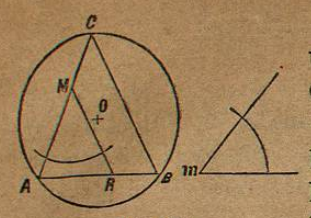

Figura 175.

Tírese la recta A C que forme con A B un ángulo cualquiera: en un punto M de esta recta constrúyase un ángulo A M R $=m$, y por el punto B tírese una recta B C paralela á M R. Haciendo pasar un círculo por los tres puntos A, B y C, se tendrá el arco de círculo capaz del ángulo dado m.

En efecto, el ángulo A C B, cuyo vértice está sobre la circunferencia, es igual á A M R por correspondientes; pero A M R$=m$ por construcción, luego cualquier ángulo inscrito, cuyos lados pasen por los extremos de A B, será igual á m.

INTERSECCION Y CONTACTO DE LOS CIRCULOS.

502.—Hemos visto (492) que por tres puntos que no están en línea recta siempre puede hacerse pasar un círculo, y como una vez fijado el centro y el radio queda determinada la posición del círculo, resulta: 1° que por tres puntos no puede hacerse pasar más de un solo círculo; 2° que dos circunferencias que tienen tres puntos comunes, se confunden en todas sus partes; y 3° que dos circunferencias distintas pueden cortarse en dos puntos, tener un punto común, ó no tocarse en ninguno.

Se llaman secantes dos circunferencias que se cortan en dos puntos, [fig. 176] *y tangentes las que solo tienen un punto común* (fig. 177).

503.—*La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan, es perpendicular á la cuerda común y la divide en dos partes iguales.*

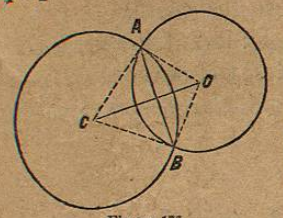

Figura 176.

Sean los dos círculos [fig. 176] cuyos centros son O y C, y que se cortan en A y B. Tirando la cuerda común A B y los radios O A, O B, C A y C B, se tiene que la línea de los centros O C tiene el punto O equidistante de los extremos A y B de la cuerda y el punto C, centro del círculo mayor, también está equidistante de A y de B; luego conforme á lo demostrado en el

número 404, la línea de los centros será perpendicular á la cuerda común y la dividirá en dos partes iguales.

504.—*Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto común, este pertenece á la línea de los centros.*

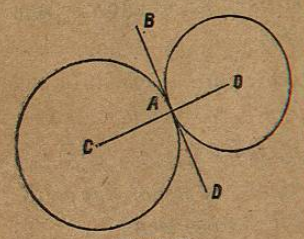

Figura 177.

Teniendo las dos circunferencias un solo punto común A [fig. 177] si se tira una tangente B D á uno de los círculos por el punto de contacto, también lo será al otro, y tirando los radios O A y C A tendrémos [478] que el ángulo B A O será recto lo mismo que B A C; pero teniendo estos ángulos la posición de adyacentes y valiendo juntos dos rectos, las líneas A O y A C formarán una sola recta [397], de lo que resulta que A estará en la línea C O.

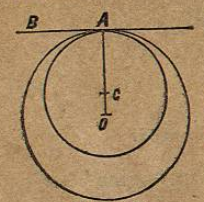

Figura 178.

Si los dos círculos se tocan interiormente (figura 178), como no puede levantarse desde un mismo punto A más que una sola perpendicular á la tangente común A B, los dos radios A O y A C tendrán que confundirse y el punto A quedará en la prolongación de O C que es la línea de los centros.

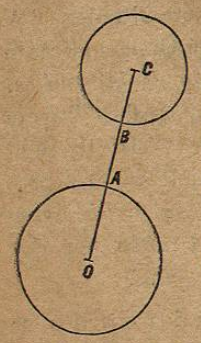

Figura 179.

505.—Dos círculos situados en un plano pueden tener cinco posiciones relativas diferentes: primero, estar uno fuera de otro, (fig. 179); segundo, ser tangentes exteriormente, (fig. 177); tercero, ser secantes (fig. 176); cuarto, ser tangentes interiormente, (fig. 178), y quinto, estar uno dentro del otro, (fig. 180).

En estos casos la línea de los centros goza de las siguientes propiedades.

(Fig. 179). 1° *Cuando los dos círculos son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de los radios,* supuesto que O C se compone de los dos radios, más la parte A B.

(Fig. 177). 2° *Cuando los dos círculos se tocan exteriormente, la línea de los centros es igual á la suma de los radios,* pues pasando por el punto A de contacto se tiene O C=O A+A C.

(Fig. 176). 3° *Cuando los círculos se cortan, la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.* En efecto, considerando el triángulo C A O se tiene:

$$O\,C < C\,A + O\,A \quad (425)$$

y

$$O\,C > C\,A - O\,A \quad (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$

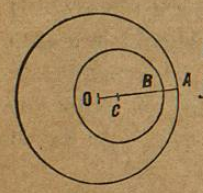

Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$

de donde $O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$

luego $O\,C < O\,A - C\,B$

Las recíprocas de estas proposiciones también son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior común á dos círculos dados* (fig. 181).

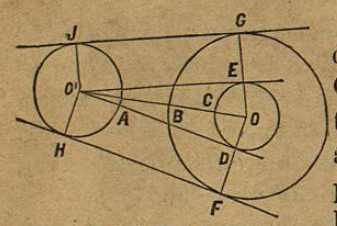

Figura 181.

Construcción.— Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con el radio O C *igual á la diferencia de los radios,* trácese el círculo E C D; desde O' tírese á este círculo la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente común á los dos círculos.

Demostración.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógramo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construcción idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior común á dos círculos dados* (figura 182).

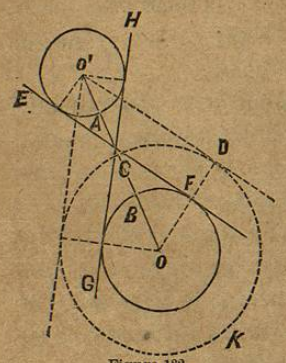

Figura 182.

Construcción.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios,* trácese el círculo C D K: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostración.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construcción idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Unas veces las letras A, B, C y D representan las magnitudes mismas, sean líneas, ángulos, arcos, superficies, etc., pero otras, y es lo más general, expresan el número que indica, la relación que existe en