$$O\,C < C\,A + O\,A \quad (425)$$

y

$$O\,C > C\,A - O\,A \quad (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$

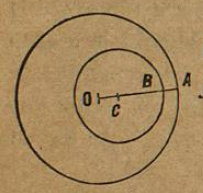


Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$

de donde $O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$

luego $O\,C < O\,A - C\,B$

Las recíprocas de estas proposiciones también son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior común á dos círculos dados* (fig. 181).

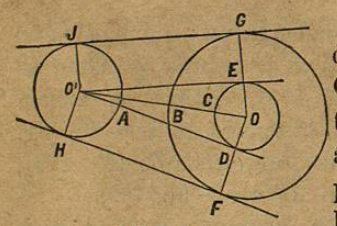


Figura 181.

Construcción.— Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con el radio O C *igual á la diferencia de los radios,* trácese el círculo E C D; desde O' tírese á este círculo la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente común á los dos círculos.

Demostración.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógramo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construcción idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior común á dos círculos dados* (figura 182).

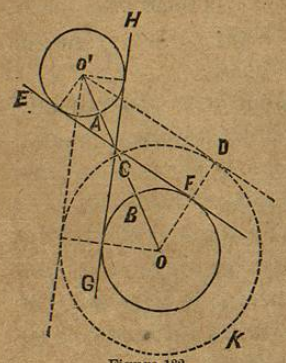


Figura 182.

Construcción.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios,* trácese el círculo C D K: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostración.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construcción idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Unas veces las letras A, B, C y D representan las magnitudes mismas, sean líneas, ángulos, arcos, superficies, etc., pero otras, y es lo más general, expresan el número que indica, la relación que existe en

$$AB \times EF - AB \times Fn = BC \times ED - ED \times iC$$

trasladando á un miembro los términos formados de factores constantes y al otro los términos en que entran las restas F n é i C, se tiene

$$AB \times EF - BC \times ED = AB \times Fn - ED \times iC$$

Establecida esta ecuación, vamos á demostrar que el producto A B $\times$ E F no puede ser desigual á B C$\times$E D. Si lo fuera, habría entre estos productos, cuyos factores son todos constantes, una diferencia *d* fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se dividieran A C y F D. En el supuesto de que pudieran ser desiguales, se tendría

$$AB \times EF - BC \times ED = d$$

y por lo mismo $\quad AB \times Fn - ED \times iC = d$

en la que por construcción $Fn < \frac{1}{3} ED$ é $iC < \frac{1}{3} AB$

En esta ecuación hay que notar: 1° que la resta *d* es constante y 2° que el minuendo A B$\times$F n es variable.

La resta *d* es constante porque, conforme á la penúltima ecuación, indica la diferencia que hemos supuesto que puede existir entre los productos A B$\times$E F y B C$\times$E D, cuyos factores, como se ve en la figura son fijos.

El valor del minuendo A B$\times$F n es variable, porque aumentando el número de subdivisiones de A B el factor F n disminuirá. En efecto, dividiendo A B en 3 partes iguales, llevándolas sobre B C y tirando paralelas por los puntos de división, resulta $Fn < \frac{ED}{3}$. Si hubiéramos dividido A B en 30 partes, llevando la magnitud de estas divisiones sobre B C y tirando paralelas, resultaría $Fn < \frac{ED}{30}$, y si hubiéramos dividido A B en 3000 partes resultaría $Fn < \frac{ED}{3000}$. Ahora bien, pudiendo ser F n una fracción tan pequeña como se quiera, y disminuyendo el valor del producto A B$\times$F n en proporción del factor F n, se comprende que podría llegar á ser menor que la cantidad constante *d*; pero como es inadmisible que el minuendo pueda ser menor que la resta, no podemos aceptar que sean desiguales los productos A B$\times$E F y B C$\times$E D, y siendo iguales, se tendrá la proporción:

$$AB : BC :: ED : EF$$

que es lo que se debía demostrar.

510.—*Si desde un punto* D (fig. 186) *tomado sobre un lado de un triángulo, se tira una recta* D E *paralela á otro lado* A C, *se verificarán tres cosas:* 1ª *los lados* A B *y* B C *quedarán cortados en partes proporcionales:* 2ª *los lados serán proporcionales á sus partes: y* 3ª *el lado* A B, *del triángulo total es á su base* A C, *como el del parcial* B D *es á la suya* D E.

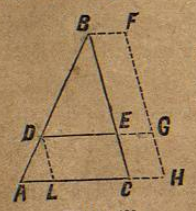


Figura 186.

Para demostrar la primera propiedad, tírese B F paralela A C, prolónguese este lado y la recta D E, y por el punto F tírese F H paralela al lado B C.

Las rectas A B y F H quedarán cortadas en partes proporcionales por las tres paralelas (509) y se tiene

$$BD : DA :: FG : GH$$

pero por lados opuestos de paralelógramos F G=B E, y G H=E C sustituyendo se tiene

$$BD : DA :: BE : EC \ldots (1)$$

que es la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda, componiendo en la última proporción, se tiene:

$$BD + DA : DA :: BE + EC : EC$$

Alternando medios y sustituyendo

$$BA : BC :: DA : EC$$

Alternando medios en la proporción (1) resulta que las partes son proporcionales entre sí, esto es,

$$BD : BE :: DA : EC$$

luego $\quad BA : BC :: BD : BE$

Para demostrar la tercera propiedad tirarémos por el punto D una paralela D L al lado B C, y considerando que los lados totales A B y A C son proporcionales á sus partes B D y L C, se tiene:

$$AB : AC :: BD : LC$$

pero como L C=D E por lados opuestos de paralelógramo, sustituyendo, resulta:

$$AB : AC :: BD : DE$$

511.—*Recíprocamente, siempre que una recta* D E (fig. 187) *corte los lados de un triángulo en partes proporcionales, será paralela á la base* A C.

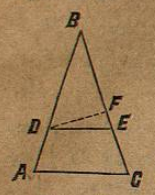


Figura 187

Porque la recta D E corta los lados del triángulo en partes proporcionales, tenemos:

B D : A D :: B E : E C

componiendo: A B : A D :: B C : E C

alternando: A B : B C :: A D : E C

Si la recta D E no fuera paralela á A C tendría que serlo otra que, como D F, partiendo de D pasara arriba ó abajo del punto E, y tendríamos: (510)—2ª).

A B : B C :: A D : C F.

pero siendo los tres primeros términos de las dos últimas proporciones los mismos, no es posible que los cuartos sean desiguales, y por tanto ninguna otra recta distinta de D E podrá ser paralela á la base A C.

512.—Problemas de líneas proporcionales.—I.—*Dividir una línea* A B (fig. 188) *en un número dado de partes iguales.*

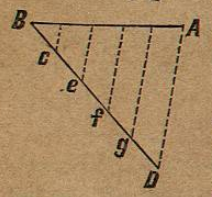


Figura 188.

Supongamos que se quiere dividir en cinco partes iguales.

1ª Construcción.—En uno de los extremos B de la recta se construye un ángulo; sobre la recta B D de longitud indefinida se llevan cinco partes iguales comenzando desde B, de B á c, de c á e, etc.: se une el punto D, donde llega la última división, con el extremo A de la recta, y tirando paralelas por los otros puntos de división g, f, e y c, estas paralelas dividirán la recta A B en cinco partes iguales.

El fundamento de esta construcción es el teorema del número 508.

2ª Construcción.—Con el fin de evitar la necesidad de tirar muchas paralelas, se emplea el siguiente procedimiento (fig. 189):

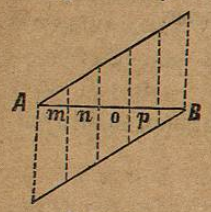


Figura 189.

En los dos extremos de la recta dada se tiran dos paralelas de longitud indefinida: sobre cada una de ellas y partiendo de los puntos A y B, se llevan cinco partes iguales, y uniendo respectivamente los puntos de división de ambas paralelas por rectas, éstas dividirán A B en los puntos m, n, o y p en 5 partes iguales. Como las rectas que determinan es-

tas divisiones son paralelas, por lados opuestos de paralelógramos, el fundamento de esta construcción es el mismo que el de la anterior.

II.—*Dividir una recta* A B (fig. 190) *en partes proporcionales á las de otra recta* C D.

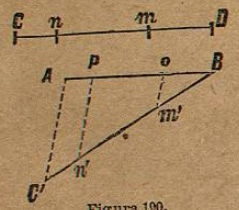


Figura 190.

En el extremo B se construye un ángulo cualquiera. Sobre la recta B C', se llevan las partes B m', m' n', y n' C' iguales respectivamente á las de la recta D C: se unen los puntos C' y A y se tiran paralelas á A C' por los puntos n' y m'. Estas paralelas dividirán á A B en p y en o en partes proporcionales á las de C D (509).

III.—*Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas,* m, n *y* p (fig. 191).

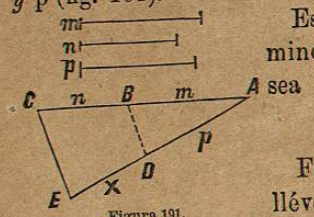


Figura 191.

Es indispensable conocer el orden de los términos de la proporción. Suponiendo que éste sea

m : n :: p : x

Fórmese el ángulo A y sobre uno de sus lados llévense las magnitudes que forman la primera razón, A B=m, y B C=n. Sobre el otro lado del ángulo llévese A D=p.

Tírese la recta B D y por C una paralela, la parte E D será la cuarta proporcional pedida.

En efecto (510) se tiene

A B : B C :: A D : D E

sustituyendo

m : n :: p : D E

luego D E es la cuarta proporcional buscada.

IV.—*Construir una tercera proporcional á dos líneas dadas* m y n (fig. 192.)

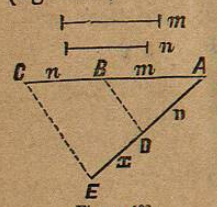


Figura 192.

Como se sabe, se llama tercera proporcional de dos cantidades, el cuarto término de una proporción continua. Si suponemos que el orden de los términos de la proporción ha de ser el siguiente:

m : n :: n : x

la construcción será idéntica á la del problema anterior. Formando un ángulo A se llevarán sobre uno de sus lados magnitudes iguales á los

términos de la primera razón: A B=m y B C=n. Sobre el otro lado se tomará A D=n. Se reunirá B con D, y tirando C E paralela á B D, la D E será la tercera proporcional pedida; pues (510) se tiene:

$$A B : B C :: A D : D E$$

y sustituyendo

$$m : n :: n : D E$$

luego

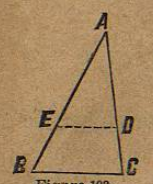
$$D E = x$$

SEMEJANZA DE FIGURAS.

513.—*Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

En general *se entiende por lados homólogos, los que están adyacentes á ángulos iguales.* En los triángulos, como la suma de los tres ángulos vale dos rectos, los lados de los triángulos que están adyacentes á ángulos iguales, forzosamente quedarán opuestos á ángulos iguales. Por esta causa, *en los triángulos los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales.*

514.—*Una recta* D E (fig. 193) *paralela á uno de los lados* B C *de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.*



Fignra 193.

Los dos triángulos A B C y A D E tienen común el ángulo A; B=A E D y C=A D E por correspondientes.

Además (510—2°)

$$A B : A E :: A C : A D$$

y (510—3°)

$$A B : A E :: B C : E D$$

luego

$$A B : A E :: A C : A D :: B C : E D$$

así es, que teniendo los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos serán semejantes.

515.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 194) que tienen los ángulos

$$A = A' \text{ y } B = B'$$

siendo estos dos ángulos iguales (434—4°) el tercero también lo será y se tendrá C=C'

Si sobre B A se lleva una parte B D=B' A' y sobre B C se toma B E=B' C' y se tira D E, el triángulo B D E será igual á B' A' C' (385) por tener el ángulo B=B' formado por lados respectivamente iguales. Por la igualdad de los triángulos, el ángulo B D E=A' y por hipótesis A=A', luego B D E=A; como estos ángulos son correspondientes, D E será paralela al lado A C (415.) Ahora bien: siendo D E paralela á A C (514) el triángulo B D E será semejante á A B C; pero como B D E es igual á A' B' C', se infiere que este triángulo será semejante á A B C.

516.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por lados porporcionales.*

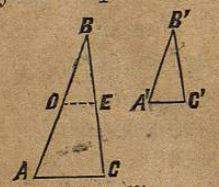


Figura 194.

Sea el ángulo B=B' (fig. 194) y

$$A B : A' B' :: B C : B' C'.$$

Si pusiéramos el triángulo A' B' C' sobre A B C, haciendo coincidir el ángulo B' con B, por ser iguales estos ángulos, el lado B' A', tomaría la dirección de B A, y B' C' tomaría la de B C; reuniendo los puntos D y E en que suponemos que caen A' y C' se tendrá el triángulo B D E igual á A' B' C' por tener un ángulo igual formado por lados iguales (385). Como por el supuesto se tiene

$$A B : A' B' :: B C : B' C'$$

sustituyendo sus iguales, resulta

$$A B : B D :: B C : B E$$

luego la recta D E que corta en partes proporcionales los lados del triángulo, será paralela al lado A C (511) y por tanto los triángulos A B C y B D E serán semejantes por ser equiángulos, pero como B D E es igual á A' B' C', este triángulo también será semejante á A B C.

517.—*Dos triángulos serán semejantes cuando tengan sus tres lados respectivamente proporcionales.*

tre cada una de ellas y la unidad de su especie, y bien sean cantidades ó números, sus *razones* y *proporciones* gozan de las propiedades que ya quedan demostradas en aritmética y en álgebra. Las voces *proporción, antecedente, término medio proporcional, etc.*, significan en geometría lo mismo que en las otras partes de las matemáticas.

Cuando se indique el producto de una línea por otra, generalmente deberá entenderse que se trata del producto de los números, que expresan las relaciones entre estas líneas y otra tomada por unidad. Así si a y b representan dos rectas, $a + b$ podrá indicar el resultado de la operación mecánica de poner una á continuación de la otra estas dos líneas, ó el valor numérico que resulta de sumar los números que representan las magnitudes de las rectas a y b; pero si se tiene $a\,b$ ó a^2 etc., estos productos, por regla general, indicarán los productos de los números que representan las magnitudes de las líneas.

508.—*Si dos rectas A F y G M, situadas en un plano* (fig. 183) *están cortadas por un número cualquiera de paralelas A G, B H, C Y, etc., tiradas por puntos tomados á distancias iguales sobre la primera, las partes G H, H Y, Y K, etc., determinadas sobre la segunda recta, serán iguales entre sí.*

Fundándonos en que son paralelas las rectas, é iguales las partes A B, B C, C D, etc., demostrarémos que también serán iguales las partes G H, H Y, Y K, etc.

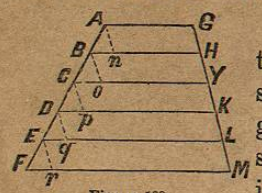


Figura 183.

Por los puntos A, B, C, etc., tiremos las rectas An, Bo, Cp, etc., paralelas á G M, por lo que serán paralelas entre sí, y resultarán los triángulos A B n, B C o, C D p, etc., iguales entre sí por tener un lado igual adyacente á ángulos iguales (384). Los lados iguales son A B = B C = C D, etc., por construcción. Los ángulos adyacentes respectivamente iguales, son: B A n=C B o=D C p, etc., y A B n=B C o=C D p, etc., por correspondientes. Por la igualdad de los triángulos se tiene:

$$A\,n = B\,o = C\,p = D\,q, \text{ etc.}$$

pero como las figuras A n H G, B o Y H, C p K Y, etc., son paralelógramos, los lados opuestos serán iguales, esto es,

$$A\,n = G\,H,\ B\,o = H\,Y,\ C\,p = K\,Y \text{ etc.}$$

pero como los primeros miembros de estas ecuaciones son iguales entre sí, se infiere que lo serán los segundos, esto es,

$$G\,H = H\,Y = K\,Y \text{ etc.}$$

que es lo que se tenía que demostrar.

509.—*Dos rectas cualesquiera* A B *y* C D (fig. 184) *colocadas en un plano, son cortadas en partes proporcionales por tres paralelas* A C, E F *y* B D.

Las magnitudes E A y E B podrán ser conmensurables ó inconmensurables.

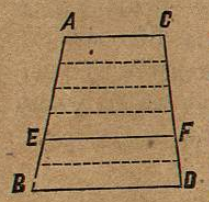


Figura 184.

1° Si las distancias E A y E B son *conmensurables*, y suponemos por ejemplo, que dividiendo E B en dos partes, una de éstas puede llevarse cuatro veces de E á A, y nos imaginamos que por los puntos de división se tiran rectas paralelas entre sí, conforme al teorema del párrafo que antecede, el lado C D quedará dividido en partes iguales de las que dos corresponderán á la parte F D y cuatro á la C F. Por tanto, si representamos por m la magnitud de una de las partes del lado A B y por m' las del lado C D, tendrémos:

$$E\,B : E\,A :: 2m : 4m$$

y

$$F\,D : F\,C :: 2m' : 4m'$$

de donde $E\,B : E\,A :: F\,D : F\,C$ que es, lo que se debía demostrar.

2° En el caso de que A B y B C (fig. 185) sean *inconmensurables*, el teorema es igualmente cierto. Supongamos que dividiendo A B en tres partes iguales y llevando una de éstas cuatro veces sobre B C quede la resta i C, la que forzosamente será menor que una de las partes. Tirando paralelas por los puntos de división, resultará dividida E D en tres partes, y E F en cuatro, más una resta F n.

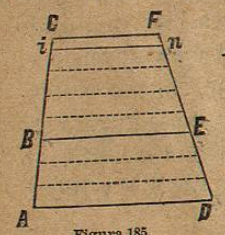


Figura 185.

Si consideramos las porciones conmensurables A B, B i, E D y E n

tendrémos A B : B i :: E D : E n

sustituyendo por B i su igual B C—i C,

y por E n su valor E F—F n, se tiene:

$$A\,B : B\,C - i\,C :: E\,D : E\,F - F\,n$$

multiplicando entre sí extremos y medios