mayor ángulo, siendo b>a, deberá tenerse B>A; luego si B es agudo, tendrá que serlo A (fig. 97).

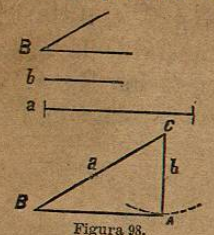


Figura 98.

4° Cuando siendo B agudo el arco no corta á la recta B A, sino que solo la toca en un punto. En este caso (fig. 98) el ángulo A será recto.

Por último, el problema será imposible cuando el lado dado *b* es menor que la perpendicular C A (fig. 98)

IX.—*Construir un triángulo isósceles, dado el ángulo C del vértice* (fig. 99) *y la base c.*

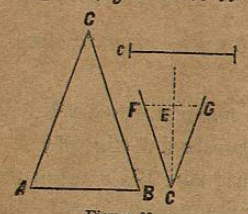


Figura 99.

Tómese la recta A B=c; divídase el ángulo C por la mitad con la línea C E; en un punto cualquiera E de esta recta, levántese la perpendicular F G, y construyendo en A y B ángulos iguales á F ó á G, se tendrá el triángulo A B C pedido, á causa de que tanto A como B son complemento de $\frac{C}{2}$.

X.—*Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a (fig. 100) *y un ángulo agudo B.*

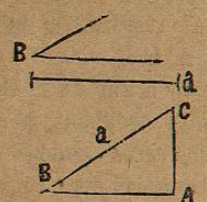


Figura 100.

Tómese la recta B C=a; en el punto B constrúyase un ángulo igual á B, y bajando desde C una perpendicular á la recta indefinida B A, se tendrá el triángulo B A C pedido.

XI.—*Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto* b (fig. 101) *y el ángulo adyacente C.*

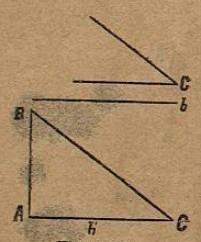


Figura 101.

Tómese C A=b; en el punto C constrúyase un ángulo igual al dado, y prolongando C A levántese en el punto A la perpendicular A B. El triángulo pedido será C B A.

XII.—*Determinar un ángulo igual á la suma de otros dos A y B, cuando esta suma es menor que dos rectos.*

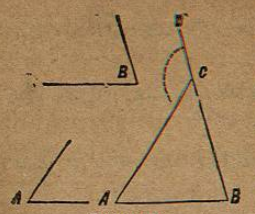


Figura 102.

Sobre los extremos de una recta de longitud arbitraria A B (fig. 102) constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los lados; complétese el triángulo A B C, y prolongando B C, el ángulo pedido será A C D; pues por ser externo del triángulo es igual á B+A (434).

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los lados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\ C\ B=180^\circ$$

despejando á

$$A\ C\ B=180^\circ-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el transportador además del compás para su resolución.

CUADRILATEROS.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura plana cerrada por cuatro líneas rectas* (fig. 103). En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos (fig. 104).

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

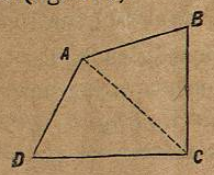


Figura 103.

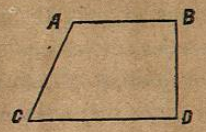


Figura 104.

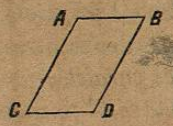


Figura 105.

mados por lados respectivamente iguales, A C común y B C=A D. Siendo los triángulos iguales, á los lados B C y A D estarán opuestos ángulos iguales, B A C=A C D; pero como éstos tienen la posición de alternos internos, se infiere que serán paralelos los lados A B y C D.

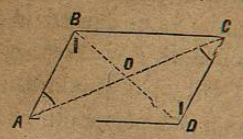


Figura 111.

451.—*Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes mútuamente iguales.*

De que los lados opuestos son iguales y paralelos, vamos á inferir [fig. 111] que B O=O D y A O=O C. Los triángulos A O B y D O C son iguales (384) por tener el lado A B=D C adyacente á los ángulos O A B=O C D y O B A=O D C. Se tiene A B=D C por lados opuestos de paralelógramo, y los ángulos indicados son iguales por alternos internos. Siendo los triángulos iguales por ser lados opuestos á ángulos iguales, resulta que B O=O D y A O=O C.

452.—Las recíprocas de las cuatro últimas proposiciones son ciertas y pueden demostrarse por reducción al absurdo, ó de un modo semejante al empleado para demostrar las directas.

Así, pues, un cuadrilátero será paralelógramo; 1° *siempre que sean iguales los ángulos ó los lados opuestos:* 2° *siempre que dos lados opuestos sean iguales y paralelos;* y 3° *cuando las diagonales se corten en partes mútuamente iguales.*

453.—*La diagonal mayor de un paralelógramo está opuesta al mayor ángulo* (fig. 111).

Sea A C>B D, y vamos á demostrar que el ángulo A D C>B C D. Si consideramos los triángulos A C D y B D C, desde luego advertimos que los ángulos A D C y B C D están formados por el lado D C común y A D=B C; luego conforme al teorema recíproco demostrado en el número 432, debe ser el ángulo A D C>B C D por estar opuesto el ángulo A D C al lado A C, que es mayor que B D.

454.—Siendo *el rombo un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales entre sí,* todas las propiedades de los paralelógramos son comunes á los rombos, resultando además de la igualdad de los lados, que:

En todo rombo las diagonales son perpendiculares entre sí.

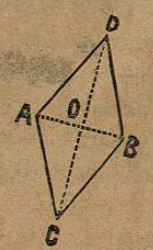


Figura 112.

Tirando las diagonales A B y C D (fig. 112), resultan los triángulos A O D y B O D que son iguales (386) por tener O D común, A D=B D por lados del rombo, y A O=O B por partes de la diagonal (451). Siendo iguales los triángulos, los ángulos opuestos á A D y B D serán iguales, luego A O D=D O B, y por tanto D C será perpendicular á A B.

455.—Como *el rectángulo es un paralelógramo cuyos cuatro ángulos son rectos,* naturalmente tiene todas las propiedades del paralelógramo; pero además, demostrarémos que:

Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Figura 113.

Los triángulos rectángulos (fig. 113) A D C y D A B son iguales (385) por tener el ángulo A D C=D A B formado por A D, que es común, y D C=A B como lados opuestos de paralelógramo. Siendo iguales estos triángulos, sus hipotenusas también lo serán, y se tendrá que A C=D B, que es lo que se debía demostrar.

456.—Siendo el *cuadrado un paralelógramo* (fig. 108) *cuyos lados y ángulos son iguales,* es una figura que tiene las propiedades del cuadrilátero, del paralelógramo, del rombo y del rectángulo, ademas las partes de sus diagonales forman con los lados triángulos rectángulos isósceles.

457.—En resumen en el *cuadrilátero* la suma de los 4 ángulos vale 4 rectos, sus lados, sus ángulos y sus diagonales son desiguales, así como las partes en que se cortan estas últimas.

En el *paralelógramo* los lados opuestos son paralelos, los ángulos y los lados opuestos son iguales; las diagonales son desiguales pero las partes en que se cortan son mutuamente iguales.

El *rombo,* además de las propiedades del paralelógramo, tiene la de que todos sus lados son iguales, y la de que las diagonales se cortan en ángulo recto.

El *rectángulo* tiene las propiedades del paralelógramo, y además, son iguales sus diagonales y sus ángulos.

El *cuadrado* tiene iguales los lados, los ángulos, las diagonales, las partes de éstas y los ángulos que forman.

Las recíprocas de todas las proposiciones establecidas desde el número 453, son ciertas y pueden demostrarse siguiendo el mismo método que para las directas, ó por absurdo.

458.—Hemos dicho que *trapecio es un cuadrilátero, en el que solo dos de sus lados son paralelos.* Generalmente se llaman bases los lados paralelos.

Teorema.—*La recta E F* [fig. 114] *que une los medios de los lados, no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases.*

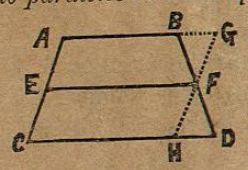


Figura 114.

Tenemos A B paralela á C D, A E=E C y B F=F D, y vamos á demostrar que E F es paralela á A B y á C D. Por el punto F tiremos H G paralela á A C, de lo que resultará que siendo A G H C paralelógramo G H=C A [449].

Los triángulos B G F y F D H son iguales [384] por tener B F=F D adyacente á los ángulos B F G=D F H por opuestos al vértice y F B G =F D H por alternos internos. De la igualdad de los triángulos, resulta F G=F H, ó $FG=\frac{GH}{2}=\frac{CA}{2}$; luego F G=E A, y como además de ser iguales estas rectas son paralelas, conforme á lo demostrado en el número 450, la figura A E F G será paralelógramo, por lo que E F será paralela á A B y [411] á C D.

459.—*La recta E F* [fig. 114] *tirada á distancias iguales de las bases es igual á su semisuma.*

Tenemos

$$AB=AG-BG=EF-BG$$
$$CD=CH+HD=EF+BG$$

sumando estas ecuaciones

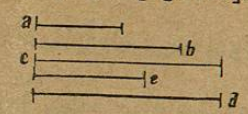
$$AB+CD=2\,EF$$

Despejando á

$$EF=\frac{AB+CD}{2}$$

que es lo que se debía demostrar.

460.—Problemas de cuadriláteros.—I.—*Construir un cuadrilátero, dada una diagonal* d *y la magnitud y orden de los cuatro lados* a, b, c *y* e [fig. 115].



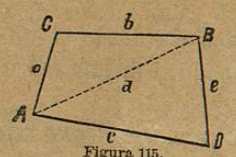


Figura 115.

Tómese A B=d, y haciendo centro en sus extremos y con los rádios a y b, c y e, trácense los arcos de círculo que se cortarán en C y en D. Reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el cuadrilátero pedido. Debemos hacer notar que es preciso conocer el orden en que han de quedar colocados los lados del cuadrilátero respecto á la diagonal, para que el problema quede bien determinado.

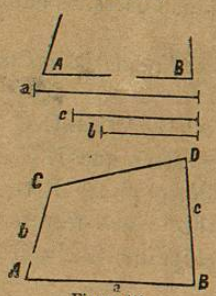


Figura 116.

II.—*Construir un cuadrilátero en el que se conoce un lado* a, *los dos ángulos y los lados adyacentes: A y B,* b *y* c (fig. 116).

Sobre A B=a constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados. Tómese A C= b y B D=c, y reuniendo los extremos C y D se tendrá el cuadrilátero pedido.

III.—*Construir un paralelógramo, dados dos lados* a, b *y el ángulo C que forman* (fig. 117).

Tómese C D=a, constrúyase en el extremo C un ángulo igual al dado; tómese B C=b, y tirando por los puntos B y D paralelas á los lados D C y B C, se tendrá el paralelógramo pedido.

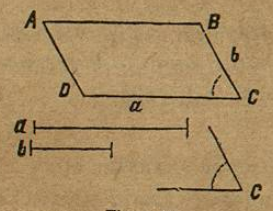


Figura 117.

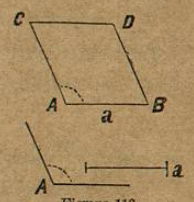


Figura 118.

IV.—*Construir un rombo, dados un lado* a *y un ángulo A* (fig. 118).

Sobre A B=a, constrúyase el ángulo A: tómese A C=A B y por los puntos B C tírense las rectas B D y C D paralelas á los lados opuestos. A B D C será el rombo pedido.

V.—*Construir un rombo, conocidas sus diagonales* a *y* b (fig. 119).

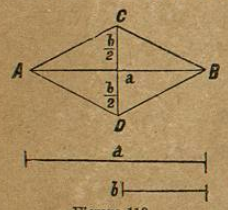


Figura 119.

Tómese A B=a; levántese por su medio una perpendicular llevando la mitad de b hacia arriba hasta C, y la otra mitad hacia abajo hasta D, y reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el rombo pedido.

VI.—*Construir un rectángulo dados dos lados* a *y* b (fig. 120).

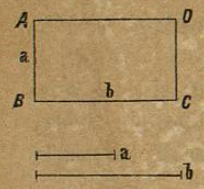


Figura 120.

Tómese A B=a, prolónguese esta línea y levántese por B la perpendicular B C=b, y tirando por C y por A las paralelas C O y A O á los lados opuestos, se tendrá el rectángulo pedido.

VII.—*Construir un rectángulo, dado un lado y una diagonal.*

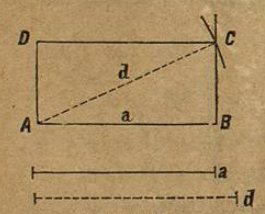


Figura 121.

Sean *a* el lado conocido y *d* la diagonal (fig. 121). Tómese A B=a, en el punto B constrúyase un ángulo recto, y haciendo centro en A y con un radio igual á *d*, trácese un arco de círculo, y por el punto C, donde corta á la perpendicular tírese una recta paralela á A B, y por A otra paralela á B C, con lo que quedará formado el rectángulo A B C D.

VIII.—*Construir un cuadrado conociendo uno de sus lados* a (fig. 122).

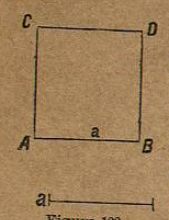


Figura 122.

Tómese A B=a, levántense las perpendiculares A C y B D también iguales á a, y reuniendo C y D se tendrá el cuadrado pedido.

IX.—*Construir un trapecio, conocidas las dos bases* b *y* b' *uno de los lados* a *y el ángulo A que este lado forma con una de las bases* b (fig. 123).

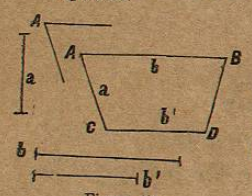


Figura 123.

Tómese A B=b; constrúyase en A un ángulo igual al lado; tómese A C=a: tírese C D=b' paralela á A B, y reuniendo B y D se tendrá el trapecio pedido.

POLIGONOS.

461.—Definiciones.—Se llama *polígono toda figura plana cerrada por más de cuatro líneas rectas.*

Si el polígono tiene *cinco* lados, se le llama *pentágono;* si tiene *seis, exágono;* si tiene *siete, heptágono;* si es de *ocho, octágono;* de *nueve, eneágono;* de *diez, decágono;* de *doce, dodecágono,* y de *quince pentedecágono.*

Los polígonos pueden ser *convexos* ó *cóncavos.* Son *convexos* aquellos que tienen todos sus ángulos *salientes* (fig. 124), y *cóncavos* los que tienen uno ó varios ángulos *entrantes* (fig. 125.)

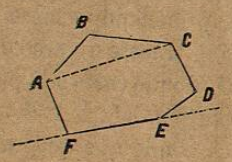


Figura 124.

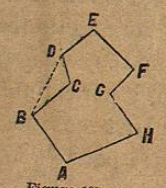


Figura 125.

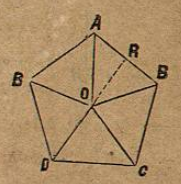


Figura 126.

Polígonos *regulares son los que tienen iguales sus lados y sus ángulos, é irregulares los que los tienen desiguales.*

Se llama *diagonal* la recta como A C (fig. 124) que une dos vértices que no están sobre el mismo lado; *perímetro es la línea quebrada formada por la reunión de todos los lados que cierran la figura.*

En los polígonos regulares (fig. 126) se llama *radio oblícuo la recta O A, que va del punto O llamado centro, á uno de los vértices.* El punto O se denomina centro por estar á igual distancia de todos los ángulos. Se llama *apotema ó radio recto la línea O R que va del centro á la mitad de un lado.*

En lo que sigue, solo considerarémos los polígonos *convexos;* éstos se distinguen de los *cóncavos* en que no tienen ángulos entrantes; en que los vértices de los ángulos están colocados en distintas regiones respecto á cualquiera de las diagonales que se tire, esto es, unos como B (fig. 124), estarán arriba, y otros abajo de la diagonal A C como F, E, etc.; en que si se prolonga cualquiera de los lados, F E por ejemplo, todos los vértices quedan en la misma región, la superior en el caso que tratamos, y que una recta distinta á uno de sus lados lo corta en dos puntos. En los polígonos cóncavos (fig. 125) hay siempre alguna diagonal, como B D, respecto de la que todos los ángulos quedan en la misma región; y hay también algún lado, como C D, respecto del que prolongándolo vienen á quedar unos vértices de un lado y otros del contrario.

462.—En los polígonos regulares se llama ángulo del centro (fig. 126) el formado por dos radios oblícuos O A y O B que son contiguos.

La suma de todos los ángulos del centro vale cuatro rectos (391) y como más adelante verémos que todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., en los polígonos regulares, son iguales, resulta que cada uno de los ángulos del centro vale cuatro rectos divididos por el número de lados.

463.—*La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, vale tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene menos dos.*

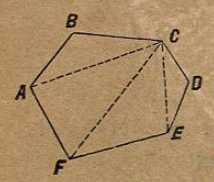


Figura 127.

(Fig. 127). Si desde uno cualquiera de sus vértices, C por ejemplo, se tiran diagonales, como no pueden tirarse á los dos vértices B y D contiguos, pues se confundirían con los lados C B y C D, resulta que el *polígono quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene menos dos;* que los ángulos de los triángulos todos son parte de los del polígono; que la suma de los ángulos interiores del polígono, es igual á la de los ángulos de los triángulos en que se ha dividido el polígono; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, y hay tantos triángulos como lados tiene el

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

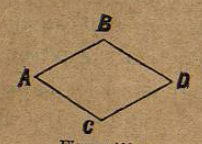


Figura 106.

Figura 107.

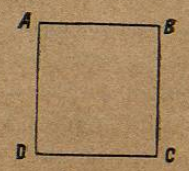


Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirían todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos; tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Se llama *diagonal* la recta A C (fig. 103) que reune los vértices de dos ángulos que no son adyacentes al mismo lado.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 703] es menor que la suma de los lados A D+D C ó que A B+B C con los que forman un triángulo, y mayor que su diferencia (426).

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C (fig. 103) el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y como la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos (433), resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Los paralelógramos además de las propiedades de los cuadriláteros tienen otras especiales, de las cuales vamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B tomaría la dirección A' B': por ser A C=A' C', el extremo C coincidiría con C': por ser A B=A' B', el punto B coincidiría con B'. Ahora bien: como por un punto no puede tirarse más de una paralela á otra recta, resulta que debiendo ser C D paralela á A B, cuya recta ha coincidido con A' B', tendrá que coincidir con C' D'; y por igual razón habiendo coincidido B con B', la paralela B D tendrá que coincidir con B' D', y en consecuencia, el punto de intersección D coincidirá con D'; luego basta que dos paralelógramos tengan un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, para que sobreponiéndolos coincidan sus cuatro vértices.

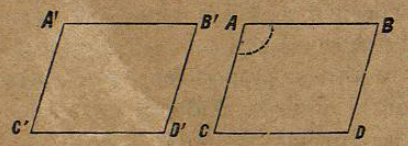


Figura 109.

447.—*En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales.*

El ángulo C (fig. 109) y el ángulo B, que son opuestos, serán iguales por estar formados por lados paralelos y tener sus vértices vueltos en sentido contrario [420], y por la misma razón A será igual á D.

448.—Para facilitar á los alumnos las demostraciones de los siguientes teoremas, anticiparémos la marcha que en ellas vamos á seguir: 1° buscarémos los triángulos formados por las líneas que son objeto del teorema: 2° demostrarémos que estos triángulos son iguales por estar comprendidos en uno de los cuatro casos de igualdad [440], y 3° fundándonos en que en triángulos iguales á ángulos iguales, están opuestos lados iguales y recíprocamente [387] deducirémos la conclusión del teorema.

449.—*En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.*

Tirando la diagonal A C (fig. 110) resultarán los triángulos A C B y A C D, que son iguales (384) por tener el lado A C común, A C B= D A C y B A C=A C D, por ser la figura paralelógramo y tener la posición de alternos internos. Siendo los triángulos iguales, los lados opuestos á ángulos iguales serán iguales, luego A B=D C y B C=D A, que es lo que se debía demostrar.

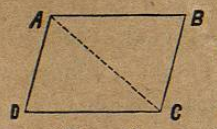


Figura 110.

450.—*Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura será paralelógramo.*

Sean (fig. 110) A D y B C iguales y paralelos y, vamos á demostrar que los otros dos lados A B y D C serán también paralelos.

Tirando la diagonal A C, el triángulo A C B será igual á A C D (385), por tener el ángulo A C B=C A D, por alternos internos, for-