387.—*En triángulos iguales á lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llama perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

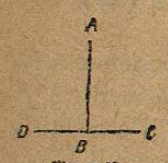


Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L, *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

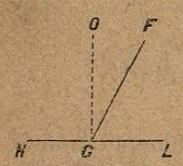


Figura 38.

Demostración.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendrémos por la figura:

$$F\,G\,H = O\,G\,H + O\,G\,F$$

y

$$F\,G\,L = O\,G\,L - O\,G\,F\,,$$

sumando estas ecuaciones, resulta:

$$F\,G\,H + F\,G\,L = O\,G\,H + O\,G\,L$$

luego

$$F\,G\,H + F\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostración.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig.

39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantarémos la perpendicular C O, y como por la figura:

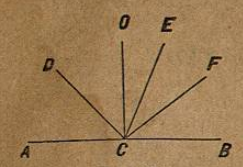


Figura 39.

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B$$
$$= A\,C\,O + O\,C\,B$$

y como $A\,C\,O + O\,C\,B = 2$ rectos

se infiere que

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

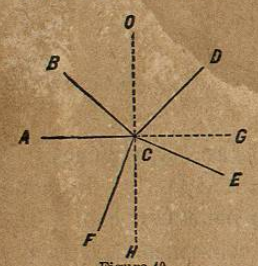


Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendrémos que

$$A\,C\,B + B\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,A$$
$$= A\,C\,O + O\,C\,G + G\,C\,H + H\,C\,A$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuación, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes (fig. 41) A C B y B C D, y vamos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

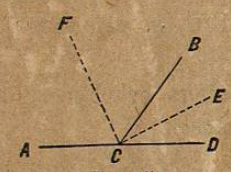


Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos (389) se tiene:

$$A\,C\,B + B\,C\,D = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\frac{A\,C\,B}{2} + \frac{B\,C\,D}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{A\,C\,B}{2}$ su igual F C B y por $\frac{B\,C\,D}{2}$, B C E se tiene

$$F\,C\,B + B\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

ó

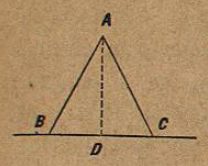
$$F\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

$$AF < AEF$$

tomando la mitad $\quad AD < AE.$ Que es lo que se debía demostrar.

Esta propiedad hace que la distancia de un punto á una recta se mida siempre por la perpendicular bajada del punto á la recta.

399.—*Las oblícuas* A B *y* A C (fig. 48) *bajadas desde un mismo punto sobre una recta, y que se separan igualmente del pié de la perpendicular serán iguales.*



Figurr 48.

Los triángulos A D B y A D C serán iguales (385) por tener el ángulo A D B=A D C por recto, el lado A D común, y B D=D C por el supuesto, y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales (387) tendrémos que por estar opuestos á los ángulos rectos: A B=A C.

Recíprocamente si A B=A C se separarán igualmente del pié D de la perpendicular.

Por ser A D perpendicular si dobláramos la figura por A D el punto C caería en alguno de la parte, D B; pero por permanecer fijo el punto A y ser A B=A C el punto C caería sobre B, y por tanto D C=DB.

400.—*Si dos puntos* C *y* D (fig. 49) *desigualmente distantes de una recta* A B *se reunen á sus extremos, la suma de las rectas* C A + C B *tiradas del punto más próximo* C, *será menor que la suma de las* D A+D B *tiradas del más distante* D.

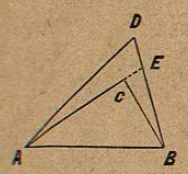


Figura 49.

Para demostrar que C A + C B<D A + D B prolongarémos A C hasta E, y supuesto que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

$$CB < EC + EB$$

y agregando á los dos miembros C A

$$CA + CB < AE + EB \ldots (1)$$

Por otra parte $\quad AE < DA + DE$

y agregando á los dos miembros E B

$$AE + EB < DA + DB \ldots (2)$$

Observando que el primer miembro de la desigualdad (1), es menor que A E+E B y que conforme á la (2) esta suma es menor que D A+D B, se infiere que:

$$CA + CB < DA + DB.$$

401.—*Si desde un punto* A (fig. 50) *se bajan varias oblícuas* A B, A D, *la que se separe más del pie de la perpendicular* A C, *será la mayor.*

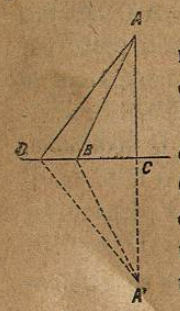


Figura 50

Si dobláramos la figura por la recta D C y suponemos que el punto A caiga en A', A B tomaría la posición de A' B, y A D la de A' D.

Teniendo los ángulos A C D y A' C D la posición de contíguos y siendo cada uno de ellos recto, la línea C A' será la prolongación de A C (397) y en consecuencia A A' es una línea recta. Por otra parte, estando B más próximo á la recta A A' que el punto D tendrémos que (400)

$$AB + BA' < AD + DA'$$

tomando la mitad $\quad AB < AD$

que es lo que se debía demostrar.

402.—Como si desde un punto se tiran varias líneas á una recta, por una parte la perpendicular es menor que cualquiera oblícua, y por otra sólo pueden ser iguales las oblícuas que se separan igualmente del pie de la perpendicular, siendo mayores las que se separan más; se infiere que *desde un punto tomado fuera de una recta, no se le pueden tirar más que dos rectas iguales.*

403.—*Si por el médio* C (fig. 51) *de una recta* A B *se levanta una perpendicular* C D: 1° *cualquier punto de la perpendicular estará equidistante de los extremos* A y B: 2° *cualquier punto que no pertenezca á la perpendicular, distará desigualmente de los extremos.*

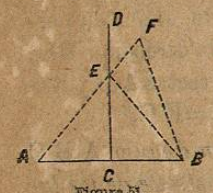


Figura 51.

Demostración.—1° A E=E B por ser oblícuas, que según el supuesto, se separan igualmente del pie de la perpendicular (399).

2° Vamos á demostrar ahora que un punto F que no pertenece á la perpendicular, dista desigualmente de los extremos. Reunirémos F con A y con B y por el punto E tiremos la recta E B. Tendrémos:

$$FB < EB + EF$$

sustituyendo por E B, su igual E A resulta

$$FB < FA.$$

404.—*Siempre que una recta* A B (fig. 52) *tiene dos puntos* A *y* B

equidistantes de dos puntos C *y* D *de otra recta, la primera será perpendicular á la segunda, y la dividirá en dos partes iguales.*

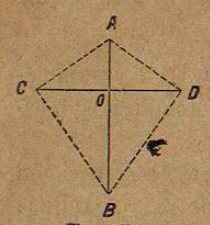


Figura 52.

Fundándonos en que A C=A D y B C=B D, demostrarémos que el ángulo A O C=A O D. Los triángulos A B C y A B D son iguales (386) por tener sus tres lados iguales; luego si dobláramos la figura por la línea A B, el punto D debería coincidir con C, y permaneciendo el punto O invariable, resultaría que los lados del ángulo A O C coincidirán con los del A O D por lo que serán iguales, y A B será perpendicular á C D. Además, se ve que A B divide á C D en dos partes C O=O D.

405.—*Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están equidistantes de los lados del ángulo.*

Sea el ángulo A B C (fig. 53) y vamos á demostrar que cualquier punto E de la recta B D, que lo divide en dos ángulos A B D y D B C iguales, está equidistante de los lados A B y B C del ángulo A B C. Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre la recta, si bajamos las perpendiculares E F y E G, debemos probar que estas líneas que miden la distancia de un punto de la bisectriz á los lados del ángulo son iguales.

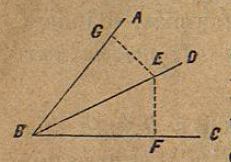


Figura 53.

Si dobláramos la figura por la recta B D el punto E permanecería fijo, y por ser el ángulo A B D= D B C el lado B C coincidiría con B A y el punto F de la primera recta deberá hallarse en alguno de los de la recta B A. Por otra parte, la línea E F que es perpendicular á B C, después de doblada la figura, deberá tomar una posición perpendicular á A B; pero como desde un mismo punto E no se puede bajar más de una sola perpendicular á una recta (396), resulta que E F tomará la dirección E G, y como el punto F debe encontrarse á la vez sobre las rectas A B y E G tendrá que coincidir con su intersección G; luego E F=E G.

406.—*Todo punto* O (fig. 54) *que queda dentro de un ángulo* A B C *y que no pertenece á la bisectriz, está desigualmente distante de los lados del ángulo.*

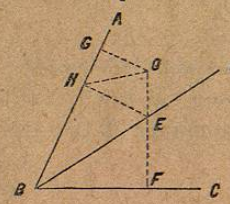


Figura 54.

Las perpendiculares O F y O G son las distancias del punto O á los lados del ángulo, y vamos á probar que O G<O F.

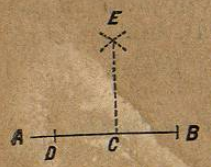
Por el punto E tiremos la perpendicular E H á A B, y unamos O con H.

Tendrémos:

O G<O H (398)
O H<O E+E H

pero siendo E H=E F (405)
sustituyendo se tiene O H<O F
luego con más razón O G<O F

407.—Problemas de oblícuas y perpendiculares.—I.—*Levantar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 55), *desde un punto* C *de la misma recta.*



Figuar 55.

Resolución.—Tómense dos puntos B y D equidistantes de C, y haciendo centro primero en B y luego en D con un radio arbitrario pero mayor que C B, trácense dos arcos de círculo, y reuniendo el punto E de intersección de estos dos arcos con el punto C, la recta C E será la perpendicular; por tener conforme á la construcción dos puntos C y E equidistantes de otros dos D y B de la línea dada (404).

El radio arbitrario B E debe ser mayor $\frac{BD}{2}$ para que los arcos del círculo puedan cortarse.

II.—*Bajar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 56), *desde un punto* C *tomado fuera de ella.*

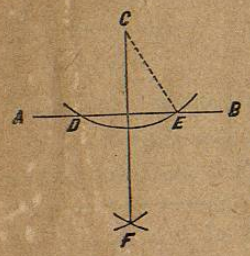


Figura 56.

Haciendo centro en el punto C y con un rádio C D trácese el arco D E que corte la recta dada en dos puntos; hágase centro en cada uno de estos puntos D y E y con un mismo radio descríbanse dos arcos que se cortarán en el punto F; reuniendo los puntos C y F con una recta C F, esta será la pedida por tener dos puntos C y F, equidistantes de los D y E de la recta dada. (404).

III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*

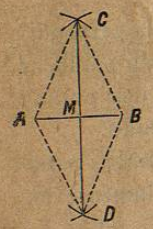


Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio aproximadamente igual á dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de intersección de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B, conforme al teorema demostrado en el párrafo 404.

IV.—*Dividir un ángulo* C *en dos partes iguales.*

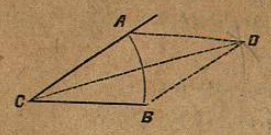


Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrían dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

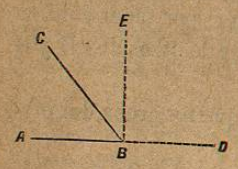


Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construcción del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definición.—*Se llaman paralelas las rectas que tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F de una recta sobre la otra C D sean iguales.

De la definición de rectas paralelas resulta que estarán ambas paralelas *en un mismo plano,* y que si se prolongaran indefinidamente no podrían encontrarse.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es también perpendicular á la otra.*

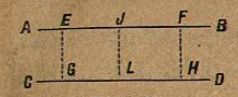


Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que también lo será á A B, para lo que necesitarémos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaría la dirección de L C, y como por construcción L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F después de doblada la figura debería tomar la dirección de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caería sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J A que es lo que se debía demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

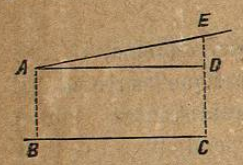


Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendrémos AB=CD. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendríamos A B=C E, de lo que resultaría C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dedujimos de la definición, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí*

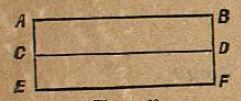


Figura 62.

Por ser A B paralela á E F se tiene

$$A\,E = B\,F$$

por ser C D paralela á E F

$$C\,E = D\,F$$

restando esta ecuación de la anterior, resulta:

$$A\,C = B\,D$$

luego A B será paralela á C D.

412.—Cuando una recta corta dos paralelas (fig. 63), á la recta A B se le llama *secante* y los ángulos que forma con las paralelas toman las siguientes denominaciones:

393.—*Los ángulos,* (fig. 42) D B C *y* A B E, *opuestos al vértice, son iguales.*

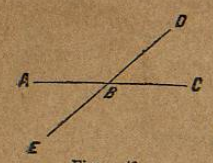


Figura 42.

Tenemos que por ser adyacentes (389) los ángulos

D B C+A B D=2 rectos

por igual razón

A B E+A B D=2 rectos

luego

D B C+A B D=A B E+A B D

suprimiendo A B D, resulta

D B C=A B E

que es lo que se debía demostrar.

394.—*Cuando una recta,* (fig. 43) A B, *es perpendicular á otra* C D, *ésta también es perpendicular á la primera* A B.

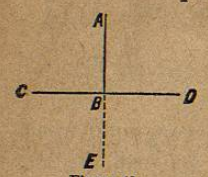


Figura 43.

Prolonguemos la recta A B hasta E, y demostrarémos que siendo A B C = A B D, los ángulos A B C y C B E que forma la recta C D con A E, también serán iguales, y en consecuencia la recta C D será perpendicular á A E.

Por el supuesto del teorema

A B C=A B D;

por opuestos al vértice (393)

A B D=C B E

luego

A B C=C B E

395.—*Desde un punto* A (fig. 44) *de una recta* B C, *no se le puede levantar más de una sola perpendicular.*

Figura 44.

Si supusiéramos que se pudiera levantar otra perpendicular A E, tendríamos:

por el teorema

D A C=1 recto

por el supuesto

E A C=1 recto

luego

D A C=E A C

pero siendo esto inadmisible, se infiere que A E no es perpendicular á B C, y que solo podrá serlo en el caso de confundirse con A D.

396.—*Por un punto* A (fig. 45) *situado fuera de una recta* B C, *no se le puede bajar más de una sola perpendicular* A D.

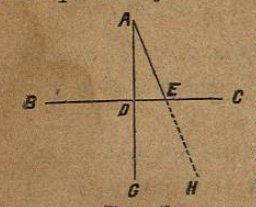


Figura 45.

Si fuera posible bajar otra perpendicular A E, tendríamos prolongando A D y A E que B C sería perpendicular á A G y á A H (394.) Si dobláramos la figura por la recta B C, por ser el ángulo A D B=B D G, la recta A D tomaría la dirección de D G y el punto A caería en alguno de la recta D G: y por suponerse el ángulo A E B=B E H, la recta A E debería tomar la dirección E H y el punto A caería en alguno de la recta E H. En consecuencia, si las dos rectas A D y A E pudieran ser perpendiculares á B C, al doblar la figura, el punto A debería caer al mismo tiempo sobre D G y E H, y no siendo esto posible, á menos que A D coincida con A E, inferirémos que no se puede bajar desde el punto A más de una sola perpendicular.

397.—*Cuando dos ángulos* A B C *y* C B D (fig. 46), *tienen la posición de contiguos y juntos valen dos rectos, las dos rectas* A B *y* B D *tiradas por el extremo de la línea común* C B, *serán prolongación una de la otra.*

Figura 46.

Si suponemos que B D no sea prolongación de A B sino que lo fuera B E, tendríamos: conforme al supuesto del teorema

A B C+C B D=2 rectos.

Por suponer que son adyacentes A B C y C B E (389).

A B C+C B E=2 rectos

de las que resulta A B C+C B D=A B C+C B E

luego C B D=C B E

lo que no es posible, á menos que B E y B D coincidan, esto es, cuando B D sea la prolongación de A B.

398.—*La menor distancia de un punto* A (fig. 47) *á una recta* B C, *es la perpendicular* A D *bajada desde dicho punto.*

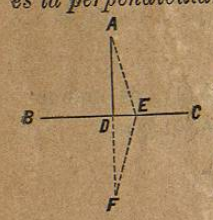


Figura 47.

Demostrarémos que la perpendicular A D es más corta que cualquiera otra oblícua A E. Si dobláramos la figura por B C, el punto A caería en F, y por tener los ángulos B D A y B D F la posición de contíguos y ser cada uno de ellos recto, D F será prolongación de A D (397) esto es A F será una línea recta, luego: