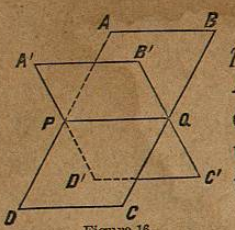

Figura 16.

Por una recta pueden pasar una infinidad de planos. Basta imaginarse (fig. 16) que un plano A B C D que pasa por la recta P Q gira al rededor de ella, para comprender que puede tomar una multitud de posiciones como A' B' C' D' conteniendo todos los planos á la recta P Q.

Por tres puntos no se puede hacer pasar más de un solo plano. Si á la condición de pasar el plano por los dos puntos de la recta P Q se une la de que pase por un tercer punto A, se comprende fácilmente que si se hace pasar un plano por P Q y nos imaginamos que gire al rededor de esta recta, entre la multitud de planos que nos es dado concebir, solo uno tendrá la propiedad de pasar al mismo tiempo por el punto A.

De esto resulta que *la posición de un plano queda enteramente fijada por tres puntos que no están en línea recta ó por dos rectas que se cortan en un punto.*

Para fijar la extensión de un plano (fig. 16) *es preciso conocer la situación de los puntos extremos* A B C D *que lo limitan.*

Dos planos coincidirán siempre que coincidan tres puntos de uno de ellos, con tres puntos del otro.

Para que dos planos sean iguales en extensión, es necesario que puedan coincidir todos los puntos extremos que los limitan.

Figuras planas son aquellas que pueden estar contenidas en un plano. El círculo y el triángulo son, por ejemplo, figuras planas, y de ellas nos ocuparémos especialmente en las dos primeras secciones de la geometría.

371.—En los *volúmenes* distinguirémos aquellos en los que todas las superficies que los limitan son planas, y aquellos que están terminados por superficies curvas.

Axiomas, métodos de demostración y definiciones.

372.—Axiomas.—Al tratar de los fundamentos del cálculo, hemos aceptado (32 y 242) los siguientes axiomas:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Una cantidad es igual á la reunión de sus partes.

Los cuales como se refieren á las cantidades, son aplicables en geometría á la extensión; pero por la naturaleza ú objeto de esta ciencia tenemos que agregar el siguiente que es de un uso frecuente:

Las figuras que aplicadas unas encima de otras coinciden en todos sus puntos, son iguales.

De este corto número de axiomas y de las *definiciones*, que además de explicar una palabra constituyen *la aserción de un hecho ó de una propiedad fundamental geométrica*, por un riguroso raciocinio se van sucesivamente infiriendo nuevas verdades de las que á su vez nos servimos para deducir y establecer principios desconocidos.

Así, por ejemplo, la definición de *círculo* además de explicar esta palabra, señala, ó si se quiere, enseña la propiedad de esta curva de tener sus puntos equidistantes del centro, de la cual deducimos que los radios son iguales, lo mismo que los diámetros, y otro gran número de teoremas, como que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, que es la mayor de todas las cuerdas, etc., etc.

373.—Métodos de demostración.—En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la *demostración positiva* (27) y la *negativa;* pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy perceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de *sobreposición* para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetirémos que la *demostración positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.* Unas veces de una propiedad general se deduce otra particular ó menos general, y otras de lo explícito de una proposición se deduce lo que en ella hay implícito.

Demostración negativa es la que nos hace ver, que de no ser cierto el principio que trata de demostrarse, resultaría cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostración por sobreposición, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras debe coincidir.

Para dar á comprender mejor estas definiciones, pondrémos un ejemplo de estas diferentes clases de demostración.

Demostración directa sin sobreposición.

Escolio es una observación relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extensión, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusión*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusión es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusión* como *supuesto*, y éste como conclusión, resulta una proposición que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusión del teorema primitivo conviene á otros casos además del comprendido en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Por ejemplo, siendo cierto que toda cuerda es línea recta, no lo es, que toda línea recta es cuerda.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extensión. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolución y de demostración.

ANGULOS.

375.—Definiciones.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, (fig. 20), *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinación de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinación de dos rectas.

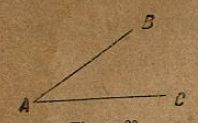

Figura 20

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta C D cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí (fig. 21), se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

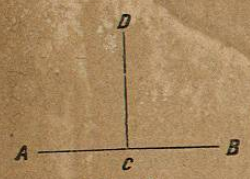

Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto* D C B *se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

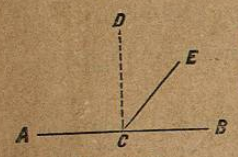

Figura 22.

Cuando dos ángulos, como E C B y E C A, valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos, como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman *ángulos contiguos* los que tienen común el vértice y uno de los lados que los forman. Por ejemplo A C D y D C E fig. 22.

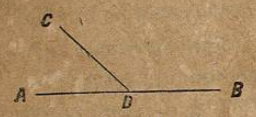

Figura 23.

Se llaman *ángulos adyacentes* los que tienen común el vértice y uno de sus lados, y los otros dos lados forman una línea recta. Por ejemplo, son *adyacentes* los ángulos (fig. 23) A D C y C D B.

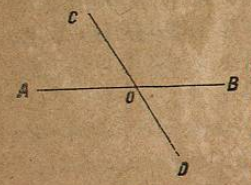

Figura 24.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice* los que tienen su vértice común y los lados de uno son prolongación de los lados del otro ángulo. Por ejemplo, son *opuestos al vértice* (fig. 24) los ángulos A O C y D O B.

TEOREMA.—*El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Vamos á demostrar que el diámetro A B (fig. 17) es mayor que la cuerda A D. Si tiramos el radio C D, tendremos que por ser A D línea recta, y A C D quebrada; y por ser la línea recta el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

A C D>A D

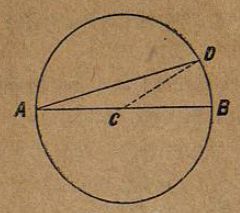

Figura 17.

pero como A C D consta de dos radios, y el diámetro A B es igual también á dos radios, se tiene que A C D=A B, luego

A B>A D.

Y como el raciocinio hecho con *A D* puede aplicarse á otra cuerda cualquiera, se infiere la verdad del teorema en toda su generalidad.

Ejemplo de demostración directa con sobreposición.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

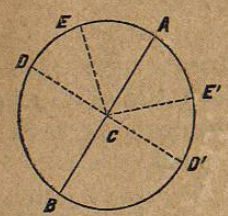

Figura 18.

Si suponemos que la figura 18 se doblara por el diámetro A B quedando fija la parte A E D B y girando al rededor de A B la parte A D'B, es claro que la recta A B es común á las dos partes en la figura, y en virtud de que todos los radios son iguales, el extremo D' deberá coincidir con algún otro punto como D equidistante de C; el punto E' por la misma razón deberá coincidir con algun otro punto como E, y así sucesivamente debiendo coincidir todos los puntos de la circunferencia que quedan á la derecha del diámetro con los que están á su izquierda, se infiere que estas dos partes determinadas por el diámetro son iguales.

Como se vé en este ejemplo hay una cosa conocida: que la recta A B es común á las dos partes, cuya igualdad se va á demostrar, y de esto que sabemos y de un principio cierto, que los radios son iguales, se deduce el teorema. Así, pues, es preciso en todos los casos dar el fundamento ó la razón en virtud de la que coincidiendo una parte de dos figuras deberán coincidir todas la demás.

Ejemplo de demostración negativa con sobreposición.

TEOREMA.—*El diámetro divide la cicunferencia en dos partes iguales.*

Si suponemos que las dos partes determinadas por el diámetro son desiguales, al doblar la figura (fig. 19) por A B, el punto D caería en

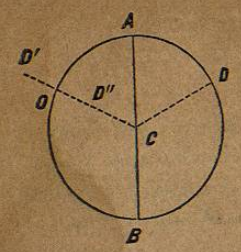

Figura 19.

D' fuera de la circunferencia si la parte de la derecha era la mayor. En este caso tendríamos:

por el supuesto	C D =C D'
pero	C D'>C O
luego	C D >C O

esto es, sería preciso que los radios fueran desiguales, lo que no es admisible.

Si suponemos que la parte de la derecha sea la menor, al doblar la figura, D caería dentro del círculo y tendríamos:

por el supuesto	C D =C D"
por otra parte	C D"<C O
luego	C D <C O

esto es, que los radios serían desiguales, lo que es imposible.

Luego si la parte A D B no puede ser mayor, ni tampoco menor que la parte A O B, tendrá que ser igual á ella, que es lo que se quería demostrar.

Este ejemplo pone de manifiesto que es preciso completar la demostracion negativa haciendo ver que en cualquiera otro supuesto que no sea el del teorema, forzosamente resulta un absurdo. Si la parte de la derecha no puede ser mayor ni menor que la de la izquierda, tendrá que ser igual á ella, que es lo que establece el teorema.

En geometría, el método de demostración indirecta, llamado tambien de *reducción al absurdo*, se usa á menudo para demostrar los teoremas que se llaman *recíprocos*. (374)

El teorema que acabamos de demostrar nos hace comprender que los arcos de un mismo círculo, ó de círculos iguales son sobreponibles.

374.—DEFINICIONES.—Hay dos vicios de raciocinio que los estudiantes deben evitar en geometría. El uno llamado *petición de principio, consiste en pretender tomar como fundamento de la demostración el teorema que debe demostrarse.* Para excusarlo, no hay más que tener presente que el teorema por demostrar debe resultar como consecuencia *de otras* verdades ya conocidas. El otro vicio se llama *círculo vicioso, y consiste en tomar como fundamento de la demostración un teorema que todavía no se ha demostrado, y que para hacerlo sería necesario apoyarse en el teorema que trata de demostrarse.*

Lema es una proposición fundamental que sirve de preparación á varios teoremas ó á la resolución de una serie de problemas.

Corolario es la consecuencia de una proposición.