VIII.—*Construir un cuadrado conociendo uno de sus lados* a (fig. 122).

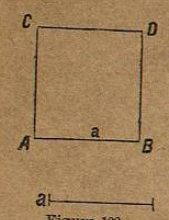

Figura 122.

Tómese A B=a, levántense las perpendiculares A C y B D también iguales á a, y reuniendo C y D se tendrá el cuadrado pedido.

IX.—*Construir un trapecio, conocidas las dos bases* b *y* b' *uno de los lados* a *y el ángulo A que este lado forma con una de las bases* b (fig. 123).

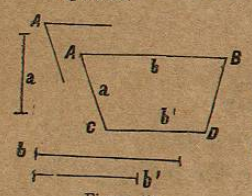

Figura 123.

Tómese A B=b; constrúyase en A un ángulo igual al lado; tómese A C=a: tírese C D=b' paralela á A B, y reuniendo B y D se tendrá el trapecio pedido.

POLIGONOS.

461.—Definiciones.—Se llama *polígono toda figura plana cerrada por más de cuatro líneas rectas.*

Si el polígono tiene *cinco* lados, se le llama *pentágono;* si tiene *seis, exágono;* si tiene *siete, heptágono;* si es de *ocho, octágono;* de *nueve, eneágono;* de *diez, decágono;* de *doce, dodecágono,* y de *quince pentedecágono.*

Los polígonos pueden ser *convexos* ó *cóncavos.* Son *convexos* aquellos que tienen todos sus ángulos *salientes* (fig. 124), y *cóncavos* los que tienen uno ó varios ángulos *entrantes* (fig. 125.)

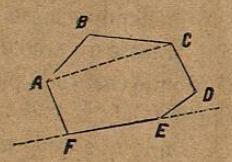

Figura 124.

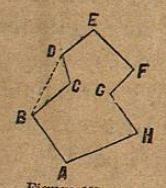

Figura 125.

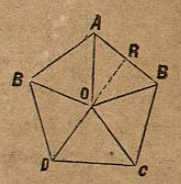

Figura 126.

Polígonos *regulares son los que tienen iguales sus lados y sus ángulos, é irregulares los que los tienen desiguales.*

Se llama *diagonal* la recta como A C (fig. 124) que une dos vértices que no están sobre el mismo lado; *perímetro es la línea quebrada formada por la reunión de todos los lados que cierran la figura.*

En los polígonos regulares (fig. 126) se llama *radio oblícuo la recta O A, que va del punto O llamado centro, á uno de los vértices.* El punto O se denomina centro por estar á igual distancia de todos los ángulos. Se llama *apotema ó radio recto la línea O R que va del centro á la mitad de un lado.*

En lo que sigue, solo considerarémos los polígonos *convexos;* éstos se distinguen de los *cóncavos* en que no tienen ángulos entrantes; en que los vértices de los ángulos están colocados en distintas regiones respecto á cualquiera de las diagonales que se tire, esto es, unos como B (fig. 124), estarán arriba, y otros abajo de la diagonal A C como F, E, etc.; en que si se prolonga cualquiera de los lados, F E por ejemplo, todos los vértices quedan en la misma región, la superior en el caso que tratamos, y que una recta distinta á uno de sus lados lo corta en dos puntos. En los polígonos cóncavos (fig. 125) hay siempre alguna diagonal, como B D, respecto de la que todos los ángulos quedan en la misma región; y hay también algún lado, como C D, respecto del que prolongándolo vienen á quedar unos vértices de un lado y otros del contrario.

462.—En los polígonos regulares se llama ángulo del centro (fig. 126) el formado por dos radios oblícuos O A y O B que son contiguos.

La suma de todos los ángulos del centro vale cuatro rectos (391) y como más adelante verémos que todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., en los polígonos regulares, son iguales, resulta que cada uno de los ángulos del centro vale cuatro rectos divididos por el número de lados.

463.—*La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, vale tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene menos dos.*

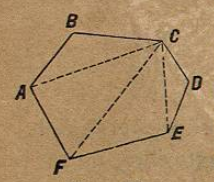

Figura 127.

(Fig. 127). Si desde uno cualquiera de sus vértices, C por ejemplo, se tiran diagonales, como no pueden tirarse á los dos vértices B y D contiguos, pues se confundirían con los lados C B y C D, resulta que el *polígono quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene menos dos;* que los ángulos de los triángulos todos son parte de los del polígono; que la suma de los ángulos interiores del polígono, es igual á la de los ángulos de los triángulos en que se ha dividido el polígono; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, y hay tantos triángulos como lados tiene el

Para el exágono sustituyendo $A=\frac{180^\circ \times 4}{6}=120^\circ$

Para el octágono sustituyendo $A=\frac{180^\circ \times 6}{8}=135^\circ$

III.—*Determinar el valor de un ángulo externo de un polígono regular de 5 lados.*

La suma de todos los ángulos externos vale 4 rectos (464), ó 360°, y como estos ángulos son iguales, uno valdrá $\frac{360}{5}=72^\circ$

IV.—*Construir un polígono igual á otro dado,* A B C D E F (figura 129).

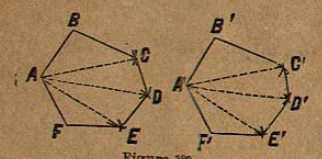

Figura 129.

A este fin, desde uno cualquiera de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales á todos los demás, con lo que quedará dividido en triángulos. Tómese A' B'= A B, y como se conocen los tres lados del triángulo A B C, se construirá el triángulo igual A' B' C'. Sobre A' C' se construirá un triángulo A' C' D' igual á A C D, cuyos tres lados se conocen, y así sucesivamente se construirán los demás triángulos hasta completar el polígono A' B' C' D' E' F', que será igual al dado por estar formado de triángulos iguales dispuestos en el mismo orden.

V.—*Construir un polígono regular de seis lados, conocida la longitud de uno de los lados:* a (fig. 130).

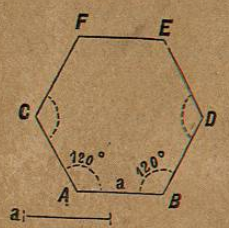

Figura 130

Comenzarémos por determinar el valor de uno de los ángulos por la fórmula

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}=\frac{180^\circ\times 4}{6}=120^\circ$$

En seguida tomarémos A B=a; en sus dos extremos construirémos ángulos de 120° por medio del transportador; tomarémos A C y B D iguales á a; en C y D construirémos ángulos de 120°; tomarémos C F y D E iguales á a; y tirando F E tendrémos el exágono regular pedido. E F debe, como comprobación, resultar igual á a.

CIRCUNFERENCIA DEL CIRCULO.

Líneas rectas consideradas en el círculo.

468.—Hemos dicho que *se llama circunferencia de círculo una curva plana cerrada cuyos puntos todos están á igual distancia del centro;* y que *círculo es la porción de superficie comprendida dentro de la circunferencia.*

En el número 369 igualmente hemos dado las definiciones de *radio, diámetro, arco, cuerda, sector, segmento, sagita y cuadrante;* por lo que ahora solo repetirémos que *se llama secante una recta* A B, *que cortando la circunferencia en dos puntos* (fig. 131), *tiene parte dentro y parte fuera del círculo;* y que se *entiende por tangente una recta que solo toca á la circunferencia, en un punto* M *como* D H.

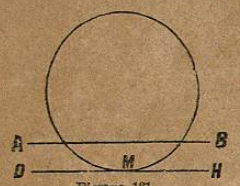

Figura 131.

469.—*Dos círculos descritos con el mismo radio son iguales;* porque si se sobrepusieran haciendo coincidir los centros, por ser iguales los radios, todos los puntos de una de las circunferencias coincidirían con los de la otra.

Así, pues, para probar que dos círculos coinciden al sobreponerlos, bastará demostrar que coinciden los centros y un punto de cada una de las circunferencias.

Para que dos arcos coincidan en todos sus puntos, bastará que puedan coincidir los centros de los círculos á que pertenecen, y sus puntos extremos.

De la definición de circunferencia resulta que *todos los radios de un mismo círculo son iguales,* y como todo diámetro es igual á dos radios, es claro que *todos los diámetros de un mismo círculo ó de círculos iguales, son iguales.*

Ya demostramos en el número 373, que *el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y que divide la circunferencia en dos partes iguales.*

De esto resulta que *toda cuerda que no es diámetro subtende dos arcos desiguales;* pero cuando no se expresa lo contrario, se entiende que se trata del arco menor de los dos que subtende la cuerda.

470.—*Una recta* A B (fig. 132) *no puede cortar la circunferencia del círculo en más de dos puntos.*

polígono menos dos; se infiere que los ángulos interiores del polígono valen tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.

Si se designa por S la suma de los ángulos interiores de un polígono y por n el número de sus lados, conforme al teorema que acabamos de demostrar, se tiene:

$$S=2\,r\,(n-2)$$

ó

$$S=2\,r\,n-4\,r;$$

r representa un ángulo recto ó 90° en estas fórmulas.

464.—*Si se prolongan en la misma dirección todos los lados de un polígono convexo A, B, C, D....* (fig. 128) *la suma de los ángulos exteriores, cualquiera que sea el número de lados, es igual á cuatro rectos.*

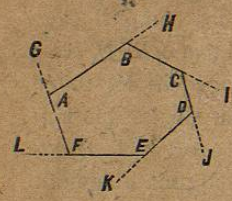

Figura 128.

La suma de los dos ángulos formados en el vértice A, de los que uno es exterior y otro interior del polígono, valen juntos dos rectos (389); esto es, B A G+B A F=2 rectos; igualmente los ángulos exterior é interior del vértice B, esto es, C B H+C B A=2 rectos; otro tanto sucede con los ángulos formados en C, en D, en E y en F.

Así, pues, la suma total de los ángulos exteriores é interiores de un polígono, vale tantas veces dos rectos como vértices ó lados tiene. Si representamos por e la suma de los ángulos exteriores, y por i la de los interiores, tendrémos:

$$e+i=n.\ 2 \text{ rectos}$$

despejando á $$e=n.\ 2 \text{ rectos}-i$$

pero la suma de los ángulos interiores i=2 rectos (n—2); (463) luego

sustituyendo $e=n.$ 2 rectos—2 rectos (n—2)

$$e=n.\ 2 \text{ rectos}-n.\ 2 \text{ rectos}+4 \text{ rectos.}$$

de donde e=4 rectos,

que es lo que se debía demostrar.

Supuesto que cada ángulo interior de un polígono es suplemento del exterior adyacente, y que la suma de todos los ángulos exteriores de un polígono convexo es precisamente igual á cuatro rectos, se infiere que *un polígono convexo no puede tener más de tres ángulos agudos.* En efecto, si tuviera cuatro ángulos interiores agudos, los adyacentes exteriores serían obtusos y valdrían más de cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible.

465.—Por medio de la fórmula del número 463, se puede calcular lo que vale el ángulo de un polígono regular; pues bastará reemplazar por n el número de lados del polígono, y por r, 90°. La fórmula es:

$$S=2\,r\,(n-2)$$

Para el triángulo, siendo n=3 S=180°

de donde un ángulo$=\frac{180°}{3}=60°$

Para el cuadrado S=180°×2=360°

un ángulo$=\frac{360°}{4}=90°$

Para el pentágono S=180°×3=540°

un ángulo$=\frac{540°}{5}=108°$

y como en general $A=\frac{2\,r\,[n-2]}{n}=2 \text{ rectos}-\frac{4 \text{ rectos}}{n}$, desde que $n>4$, el término $\frac{4 \text{ rectos}}{n}$ es menor que un recto, resulta que los ángulos de un polígono regular de más de cuatro lados, forzosamente son obtusos.

466.—Para que dos polígonos sean iguales, es preciso que tengan iguales sus lados y los ángulos adyacentes á cada lado dispuestos en el mismo orden. Cuando se descomponen en triángulos, bien sea por medio de diagonales ó por rectas tiradas desde un punto interior, dos polígonos serán iguales cuando estén compuestos del mismo número de triángulos iguales, y dispuestos de un modo semejante; pues entonces podrá probarse que si se sobrepusieran los dos polígonos, coincidirían en todos sus puntos, por ser iguales los triángulos de que están formados.

467.—Problemas de polígonos.—I.—*Determinar la suma de todos los ángulos de un polígono de 7 lados, y de otro de* 11.

La fórmula correspondiente es S=2 r (n—2)

Sustituyendo para el heptágono S=2.90°×5=900°

Id. para el polígono de 11 lados S=2.90°×9=1620°

II.—*Determinar lo que vale un ángulo del polígono regular de* 6 *y del de* 8 *lados.*

Determinarémos primero lo que vale la suma de todos los ángulos, y dividiéndola por el número de lados obtendrémos el valor de un solo ángulo.

Llamándolo A, tendrémos:

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}$$