términos de la primera razón: A B=m y B C=n. Sobre el otro lado se tomará A D=n. Se reunirá B con D, y tirando C E paralela á B D, la D E será la tercera proporcional pedida; pues (510) se tiene:

$$A B : B C :: A D : D E$$

y sustituyendo

$$m : n :: n : D E$$

luego

$$D E = x$$

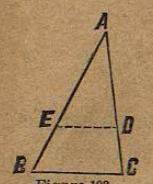
---

## SEMEJANZA DE FIGURAS.

513.—*Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

En general *se entiende por lados homólogos, los que están adyacentes á ángulos iguales.* En los triángulos, como la suma de los tres ángulos vale dos rectos, los lados de los triángulos que están adyacentes á ángulos iguales, forzosamente quedarán opuestos á ángulos iguales. Por esta causa, *en los triángulos los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales.*

514.—*Una recta* D E (fig. 193) *paralela á uno de los lados* B C *de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.*



Fignra 193.

Los dos triángulos A B C y A D E tienen común el ángulo A; B=A E D y C=A D E por correspondientes.

Además (510—2°)

$$A B : A E :: A C : A D$$

y (510—3°)

$$A B : A E :: B C : E D$$

luego

$$A B : A E :: A C : A D :: B C : E D$$

así es, que teniendo los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos serán semejantes.



515.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 194) que tienen los ángulos

$$A = A' \text{ y } B = B'$$

siendo estos dos ángulos iguales (434—4°) el tercero también lo será y se tendrá C=C'

Si sobre B A se lleva una parte B D=B' A' y sobre B C se toma B E=B' C' y se tira D E, el triángulo B D E será igual á B' A' C' (385) por tener el ángulo B=B' formado por lados respectivamente iguales. Por la igualdad de los triángulos, el ángulo B D E=A' y por hipótesis A=A', luego B D E=A; como estos ángulos son correspondientes, D E será paralela al lado A C (415.) Ahora bien: siendo D E paralela á A C (514) el triángulo B D E será semejante á A B C; pero como B D E es igual á A' B' C', se infiere que este triángulo será semejante á A B C.

516.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por lados porporcionales.*

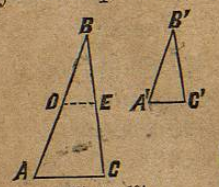


Figura 194.

Sea el ángulo B=B' (fig. 194) y

$$A B : A' B' :: B C : B' C'.$$

Si pusiéramos el triángulo A' B' C' sobre A B C, haciendo coincidir el ángulo B' con B, por ser iguales estos ángulos, el lado B' A', tomaría la dirección de B A, y B' C' tomaría la de B C; reuniendo los puntos D y E en que suponemos que caen A' y C' se tendrá el triángulo B D E igual á A' B' C' por tener un ángulo igual formado por lados iguales (385). Como por el supuesto se tiene

$$A B : A' B' :: B C : B' C'$$

sustituyendo sus iguales, resulta

$$A B : B D :: B C : B E$$

luego la recta D E que corta en partes proporcionales los lados del triángulo, será paralela al lado A C (511) y por tanto los triángulos A B C y B D E serán semejantes por ser equiángulos, pero como B D E es igual á A' B' C', este triángulo también será semejante á A B C.

517.—*Dos triángulos serán semejantes cuando tengan sus tres lados respectivamente proporcionales.*

sumando estas ecuaciones se tiene:

$$BCD = bcd.$$

Por la semejanza de los triángulos se tiene:

$$BC : bc :: AC : ac$$

y $$AC : ac :: CD : cd$$

luego $$BC : bc :: CD : cd$$

De una manera análoga se demostraría que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

$$CD : cd :: ED : ed :: EA : ea.$$

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono* A *se tiran diagonales y por un punto* b *de uno de los lados se tiran paralelas* b c, c d *y* d e *á los otros lados, el polígono* A b c d e *que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).

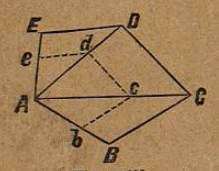


Figura 198.

La razón de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes á los del polígono grande y dispuestos de la misma manera que en él (521). Los triángulos son semejantes por ser equiángulos, y están dispuestos de igual manera por tener comunes parte de dos lados y de sus diagonales.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$$

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendrémos:

$$AB+BC+CD \text{ etc.} : ab+bc+cd \text{ etc.} :: AB : ab$$

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

$$P : p :: AB : ab.$$



En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

$$AB : ab :: AC : ac$$

luego $$P : p :: AC : ac$$

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podría demostrarse de cualesquiera otras líneas homólogas en ambos polígonos.

524.—Problemas de semejanzas de figuras.—I.—*Sobre la recta* d *construir un triángulo semejante á* A B C.

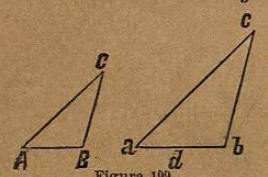


Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada* h *construir un polígono semejante á otro* A B C D E.

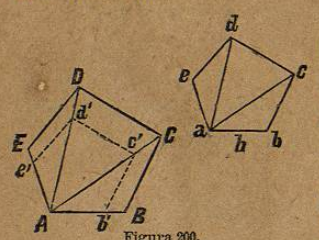


Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

También puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C, en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaría formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiría el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extensión se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

---

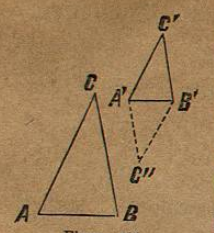


Figura 195.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 195) en los que se tiene A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C', y vamos á demostrar que son equiángulos. Para esto sobre el lado A' B' construyamos un ángulo B' A' C''=A y A' B' C''=B, con lo que resultará el triángulo A' B' C'' semejante á A B C (515) por lo que se tendrá:

A B : A' B' :: B C : B' C'' :: A C : A' C''

pero conforme al supuesto

A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C'

pero como en estas dos series de razones, los tres primeros términos son iguales, tendrá que serlo el cuarto, esto es, B' C''=B' C' y por igual razón A' C''=A' C'; y se tendrá en los triángulos A' B' C' y A' B' C''

A' B' común, B' C''=B' C' y A' C''=A' C'

por lo que el triángulo A' B' C'' será igual á A' B' C' (386); pero como el primero es semejante á A B C, también A' B' C' lo será.

518.—En resumen, *los triángulos son semejantes: 1° cuando tienen dos ángulos iguales: 2° cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales: 3° cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales: 4° cuando tienen sus lados paralelos,* pues entonces serán equiángulos: *y 5° cuando tienen sus tres lados respectivamente perpendiculares,* también porque serán equiángulos (422).

Repetirémos que *en los triángulos semejantes, los lados homólogos son los opuestos á ángulos iguales; y en el 5° caso los lados perpendiculares son los homólogos.*

519.—*Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.*

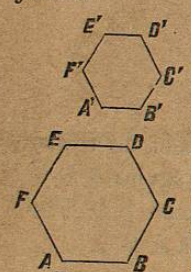


Figura 196.

Sean dos polígonos regulares de 6 lados (fig. 196). Por ser regular cada polígono, serán iguales entre sí los lados y los ángulos. La suma de los ángulos interiores del polígono A B C..... F vale 4 veces 2 rectos, y cada ángulo $\frac{8}{6}$ de ángulo recto. Otro tanto sucederá en el polígono A' B' C' D' E' F' en el que cada ángulo también valdrá $\frac{8}{6}$ de ángulo recto; luego los dos polígonos tendrán sus ángulos iguales. Para probar que los lados son proporcionales, basta observar que A B=B C=C D, etc., y que



A' B'=B' C'=C' D' etc.,

luego dividiendo ordenadamente estas ecuaciones:

A B : A' B' :: B C : B' C' :: C D : C' D'....

520.—*Dos polígonos semejantes* A B C D E, a b c d e, *pueden descomponerse en triángulos semejantes* (fig. 197).

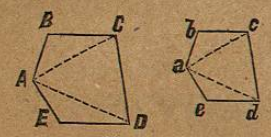


Figura 197.

Si desde uno de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales, los polígonos quedarán divididos en triángulos que, serán semejantes, según vamos á demostrarlo.

El triángulo A B C es semejante á a b c, porque por ser los polígonos semejantes, el ángulo B=b y los lados que lo forman serán proporcionales, esto es, A B : a b :: B C : b c (516).

Los triángulos A C D y a c d serán semejantes por tener el ángulo A C D=a c d formado por lados proporcionales.

En efecto, B C D=b c d por ángulos del polígono.
B C A=b c a por angulos de los triángulos semejantes á A B C y a b c.

Restando las ecuaciones A C D=a c d.

En razón de ser los polígonos semejantes

se tiene: B C : b c :: C D : c d
y por serlo los triángulos B C : b c :: A C : a c
luego C D : c d :: A C : a c

Del mismo modo se demostraría que son semejantes los triángulos A D E y a d e.

521.—*Recíprocamente dos polígonos compuestos de triángulos semejantes, dispuestos de la misma manera son semejantes.*

En efecto, (fig. 197), por ser semejantes los triángulos A B C y a b c, el ángulo B=b y A B : a b :: B C : b c.

Además el ángulo B C A=b c a.

Por ser semejantes los triángulos A C D y a c d serán iguales los ángulos A C D=a c d.