en la circunferencia.* Como todo diámetro se compone de dos radios y éstos son iguales, se infiere que *todos los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

Se llama *arco una parte,* A D, *de la circunferencia.*

Cuerda es una recta, B A, *que va de un punto á otro de la circunferencia.* Se dice que la cuerda A B subtende al arco B E A, y aunque toda cuerda subtende dos arcos B E A y B F A, comunmente se aplica esta expresión al arco menor. Recíprocamente se dice que la línea B A es subtensa del arco B E A.

Se llama *segmento la porción de superficie* B A E B *comprendida entre una cuerda y el arco que subtende.*

Sector es la porción de superficie A C D A *comprendida entre dos radios y un arco.*

Secante es una recta A B (fig. 15) *que corta la circunferencia en dos puntos, y tiene parte dentro y parte fuera del círculo.*

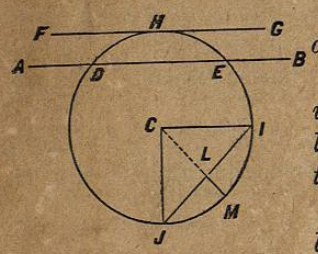

Figura 15.

Tangente es una recta F G *que toca á la circunferencia en un solo punto* H.

Se llama sagita ó flecha la parte L M *de un radio comprendida entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco que subtende.*

Cuadrante es el arco J M I *equivalente á la cuarta parte de la circunferencia.*

370.—Las *superficies* pueden ser planas, curvas y mixtas.

Se llama *plano, ó superficie plana, aquella á la que se puede aplicar una línea recta en cualquiera dirección, tocándola en todos sus puntos.* La superficie tranquila del agua, cuando no tiene una gran extensión, es plana.

La intersección común de dos planos es una línea recta; pues si tomamos dos puntos en la intersección y por ellos hacemos pasar una recta, por la definición de plano esta recta deberá tener todos sus puntos en ambos planos.

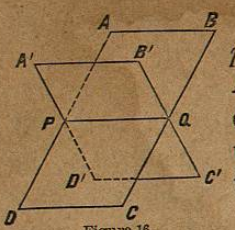

Figura 16.

Por una recta pueden pasar una infinidad de planos. Basta imaginarse (fig. 16) que un plano A B C D que pasa por la recta P Q gira al rededor de ella, para comprender que puede tomar una multitud de posiciones como A' B' C' D' conteniendo todos los planos á la recta P Q.

Por tres puntos no se puede hacer pasar más de un solo plano. Si á la condición de pasar el plano por los dos puntos de la recta P Q se une la de que pase por un tercer punto A, se comprende fácilmente que si se hace pasar un plano por P Q y nos imaginamos que gire al rededor de esta recta, entre la multitud de planos que nos es dado concebir, solo uno tendrá la propiedad de pasar al mismo tiempo por el punto A.

De esto resulta que *la posición de un plano queda enteramente fijada por tres puntos que no están en línea recta ó por dos rectas que se cortan en un punto.*

Para fijar la extensión de un plano (fig. 16) *es preciso conocer la situación de los puntos extremos* A B C D *que lo limitan.*

Dos planos coincidirán siempre que coincidan tres puntos de uno de ellos, con tres puntos del otro.

Para que dos planos sean iguales en extensión, es necesario que puedan coincidir todos los puntos extremos que los limitan.

Figuras planas son aquellas que pueden estar contenidas en un plano. El círculo y el triángulo son, por ejemplo, figuras planas, y de ellas nos ocuparémos especialmente en las dos primeras secciones de la geometría.

371.—En los *volúmenes* distinguirémos aquellos en los que todas las superficies que los limitan son planas, y aquellos que están terminados por superficies curvas.

Axiomas, métodos de demostración y definiciones.

372.—Axiomas.—Al tratar de los fundamentos del cálculo, hemos aceptado (32 y 242) los siguientes axiomas:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Una cantidad es igual á la reunión de sus partes.

Los cuales como se refieren á las cantidades, son aplicables en geometría á la extensión; pero por la naturaleza ú objeto de esta ciencia tenemos que agregar el siguiente que es de un uso frecuente:

Las figuras que aplicadas unas encima de otras coinciden en todos sus puntos, son iguales.

De este corto número de axiomas y de las *definiciones*, que además de explicar una palabra constituyen *la aserción de un hecho ó de una propiedad fundamental geométrica*, por un riguroso raciocinio se van sucesivamente infiriendo nuevas verdades de las que á su vez nos servimos para deducir y establecer principios desconocidos.

Así, por ejemplo, la definición de *círculo* además de explicar esta palabra, señala, ó si se quiere, enseña la propiedad de esta curva de tener sus puntos equidistantes del centro, de la cual deducimos que los radios son iguales, lo mismo que los diámetros, y otro gran número de teoremas, como que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, que es la mayor de todas las cuerdas, etc., etc.

373.—Métodos de demostración.—En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la *demostración positiva* (27) y la *negativa;* pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy perceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de *sobreposición* para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetirémos que la *demostración positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.* Unas veces de una propiedad general se deduce otra particular ó menos general, y otras de lo explícito de una proposición se deduce lo que en ella hay implícito.

Demostración negativa es la que nos hace ver, que de no ser cierto el principio que trata de demostrarse, resultaría cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostración por sobreposición, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras debe coincidir.

Para dar á comprender mejor estas definiciones, pondrémos un ejemplo de estas diferentes clases de demostración.

Demostración directa sin sobreposición.

concurso, que son aquellos donde se reunen dos ó más rectas, como el D en la fig. 3; y *puntos de contacto*, que son aquellos donde dos ó más líneas se tocan, como el E en la fig. 4.

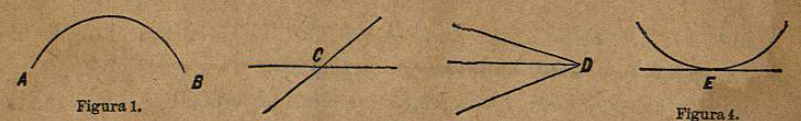

Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Careciendo los puntos de magnitud, todos son iguales, y por lo mismo, se concibe que si se sobrepusieran, coincidirían.

361.—LÍNEAS.—*Se llama línea toda extensión en longitud sin ninguna latitud ni profundidad.* Puede concebirse una línea como engendrada por la intersección de dos superficies, ó como el trazo ó huella que dejaría un punto en su movimiento.

Las líneas pueden ser *rectas, quebradas, curvas* y *mixtas.*

362.—*Línea recta es aquella cuyos puntos todos están en la misma dirección.* De esto resulta que es el camino más corto entre dos puntos.

La intersección C de dos rectas (fig. 2) es un punto.

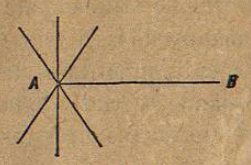

Figura 5.

Por un punto A (fig. 5) pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una dirección, queda fijada la posición de la recta A B.

Así pues, *dos puntos fijan la posición de una recta, y si son éstos los extremos determinarán su magnitud.—Para que dos rectas coincidan es necesario y basta que coincidan dos puntos de una con dos puntos de la otra; y para que dos rectas tengan la misma longitud, es preciso que puedan coincidir los extremos de una con los de la otra.*

363.—La distancia entre dos puntos se estima por la magnitud de la línea recta que los une. Para medir una recta es preciso determinar la relación que existe entre su longitud y la de otra recta tomada por unidad. Así cuando se dice, por ejemplo, que la altura de una torre es de 50 metros, esto significa que cincuenta veces está contenida la longitud de la unidad lineal llamada metro, en la altura de esa torre.

Dos rectas están en la razón, por ejemplo, de 3 á 5 cuando una tercera recta, tomada como unidad, está contenida tres veces en la primera y 5 en la última. La determinación de la relación de dos rectas exige, pues, que se busque otra recta que esté contenida un número cabal de veces en una y en otra, para que sea la común medida de ambas.

Si estando dadas dos rectas A B y C D (fig. 6) se quiere determinar su mayor medida común, ó por lo menos la razón aproximada de una á otra, tendrémos que proceder como sigue:

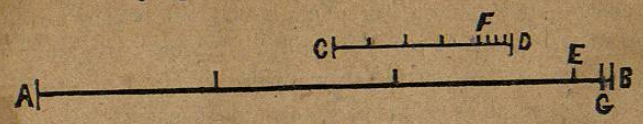

Figura 6.

Se llevará la más pequeña C D sobre la mayor, cuantas veces se pueda: se encontrará tres veces desde A hasta E y quedará una resta ó parte menor que C D de E á B; por lo que se tendrá:

$$AB = 3\,CD + EB$$

En seguida se llevará la resta E B sobre C D, y se encontrará que está contenida 4 veces y que queda una segunda resta F D, lo que da:

$$CD = 4\,EB + FD$$

Se llevará esta segunda resta sobre E B y como solo está contenida una vez de E á G, con una tercera resta G B, se tiene:

$$EB = FD + GB$$

Por último, llevando G B sobre F D, se encuentra que

$$FD = 4\,GB$$

Sustituyendo sucesivamente el valor de F D en el de E B, éste en el de C D, y por último el de C D en el de A B, se tendrá:

$$FD = 4\,GB,\ EB = 5\,GB,\ CD = 24\,GB,\ \text{y}\ AB = 77\,GB.$$

Resulta, pues, que la última resta G B está contenida 24 veces en C D y 77 en A B, por lo que estas dos rectas están en la razón de 24 á 77.

El procedimiento empleado es análogo á la operación que sirve para encontrar el máximo común divisor de dos números, y se termina, como aquel, cuando la resta encontrada es nula. Un raciocinio semejante al que hicimos en aritmética, (110) probaría que así se encuentra no solo una medida común para ambas líneas, sino la *mayor* de las medidas comunes, que pueden tener.

Se dice que dos rectas son *conmensurables* entre sí, cuando tienen una medida común, y que son *inconmensurables* en el caso contrario.