III.—*Determinar la diferencia entre dos ángulos* A *y* B (fig. 33).

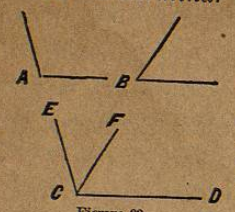

Figura 33.

Sobre la recta C D se construye el ángulo D C E=A, que es el mayor de los ángulos. Sobre el mismo lado C D constrúyase el ángulo D C F=B. El ángulo E C F=E C D—D C F=A—B será el pedido.

IV.—*Determinar el número de grados del ángulo* C A B (fig. 34) *por medio del transportador.*

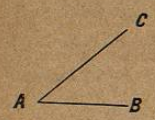

Figura 34.

Se colocará el transportador sobre el ángulo C A B, teniendo cuidado de hacer coincidir el centro del instrumento con el vértice A del ángulo y la línea marcada con 0° y 180° con uno de los lados, con C A por ejemplo. Hecho esto, bastará ver el número de grados que marca el otro lado A B para conocer el valor del ángulo, que en este caso es de 37°—30'. Siempre que sea necesario se prolongarán los lados del ángulo.

V.—*Construir un ángulo de* $35\frac{1}{2}°$ *sirviéndose del transportador.* (Fig. 35).

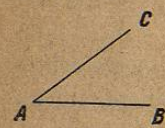

Figura 35.

Trácese la recta A B; hágase coincidir el punto A con el centro del transportador, y la recta A B con el diámetro que pasa por el cero: márquese un punto C en la graduación $35\frac{1}{2}°$; y tirando la recta C A quedará trazado el ángulo pedido.

Principales casos de igualdad en los triángulos.

383.—Se llama triángulo rectilíneo una figura que determina un espacio cerrado por tres líneas rectas, como A B C (fig. 36).

Las rectas que limitan el triángulo se llaman *lados*, y los puntos en que concurren de dos en dos, se llaman *vértices*. Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.

Para que dos triángulos puedan coincidir en todos sus puntos, y que por lo mismo sean iguales, se necesita que coincidan respectivamente sus tres vértices, que son los extremos de sus lados.

Considerarémos, por ahora, tres casos de igualdad de los triángulos.

384.—I.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 36.)

Sea A B=A' B', A=A' y B=B'

Demostración.—Por ser A B=A' B' si sobrepusiéramos estas figuras el lado A B coincidirían con A' B'. Por ser el ángulo A=A' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado A C tomaría la misma dirección que A' C'. Por ser el ángulo B=B' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado B C tomaría la misma dirección que B' C', y coincidiendo respectivamente los dos lados A C con A' C' y B C con B' C' es claro que el punto C, intersección de las dos primeras rectas, coincidiría con C' intersección de las dos últimas. Finalmente, coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

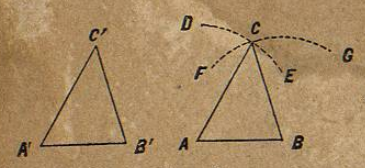

Figura 36.

385.—II.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales* (fig. 36.)

Sea

A=A', A B=A' B' y A C=A' C'.

Demostración.—Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las dos figuras, los lados A B y A C tomarían la misma dirección que A' B' y A' C'; y por ser A B=A' B' y A C=A' C', el punto B coincidiría con B' y el C con C'; luego el tercer lado B C coincidiría con B' C' por coincidir sus extremos, y los triángulos serán iguales.

386.—III.—*Dos triángulos serán iguales cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales.*

Sea (Fig. 36) A B=A' B', A C=A' C' y B C=B' C'

Demostración.—Por ser el lado A B=A' B' si sobrepusiéramos las dos figuras, estos lados, lo mismo que sus extremos, coincidirían. Si desde el punto A como centro y con el radio A C trazamos un arco de círculo D E por ser A C=A' C' el punto C' caerá en alguno de los de este arco que pasa por C. Si desde el punto B como centro y con el radio B C trazamos un arco de círculo F G, por ser B C=B' C' el punto C' caerá en alguno de los del expresado arco F G que pasa por C; y debiendo pertenecer á los dos arcos D E y F G el punto C' caerá sobre C, que es la intersección de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales á lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llama perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

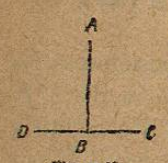

Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L, *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

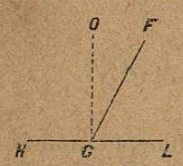

Figura 38.

Demostración.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendrémos por la figura:

$$F\,G\,H = O\,G\,H + O\,G\,F$$

y

$$F\,G\,L = O\,G\,L - O\,G\,F\,,$$

sumando estas ecuaciones, resulta:

$$F\,G\,H + F\,G\,L = O\,G\,H + O\,G\,L$$

luego

$$F\,G\,H + F\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostración.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig.

39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantarémos la perpendicular C O, y como por la figura:

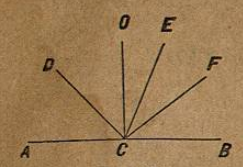

Figura 39.

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B$$
$$= A\,C\,O + O\,C\,B$$

y como $A\,C\,O + O\,C\,B = 2$ rectos

se infiere que

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

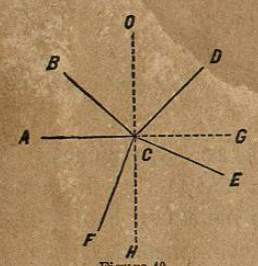

Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendrémos que

$$A\,C\,B + B\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,A$$
$$= A\,C\,O + O\,C\,G + G\,C\,H + H\,C\,A$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuación, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes (fig. 41) A C B y B C D, y vamos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

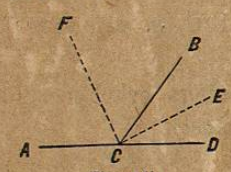

Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos (389) se tiene:

$$A\,C\,B + B\,C\,D = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\frac{A\,C\,B}{2} + \frac{B\,C\,D}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{A\,C\,B}{2}$ su igual F C B y por $\frac{B\,C\,D}{2}$, B C E se tiene

$$F\,C\,B + B\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

ó

$$F\,C\,E = 1 \text{ recto}$$